MAT

Serie B

Cursos y Seminarios para Educación Matemática

ISSN:1515-4904

2

Matemática: Operaciones Numéricas y Geometría del Plano

DOMINGO A. TARZIA

Departamento de Matemática,
Rosario,
Argentina
Julio 2003

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

MAT

Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACION MATEMATICA

ISSN: 1515-4912
Propiedad de ACES

MAT es una publicación del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral (FCE-UA) cuyo objetivo es contribuir a la difusión de conocimientos y resultados matemáticos. Se compone de dos series:

- Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA.
- Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACION MATEMATICA.

La Serie A contiene trabajos originales de investigación y/o recapitulación que presenten una exposición interesante y actualizada de algunos aspectos de la Matemática, además de cursos, conferencias, seminarios y congresos realizados en el Depto. de Matemática. El Director, los miembros del Comité Editorial y Científico y/o los árbitros que ellos designen serán los encargados de dictaminar sobre los merecimientos de los artículos que se publiquen.
La Serie B se compone de cursos especialmente diseñados para profesores de Matemática de cada uno de los niveles de educación: E.G.B., Polimodal, Terciaria y Universitaria.
Además, se publican bajo el título **MAT**- PREPUBLICACIONES DE MATEMATICA, versiones preliminares de trabajos inéditos de investigación de los integrantes del Departamento y colaboradores.
La serie A y las Prepublicaciones podrán ser consultadas en: www.austral.edu.ar/MAT

UNIVERSIDAD AUSTRAL
Facultad de Ciencias Empresariales

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE CAPACITACIÓN DOCENTE (*) †

Matemática: Operaciones Númericas y Geometría del Plano

Domingo Alberto Tarzia

(*) **Curso de Perfeccionamiento Docente correspondiente al 1° y 2° años del III Ciclo del área Matemática para la EGB - Educación General Básica** (Ley Federal de Educación), Subsecretaría de Educación, Ministerio de Educación y Cultura, Provincia de Córdoba. **Curso organizado por la Escuela Nacional de Comercio "Santa Juana de Arco", Cruz Alta** (Pcia. de Córdoba) en la localidad de **Camilo Aldao**. El curso se desarrolló durante el período abril-agosto de 1996 y se tuvo la colaboración de la profesora **Norma D. Gurruchaga**.

(†) **Curso de Perfeccionamiento Docente correspondiente al II y III Ciclos del área Matemática para la EGB** realizado en la **Escuela Nacional de Comercio "Santa Juana de Arco", Cruz Alta** (Pcia. de Córdoba). El curso se desarrolló durante el período mayo-octubre de 2001 y se tuvo la colaboración de los profesores **Graciela G. Garguichevich y Eduardo A. Santillan Marcus**.

ÍNDICE

En la parte I se detalla lo que se necesita, en general, para resolver un problema o para demostrar una proposición.

En II.1 se dan las propiedades de las operaciones de los números reales y en II.3 se dan las definiciones fundamentales relacionadas con el concepto de ecuación, que es primordial en el aprendizaje de la Matemática y en la resolución de los problemas de la vida real.

En III se utilizan los conceptos de perímetro y área de diversas figuras geométricas del plano, a saber: Triángulos, Cuadrados, Rectángulos, Círculos, etc. Por otra parte, el Teorema de Pitágoras, uno de los pilares del desarrollo de la Matemática, jugará un papel preponderante en los triángulos rectángulos.

El objetivo fundamental del curso es plantear y hallar soluciones de problemas por resolver y problemas por demostrar en los diferentes tópicos del mismo.

I. INTRODUCCIÓN
I.1. DIVERSOS CONCEPTOS DE INTERÉS EN LA MATEMÁTICA.

- Cifra : (Ár. sifr, nombre del cero aplicado luego a los demás números) Signo con que se representa a un dígito. Cada uno de los caracteres que sirven para representar los números.
- Creación : Acción y efecto de crear.
- Crear (lat. creare) : Componer artística o intelectualmente.
- Componer (lat. componere, arreglar) : Formar o constituir un todo juntando o disponiendo elementos diversos.
- Corolario (lat. corollarium) : Es la proposición que se deduce por sí sola de lo demostrado anteriormente.
- Deducción (lat. deductionem) : Acción y efecto de deducir. Razonamiento que, partiendo de hipótesis, conduce a la verdad de una proposición usando reglas de inferencia.
- Deducir (lat. deducere) : Sacar consecuencias de un principio, proposición o supuesto y, en general, llegar a un resultado por el razonamiento : de esto deduzco que...
- Demostración : Acción y efecto de demostrar. Razonamiento que deduce la verdad de una proposición partiendo de axiomas que se han enunciado.
- Demostrar : Probar de forma inequívoca.
- Dígito (lat. digitus) Número dígito. Número que en el sistema de numeración decimal se expresa con una sola cifra.
- Entender (lat. intendere) : Percibir por medio de la inteligencia el sentido o significado de algo : entender un problema. Percibir las causas o motivos de algo : entender el porque de un hecho.
- Entendimiento : Aptitud para comprender.
- Comprender (lat. comprehendere) : Entender, percibir : comprender un texto.
- Hipótesis (gr. hypothesis, suposición) : Conjunto de datos a partir del cual se intenta demostrar en forma lógica una nueva proposición.
- Lema (lat. lemma) : Proposición preliminar cuya demostración facilita la de un teorema subsiguiente.
- Número (lat. numerus) : Expresión de la cantidad computada con relación a una unidad. Noción fundamental en matemáticas que permite contar, clasificar los objetos o medir magnitudes.
- Número abstracto : El que no se refiere a unidad de especie determinada.
- Número cardinal : Cada uno de los números naturales en abstracto, como diez, mil.
- Número compuesto : El que se expresa con dos o más guarismos o caracteres.
- Número concreto : El que expresa cantidad de especie determinada.
- Número dígito : El que puede expresarse con un solo guarismo o carácter; en la numeración decimal lo son los comprendidos desde el cero al nueve, ambos inclusive.
- Número natural : Cada uno de los elementos de la sucesión 1, 2, 3, 4, ...
- Número ordinal : El que expresa ideas de orden o sucesión, como segundo, tercero.
- Pensamiento : Facultad de pensar : el pensamiento es atributo del hombre. Idea principal, manera de opinar de un individuo o de un determinado ambiente.
- Pensar : Formar y ordenar en la conciencia ideas y conceptos : pienso luego existo. Meditar, reflexionar. Hacer proyectos para poner en práctica alguna cosa.
- Principio (lat. principium) : Concepto, idea fundamental que sirve de base a un orden determinado de conocimientos o sobre la que se apoya un razonamiento. Proposición que sirve de fundamento a una deducción. Nociones primeras de una ciencia o arte.
- Probar (lat. probare) : Demostrar, evidenciar la verdad de cierta cosa.

- Problema (lat. problemam) : Cuestión en que hay algo que averiguar. Proposición dirigida a averiguar un resultado cuando ciertos datos son conocidos.
- Proposición : Enunciado susceptible de ser verdadero o falso.
- Razonamiento : Acción y efecto de razonar. Serie de conceptos encaminados a demostrar algo.
- Razonar : Pensar, ordenando ideas en la mente, para llegar a deducir una consecuencia o conclusión.
- Teorema (gr. theorema) : Proposición científica que puede demostrarse.
- Tesis (gr. thesis) : Proposición que se enuncia y se mantiene con argumentos.

En matemática existen cuatro términos que se encontrarań frecuentemente siempre que se trate con demostraciones. Estos son proposición, lema, teorema y corolario. Una PROPOSICIÓN es un enunciado de interés que se está tratando de demostrar. Algunas proposiciones son consideradas (subjetivamente) extremadamente importantes y se las llama TEOREMAS.

La demostración de un teorema puede ser muy larga, por lo que resulta más fácil realizar la demostración por "partes". Por ejemplo, para demostrar "P implica Q", puede ser necesario demostrar primero que "P implica C", luego, que "C implica D" y finalmente, que "D implica Q". Cada una de las proposiciones obtenidas podría presentarse por separado, y éstas se llaman LEMAS. En otras palabras, un lema es una proposición preliminar, la cual va a utilizarse en la demostración de un teorema. Una vez que un teorema ha sido establecido, sucede frecuentemente que ciertas proposiciones surgen casi inmediatamente como resultado de que el teorema es verdadero. A estas proposiciones se las denomina COROLARIOS.

Así como existen ciertos conceptos matemáticos que se aceptan sin una definición formal, así también existen ciertas proposiciones las cuales se aceptan sin una demostración formal, son los AXIOMAS.

En resumen, una proposición es un enunciado que se trata de demostrar que es verdadero. Un teorema es una proposición importante. Un lema es una proposición preliminar que va a utilizarse en la demostración de un teorema, y un corolario es una proposición que surge como resultado inmediato de un teorema.

IMPORTANTE : Un aporte importante al crecimiento intelectual y a la iniciación a la creatividad es el poder particionar una demostración larga en la concatenación de lemas cortos, los cuales son unos independientes de los otros (es decir, que los lemas o resultados intermedios, representan implicancias verdaderas que por reiteración ayudan a demostrar el resultado o teorema fundamental).

La Matemática ha ocupado un lugar de privilegio en los programas escolares y ha influído explícitamente e implícitamente en la formación e información del estudiante, con distinto énfasis a lo largo del tiempo. Hoy, a estas dimensiones formativa e informativa, más dirigidas hacia el sujeto, se suma lo social, por cuanto la Matemática, desde su lenguaje y desde su método, se ha constituído en un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnólogico en que vivimos. Es desde esta potencialidad que la matemática puede contribuir en forma privilegiada a la consecución de los objetivos que la Ley Federal de Educación puntualiza para la Educación General Básica (EGB), pues colabora con el desarrollo individual y social de los alumnos propiciando en ellos "la búsqueda de la verdad" y en relación con ella, el juicio crítico, el rigor en el método de trabajo, la presentación honesta de los resultados, la simplicidad y exactitud en el lenguaje, la valorización de las ideas ajenas y del trabajo compartido.

I.2. PROBLEMA FUNDAMENTAL EN LA MATEMÁTICA: P IMPLICA Q

Dadas dos proposiciones P y Q, un problema de fundamental interés en matemática es el de demostrar que si P es verdadero, entonces Q es verdadero. Una demostración es un método formal para realizar esta tarea. A menudo, la forma particular de P y Q pueden indicar el camino a seguir.

Para poder hacer una demostración, se debe saber exactamente lo que significa demostrar que "si P es verdadero entonces Q es verdadero". La proposición P se llama a menudo "HIPÓTESIS" y el postulado Q "CONCLUSION". Para abreviar, la proposición "si P es verdadero entonces Q es verdadero", se reduce a "si P entonces Q", o simplemente "P implica Q" (que se nota : $P \Rightarrow Q$).

Parece razonable que las condiciones bajo las cuales "P implica Q" es verdadero dependerán de si P y Q son verdaderos. Por lo tanto, hay cuatro posibles casos a considerar:

1. P es verdadero y Q es verdadero ;
2. P es verdadero y Q es falso ;
3. P es falso y Q es verdadero ;
4. P es falso y Q es falso .

Una tabla de verdad es un método para determinar cuándo una proposición (Por ejemplo : "P implica Q") es verdadera, debiendo examinarse todos los posibles valores de la verdad de las proposiciones individuales P y Q.

Cuando se trata de demostrar que "P implica Q" es verdadero, se puede suponer que la proposición de la izquierda de la palabra "implica" es verdadera. La meta es concluir que el postulado de la derecha es verdadero.

Se debe tener en cuenta que una demostración de la proposición "P implica Q" no es un intento de verificar si P y Q son verdaderos, sino demostrar que Q es una consecuencia lógica de haber supuesto que P es verdadero.

En general, la habilidad para demostrar que Q es verdadero dependerá mucho del hecho de que se haya supuesto que P es verdadero y, finalmente, se tendrá que descubrir la relación entre P y Q. Para realizar esto se requerirá una cierta cantidad de creatividad de su parte. Las técnicas que se presentarán para hacer demostraciones están diseñadas para iniciarlo y guiarlo a lo largo del camino.

Existen muchas maneras de decir que "P implica Q" :

1. Cuando P es verdadera, Q debe ser también verdadera ;
2. Q se deduce de P ;
3. Q es una consecuencia necesaria de P ;
4. P es condición suficiente para Q ;
5. P sólo si Q .

Otras tres proposiciones relacionadas con "P implica Q" (llamada Proposición directa) son :

1. "Q implica P" (llamada Proposición recíproca) ,
2. "NO P implica NO Q" (llamada Proposición inversa) ,
3. "NO Q implica NO P" (llamada Proposición contrarrecíproca) .

En lo sucesivo, P y Q serán proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. Por lo tanto, el problema de interés será demostrar que "P implica Q" .

I.3. PROBLEMAS POR RESOLVER Y PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

• PROBLEMAS POR RESOLVER

El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema. La incógnita es lo que se busca o lo que se pide.

Estos problemas pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos, son problemas serios o simples acertijos.

Los principales elementos del problema por resolver son : la incógnita, los datos y la condición. Para encontrar la solución a estos problemas hay que conocer, de modo preciso, los elementos principales : incógnita, datos y condición.

A continuación se detallan preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos :

- ¿Cuál es la incógnita? ; ¿Cuáles son los datos? ; ¿Cuál es la condición?
- Distinga las diversas partes de la condición.
- Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.
- Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
- No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra; ¿En qué medida la incógnita queda entonces determinada? ; ¿cómo puede variar? ; ¿Puede deducir de los datos algún elemento útil? ; ¿Podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita? ; ¿Podría cambiar la incognita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí ?
- ¿Ha empleado todos los datos? ; ¿Ha utilizado la condición por completo?

• PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

El propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada.

Los elementos de estos problemas son (si es un problema matemático usual), la hipótesis y la conclusión del teorema que hay que probar.

Para resolverlos deben conocerse exactamente sus partes principales (hipótesis y conclusión).

A continuación se detallan preguntas y sugerencias adaptadas a este tipo de problema :

- ¿Cuál es la hipótesis? ; ¿Cuál es la conclusión?
- Distinga las diversas partes de la hipótesis.
- Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.
- Mire bien la conclusión. Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o similar.
- No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte; ¿Sigue siendo válida la conclusión?
- ¿Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil? ; ¿Podría pensar en otra hipótesis de la cual se pudiera deducir fácilmente la conclusión? ; ¿Podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí?
- ¿Ha empleado la hipótesis completa?

Por regla general, los problemas por resolver tienen mayor importancia en la matemática elemental mientras que los problemas por demostrar son más importantes en la matemática superior.

• RAZONAMIENTO HEURÍSTICO

El razonamiento heurístico es un razonamiento que se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible y cuyo objeto es descubrir la solución del problema propuesto. El razonamiento heurístico es de empleo frecuente. No se llega a una certeza plena sino después de haber obtenido la solución completa, pero hasta ahí uno se contenta con frecuencia con una hipótesis más o menos plausible. Se puede necesitar lo provisorio antes de lograr lo definitivo. En la construcción de una demostración rigurosa el razonamiento heurístico juega el mismo papel que el andamiaje en la construcción de un edificio.

Este tipo de razonamiento es bueno por sí mismo; lo que es malo es asociarlo a la demostración rigurosa; lo que es peor, es presentarlo como demostración rigurosa.

Para resolver un problema se necesita:

I Comprender el problema

II Concebir un plan

Determinar la relación entre los datos y la incógnita.

De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares.

Obtener finalmente un **plan** de solución.

III Ejecución del plan

IV Examinar la solución obtenida

Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

II. NÚMERO

II.1. PROBLEMAS BÁSICOS CON OPERACIONES NÚMERICAS. DE TODO UN POCO.

• • LAS DIFERENTES OPERACIONES EN LOS NÚMEROS REALES:

• • ADICIÓN: Se utiliza cada vez que se busca una suma, un total, cuando se reúnen objetos idénticos, cuando se añade. Se tiene:

$$a + b = s\,, \qquad \text{a y b sumandos, s: suma (resultado de la adición).}$$

Las propiedades de la adición son las siguientes:

- conmutativa $(a+b=b+a)$;
- asociativa $\big((a+b)+c=a+(b+c)\big)$;
- rol del cero (elemento neutro) $(a+0=0+a=a)$;
- existencia del elemento opuesto $\big(a+(-a)=(-a)+a=0\big)$;
- cancelativa y uniforme (importantes por su aplicación en la resolución de ecuaciones):

  cancelativa: $x+a=y+a \;\Rightarrow\; x=y$;

  uniforme: $x=y \;\Rightarrow\; x+a=y+a$.

• • SUSTRACCIÓN: Se utiliza cada vez que se calcula una diferencia, cuando se completa, cuando se retira. Se tiene:

$$a - b = d\,, \qquad \text{a: minuendo, b: sustraendo, d: diferencia.}$$

Por otro lado, una sustracción puede pensarse como una adición de la siguiente manera:

$$a - b = a + (-b)$$

donde $-b$ es el opuesto de b.

Las propiedades de la sustracción son las siguientes:

- no conmutativa;
- no asociativa;
- rol del cero (diferencia de dos números iguales);
- cancelativa y uniforme.

Se puede verificar una sustracción con la ayuda de una adición:

$$a-b=d \;\Leftrightarrow\; a=b+d \quad \text{(concepto de operación inversa).}$$

• • MULTIPLICACIÓN: Se utiliza cuando se busca la suma de muchos números iguales, cuando se busca el total de circunstancias idénticas que se repiten. Se tiene:

$$a\,.\,b = p\,, \qquad \text{a y b factores, p: producto.}$$

Las propiedades de la multiplicación son las siguientes:

- conmutativa $(a\,.\,b=b\,.\,a)$;
- asociativa $\big((a\,.\,b)\,.\,c=a\,.\,(b\,.\,c)\big)$;
- rol del cero $(0\,.\,a=a\,.\,0=0)$;
- rol del uno (elemento neutro) $(1\,.\,a=a\,.\,1=a)$;
- distributiva con respecto a la adición y a la sustracción $\big(a\,.\,(b+c)=a\,.\,b+a\,.\,c\big)$;
- existencia del elemento recíproco (inverso) para todo número no nulo $\big(a\,.\,(\frac{1}{a})=(\frac{1}{a})\,.\,a=1,\ a\neq 0\big)$;
- cancelativa y uniforme (importantes por su aplicación en la resolución de ecuaciones):

  cancelativa: $x\,.\,a=y\,.\,a\,,\ a\neq 0 \;\Rightarrow\; x=y$;

  uniforme: $x=y \;\Rightarrow\; x\,.\,a=y\,.\,a$;

- ley de anulación del producto: $a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$;

- • <u>DIVISIÓN</u>: Se utiliza cuando se reparte en partes iguales, cuando se busca la cantidad de veces que un número contiene a otro. Se tiene:

$$a : b = c\ , \qquad \text{a: dividendo , b: divisor } (b \neq 0) \text{ , c: cociente.}$$

Por otro lado, una división puede pensarse como una multiplicación de la siguiente manera:

$$a : b = a\,.\,\frac{1}{b}$$

donde $1/b$ es el recíproco de b.

La división puede ser :

- exacta (idea de múltiplo y divisor de un número);
- con resto ($a= b\,.\,c + r$, a: dividendo , b: divisor , c: cociente , r: resto).

Las propiedades de la división son las siguientes:

- no conmutativa;
- no asociativa;
- rol del cero y del uno;
- distributiva del divisor con respecto a la adición y a la sustracción.

Se puede verificar una división exacta con una multiplicación:

$$a : b = c \qquad \Leftrightarrow \qquad c\,.\,b = a \quad \text{(concepto de operación inversa).}$$

Las cuatro operaciones anteriores, para los números fraccionarios, se definen de la siguiente manera:

- Adición: $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p.s + r.q}{q.s}$ (se puede utilizar también el concepto de fracción equivalente)
- Sustracción: $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p.s - r.q}{q.s}$ (se puede utilizar también el concepto de fracción equivalente)
- Multiplicación: $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p.r}{q.s}$
- División: $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p.s}{q.r}$

- • <u>POTENCIACIÓN</u>:

<u>Definición</u>.– La potenciación es una multiplicación reiterada. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces :

$$\left|\begin{array}{l} a^1 = a\ ; \qquad\qquad a^0 = 1\ ,\ \forall\, a \neq 0\ ; \\ a^n = a.a.a \,\ldots\ldots\, a \text{ (n veces) } \forall\, n \in \mathbb{N}\ ; \\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}\ ,\ \forall\, a \neq 0\ ,\ \forall\, m \in \mathbb{N}\,. \end{array}\right.$$

Las propiedades de la potenciación son las siguientes:

- Propiedad distributiva respecto del producto: $(a.b)^n = a^n.b^n$;

- Propiedad distributiva respecto del cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $\forall\, b \neq 0$;

- Producto de potencias de igual base: $a^n.a^m = a^{n+m}$;

- Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\forall\ a \neq 0$;

- Potencia de potencias : $(a^n)^m = a^{n.m}$.

• • RADICACIÓN:

Definición.– La raíz enésima de un real α es el real β cuya potencia enésima es α , es decir:

$$\beta = \sqrt[n]{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \beta^n = \alpha \quad , \ n \in \mathbf{N} ,$$

($\alpha \in \mathbf{R}$ cuando n es impar; en cambio, debe ser $\alpha \geq 0$ cuando n es par).

Las propiedades de la radicación son las siguientes:

- Propiedad distributiva respecto del producto: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;

- Propiedad distributiva respecto del cociente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;

- Radicación de radicaciones: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.

Definición.– Sea $a \in \mathbf{R}$, entonces la potenciación con exponente fraccionario se define, utilizando la radicación, de la siguiente manera:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad , \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \ \ (a \neq 0) , \qquad \forall\ m, n \in \mathbf{N} ,$$

($a \in \mathbf{R}$ cuando n es impar; en cambio, debe ser $a \geq 0$ cuando n es par).

• REPRESENTACION DECIMAL DE LOS NUMEROS REALES

Definición.–

(i) Se llama representación decimal de un número $x \in \mathbf{R}$ a la siguiente expresión :

$$x = \pm\ [r_o + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{100} + \frac{r_3}{1000} + \dots + \frac{r_n}{10^n} + \dots] = \pm\ r_o , r_1 r_2 r_3 \dots r_n \ .$$

donde

$r_o \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $r_i \in \{0,1,2,3,\dots,8,9\}$, $\forall\ i \in \mathbf{N}$,
$+$: número real positivo , $-$: número real negativo.

En general, cuando el número real es positivo el signo correspondiente se omite.

(ii) Se dice que la representación decimal es finita cuando $r_n \neq 0$ y $r_i = 0$, $\forall\ i \in \mathbf{N}$, con $i \geq n+1$.

(iii) Se dice que la representación decimal es infinita cuando no es finita.

(iv) Se dice que la representación decimal infinita es periódica cuando a partir de un cierto índice $n_o \in \mathbf{N}$ un subconjunto de los números r_i (con $i \geq n_o$) comienza a repetirse.

$$\frac{35}{99} = 0,353535\dots = 0,\overline{35} \quad ; \qquad \frac{233}{990} = 0,23535\dots = 0,2\overline{35} \ .$$

Observación: Son números racionales los que tienen una representación decimal finita o infinita periódica; por lo tanto, son números irracionales los que tienen una representación decimal infinita con infinitos dígitos no nulos y sin ninguna periodicidad.

1) Suprima paréntesis y corchetes, y resuelva :

(i) $\dfrac{(-90)\ \div\ (-6)}{(-12)\ \div\ 4}+\dfrac{48\ \div\ (-6)}{(-100)\ \div\ 25}-\dfrac{(-200)\ \div\ (-8)}{360\ \div\ (-72)}+\dfrac{24\ \div\ (-4.6)}{32\ \times\ 2\ \div\ 64}$;

(ii) $8\ \div\left(\dfrac{6^2}{6^3}\ \div\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}\right)\right)-2^2\ \div\left(-2^2-(-12)\right)$; (iii) $\dfrac{1-\dfrac{1}{1-2^{-2}}}{1-\dfrac{1}{1-2^{-4}}}$;

(iv) $\left(\sqrt{\left(2-\frac{2}{5}\right)^2}-\frac{3}{5}\right)\div\left(\left(\sqrt{81}-\sqrt{49}\right)\div\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$; (v) $\left(\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}-(-7)\right)^{-1}+\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{4^2}}}$;

(vi) $\left(-\frac{5}{6}+1\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3\div\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2}-(-1)^4\right)$; (vii) $\sqrt{\dfrac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-2}4^5\,\frac{1}{8}\,2^7}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}\right)^2}}\times 8^{-\frac{5}{2}}$.

(viii) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{0,5+\frac{1}{4}}-0,2}+\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1+0,6}{2}+0,25}{3}}$.

2) Ordene, de menor a mayor, los siguientes números racionales (use el concepto de fracción equivalente):

$$\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{2};\ \frac{7}{10};\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{7}{5};\ \frac{3}{11};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{7}.$$

3) Utilizando la definición de la división (D = d . c + r), complete el siguiente cuadro:

D	d	c	r
.....	423	178	20
6661	54	.....	19
1457	.....	32	17
3291	62	53	.....

4) (i) Complete la siguiente tabla :

420	.....	.....	180	.....
.....	.....	240	.....	.....
.....	30	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....

teniendo en cuenta que se pasa de la primera fila a la segunda dividiendo por 2, de la segunda a la tercera dividiendo por 5, de la tercera a la cuarta dividiendo por 2 y de la tercera a la quinta dividiendo por 6.

(ii) ¿Qué operación debe realizarse para pasar de la:

(a) primera a la quinta fila?;

(b) segunda a la quinta fila?;

5) Complete las siguientes operaciones:

(i)

	2	3	...
+	4	...	6
	...	8	9
...	2	8	4

(ii)

	4	7	3
+	...	...	...
	8	2	7
...	5	5	5

(iii)

	1	8	7
+	4	6	...
	...	8	4
	8	...	9

(iv)

	8	...	3	...
−	...	2	...	1
	3	4	6	5

(v)

1	2	3	9	
X		...	...	
	...	...	7	...
...	...	...	...	
...	...	...	4	8

(vi)

			....,	1	....
	×		....,	....	7
		4	3	3	3
....	....	....	8	....	
....	....	....	....	....	....

(vii)

7	5	...	....	|	....	....	
3	4	9			1	....	....
	...	....	....				
		0	8				

6) En cada uno de los siguientes problemas encuentre todas las soluciones:

(i) Utilizando solamente una vez las cifras 1, 3, 4, 5 y 8, complete la siguiente operación:

	9	**7**	.....	**6**
+	**1**	.....	**5**	.....
1	**1**	.....	**1**	.....

(ii) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación:

	6	.....	.....	**1**
+	**7**	**9**	**7**	.....
1	**4**	.....	**9**	......

7) "Problemas con Cifras Perdidas": Busque las cifras que faltan, en los lugares representados por el símbolo "?", de manera que se verifiquen los resultados siguientes:

(i) 93 × 8? = 8??1 ; (ii) 83? × ?6 = 46816 ; (iii) ??6 × 84? = 232668 ;

(iv) 4??6 : 8? = 48 ; (v) 91?7 − ?7? = 8271 ; (vi) 7 × (?8 − 2?) = 112 ;

(vii) 93 × ?? = ??91 .

8) "Problemas con Operaciones Perdidas": Complete el símbolo "?" con las operaciones que faltan para que se verifiquen los resultados siguientes:

(i) (37 ? 21) ? 223 = 1000 ; (ii) (3461 ? 276) ? 101 = 37 ;

(iii) 619 ? 316 ? 425 ? 196 = 924 ; (iv) 31 ? (87 ? 19) = 2108 .

9) (a) Convierta los siguientes números reales que tienen representación decimal finita en fracciones:

(i) 0,25 ; (ii) 1,5 ; (iii) $-0{,}75$; (iv) 2,35 ; (v) 13,1 ;

(vi) ¿Todos los números que tienen una representación decimal finita son números racionales?

(b) Convierta las siguientes expresiones decimales infinitas periódicas en fracciones :

(i) $0,\overline{5}$; (ii) $0,\overline{35}$; (iii) $0,\overline{483}$;

(iv) $0,\overline{10}$; (v) $0,00\overline{1}$; (vi) $0,\overline{3}$;

(vii) $0,2\overline{35}$, (viii) $0,\overline{9}$; (ix) $2,34\overline{12}$;

(x) ¿Todos los números que tienen una representación decimal infinita periódica son números racionales?

10) En un negocio hay 4000 bicicletas. Se venden un cierto número de ellas y, de las que quedan, se sabe que el 63.6363... % son plegables y que el 92,2297297297.... % no son de carreras. ¿Cuántas bicicletas se vendieron?

11) Se hace una encuesta para saber si es rentable comercializar leche en polvo y leche fresca con los siguientes resultados: El 72,7272... % de las personas encuestadas no compraría leche en polvo y el 74,594594..... % de las personas encuestadas, no compraría leche fresca. ¿Cuál es el número mínimo de personas a las que se le realizó la encuesta?

12) Un editor imprimió en total 5000 folletos, repartió algunos pero aún le quedan más de 2000. Puede embalarlos en cajas de 45 folletos sin que le sobre ninguno; también puede usar cajas de 40 o de 50 folletos sin que le sobren. ¿Cuál es el número de folletos que todavía tiene?

13) Encuentre el número intruso entre los siguientes números reales:

(i) $8{,}9 \cdot 10^{-3}$; (ii) $14{,}7 \cdot 10^{-2}$; (iii) $0{,}0014 \cdot 10^{2}$;

(iv) $124{,}1 \cdot 10^{-2}$; (v) $0{,}0001 \cdot 10^{3}$; (vi) $384{,}517 \cdot 10^{-4}$;

(vii) 0,1 ; (viii) $9 \cdot 10^{-1}$.

14) Una con una flecha los números iguales:

0,05	5
$0{,}5 \cdot 10^{3}$	$50 \cdot 10^{-3}$
$500 \cdot 10^{-5}$	0,005
$0{,}05 \cdot 10^{2}$	500
50	$5000 \cdot 10^{-2}$
5000	$50 \cdot 10^{2}$
$0{,}5 \cdot 10^{2}$	0,5
$0{,}05 \cdot 10$	50

15) El peso de un virus es 10^{-21} kg; el de un hombre es 70 kg y el de la Tierra es $5{,}9\ 10^{24}$ kg. Calcule la proporción entre el peso de un hombre y el de la Tierra. Calcule, también la proporción entre los pesos de un virus y un hombre.

16) El número de estrellas en nuestra galaxia es de 10^{11} y el número estimado de galaxias en el universo es de 10^{12}. Qué cantidad de estrellas estima que puede haber en el Universo.

17) ¿Cuántas veces menor es la Luna respecto de la Tierra si el volumen estimado de la Luna es de $21{,}9\ 10^9\ km^3$ y el volumen de la Tierra es de alrededor de $1{,}08\ 10^{12}\ km^3$?

18) Estudie las potencias del 7. ¿Con qué cifra terminará el número 7^{50} ?

19) Halle dos números de tres dígitos cuyo producto sea 555555.

20) Pruebe que el número de seis dígitos A B C A B C es mútiplo de 7, de 11 y de 13.

21) Si tres números a, b, c son positivos y verifican las siguientes relaciones:

$$a \,.\, b = 12 \; ; \qquad b \,.\, c = 20 \; ; \qquad a \,.\, c = 15 \; ,$$

cuál es el valor de a.b.c ?

22) ¿Cuál es el número de cifras del producto $5^{17} . 4^9$?

23) (i) Halle todos los dígitos A y B de manera que la suma de la siguiente adición sea divisible por 4:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & A & 3 \\ + & 2 & B & 5 \\ \hline & 8 & .... & 8 \end{array}$$

(ii) Halle todos los dígitos A y B de manera que la suma de la siguiente adición sea divisible por 3:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & A & 8 \\ + & 6 & B & 9 \\ \hline & 9 & .... & 7 \end{array}$$

24) Sobre la ruta, cada 4 km hay una parada de ómnibus, cada 5 km un teléfono y cada 30 km un expendio de combustible. ¿En qué km habrá una parada, un teléfono y un expendio de combustible juntos?

25) (i) Cada letra utilizada (A, P, R, S) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$\begin{array}{ccccc} & & R & A & S \\ + & & P & A & R \\ \hline & A & S & S & A \end{array}$$

(ii) Cada letra utilizada (A, B) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$AB + BA = 99 .$$

26) Determine los números naturales de 2 cifras que, divididos por 37, dan un cociente igual al resto.

27) Verifique que no es posible determinar el dividendo y el divisor de una división sabiendo que el dividendo es menor que 3000, el cociente es 82 y el resto es 47.

28) Multiplique dos números cuya diferencia sea 4, y luego súmele 4. ¿Qué tipo de números se obtienen? Demuestre lo obtenido.

29) Compare e indique cual de los siguientes números es el mayor (si es posible, sin utilizar tablas de raíces):

(i) $\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt{5}$; (ii) $\sqrt[3]{14}$ y $\sqrt{6}$; (iii) $\sqrt[3]{14}$ y $\sqrt{5}$;

(iv) 0,00001 y $(81)^{-\frac{5}{2}}$; (v) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{3}-1$; (vi) $\sqrt[4]{7}$ y $\sqrt[6]{20}$.

30) Un comerciante compró lapiceras, portaminas y gomas de borrar con los siguientes precios:

cada lapicera por \$ 10 ; cada portaminas por \$ 1 ; 8 gomas de borrar por \$ 1.

Si en total compró 100 artículos, y gastó \$ 100, ¿cuántos artículos de cada clase compró?

31) ¿Cuántos de los siguientes 60 números:

84 ; 2×84 ; 3×84 ; 4×84 ; .... ; 59×84 ; 60×84

son múltiplos de 60?

32) ¿Cuántos números naturales menores que 1000 tienen la suma de sus dígitos igual a 6?

33) Justifique las siguientes igualdades que se obtienen al calcular el cuadrado de cualquier número natural que termine en 5 :

$$15^2 = 10 \,.\, 20 + 25 = 200 + 25 = 225 \,;$$
$$25^2 = 20 \,.\, 30 + 25 = 600 + 25 = 625 \,;$$
$$35^2 = 30 \,.40 + 25 = 1200 + 25 = 1225 \,;$$
$$45^2 = 40 \,.\, 50 + 25 = 2000 + 25 = 2025.$$

34) Según los gráficos:

2 9 5

conteste las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuál es la cifra más grande? ; (ii) ¿Cuál es el número más grande?

35) La diferencia entre las edades del hermano mayor y del más pequeño de cuatro hermanos es igual a la suma de las edades de los dos hermanos del medio. Calcule la edad del menor sabiendo que los tres hermanos mayores tienen 18, 10 y 5 años respectivamente.

36) Dos caminantes deciden hacer el viaje de Buenos Aires a Luján en tres etapas. El primero recorre 1/3 del camino en la primera etapa y 5/9 en la segunda etapa. El segundo hace 1/4 del camino en la primera etapa y 3/5 en la segunda. ¿Cuál de los dos estára más cerca de Luján al finalizar la segunda etapa?

37) En un dictado de 40 palabras, Leonardo y Leopoldo tuvieron 6 palabras equivocadas: 4 con errores ortográficos y 2 con errores de acentuación. La maestra de Leonardo corrige poniendo 25 centésimos por cada palabra bien escrita, y en cambio, la maestra de Leopoldo decidió sacar 1 punto por error ortográfico y 1/2 punto por error de acentuación. ¿Quién sacó más nota si, como siempre, la nota

máxima es 10?

38) En el mercado : 2 Kg de naranjas cuestan \$2,50, media docena de choclos cuesta \$2,40 y 300 gr de frutillas se ofrecen a \$2,70. Se compra 5 Kg de naranjas, 8 choclos y 1/2 kg de frutillas y se paga con un billete de \$20. ¿Cuál es el vuelto ?

39) Ernesto pagará el auto que compró en 80 cuotas iguales. Por las 12 primeras cuotas abona, en total, \$2304. Después de haber pagado la duodécima cuota decide saldar el resto en 48 cuotas. ¿Cuánto más debe abonar por cada cuota ?

40) Una empresa telefónica cobra los siguientes valores :

Abono por dos meses : \$ 56 ; Pulso telefónico : \$ 0,65.

(i) Complete la siguiente tabla :

Períodos	Marzo Abril	Mayo Junio	Julio Agosto
Número de pulsos	140	200	400
Suma a pagar	.....	.....	.....

(ii) La suma a pagar es proporcional al número de pulsos? Justifique la respuesta.

41) Roberto tiene que viajar de Rosario a San Jorge que dista 225 Km. Su auto recorre 10 Km con cada litro de nafta, y cada litro de nafta cuesta \$0,86. Además para llegar debe pasar un puesto de peaje y pagar \$2,10 por el auto. Hay también un micro de larga distancia que cobra \$11 por el trayecto.

(i) Si viaja solo, ¿qué le cuesta más caro, ir en auto o en micro ?

(ii) Si viaja además con la esposa, ¿qué le conviene más ?

(iii) El fin de semana pasado, Roberto tuvo que viajar de Rosario a San Jorge en auto con su esposa y sus dos hijos, ambos mayores de edad. Por un problema mecánico tuvo que detenerse en un taller para repararlo. Con este gasto adicional, le costó lo mismo ir en auto que si hubiese pagado los cuatro pasajes en micro. ¿Cuánto pagó en el taller ?

42) En la primera fila de una clase hay 4 chicos cuyo promedio de edades es de 7 años. Juan que tiene 12 años y que no ve bien desde atrás, decide agregarse a la primera fila. ¿Cuál es ahora el promedio de las edades de los 5 chicos que se sientan en la primera fila ?

43) En una casa de 27 departamentos iguales, el administrador recibe \$2430 por las expensas de un mes. Como muchos propietarios se atrazan en los pagos, el administrador decide cobrar un recargo equivalente a 1/6 de la tarifa a cada uno que pague después del día 15. Si este mes 9 propietarios abonaron las expensas con retraso. ¿Cuánto recaudó el administrador ?

44) Las actividades de un día de los Juegos Olímpicos son las siguientes:

Natación: $\frac{1}{6}$ de la jornada ; Remo: $\frac{2}{15}$ de la jornada , Atletismo: $\frac{1}{2}$ de la jornada

(i) Determine la actividad que tuvo mayor duración;

(ii) Determine la actividad que tuvo menor duración. ¿Qué porcentaje representa en la jornada?

(iii) ¿Durante qué parte de la jornada no hubo ninguna actividad?

45) En un club de 2200 socios, $\frac{2}{5}$ de los socios practican natación, $\frac{1}{4}$ practica tenis y $\frac{3}{10}$ practica rugby.

(i) ¿Qué parte del total de socios no practica deportes?

(ii) ¿Qué porcentaje del total de socios practica algún deporte?

(iii) ¿Cuál es el deporte que agrupa más socios?

(iv) ¿Cuántos socios practican natación y tenis?

46) De los 60.000 espectadores a un festival de Rock, 15.000 estaban en el césped, 5.000 en las plateas y el resto en las populares.

(i) ¿Qué fracción del total hay en cada posición ?

(ii) ¿Cuánto se recaudó si cada entrada al cesped cuesta \$30, a las plateas \$50 y a las populares \$15 ?

47) En una fábrica, que trabaja de lunes a viernes, se tienen los siguientes datos sobre la producción de latas de conserva:

Días de producción	Cantidad de latas
jueves	870 menos que el miércoles
miércoles	la mitad del lunes y martes juntos
martes	1.260 más que el lunes
lunes y martes	39.060
semanal	100.000

¿Cuántas latas se producen en cada día de trabajo de la fábrica ?

DESIGUALDADES ENTRE ÚMEROS REALES

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se definen las relaciones "menor que" ($<$), "mayor que" ($>$), "menor o igual que" ($\leq$) y "mayor o igual que" ($\geq$). Por ejemplo:

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0 \,.$$

48) Las relaciones " $<$ " y " $>$ " satisfacen las siguientes propiedades fundamentales ($\forall x, y, z \in \mathbb{R}$) :

(i) $x > y \Rightarrow x + a > y + a \quad , \forall a \in \mathbb{R}$;

(ii) $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$;

(iii) $x > y \Rightarrow -x < -y$;

(iv) $x > y \wedge b > a \Rightarrow x - a > y - b$;

(v) $x > y > 0 \wedge a > b > 0 \Rightarrow a x > b y$;

(vi) $x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0$;

(vii) $x < y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$;

(viii) $x > y > 0 \Rightarrow x^n > y^n \ , \forall n \in \mathbb{N}$;

(ix) $y < x < 0 \Rightarrow$

i) $y^n > x^n > 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N} \, / \, n$ es par ;

ii) $y^n < x^n < 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N} \, / \, n$ es impar .

49) Sean a, b, c, d > 0. Demuestre que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces se tiene $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

50) A partir del número 2461, escriba una sucesión creciente de números permutando de lugar una sola cifra, cada vez, de las del número dado.

51) Compruebe si $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\forall\, a \neq 0$, $b \neq 0$. ¿Cuándo vale la igualdad?

Definiciones. –

(i) Los números pares son los siguientes:

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\ldots\ldots$$

que se pueden expresar, de manera general, por la expresión

$$\text{número par} = 2n \quad , \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots$$

(ii) Los números impares son los siguientes:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\ldots\ldots$$

que se pueden expresar, de manera general, por la expresión

$$\text{número impar} = 2n+1 \quad , \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots$$

o en forma equivalente, por la expresión

$$\text{número impar} = 2n - 1 \quad , \quad \text{con } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots$$

52) Complete y justifique por "par" o "impar" cada una de las siguientes proposiciones (entendiendo que en el caso de la diferencia hay que restar el número menor del mayor):

(i) La suma de dos números pares es ....

(ii) La suma de dos números impares es ....

(iii) La suma de un número par y otro impar es ....

(iv) La suma de tres números pares es ....

(v) La suma de tres números impares es ....

(vi) La suma de cuatro números impares es ....

(vii) La suma de cuatro números pares es ....

(viii) La diferencia de dos números impares es ....

(ix) La diferencia de dos números pares es ....

(x) El producto de dos números pares es ....

(xi) El producto de un número par y otro impar es ....

53) Indique y justifique si las siguientes proposiciones son siempre ciertas:

(i) La suma de dos números naturales consecutivos no es divisible por 2;

(ii) La suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3;

(iii) La suma de cuatro números naturales consecutivos no es divisible por 4;

(iv) La suma de cinco números naturales consecutivos es divisible por 5;

(v) Si n es un número natural par, entonces $n^2 - 1$ es el producto de dos números naturales impares consecutivos;

(vi) Si n es un número natural impar, entonces $n^2 - 1$ es múltiplo de 4; ¿Será también múltiplo de 8?

54) Ubique los números: 72, 7, 40, 70, 95, 13 y 28 en los lugares correspondientes:

Múltiplos del 8	Impares	Múltiplos del 7	
	///////		Pares
			Múltiplos del 5
/////////////			Primos

55) (i) Si $p \in \mathbb{N}$ es un número par entonces p^2 es un número par;

(ii) Si $p \in \mathbb{N}$ es un número impar entonces p^2 es un número impar;

(iii) Si $p \in \mathbb{N}$ y p^2 es un número par entonces p es un número par;

(iv) Si $p \in \mathbb{N}$ y p^2 es un número impar entonces p es un número impar.

(v) El número $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

56) Demuestre que si C es un entero impar, entonces las soluciones de la ecuación $n^2 + n - C = 0$, no son impares.

57) (i) Si a y b son dos números racionales distintos con $a < b$, entonces $(a+b)/2$ es también un número racional que verifica las siguientes desigualdades :

$$a < \frac{a+b}{2} < b .$$

(ii) Entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos números racionales distintos entre sí.

Observación .– Por las propiedades anteriores se tiene que:

(i) el conjunto $\mathbf{Q}$ es denso con respecto de la relación " $<$ " ;

(ii) no se puede hablar de dos números racionales consecutivos.

58) (i) Si a y b son dos números racionales distintos con $a < b$, entonces el número real, definido por la expresión

$$x = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\, a + \frac{\sqrt{2}}{2}\, b ,$$

verifica las siguientes condiciones:

(a) $a < x < b$; (b) $x \notin \mathbf{Q}$.

(ii) Entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos números irracionales distintos entre sí.

(iii) Indique cinco números irracionales entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$.

Observación .– El conjunto de los números reales es la unión disjunta de los conjuntos de números racionales e irracionales. El número $\sqrt{2}$ es irracional. Más aún, entre dos números racionales o irracionales existe siempre un número irracional. Los números reales se pueden construir, a partir de los racionales, de diversas maneras, por ejemplo a través de límite de sucesiones de Cauchy, o cortaduras de Dedekind.

59) Verifique que se tienen las siguientes propiedades:

(i) $p = 3\,n$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^2 = 3\,m$ con $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $p = 3\,n + 1$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^2 = 3\,m + 1$ con $m \in \mathbb{N}$;

(iii) $p = 3\,n + 2$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^2 = 3\,m + 1$ con $m \in \mathbb{N}$;

(iv) El número $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$.

Definición. – Se llama sexagesimal al sistema de numeración posicional de base 60.

Ejemplos:

(i) En un reloj se tiene: 1 hora = 60 minutos , 1 minuto= 60 segundos;

(ii) En ángulos se tiene: 1 grado= 60 minutos , 1 minuto= 60 segundos.

60) Complete las siguientes tablas:

Horas	Minutos	Segundos
3	.....	.....
.....	150	.....
.....	.....	39600
1/2	.....	.....

Grados	Minutos	Segundos
60	.....	.....
.....	15	.....
.....	.....	7200

Definición. – El sistema de numeración romano es un sistema no posicional que permite representar números con letras. Es no posicional pues el valor de las letras no depende de su lugar o posición, es decir conservan siempre un mismo valor.

Los símbolos fundamentales del sistema romano son los siguientes:

Número (Sistema decimal)	Número (Sistema romano)
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

Para expresar los números naturales en el sistema romano se deben tener en cuenta las siguientes reglas:

i) Todo símbolo escrito a la derecha de otro mayor o igual valor se le suma a éste (ej. 11 = XI);

ii) Todo símbolo escrito a la izquierda de otro de mayor valor se le resta a éste:

- I sólo puede colocarse a la izquierda de V y X (ej. 4 = IV ; 9 = IX);
- X sólo puede colocarse a la izquierda de L y C (ej. 40 = XL ; 90 = XC);
- C sólo puede colocarse a la izquierda de D y M (ej. 400 = CD ; 900 = CM);

iii) Sólo pueden repetirse los símbolos I, X, C y M, a lo sumo tres veces (ej. 113 = CXIII);

iv) Para escribir un número mayor que 3999 se colocan rayas horizontales sobre el número. Cada raya horizontal sobre un número equivale a multiplicarlo por mil (ej. 14568 = $\overline{\text{XIV}}$ DLXVIII).

61) Ordene, de menor a mayor, los siguientes números romanos:

XCIX ; CDXXIII ; CDXLIV ; DCLXI ; CXII ;
CCLIII ; CCCXCVII ; $\overline{\text{CVII}}$CCCXLVI ; $\overline{\text{CIX}}$DLIX .

Definición .– Sea A un conjunto munido de una ley de composición interna $*$, es decir una función de $A \times A$ en A (se trata de una operación que asigna a cada par ordenado de elementos de A un único elemento de A). Se dice que la dupla $(A, *)$ es un grupo si y sólo si :

(i) La ley es asociativa , es decir :

$$(x * y) * z = x * (y * z) , \qquad \forall\, x, y, z \in A ;$$

(ii) La ley $*$ posee un <u>elemento</u> <u>neutro</u> en A, es decir :

$$\exists\, e \in A \;/\; x * e = e * x = x\,, \qquad \forall\, x \in A\,;$$

(iii) Todo elemento de A posee un <u>elemento</u> <u>simétrico</u> en A, es decir :

$$\forall\, x \in A\,,\ \exists\, x' \in A \;/\; x * x' = x' * x = e\,.$$

62) En un grupo $(A, *)$ se tienen las siguientes propiedades :

(i) el elemento neutro es único;

(ii) el elemento simétrico es único.

Sea R una relación binaria de un conjunto A en A.

<u>Definición</u> .– (i) La relación binaria R es <u>Reflexiva</u> $\Leftrightarrow$ $aRa,\ \forall\, a \in A$;

(ii) La relación binaria R es <u>Simétrica</u> $\Leftrightarrow$ $(\, aRb \Rightarrow bRa,\ \forall\, a, b \in A\,)$;

(iii) La relación binaria R es <u>Transitiva</u> $\Leftrightarrow$ $(\ aRb\ \wedge\ bRc \Rightarrow aRc,\ \forall\, a, b, c \in A\,)$;

(iv) La relación binaria R es <u>Antisimétrica</u> $\Leftrightarrow$ $(\, aRb\ \wedge\ bRa,\ \forall\, a, b \in A \Rightarrow a=b)$;

(v) La relación binaria R es de <u>Equivalencia</u> $\Leftrightarrow$ R es reflexiva, simétrica y transitiva ;

(vi) La relación binaria R es de <u>Orden</u> $\Leftrightarrow$ R es reflexiva, antisimétrica y transitiva .

<u>Definición</u> .– Si la relación R de A en A es de equivalencia, entonces se llama <u>clase de equivalencia</u> del elemento $a \in A$ al conjunto de los elementos de A que están relacionados con a, es decir :

$$\bar{a} = [a] = Cl(a) = \{\ b\ \in\ A\ /\ aRb\ \}\,.$$

63) Sea A el conjunto de los números fraccionarios, definido por $A = \{\ p/q\ ,\ \ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\,\}$. Se define la siguiente relación binaria en A :

$$\frac{p}{q}\, R\, \frac{r}{s} \quad \Leftrightarrow \quad ps - qr = 0\,.$$

(i) Verifique que R es una relación de equivalencia.

(ii) Halle las clases de equivalencia correspondiente a las fracciones $\frac{1}{2}$ y $3 = \frac{3}{1}$;

(iii) ¿Qué representa cada una de las clases de equivalencia halladas ?

64) Verifique si las siguientes relaciones son de equivalencia o de orden :

(i) "La igualdad" $(=)$ entre conjuntos ;

(ii) "El paralelismo" $(\ \|\ )$ entre rectas ;

(iii) "La semejanza" $(\ \sim\ )$ entre triángulos ;

(iv) "ser menor o igual que" $(\ \leq\ )$ en $\mathbf{R}$;

(v) "La inclusión" $(\ \subseteq\ )$ respecto de los conjuntos;

(vi) "ser mayor o igual que" $(\ \geq\ )$ en $\mathbf{R}$.

II.2. PROBLEMAS CON PROPORCIONES.

1) Verifique que de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se deducen las siguientes igualdades:

(i) $ad = bc$; (ii) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; (iii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$;

(iv) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; (v) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; (vi) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$;

(vii) $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$; (viii) $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$; (ix) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

2) Para preparar 9 panqueques dulces los ingredientes necesarios son: 1 huevo, 1 taza de harina, 3/4 taza de leche, 2 cucharadas soperas de aceite, 1 cucharada sopera de azúcar, 1 pizca de sal.

(i) ¿Cuántos huevos necesitará para hacer 3 docenas de panqueques dulces ?

(ii) ¿Alcanzará con 1 litro de leche, si la taza contiene 200 ml ?

(iii) ¿Si la taza de harina pesa 120 g, alcanzará con 1/2 Kg de harina ?

3) Un ómnibus de larga distancia consume 20 litros de gas-oil cada 170 Km.

(i) ¿Cuántos Km recorre con un litro ?

(ii) Averigue el precio del combustible y determine el costo para recorrer 500 Km.

4) El litro de nafta cuesta $0,86. El auto de Enrique recorre 25 Km con 3 litros de nafta. ¿Cuántos pesos gastará en nafta para recorrer 60 Km ?

5) Una maestra repartió a sus alumnos cajas de 6 lápices de colores cada una.

(i) Complete la siguiente tabla:

No. de lápices	No. de cajas	$\frac{\text{No. de lápices}}{\text{No. de cajas}}$
6	1	$\frac{6}{1}=6$
12	.....	......
54	.....	......
.....	3	....
36	......	......
.....	4	......

(ii) Indique el significado de la tercer columna.

6) Se decidió comprar baldosas para cubrir pisos de diferentes habitaciones.

(i) Complete la siguiente tabla:

Superficie (S) a cubrir (en m^2)	Precio (P) de la superficie (en $)	$\frac{P}{S}$
.....	126	.....
5	.....	.....
12	108	.....
20	.....	.....

(ii) Indique la unidad y el significado que tiene la tercera columna.

7) Pablo compró calcomanías en los diferentes lugares que visitó y desea pegarlas en un album.

(i) Complete la siguiente tabla:

No. de calcomanías por página del album (C)	No. de páginas del album (P)	C . P
....	48	....
6	8	48
....	12	....
4	....	....

(ii) Indique la unidad y el significado que tiene la tercera columna.

8) (i) En un hotel se informa que 20 pasajeros en 3 días pagaron \$1800. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

No. de pasajeros	No. de días	Pago (en \$)
20	3	1800
15	2	....
40	....	6000
....	4	1200

(ii) Si se representan con p, d y x el número de pasajeros, el número de días y el pago (en \$) respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables (Rta.: $x = 30\,pd$).

9) (i) En una empresa constructora de caminos se informa que 20 obreros pavimentaron 30 Km de un camino en 12 días. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

No. de Km del camino a pavimentar	No. de días utilizados	No. de obreros empleados
30	12	20
18	8	....
40	....	32
....	16	15

(ii) Si se representan con c, d y x el número de Km del camino a pavimentar, el número de días utilizados y el número de obreros empleados respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables (Rta.: $x = 8\,c\,/\,d$).

10) (i) En un supermercado se realizan descuentos sobre los precios de los diferentes artículos. Complete la siguiente tabla:

Precio de los artículos (\$)	Suma a pagar luego del descuento (\$)	Descuento (en %)
....	40	20
50	.....	15
60	48	....

(ii) Si se representan con C, P y d el precio del artículo antes del descuento, el precio del artículo a pagar luego del descuento y el descuento en tanto por uno respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

Ayuda: Se sugiere expresar el porcentaje como un número decimal (tanto por uno), por ejemplo:

$$10\,\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}10\ ; \qquad 15\,\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0{,}15\ ;$$

$$50\,\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}50\ ; \qquad 100\% = \frac{100}{100} = 1\ .$$

11) (i) Un comerciante compra mercaderías que luego vende aplicándoles un porcentaje de ganancia. Complete la siguiente tabla:

Precio de compra ($)	Precio de venta ($)	Ganancia (en %)
30	36	....
....	88	10
45	....	15
....	39,60	20

(ii) Si se representan con C, V y g el precio de compra, el precio de venta y la ganancia en tanto por uno de una mercadería respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

12) Teniendo en cuenta que la medida de una determinada magnitud es un número que depende de la unidad elegida, determine si existe proporcionalidad entre unidad y medida. En caso afirmativo, ¿ De qué tipo?

13) Un arquitecto presenta varias versiones del plano de una casa cambiando en cada oportunidad la escala utilizada. ¿ Qué relación existe entre la escala y el tamaño del dibujo ?

14) Un comerciante compra mercaderías que luego vende aplicándoles un porcentaje de ganancia. Justifique y complete la siguiente tabla:

Precio de compra ($)	Precio de venta ($)	Ganancia (en %)
160	......	12
....	282,50	13
300	354	......

15) En el comedor de una empresa almuerzan 480 obreros pertenecientes a 4 secciones diferentes. Diariamente se abona $ 3120 al concesionario del comedor. A partir del mes de abril se decide efectuar un descuento del 50% para beneficiar a 30 obreros de cada sección.

(i) ¿ Cuánto se abonará diariamente al concesionario a partir del mes de abril?

(ii) Indique el porcentaje de pérdida del concesionario.

16) Cuando se puso una torta en el horno pesaba 1200 g. Al sacarla del horno su peso era de 1020 g. ¿ Qué porcentaje de su peso perdió al cocinarse?

17) En un negocio se encuentra el siguiente cartel: "Por un artículo paga $ 6, si Ud. lleva 3 artículos pagará $ 15,30".

(i) ¿ Qué descuento obtendrá en cada uno si Ud. compra 3 artículos ?

(ii) ¿ Qué porcentaje de descuento, por artículo, se obtiene comprando la oferta de 3 ?

18) Por un trabajo realizado por 3 obreros se pagó \$ 90.

(i) ¿ Cuánto le corresponde cobrar a cada uno si trabajaron 9, 6 y 3 horas respectivamente ?

(ii) ¿ Qué porcentaje, del monto total, cobró cada uno ?

19) La subcomisión de fiestas tiene 630 entradas para un espectáculo que se realizará en beneficio de la escuela. Para la venta de las entradas, se realiza una repartición proporcional al número de alumnos de cada grado:

Cuarto grado : 30 alumnos ; Quinto grado : 36 alumnos ;

Sexto grado : 27 alumnos ; Séptimo grado : 33 alumnos .

(i) ¿ Cuántas entradas se le deben entregar a cada grado ?

(ii) ¿ Qué porcentaje, de las entradas, recibe cada grado ?

20) El Señor Martinez compró un departamento en \$ 45.000. Como sólo tenía los 3/4 de esa cifra, solicitó el resto en préstamo al banco. Por cada \$ 500 debe devolver, al año, \$ 560. ¿ Cuánto deberá devolver, al año, por el dinero que le prestaron ?

21) (i) De un día, Juan pasa el 30 % en la escuela, el 35 % durmiendo, el 7 % comiendo, el 5 % haciendo la tarea, el 18 % mirando la televisión y jugando, y sólo el 5 % con algún deporte. ¿ Cuánto tiempo por día dedica al deporte ?

(ii) A partir de hoy decide, por día, practicar fútbol 1 hora y cuarto, basket 1 hora y atletismo 3/4 hora. ¿ Qué porcentaje dedica ahora al deporte ? ¿ Qué fracción del día representa dicho porcentaje ?

22) Un comerciante compra 2 heladeras por \$3000, y las vende por \$3225. ¿ Cuánto pagó por cada heladera si en la venta de una ganó 20% y en la otra perdió 5%.

23) Hemos dividido los gastos de la excursión entre los 15 alumnos que asistieron. Posteriormente, resulta que los dos profesores también pagan. ¿ Qué porcentaje se ahorran los alumnos?

24) ¿ Qué porcentaje de aumento tiene el precio de un artículo que pasa por las manos de tres intermediarios, cada uno de los cuales vende el producto un 50% más caro de lo que le costó?

25) Una botella de aceite comestible mezcla de 1,5 litros contiene 900 cm^3 de aceite de girasol, 250 cm^3 de aceite de maní y el resto de aceite de maíz.

(i) ¿ Qué fracción del total corresponde a cada clase de aceite ? ;

(ii) ¿ Qué porcentaje representa el aceite de girasol en el aceite mezcla ? ;

(iii) Si se quiere llenar un bidón de 5 litros con aceite de la misma mezcla, ¿ cuántos cm^3 de cada clase se deben utilizar ?

26) Una empresa que cotiza en la Bolsa de Comercio tuvo los siguientes valores, por acción, en las fechas indicadas:

Día	Valor de una acción (en \$)
5/2	4,93
11/3	4,05
17/5	4,96

(i) ¿ Cuál es el porcentaje de disminución del valor de una acción al pasar del $5/2$ al $11/3$?;

(ii) ¿ Cuál es el porcentaje de aumento del valor de la acción al pasar del $11/3$ al $17/5$?;

(iii) Determine que sucedió con el valor de la acción al pasar del $5/2$ al $17/5$, y determine, ¿ cuál es el porcentaje correspondiente ?

27) Una farmacia atiende a personas afiliadas a una obra social que paga el 50 % del valor de los medicamentos, quedando el resto a cargo del afiliado. Si la farmacia hace un 10 % de descuento extra sobre lo que el cliente paga, ¿ Cuál es el porcentaje del valor del medicamento que pagará el afiliado?

28) En una escuela de 7 grados, para el almuerzo de 246 chicos, se abonan diariamente $ 1722 al concesionario del comedor. A partir de las vacaciones de invierno, éste decide premiar a los cuatro mejores alumnos de cada grado, con un descuento del 50 %. ¿ Cuánto se abonará diariamente a partir de agosto ?

29) En 1995, la familia López tuvo un consumo de electricidad promedio por bimestre de $ 37. En el bimestre enero-febrero sólo pagaron el básico de $ 18 ya que estuvieron de vacaciones. En el bimestre julio-agosto gastaron un 10 % más que en los otros cuatro bimestres, en los que el consumo fue el mismo. ¿ Cuánto gastaron en el bimestre julio-agosto ? ¿ Y en bimestre setiembre-octubre ?

30) Complete las siguientes tablas:

(i) (La tabla indica el precio de un artículo luego de un aumento, en función del precio del artículo y del porcentaje de aumento).

precio / % aumento	120	.....	.....
15	.....	793,5	.....
.....	147,6	.....	42
.....	.....	759	.....
40	.....	.....	.....

(ii) (La tabla indica el precio de un artículo luego de un descuento, en función del precio del artículo y del porcentaje de descuento).

precio / % descuento	100	300	.....
5	.....	.....	420
.....	.....	270	....
.....	.....	50	.....
17	.....	.....	.....

31) Si el dueño de un negocio ordena subir un 25 % el precio original de sus zapatillas en vidriera, para luego ofrecer a los compradores una rebaja sobre este último precio, de un 20 % más un 10 %. ¿ Con qué porcentaje vende respecto al precio original ?

(i) Con una rebaja de un 5 % ;
(ii) Con una rebaja de un 10 % ;
(iii) Con una rebaja de un 12,5 % ;
(iv) Con un aumento de un 10 % .

II.3. PROBLEMAS CON ECUACIONES E INECUACIONES.

Definiciones. –

Expresión literal.– Es la reunión de letras y cifras (números reales) combinados entre sí y sometidos a operaciones matemáticas.

Expresión algebraica.– Es toda expresión literal en la que aparece una combinación finita de las siguientes operaciones matemáticas : suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos.–

$$x + y \quad ; \quad \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{xy}} \quad ; \quad \frac{2x^2 - 3y^2}{ax + by} \quad ; \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Expresión algebraica entera.– Es toda expresión algebraica en la que las operaciones matemáticas de que se compone son las siguientes : suma, resta, multiplicación y potenciación con exponente natural.

Ejemplos.–

$$x^2 - 2xy + y^2 \quad ; \quad ax + b \quad ; \quad ax^2 + bx + c\ .$$

Identidad algebraica.– Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verificada cualesquiera sean los valores atribuidos a las variables (letras) contenidas en las dos expresiones, excluídos aquellos valores para los cuales al menos una de las dos expresiones algebraicas pierde significado. También se llama igualdad incondicional.

Ejemplo.– $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ es una identidad.

Ecuación algebraica.– Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verificada solamente para valores particulares de las variables (letras) contenidas en las dos expresiones.

Incógnitas.– Son las variables (letras) que aparecen en una ecuación algebraica.

Miembros de la ecuación.– Son las dos expresiones algebraicas que forman la ecuación. Se llama primer miembro a la expresión algebraica que se encuentra a la izquierda del signo igual y segundo miembro al que se encuentra a la derecha.

Solución de la ecuación.– Son los valores que, atribuídos a las variables incógnitas, producen una igualdad entre los dos miembros de la ecuación.

Resolver una ecuación.– Consiste en hallar todas las soluciones de la ecuación dada.

Ejemplos.– La ecuación $x + 1 = 0$ tiene una sola solución $x = -1$; la ecuación $x = x$ tiene infinitas soluciones al ser una identidad; la ecuación $x^2 = -1$ no tiene ninguna solución real.

Una ecuación algebraica puede clasificarse en :

(i) numérica : cuando contiene sólo números excepto de la incógnita ;

(ii) literal o paramétrica : cuando contiene letras o parámetros que representan números bien determinados además de la incógnita.

Ejemplos.– La ecuación $x + 1 = 0$ es numérica y tiene por única solución $x = -1$; la ecuación $x + m = 0$ es literal y tiene por única solución $x = -m$, para cada valor del parámetro o letra $m \in \mathbf{R}$.

Ecuación de primer grado en la incógnita x . – Es la dada por la siguiente expresión :

$$ax + b = 0 ,$$

donde a y b son números reales dados con $a \neq 0$.

Teorema.– La ecuación de primer grado $ax + b = 0$, en la incógnita x con a y b números reales dados con $a \neq 0$, tiene una única solución dada por:

$$x = -\frac{b}{a} \in \mathbf{R}.$$

Demostración.– Se tienen las siguientes equivalencias :

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax = -b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a} \text{ (pues } a \neq 0).$$

Además, $x = -\frac{b}{a}$ es solución de la ecuación $ax + b = 0$ pues se tiene que:

$$ax + b = a(-\frac{b}{a}) + b = -b + b = 0.$$

Ejemplo.– La solución de la ecuación $2x - 3 = 0$ es $x = \frac{3}{2}$.

1) Resuelva las siguientes ecuaciones numéricas de primer grado :

(i) $(x + 1)^2 - 4 = 2x + (x - 2)(x + 2) + 1$;

(ii) $7(x - 2) + x = 3(x - 8) + 5x$;

(iii) $x + \frac{x - 5}{3} + \frac{3x - 4}{2} - 2 = \frac{x - 2}{2}$;

(iv) $\frac{x - 1}{2 - 3x} = \frac{2x + 3}{3x - 2} - 3$.

2) Considere la ecuación :

$$2\,m\,(x - 1) = (m - 5)\,(x + 2) .$$

(i) Determine el valor del parámetro $m \in \mathbf{R}$ para que la ecuación admita la solución $x = 3$;

(ii) Indique si es posible elegir $m \in \mathbf{R}$ de manera que la ecuación admita como solución a un dado número real α;

(iii) Resuelva la ecuación en $\mathbf{R}$.

3) Resuelva las siguientes ecuaciones paramétricas o literales de primer grado en la incógnita x (m, a, $b \in \mathbf{R}$):

(i) $m\,x + 3 = 1 - x$;

(ii) $(m - 2)\,x + 3 = x + 4\,m$;

(iii) $3(x - m) - \frac{m}{2} = 2(2m - x)$;

(iv) $\frac{3x - 2a}{3} + 6b = x + 5b - \frac{2a}{3}$;

(v) $ab(a + b)^2x - a^2b^2(a + b) = (a + b)x - ab$;

(vi) $\frac{x - 2b}{a + 2b} - \frac{x + 2b}{a - 2b} = \frac{4ab}{4b^2 - a^2}$;

(vii) $m\left(1 - \frac{m}{x}\right) + \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$.

4) Resuelva los siguientes problemas que se conducen a ecuaciones de primer grado :

(i) Halle el número que sumado a su triplo da 60 ;

(ii) Halle el número que disminuido de su mitad y sumado a su triplo da 35 ;

(iii) Descomponga el número 20 en dos sumandos de manera que uno sea la cuarta parte del otro ;

(iv) Halle dos números cuya suma es 32 y su diferencia es 4 ;

(v) Halle tres números de manera que la suma de los tres sea 54, que el segundo sea el doble del primero y el tercero sea el triplo del segundo ;

(vi) ¿Qué número se debe agregar al numerador y al denominador de la fracción $\frac{3}{5}$ para obtener una fracción equivalente a $\frac{5}{6}$?

(vii) En un curso de 31 alumnos, los varones son la mitad más uno de las mujeres. ¿Cuántos son los varones y las mujeres del curso ?

(viii) Una persona compra una mercadería pagando \$30 por adelantado y 12 cuotas fijas por un valor igual a 1/15 del precio total. ¿Cuánto cuesta la mercadería ?

(ix) Si hoy el precio de una mercadería es de \$ 1.210, ¿Cuál fue el precio exactamente 2 años antes si se considera un incremento en los precios del 10% anual durante ambos años ?

(x) Un vendedor de frutas compró una cierta cantidad de manzanas a razón de 3 kilos por \$ 0,50 y vendió todo el lote a razón de 4 kilos por \$ 1. ¿Cuántos kilos compró el comerciante si la ganancia obtenida fue de \$ 10.= .

(xi) Un padre tiene 40 años y su hijo 10 años. ¿En cuántos años la edad del padre será el triplo de la de su hijo ?

(xii) Juan dice que hace 16 años tenía 2/3 de su edad actual. ¿Cuántos años tiene ahora ?

(xiii) José tiene igual número de monedas de 10 centavos y de 25 centavos. En monedas de 25 centavos tiene \$ 1,80 más de lo que tiene en monedas de 10 centavos. ¿Cuánto dinero tiene en total ?

(xiv) Un comerciante compró 15 docenas de platos a razón de \$ 3,50 cada plato. De éstos había 18 platos con una falla que vendió a \$ 2 cada uno. ¿A cuánto debe vender cada uno de los platos restantes si quiere obtener una ganancia total de \$ 118,80 ?

(xv) Del total de alumnos de una escuela de Salta, la mitad nació en la misma provincia, un tercio en otra provincia argentina y los restantes en otro país. ¿Cuántos alumnos de la escuela nacieron en la provincia de Salta si son 83 los alumnos extranjeros de esa escuela?

(xvi) Una persona paga \$121 con una tarjeta de crédito por la compra de un artefacto. Sabiendo que la tarjeta incluye un 10 % , calcule el precio por pago en efectivo de dicho artefacto.

(xvii) Con una rebaja del 15% una campera cuesta \$ 91,80. ¿Cuál era el precio anterior?

5) El cuerpo de un pez pesa 4 veces lo que pesa su cabeza, y la cola pesa 20 g. más que la cabeza. El pez tiene un peso total de 260 g.

(i) ¿Cuál es el peso de cada parte?

(ii) ¿Qué fracción del pez representa cada parte?

6) El cuerpo de un león pesa 15 veces lo que pesa su cabeza, y la cola pesa 4 kg. menos que la cabeza. El león tiene un peso total de 132 kg.

(i) ¿Cuál es el peso de cada parte?

(ii) ¿Qué fracción del león representa cada parte?

7) El papá de Luis pesa 46 kg más que Luis. Los dos juntos pesan 110 kg. ¿Cuánto pesa Luis?

8) Juan tiene \$ 85 más que Luis. Los dos juntos tienen \$ 980. ¿Cuánto tiene Luis?

9) José quiere comprar un artefacto pero le faltan \$ 135. Si el artefacto costara la mitad, le sobrarían \$ 45. ¿Cuánto cuesta el artefacto?

10) José tiene \$ 4,25 en monedas de 5 y de 25 centavos, con un total de 29 monedas. ¿Cuántas monedas son de 5 y cuántas son de 25 centavos?

11) Determine la solución de los siguientes problemas:

(i) Escriba tres números pares consecutivos de manera que la suma sea 48.

(ii) Escriba cuatro números impares consecutivos de manera que su suma sea 48.

(iii) Escriba tres números consecutivos de manera que su suma sea 48.

12) Hay 4 bloques grandes y 3 pequeños. Los bloques de igual tamaño pesan igual. El peso de un bloque grande es el triplo de uno pequeño. Todos los bloques juntos pesan 75 kg. ¿ Cuánto pesa un bloque grande ?

13) La mamá de Juan le lee 5 páginas de un libro por noche. Desde la segunda noche, la mamá comienza releyendo la última página para recordar en que habían quedado.
(i) El libro tiene 45 páginas. ¿ En cuántos días termina de leerlo ?
(ii) Idem al anterior, si el libro tiene 50 páginas. ¿ En cuántos días termina de leerlo ?

14) Dos socios inician un negocio con \$200.000 . Durante los primeros 8 meses pierden a razón de \$5.000 por mes y después ganan \$4.000 por mes. ¿ Cuántos meses transcurrirán desde el comienzo del negocio hasta que el capital inicial se haya duplicado ?

15) Una escuela tiene 36 aulas que se pintan todos los años. Del año pasado sobraron 4 latas de 20 litros de pintura. Por cada aula se necesitan 6 litros de pintura. ¿ Cuántas latas de 20 litros habrá que comprar este año ?

16) En un avión hay 150 pasajeros entre argentinos, uruguayos y chilenos. Si en el avión hay el doble de uruguayos que de argentinos, y 20 chilenos más que uruguayos, ¿ cuántos pasajeros hay de cada nacionalidad y cuales son los porcentajes correspondientes ?

17) (i) Dos números están en la misma razón como 2 es a 5. Uno de los números es 21 más que el otro. ¿ Cuáles son dichos números ?
(ii) Justifique el siguiente procedimiento para hallar la solución:

$$5 - 2 = 3 \; ; \qquad \frac{21}{3} = 7 \; ;$$

entonces los dos números están dados por las expresiones siguientes:

$$2 \times 7 = 14 \; , \qquad 5 \times 7 = 35 \; .$$

Verifique además que este método da la solución cualesquiera sean los números dados.

18) (i) Juan tiene las 3/4 partes de \$100. Indique qué porcentaje, de lo que tiene, le falta para lograr esa cantidad.
(ii) Idem con \$60, \$80, \$20.
(iii) Generalización: Juan tiene los 3/4 de una determinada cantidad. ¿ Qué porcentaje de lo que tiene le falta para lograr dicha cantidad ?
Observación: Se destaca que no es necesario conocer "la cantidad" para resolver el problema.

19) Un padre para estimular a su hijo a que estudie matemática, promete darle \$3 por cada ejercicio bien resuelto pero, por cada uno que esté mal, el hijo le dará al padre \$2. Ya van por el ejercicio 26, y el muchacho recibe de su padre \$38. ¿ Cuántos ejercicios ha resuelto bien y cuántos mal?

20) En una reunión de chicos y chicas el número de éstas excede en 25 al de aquellos. Se retiran de la reunión 10 chicas y 10 chicos y, ahora, quedan el doble de chicas que de chicos. ¿ Cuántos chicos y chicas había en la reunión?

21) Los organizadores de un torneo de tenis distribuyen lo recaudado en la inscripción entre las parejas

participantes que alcanzaron los 5 primeros lugares. Cada pareja recibe \$28 menos que la que está antes en la tabla de posiciones. La última pareja premiada recibe \$24 y en total participaron 16 parejas. ¿Cuánto pagó cada uno para inscribirse ?

22) (i) Sea C (número real positivo) el costo de una determinada mercadería. ¿Cuál debe ser el valor de venta de la mercadería para que el comerciante en una futura promoción, con un descuento del 10 %, gane un 20 % sobre el costo ?;
(ii) Indique el valor de venta, que no sea el de la promoción, para un costo de \$ 6, de \$ 9 y de \$ 15;
(iii) Indique, el porcentaje de ganancia cuando se efectúa la promoción;
(iv) Indique además, el porcentaje de ganancia cuando no se efectúa la promoción.

23) (i) Un fabricante mayorista vende a un comerciante minorista un determinado producto al valor de \$ 30 la unidad. El fabricante le ofrece colocar una etiqueta de precio a cada producto (para conveniencia del minorista en períodos de estabilidad económica). Se necesita conocer el precio que se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio de venta al público en 20%, en una oferta promocional, y obtener una utilidad del 12% sobre el costo del producto. Calcule además el porcentaje de la ganancia que obtiene el comerciante minorista en los días que no efectua la promoción.
(ii) Idem para el caso en que el comerciante minorista compre el producto al valor de \$ C (C es un valor positivo cualquiera y representa el caso de estudio que debe realizar el minorista para efectuar la promoción de sus numerosos productos que tiene en venta) (Es un problema real que se plantea como un problema paramétrico).

24) La suma de dos números naturales es 2096. Cuando se divide uno por el otro se tiene que el cociente es 5 y el resto es 206. Halle los dos números.

25) Descubra el código (cdu) de cada artefacto sabiendo que:

- Todos tienen tres cifras;
- Hay tres códigos impares y dos pares.

Artefacto	Datos	
Heladera	$u + d = 16$	$d + c = 12$
	$u + c = 10$	$u + d + c = 19$
Minicomponente	$d + u = 13$	$u + c = 13$
	$d + c = 8$	$u + d + c = 17$
Ventilador	$u + c = 11$	$d + c = 16$
	$u + d = 13$	$u + d + c = 20$
Lavarropas	$u + d = 10$	$u + c = 8$
	$c + d = 4$	$u + d + c = 11$
Televisor	$d + c = 6$	$u + d = 12$
	$c + u = 10$	$u + d + c = 14$

26) Las temperaturas se miden en grados Celsius o en grados Fahrenheit (de uso corriente en los países anglosajones). La relación entre las dos escalas es la siguiente:

$$F = \frac{9\,C + 160}{5} \quad \left(= \frac{9\,C}{5} + 32 \right)$$

donde C y F representan los grados Celsius y Fahrenheit respectivamente. Complete la siguiente tabla:

Grados Celsius	Grados Fahrenheit
10	–
–	68
–	10

27) Un padre desea premiar a sus hijos. Quiere darle 25 pesos a cada uno, pero para hacer eso le faltan 10 pesos. Ahora, si les da 20 pesos a cada uno, le sobra 25 pesos. ¿Cuántos hijos tiene?

28) Resuelva los siguientes problemas que se conducen a un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas :

(i) Halle dos números positivos que sean entre sí como 7 es a 3, y cuya diferencia sea 132 ;

(ii) En un corral, en que hay gallinas y conejos, se cuentan 60 cabezas y 160 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay ? ;

(iii) En un edificio, las puertas tienen 4 cristales y las ventanas tienen 6 cristales. Si se cuentan 30 aberturas y 172 cristales ¿Cuántas puertas y ventanas hay ? ;

(iv) Halle dos números positivos de manera que su suma sea 105 y su cociente sea $\frac{2}{5}$;

(v) Halle dos números positivos de manera que su suma y su cociente sean 5 ;

(vi) Halle el número de pesos que tienen Luis y José, sabiendo que :

(a) si Luis da \$20 a José, éste tendrá el doble de lo que le queda a Luis ,

(b) si José da \$20 a Luis, éste tendrá el triple de lo que le queda a José.

Definición .– Se llama inecuación a la expresión obtenida cuando se reemplaza la relación "=" en una dada ecuación por una de las siguientes relaciones: " $\geq$ ", " $>$ ", " $\leq$ ", " $<$ ".

Definición.– Una inecuación se dice de primer grado con una incógnita x si y sólo si la dada inecuación, a través de transformaciones regulares, es conducida a una inecuación equivalente de la forma:

$$\text{(I)}\quad a\,x + b > 0 \;(\geq 0)\,, \quad \text{con } a \neq 0\,.$$

Solución .– La inecuación (I) de primer grado con una incógnita x tiene por conjunto de solución S al siguiente :

1) Caso $a > 0$:

$$S = \{\, x \in \mathbf{R} \,/\quad x > -\tfrac{b}{a} \,\} = (-\tfrac{b}{a}\,, +\infty)\,;$$

2) Caso $a < 0$:

$$S = \{\, x \in \mathbf{R} \,/\quad x < -\tfrac{b}{a} \,\} = (-\infty\,, -\tfrac{b}{a})\,.$$

Observación .– El caso particular de la inecuación $ax + b > 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$ con a=0, posee las siguientes particularidades :

1) Tiene infinitas soluciones cuando $b > 0$, más aún el conjunto solución esta dado por $S = \mathbf{R}$;

2) No tiene soluciones cuando $b \leq 0$, es decir que el conjunto solución $S = \emptyset$.

29) Halle el conjunto de soluciones de las siguientes inecuaciones de primer grado con una incógnita (exprésel os como intervalos de números reales y grafíquelos en la recta real):

(i) $2\,x - 1 > 0$, (ii) $\frac{x}{2} + 3 \leq 0$,

(iii) $-5\,x > -5$, (iv) $-x - \frac{1}{2} < 0$.

30) Halle el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones de primer grado con una

incógnita (expréselos como intervalos de números reales y grafíquelos en la recta real) :

(i) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \,, \\ \frac{x}{2} + 3 \leq 0 \,; \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \,, \\ \frac{x}{2} + 3 > 0 \,; \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 5x + 1 \leq 0 \,, \\ x - \frac{1}{2} < 0 \,, \\ x + 1 > 0 \,; \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} 7x + \frac{1}{2} \geq 0 \,, \\ 3x - 25 < 0 \,, \\ 8x - 7 \leq 0 \,. \end{cases}$

31) Halle el conjunto de soluciones de las siguientes desigualdades, dadas por cocientes (represéntelos gráficamente en la recta real):

(i) $\dfrac{3x + \frac{1}{2}}{2x - \frac{1}{3}} \geq 0$; (ii) $\dfrac{-12x - 3}{7x + 2} \geq 0$;

(iii) $\dfrac{x + 1}{x - 1} < 0$; (iv) $\dfrac{x - 2}{2x - 1} \leq 0$;

32) Resuelva las siguientes inecuaciones con parámetro real m:

(i) $4mx + 3 < (m + 1)x$; (ii) $(m - 1)x > 5x + 3m$

33) Verifique que la inecuación de primer grado (en la variable x)

$$\frac{3x - 2}{m} - m < x \,,$$

con parámetro real $m \in \mathbf{R}$, tiene como conjunto de solución S al conjunto dado por :

(i) $S = \left(\dfrac{m^2 + 2}{3 - m}, +\infty\right)$ cuando $m < 0$; (ii) La inecuación no está definida cuando $m = 0$;

(iii) $S = \left(-\infty, \dfrac{m^2 + 2}{3 - m}\right)$ cuando $0 < m < 3$; (iv) $S = \mathbf{R}$ cuando $m = 3$;

(v) $S = \left(\dfrac{m^2 + 2}{3 - m}, +\infty\right)$ cuando $m > 3$.

34) (i) Resuelva, en **R**, las inecuaciones irracionales siguientes :

(a) $\sqrt{3 - x} < 2$; (b) $\sqrt{2 - x} < 10$; (c) $\frac{x-1}{2} < \sqrt{1 + x}$; (d) $\sqrt{x - 4} < \frac{x}{4} - 1$.

(ii) Discuta y resuelva, en **R** , la siguiente inecuación irracional con parámetro real m :

$$\sqrt{x - m} < 1 \,.$$

35) Juan sale de su casa con \$ 50. Gasta \$ 2,50 en taxi y debe guardar otros \$ 2,50 para la vuelta. Ve en un negocio remeras que le gustan por un valor de \$ 12,50 cada una. ¿Cuántas remeras podrá comprar?

36) Una persona invirtió un total de \$ 10.000 en dos empresas A y B. Al final del primer año las empresas A y B produjeron rendimientos del 6% y del 5% respectivamente sobre las inversiones originales.

(i) ¿Cómo se distribuyó la cantidad original, si el total que se ganó fue de \$ 570?

(ii) ¿Qué explicación daría usted si lo que se ganó es de \$ 470 ó de \$ 610 ?

(iii) ¿Puede usted generalizar el item (i) para porcentajes de rendimientos i, j para las empresas A y B respectivamente, y ganancia G al final del primer año ? ¿ Qué condición necesaria debe verificar G para que exista solución al problema planteado ?

37) El costo de mano de obra y materiales de un producto es de \$5 por unidad para el fabricante. Además, los costos fijos (los que se tienen en un determinado período independiente de la cantidad que se fabrique) son de \$ 20.000 . Si el precio de venta del producto es \$7 por unidad, se necesita saber cuántos deben venderse para que la Compañía obtenga utilidades.
(Ayuda: deduzca y resuelva una inecuación de primer grado en el número de productos a venderse utilizando el hecho que: utilidades = ingresos totales − costos totales > 0).

38) Una secretaria debe comprar sellos postales de \$1 y \$2 por un total que no supere los \$100. Ella desea, además, que el número de los de \$1 sea más de 10 y al menos el doble de los de \$2. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.
(Ayuda : Plantee un sistema de desigualdades para las variables x = número de sellos postales de \$1, y = número de sellos postales de \$2).

39) En un negocio se venden radios de dos marcas A y B. Según la demanda de los clientes es necesario almacenar al menos el doble de los aparatos A respecto a los aparatos B y se deben tener a la mano al menos 20 de la marca A y 10 de la marca B. Si no se tiene espacio para más de 100 aparatos en el negocio, encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

40) Una persona desea invertir \$ 10.000 en dos cuentas de ahorro distintas. Desea tener al menos \$2.000 en cada una y que la cantidad que haya en una sea al menos el triple de lo que haya en la otra. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

41) (i) Sea una cantidad de dinero C_o (capital inicial) que se invierte a interés compuesto (al final de cada período los intereses devengados se acumulan al capital inicial y se reinvierten) a un interés simple del i por ciento (se tiene en cuenta que $i = 0{,}10$ representa el 10%) por un período (por ejemplo: semestral, trimestral, mensual, etc.). Entonces, el capital al final de $n \in \mathbf{N}$ períodos está dado por la fórmula exponencial siguiente:

$$C(n) = C_o\,(1 + i)^n .$$

(ii) Si se invierten \$ 10.000 al 12 % anual y los intereses se acumulan mensualmente, se solicita determinar cuál será el capital después de 1, 3, 6 y 12 meses ? Además, cuánto dinero habrá que invertir para tener al menos \$ 15.000 al final del primer año?

VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

Definición .− Sea $x \in \mathbf{R}$. Se define como valor absoluto del número real x al dado por la expresión siguiente :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 , \\ -x & \text{si} \quad x < 0 . \end{cases}$$

Por otra parte, el número $|x|$ representa geométricamente, en la recta real, la distancia del número real x al origen. Más aún, viene dado por la siguiente expresión:

$$|x| = \text{Máx}\,(x,\ -x).$$

42) El valor absoluto de números reales satisface las siguientes propiedades ($\forall$ x, y $\in \mathbf{R}$):

(i) $|x| \geq 0$; (ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $|-x| = |x|$; (iv) $-|x| \leq x \leq |x|$;

(v) $|x\,y| = |x|\,|y|$; (vi) $|x/y| = |x|/|y|$ $(y \neq 0)$;

(vii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$; (viii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdad triangular) ;

(ix) $|x - x_0| < a \Leftrightarrow x_0 - a < x < x_0 + a$ $(\forall\, x_0 \in \mathbf{R},\ \forall\, a > 0)$;

(x) $|x| > a \Leftrightarrow x > a \ \vee\ x < -a$ $(\forall\, a > 0)$;

(xi) $0 < |x| < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > a$ $(\forall\, a > 0)$;

(x) $\sqrt{x^2} = |x|$.

43) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) $|x - x_0| < a \Leftrightarrow x < a - x_0 \vee x > x_0 + a$.

(ii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$.

(iii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a \wedge x < -a$.

(iv) $\exists x \in \mathbf{R} \,/\, |x| \leq 0$.

En caso de ser verdaderas de un ejemplo y grafíquelo en el eje real, y si son falsas escriba la equivalencia correcta.

44) (i) Suprima, en las siguientes expresiones, el símbolo de valor absoluto de números reales (si es necesario, distinga varios casos):

(a) $x + |x|$; (b) $2\,|x - 3| + |x - 2|$; (c) $3\,|x - 4| - |x + 4| - 2\,|x|$.

(ii) Resuelva, en $\mathbf{R}$, las siguientes ecuaciones:

(a) $2\,|x - 3| + \frac{x}{2} = 5 - (3\,x - 1)$; (b) $x - 9 = 4\,|x + 2|$.

(iii) Resuelva, en $\mathbf{R}$, analítica y gráficamente las siguientes inecuaciones (represente gráficamente el conjunto de soluciones en la recta real):

(a) $|x - 4| < |x + 1|$; (b) $x \leq |x + 2|$; (c) $|x + 2| \leq 3\,|x|$;

(d) $|x - 2| \leq |x + 5|$; (e) $|x + 8| \leq |x - 4|$.

45) Determine gráficamente en el plano el conjunto de soluciones del siguiente sistema de inecuaciones:

$$|x| \leq 2, \qquad x + y \leq 3, \qquad -2x + y \geq -4.$$

Además, halle los puntos vértices del conjunto solución.

46) (i) Sea la función real definida por la siguiente ley : $f(x) = 2|x - 5| - |x + 1|$.

(a) Halle una expresión equivalente (distinguiendo varios casos, si fuese necesario) a la dada ley que no contenga las barras de valor absoluto ;

(b) Realice la gráfica de la función real f ;

(c) Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 9$ (Rta.: $S = [0, 20]$).

(ii) Idem caso anterior (i) para la función real definida por la siguiente ley : $f(x) = |x - 4| + \left|\frac{x+1}{2}\right|$. Además, resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 10$.

(iii) Idem caso anterior (i) para la expresión $f(x) = |x - 1| + 1 - |x - 3|$. Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \geq \frac{2}{5}x + 1$.

(iv) Idem caso anterior (i) para la expresión $f(x) = -2|x+1| + |3x-1|$. Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 6$.

(v) Idem caso anterior (i) para la expresión $f(x) = 3|x-1| + |2x+1|$. Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 6$.

(vi) Idem caso anterior (i) para la expresión $f(x) = |x+3| - \left|\frac{x-2}{2}\right|$. Resuelva analítica y gráficamente las inecuaciones $f(x) \leq 8$ y $f(x) \leq 1 + 2x$.

II.4. PROBLEMAS PARA PENSAR.

Definiciones. — (i) Los números triangulares son los dados por la sucesión de números

$$T_n = 1+2+3+......+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, ...$$

es decir : 1, 3, 6, 10, ...

(ii) Los números cuadrangulares son los dados por la sucesión de números

$$Q_n = n^2 \quad \text{con } n = 1, 2, 3, ...$$

es decir 1, 4, 9, 16, ...

(iii) Los números perfectos son aquellos que son iguales a la suma de todos sus divisores, excepto el número mismo.

(iv) Dos números son amigos cuando la suma de los divisores de uno de ellos, exceptuando el número mismo, es igual al otro y recíprocamente.

1) Verifique que :

(i) La diferencia entre dos números cuadrangulares consecutivos es la sucesión de los números impares;

(ii) Los números 36, 1225 y 41616 son números triangulares y cuadrangulares simultáneamente;

(iii) La suma de 2 números triangulares consecutivos es un número cuadrangular;

(iv) Los números 6, 28, 496 y 8128 son números perfectos;

(v) Los números 220 y 284 son amigos. Idem con 1184 y 1210 y, con 2620 y 2924.

2) Demuestre por contradicción que si X y Y son números reales tales que

$$X \geq 0\,, \qquad Y \geq 0\,, \qquad X+Y=0\,,$$

entonces $X=0$ y $Y=0$.

3) Sea el número N=3a42b de 5 cifras con a y b dígitos.

(i) ¿ De cuántas maneras se pueden elegir a y b para que N sea divisible por 6 ?

(ii) Para cada solución hallada en (i) encuentre el cociente de la división de N por 6.

4) Las páginas 7 y 13 de un diario están en la misma hoja doble. Si todas las hojas del diario son dobles ¿ cuántas páginas tiene el diario ?

5) Se elige un número de dos cifras AB con A ≠ B. Se invierten sus cifras BA. Se resta el menor del mayor y se suman las cifras del resultado. Demuestre que siempre se obtiene el mismo resultado final. ¿ Cuál es ?

6) Complete los cuadrados con los cinco dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 de manera que no se repitan en ninguna de las franjas horizontales, verticales y oblicuas.

(i)

		4		
	1	....	....	
....	....	5	....	....
	....	....	....	
		3		

(ii)

		....		
	3	....	2	
....	....	4	....	5
	....	....	....	
		....		

Definición: Un cuadrado se dice mágico respecto de la operación suma (producto) cuando la suma (producto) de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

7) Cuadrados mágicos respecto de la suma:

(i) Complete los siguientes cuadrados mágicos con los números del 1 al 9 con constante 15. ¿La solución es única ?

a)

8	.....	.....
.....	5	.....
.....	.....	.....

b)

.....	.....	.....
.....	.....	1
2	.....	.....

(ii) ¿Es posible construir un cuadrado mágico con los nueve números siguientes : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ?

8) Cuadrados mágicos respecto del producto:

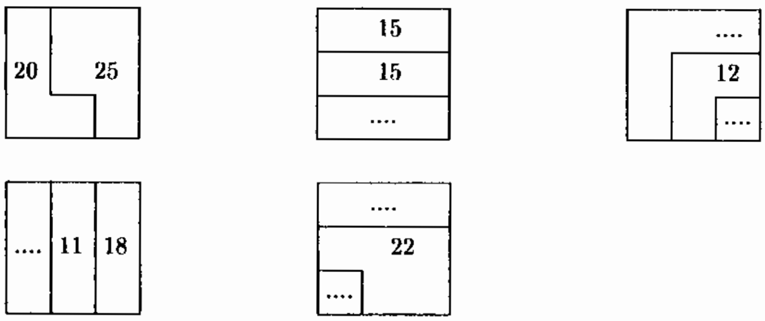
(i) Complete el siguiente cuadrado mágico .

3	.....	.....
.....	6	.....
.....	1	12

9) Escriba los números del 1 al 9, en la tabla de 3 filas y 3 columnas siguiente:

....	....	....
....	....	....
....	....	....

de manera que se satisfagan las sumas indicadas:



10) ¿Cuál es la menor de las siguientes fracciones

$$\frac{5}{x}, \qquad \frac{x+1}{5}, \qquad \frac{5}{x-1}, \qquad \frac{x}{5}, \qquad \frac{5}{x+1},$$

si $x > 5$?

11) Determine si los siguientes números α y β son naturales y en caso positivo indique el correspondiente valor:

(i) $\alpha = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$; (ii) $\beta = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ (Rta.: $\alpha = 4$; $\beta = 2$).

12) Determine el número natural dado por las siguientes expresiones:

$$\alpha = \sqrt{16+\sqrt{252}} + \sqrt{16-\sqrt{252}} \;; \qquad \beta = \sqrt{16+2\sqrt{63}} + \sqrt{16-2\sqrt{63}} \;;$$

$$\delta = \sqrt{16+3\sqrt{28}} + \sqrt{16-3\sqrt{28}}\,.$$

y verifique que representan al mismo número natural.

13) ¿Cuánto vale la siguiente expresión $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}}$?

14) ¿Los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11 ?

15) Reemplace cada letra por un número, del 1 al 9, de modo que se verifique el resultado dado

$$\begin{array}{cccccccc} & S & U & M & A & N & D & O \\ + & & & S & U & M & A & R \\ \hline & 9 & 8 & 3 & 1 & 5 & 0 & 7 \end{array}$$

teniendo en cuenta que a una misma letra le corresponde siempre el mismo número. Se solicita:

(i) Halle todas las posibles soluciones en el caso en que a letras diferentes correspondan números diferentes.

(ii) ¿Qué sucede si los números correspondientes a letras diferentes pueden repetirse ?

16) Cada letra utilizada (A, C, E, I, M, N, T) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera de obtener la mayor MACANA posible, siendo:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & M & A & T & E \\
+ & M & A & T & I & C & A \\
\hline
 & M & A & C & A & N & A
\end{array}
$$

para los siguientes casos:

(i) A letras diferentes deben corresponder números diferentes;

(ii) A letras diferentes pueden corresponder números iguales.

17) ¿Cuántos primos puede tener Juan, de acuerdo al siguiente diálogo, si se sabe que uno solo de los chicos dice la verdad?

José dice: Juan tiene por lo menos 6 primos;

Alberto corrige : No, tiene menos de 6;

Pablo agrega: Tal vez tengas razón, pero lo que yo sé, es que tiene más de 1 primo.

18) Los trillizos Ramirez tienen la siguiente molesta costumbre: cada vez que se les hace una pregunta, dos de ellos dicen la verdad y el otro la mentira acerca de la respuesta. Se les preguntó cuál de los tres había nacido primero, y contestaron:

José dice: "Juan nació primero";

Juan dice: "Yo no soy el mayor";

Pablo dice: "José nació primero".

¿Cuál de los tres nació primero?

19) Indique, al menos tres respuestas, para la siguiente pregunta de abstracción: ¿Cómo se puede demostrar que dos números reales son iguales?

20) Demuestre por contradicción que :

(i) En una fiesta de n personas ($n \geq 2$), existen por lo menos dos personas que tienen el mismo número de amigos en la fiesta ;

(ii) No existen tres números naturales consecutivos tales que el cubo del mayor sea igual a la suma de los cubos de los otros dos.

Definición.– Dados dos números positivos a y b, se definen la media aritmética MA y la media geométrica MG de la siguiente manera :

$$MA = \frac{a+b}{2} \qquad ; \qquad MG = \sqrt{ab} \ .$$

21) (i) Demostrar que :

(a) $MG \leq MA$; (b) $MG = MA \Leftrightarrow a = b$; (c) $x\,(1-x) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall\ x \in [0,1]$.

(ii) ¿Cuál es el rectángulo de área máxima que tiene por perímetro p?

(iii) La población de la Argentina está dada en la siguiente tabla:

año	población (en millones de habitantes)
1960	20
1970	23
1980	28
1990	33

(a) Calcule las medias aritmética y geométrica de la población de los años 1960 y 1980. Compare los valores hallados con los que nos brinda la tabla para el año 1970.

(b) Idem (a) para los años 1970 y 1990.

(c) Estime el número de habitantes que tendría la Argentina en el año 2000, utilizando solamente los datos de la tabla.

Observación.- Los resultados obtenidos con la MA y la MG no son muy diferentes. En general, para problemas referentes al crecimiento o decrecimiento de poblaciones la MG da resultados más aproximados a la realidad. Naturalmente que éstos son valores estimados, es decir, aproximados, pues pueden ocurrir fenómenos, (catástrofes, gran inmigración o emigración) que los haga variar.

22) Demuestre que el producto de un número de una cifra "a" por otro número formado por n cifras "b" tiene el mismo resultado que el producto de un número formado por una cifra "b" por otro número formado por n cifras "a", es decir que: $a \times bbbb....b = b \times aaaa....a$.

23) Encuentre todos los números de dos cifras AB que sumados a su 75 % se obtiene el número BA.

24) De valores a las letras para que se verifique:

(i) $(HE)^2 = SHE$; (ii) $\sqrt{LAPICEROS} = AAIIR$.

25) Una prueba ciclística comprende 35 vueltas al circuito. En el momento en que el ciclista que va primero está a 7 vueltas de la llegada, el ciclista que va último está a 3 vueltas del primero y lleva 4920 m de retraso con respecto a éste. Hasta ese momento, ¿qué distancia recorrió el ciclista que va primero?

26) En el correo cobran \$ 1,25 de franqueo por los primeros 100 g y después, por cada 10 g de más, se pagan \$ 0,09. ¿Cuánto pesaba la carta que se mandó, si se pagó \$ 2,60 de franqueo?

27) Tres hermanos reciben una suma de dinero y deciden partirlo en tres partes iguales para hacer tres inversiones distintas con cada parte, luego reunirlos nuevamente repartirlos en tres partes iguales, una para cada uno. La primera inversión triplica el capital, la segunda lo duplica y la tercera lo reduce a la mitad. ¿Qué porcentaje de beneficio sobre la suma original recibió cada hermano?

28) ¿Qué prefiere, que le hagan el descuento del 10 % antes o después de pagar el 21 % del IVA?

29) En un pueblo, el 14 % de la población son menores de 21 años. Si hay 2880 adultos más que menores, ¿cuántos habitantes tiene el pueblo?

30) Un comerciante anuncia en su vidriera que hace un 10 % de descuento sobre los precios del día, pero lo cierto es que previamente había aumentado un 10 % los precios originales. Decida si como

consecuencia de las dos operaciones efectuadas por el comerciante, los precios originales sufrieron alguna modificación.

31) Un comerciante descubrió un truco genial : Si quería vender una cierta mercadería a un precio determinado lo aumentaba en un 15 % y así hacía al cliente un 15 % de descuento cuando éste venía a comprarle. ¿Qué opina de la actitud del comerciante? ¿Gana más o menos de lo que en realidad quería ganar? ¿Qué porcentaje tendrá que aumentar el valor de la mercadería para no tener que venderlo más bajo de lo deseado, haciendo siempre el mismo descuento del 15%?

32) Un vendedor de telas gana el 30 % sobre el precio de costo. Pero un día descubre un metro defectuoso que hace aumentar sus beneficios al 33 %. ¿Cuánto mide en realidad el metro tramposo ?

33) En un número de dos cifras la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras resulta un número que sumado al anterior da 121. Averigue tal número.

34) (i) Para numerar las páginas de un libro se usaron 495 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro ?
(ii) ¿Idem al anterior, si se hubiesen utilizado 6725 cifras ?

35) Cuatro vacas negras y tres vacas marrones dan tanta leche en cinco días como tres vacas negras y cinco marrones en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la mejor lechera, la negra o la marrón?

36) Juan tiene el triple del dinero que tiene Alberto. Si Juan le da a Alberto \$ 78 entonces tendría solamente el doble. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

37) (i) Julián lleva un canasto con manzanas. Encuentra a tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que le dió al primero más dos; y al tercero la mitad de lo que le dió al segundo más dos. ¿Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?
(ii) Al día siguiente lleva otro canasto con manzanas. Encuentra a sus tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que le quedan más dos; y al tercero la mitad de las sobrantes más dos. ¿Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?

38) El dueño de una empresa propone a sus empleados dos opciones :

(Op.1) Aumentar los sueldos el 5 % ;

(Op.2) Aumentar los sueldos un monto fijo de \$ 100 .

¿A partir de que salario se debe elegir la primera opción? ¿y la segunda opción?

39) Una compañía de transporte propone a sus clientes las tres posibilidades siguientes :

(a) P1 : Comprar en cada viaje, un boleto donde el precio es proporcional al kilometraje, a razón de \$ 0,30 por kilómetro ;

(b) P2 : Comprar un abono anual de \$600, que permite viajar durante todo el año a razón de \$ 0,15 por kilómetro ;

(c) P3 : Comprar un abono anual de \$ 1500, que permite recorrer hasta 5000 km ; a partir de los 5000 Km, todo Km suplementario costará \$ 0,10 por kilómetro.

Una persona recorre anualmente "x" Km con esta compañía. Se definen las funciones $f_i : R^+ \rightarrow R^+$ $(i = 1, 2, 3)$, correspondiente a la posibilidad Pi, que a "x" asocia el costo en \$ de los viajes anuales de esta persona.

(i) Escriba la ley correspondiente para f_1, f_2 y f_3 ;

(ii) Represéntelas gráficamente en un mismo plano cartesiano ;

(iii) Utilizando sus representaciones gráficas, determine qué posibilidad es la más conveniente si la persona recorrerá 3000 Km por año, 6500 Km por año, 9000 Km por año.

(iv) ¿Cuál es la posibilidad más económica en función del número de kilómetros recorridos en un año? ¿Cuál es la función que a "x" asocia el gasto mínimo para una persona?

40) Un negocio para alquilar videos propone a sus clientes tres posibilidades :

(a) P_1 : \$ 24 de abono anual más \$ 1,5 por cassette alquilado ;

(b) P_2 : \$ 12 de abono anual más \$ 2 por cassette alquilado ;

(c) P_3 : sin abono anual, pero \$ 3 por cassette alquilado.

(i) ¿Cuál es la posibilidad más económica para alquilar, por año, 10 cassettes?, para 20?, para 30? ;

(ii) a) Exprese, para cada posibilidad, el precio a pagar en función del número x de cassettes alquilados;

(b) Represente gráficamente estas tres posibilidades de alquiler en un mismo plano cartesiano ;

(c) Un cliente, habiendo elegido la P_1 ha gastado en el año \$ 51. ¿Ha hecho una buena elección? ;

(d) Otro cliente ha gastado \$ 53 en el año. ¿Es esto posible? ¿Habrá algún error cometido por el dueño del negocio? ;

(iii) ¿Cuál es la posibilidad más ventajosa para elegir según el número de cassettes alquilados?

41) Una AFJP de la Argentina descuenta, de los salarios nominales de sus afiliados, los siguientes importes según la fecha en que se realice el aporte mensual correspondiente:

(Op.1) Hasta diciembre de 1995 descontaba el 2,6 % del sueldo más \$ 5 de cuota fija por mes;

(Op.2) A partir de enero de 1996 descuenta el 2,3 % del sueldo más \$ 8 de cuota fija por mes.

Se solicita responder a las siguientes preguntas: (i) ¿A partir de que salario conviene la segunda opción? ; (ii) Si el promedio de los salarios nominales de los afiliados a la AFJP es de \$ 2.000, indique si, en general, la segunda opción beneficia a los afiliados

42) (i) Juan puede hacer un trabajo en 5 días y en cambio José puede hacerlo en 3 días. ¿En qué tiempo lo harán trabajando conjuntamente?; (ii) Juan puede hacer un trabajo en 3 días, José en 4 días y Pablo en 6 días. ¿En qué tiempo harán la obra trabajando conjuntamente?

43) Determine los resultados de cada partido si la posición final de un cuadrangular de fútbol es la dada por la siguiente tabla en la cual se tienen en cuenta que:

(a) J, G, E y P representan la cantidad de partidos jugados, ganados, empatados y perdidos respectivamente;

(b) GF y GC representan la cantidad de goles a favor y en contra respectivamente;

(c) El puntaje es la suma de los puntos obtenidos en el torneo a razón de 2, 1 y 0 puntos por partido ganado, empatado y perdido respectivamente.

Resultados Equipos	J	G	E	P	GF	GC	PUNTAJE
A	3	3	0	0	7	2	6
B	3	2	0	1	3	3	4
C	3	0	1	2	3	6	1
D	3	0	1	2	0	2	1

BIBLIOGRAFÍA

• A. ÁLVAREZ ÁLVAREZ, "Uso de la calculadora en el aula", Narcea, Madrid (1995).

• M.E. ANDRÉS et al., " Matemática 7 EGB, 9 EGB", Serie Claves, Editorial Santillana, Buenos Aires (2000-2001).

• J.L. ANTÓN BOZAL et al., "Taller de Matemáticas", Narcea, Madrid (1994).

• M. BARRAT, "Les mathématiques", Nathan, Paris (1995).

• N.H. CARIONE – S.G. CARRANZA – M.T. DIÑEIRO – M.L. LATORRE – E.E. TRAMA, "Matemática 3", Santillana, Buenos Aires (1995).

• M.E. CARMINATI de LIMONGELLI – M.J. ROCA de SILVA, "Viaje por el mundo de la Matemática", A – Z Editora, Buenos Aires (1993).

• L. CATTANEO et al., "Matemática hoy en la EGB", Homo Sapiens, Rosario (1997).

• DICCIONARIO ENCICLOPEDICO LAROUSSE, (8 tomos) Planeta Internacional, Barcelona (1992).

• DICCIONARIO de la LENGUA ESPAÑOLA, Real Academia Española, Madrid (1992).

• A. DICKENSTEIN, "Mate Max. La Matemática en todas partes", Libros del Quirquincho, Buenos Aires (1994).

• S. ENGLEBERT – S. PEDEMONTI – S. SEMINO, "Matemática A–Z 1, 2", A–Z Editora, Buenos Aires (1994 – 1995).

• P. FAURING – F. GUTIERREZ, "Olimpíada Matemática Argentina. Problemas 1, 3, 4, 5", Red Olímpica, Buenos Aires (1993 – 1994).

• M.O. GONZÁLEZ – J.D. MANCILL, "Álgebra elemental moderna", Vol. 1, 2, Kapelusz, Buenos Aires (1991).

• M. de GUZMÁN – J. COLERA – A. SALVADOR, "Matemáticas. Bachillerato 1", Anaya, Madrid (1993).

• E. HINRICHSEN – N. BUSCHIAZZO – S. FILIPPUTTI – S. S. de HINRICHSEN, "Olimpíada Matemática Argentina. Problemas 2", Red Olímpica, Buenos Aires (1994).

• L. LAGRECA de CATTANEO – S. STRAZZIUSO de HINRICHSEN – R.O. MASCO – A. MASCO de NASINI, "Teoría elemental de las proporciones. Regla de tres", EUCA, Buenos Aires (1971).

• G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas", Trillas, México (1994)

• M. RODRIGUEZ – M. MARTINEZ, "Matemática 7 EGB, 8 EGB, 9 EGB", McGraw-Hill Interamericana, Santiago de Chile (1998).

• P. SADOVSKY – M.P. MELGUIZO – C.L. RUBINSTEIN de WALDMAN, "Matemática 1", Santillana, Buenos Aires (1988).

• P. SADOVSKY – M. KASS – M.G. PANIZZA – M.I. REYNA, "Matemática 2", Santillana, Buenos Aires (1988).

• L.A. SANTALO, "Matemática 1, 2, 3. Iniciación a la creatividad", Kapelusz, Buenos Aires (1993 – 1995).

• J. SEVESO – G. FERRARINI, "Olimpíada Matemática Ñandú. Problemas 1, 2, 3, 4", Red Olímpica, Buenos Aires (1994 – 1996).

• J. SEVESO – A. WYKOWSKI – G. FERRARINI, "Matemática 7, 9", Kapelusz, Buenos Aires (1996, 1998).

• D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).

• D.A. TARZIA, "Curso de nivelación de Matemática", McGraw-Hill Interamericana, Santiago de

Chile (2000).

- D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", MAT-Serie B, # 1, Rosario (2000).

- D.A. TARZIA – N.D. GURRUCHAGA, "Operaciones", Curso EGB Bloque 2, 2do. Ciclo Área Matemática, Programa Nacional de Capacitación Docente, Red Federal de Formación Docente Continua (Min. Educación Prov. Santa Fe), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1996).

- N. VAZQUEZ de TAPIA – A. TAPIA de BIBILONI – C.A. TAPIA, "Matemática 1, 2", Angel Estrada y Cía, Buenos Aires (1980).

- Serie Dinámica Kapelusz, "Matemática 6", Kapelusz, Buenos Aires (1993).

- Serie Dinámica Kapelusz, "Matemática 7", Kapelusz, Buenos Aires (1988).

- Diarios La Nación y Clarín, Buenos Aires.

III. NOCIONES GEOMÉTRICAS

III.1. PROBLEMAS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA DEL PLANO. DE TODO UN POCO.

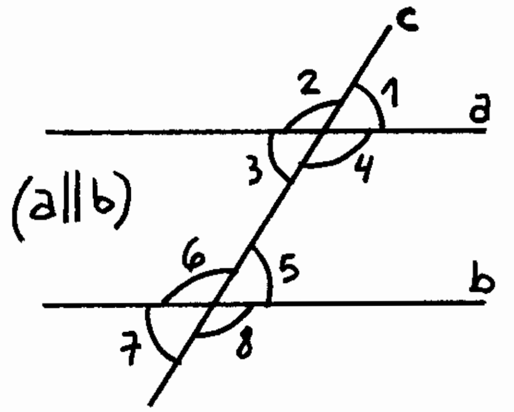
Introducción.

Se designarán las rectas (también los segmentos) con letras minúsculas, los ángulos con letras mayúsculas o griegas. Por ejemplo, en un triángulo, "a", "b", "c" son las longitudes de los lados, y "A", "B", "C", los ángulos opuestos correspondientes; en un cuadrilátero ABCD los vértices consecutivos están en ese orden, y los lados a, b, c, d, también a partir de $\overline{AB} = a$. En un triángulo "h_a" es la altura desde el vértice A al lado opuesto; "m_a" la mediana que une A con el punto medio de BC; "V_a" es la longitud de la bisectriz del ángulo A hasta el lado opuesto; p es el semiperímetro de un polígono y S su área.

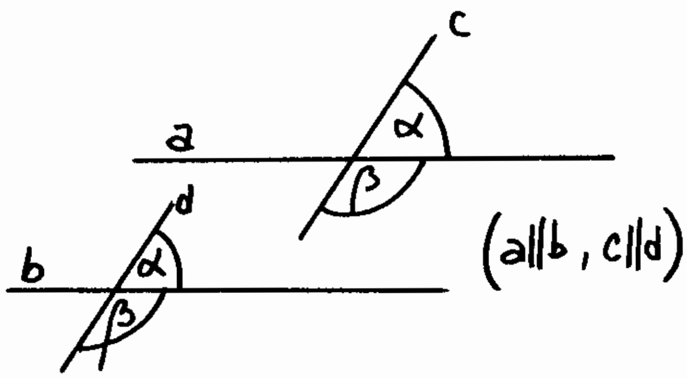
A continuación se enunciarán propiedades elementales correspondientes a rectas, ángulos, circunferencias, triángulos y cuadriláteros.

Propiedades de rectas y ángulos.

1) Si dos rectas paralelas a, b, se cortan por una secante c, entonces:
(i) los ángulos alternos internos 3, 5 son iguales;
(ii) los ángulos alternos externos 1, 7, son iguales;
(iii) los ángulos correspondientes 1, 5, son iguales;
(iv) los ángulos colaterales internos 4, 5 son suplementarios;
(v) los ángulos colaterales externos 1, 8 son suplementarios.



2) Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son iguales si ambos son agudos o ambos son obtusos; y suplementarios, si uno es agudo y el otro obtuso.



3) Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales si ambos son agudos o ambos son obtusos; y suplementarios, si uno es agudo y el otro obtuso.

4) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes (suplementarios) son perpendiculares.

5) Si por el punto medio de un segmento se traza una perpendicular (mediatriz) sus puntos equidistan de los extremos del segmento, y recíprocamente.

6) Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de las rectas que forman el ángulo, y recíprocamente.

Propiedades en la circunferencia.

7) El diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos correspondientes en dos partes iguales.

8) La tangente en un punto es perpendicular al radio correspondiente a ese punto y recíprocamente.

9) Las posiciones relativas de dos circunferencias en un plano son: exteriores, tangentes exteriores, secantes, tangentes interiores, interiores y concéntricas.

10) Si dos circunferencias son tangentes exteriores o tangentes interiores, el punto de contacto está alineado con los centros.

11) Si dos circunferencias son secantes, la recta que une los centros es mediatriz de la cuerda común.

12) Si dos circunferencias tienen centros O y O', y radios r y r', respectivamente, si $d=\overline{OO'}$ es la distancia entre los centros O y O', entonces se verifica:

(i) $d > r + r'$:	si son exteriores;
(ii) $d = r + r'$:	si son tangentes exteriores;
(iii) $r - r' < d < r + r'$:	si son secantes;
(iv) $d = r - r'$:	si son tangentes interiores;
(v) $d < r - r'$:	si son interiores;
(vi) $d = 0$:	si son concéntricas.

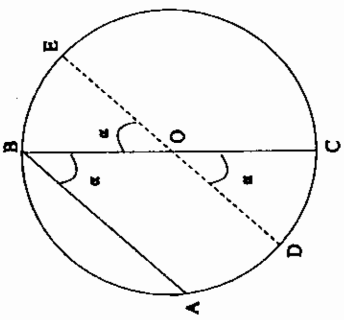
13) En la circunferencia de radio unidad la medida de un ángulo central (formado por dos radios) es la del arco que abarca.

14) La medida de un ángulo inscripto (formado por dos cuerdas) es la mitad del ángulo central correspondiente al mismo arco. Se pueden presentar varios casos, a saber:

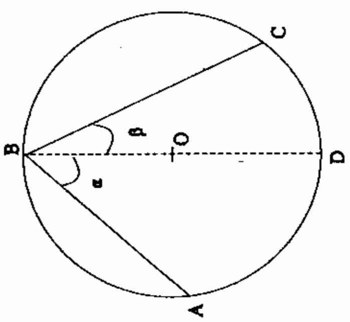
(i) el ángulo está formado por una cuerda y un diámetro;

(ii) las cuerdas están en diferentes semicírculos;

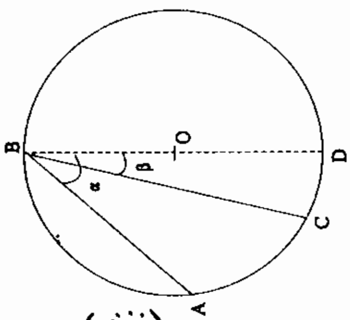
(iii) las cuerdas están en el mismo semicírculo.



(i)



(ii)



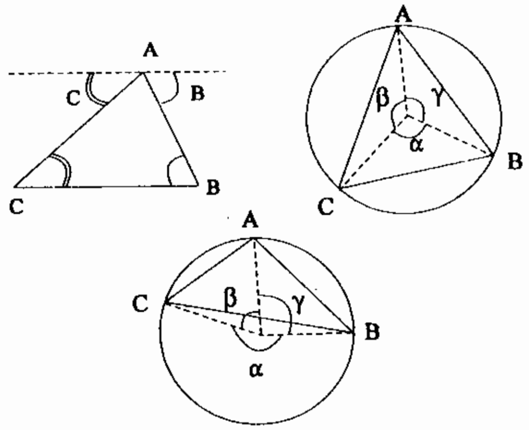
(iii)

Triángulos.

15) En todo triángulo de lados a, b y c, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia, es decir

$$|b-c| < a < b+c, \qquad |a-c| < b < a+c, \qquad |a-b| < c < a+b.$$

16) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos (es decir 180°).



17) El ángulo exterior de un triángulo (el adyacente a uno de sus ángulos) es igual a la suma de los dos ángulos no adyacentes.

18) En todo triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales (triángulos isósceles) y a mayor lado se opone mayor ángulo.

Igualdad de triángulos.

19) Dos triángulos ABC y A'B'C' son iguales si se tiene uno de los siguientes casos:

(i) los tres lados iguales a sus homólogos: a = a', b = b', c = c';

(ii) dos lados iguales a sus correspondientes y el ángulo comprendido: b = b', c = c', A = A';

(iii) un lado igual a su homólogo y los dos ángulos contiguos a ese lado: a = a', B = B', C = C'.

Cuadriláteros.

20) En el Conjunto de los Cuadriláteros (polígonos de 4 lados) se definen (ver además el cuadro que se acompaña) :

(i) Trapezoide: no tienen ningún par de lados opuestos paralelos;

(ii) Trapecios: tienen un par de lados opuestos paralelos;

(iii) Paralelogramos: tienen los dos pares de lados opuestos paralelos.

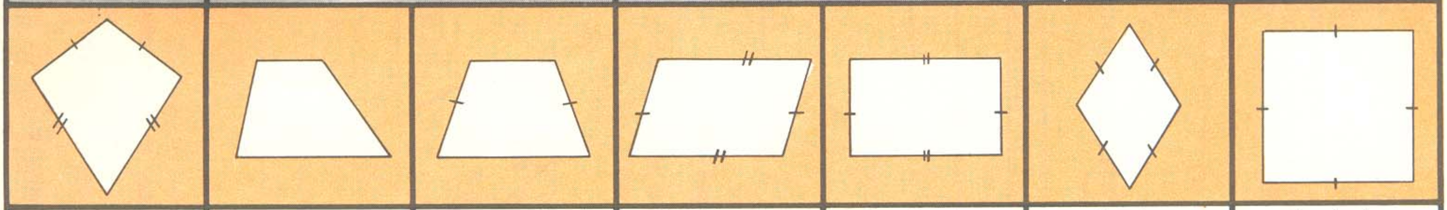
Dentro de los paralelogramos se tienen los subconjuntos siguientes:

(iv) Rectángulos: tienen un ángulo recto. Son cuadriláteros equiángulos;

(v) Rombos: tienen cuatro lados iguales. Son cuadriláteros equiláteros;

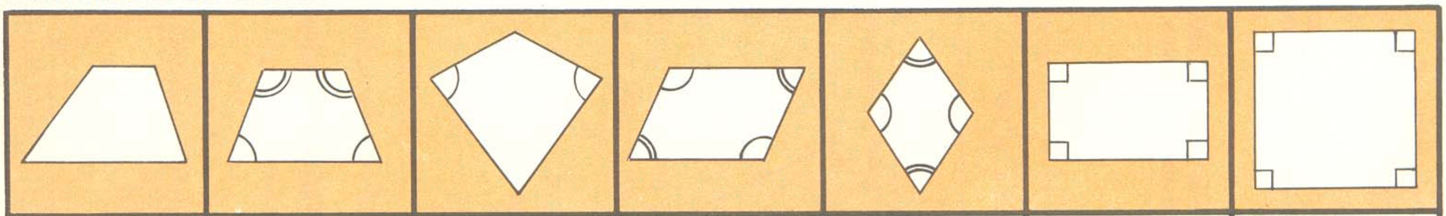
(vi) Cuadrados: rectángulos y rombos a la vez.

PROPIEDADES DE LOS LADOS

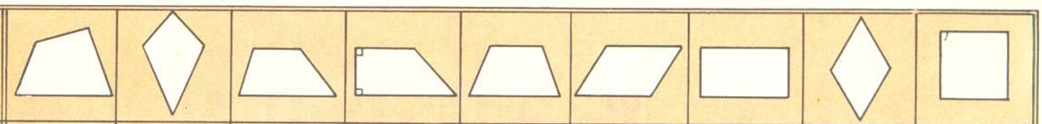


	Un par de lados paralelos		Dos pares de lados paralelos			
Romboide	Trapecio	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Dos pares de lados consecutivos congruentes		Un par de lados opuestos congruentes	Dos pares de lados opuestos congruentes		Cuatro lados congruentes	

PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS



Trapecio	Trapecio isósceles	Romboide	Paralelogramo	Rombo	Rectángulo	Cuadrado
	Dos pares de ángulos adyacentes a las bases congruentes	Un par de ángulos opuestos congruentes	Dos pares de ángulos opuestos congruentes		Cuatro ángulos congruentes	

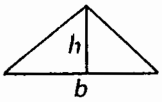
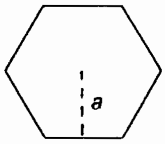
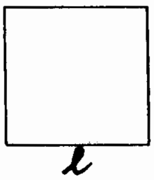
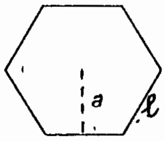
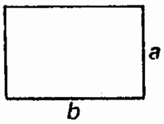
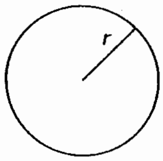
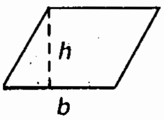
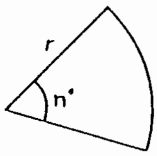
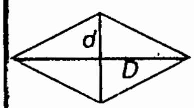
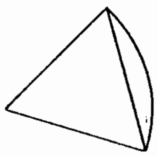
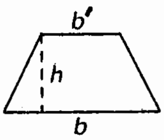
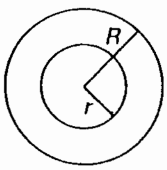


		PROPIEDADES									
LADOS	1	Un par de lados paralelos			●	●	●	●	●	●	●
	2	Dos pares de lados paralelos						●	●	●	●
	3	Dos pares de lados opuestos congruentes						●	●	●	●
	4	Dos pares de lados consecutivos congruentes		●						●	●
	5	Cuatro lados congruentes								●	●
ÁNGULOS	6	Un par de ángulos opuestos congruentes		●				●	●	●	●
	7	Dos pares de ángulos opuestos congruentes						●	●	●	●
	8	Un par de ángulos adyacentes congruentes				●	●		●		●
	9	Dos pares de ángulos adyacentes congruentes					●			●	●
	10	Cuatro ángulos congruentes							●		●

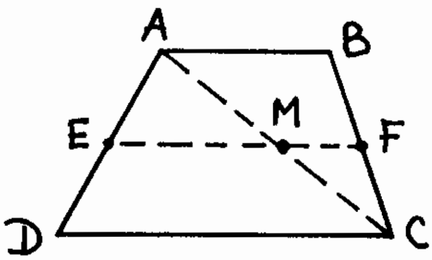
21) La suma de los ángulos de un cuadrilátero vale cuatro rectos, es decir 360°.

El área de las figuras planas está dado en el siguiente cuadro:

Áreas de figuras planas

	Triángulo	$A = \frac{b \cdot h}{2}$		Polígono regular	$A = \frac{p \cdot a}{2}$ p: perímetro
	Cuadrado	$A = \ell^2$		Hexágono regular	$A = 3 \cdot \ell \cdot a$
	Rectángulo	$A = a \cdot b$		Círculo	$A = \pi \cdot r^2$
	Paralelogramo	$A = b \cdot h$		Sector circular	$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360}$
	Rombo	$A = \frac{D \cdot d}{2}$		Segmento circular	$A = A_{sector} - A_{triángulo}$
	Trapecio	$A = \frac{b + b'}{2} \cdot h$		Corona circular	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

22) En todo trapecio la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos, es paralela a las bases (se llaman así a los lados paralelos) y de longitud igual a la semisuma de éstas.



Por ser E, F, puntos medios de los lados AD, BC, de los triángulos ABC, ACD respectivamente, en que se ha descompuesto el trapecio, los segmentos EM, FM, paralelas medias respecto de las bases coinciden en el punto M, y además, como

$$\overline{FM} = \frac{\overline{BA}}{2}\,, \qquad \overline{EM} = \frac{\overline{CD}}{2}\,,$$

entonces se tiene $\overline{EM} + \overline{FM} = \dfrac{\overline{BA} + \overline{CD}}{2} = \overline{EF}$.

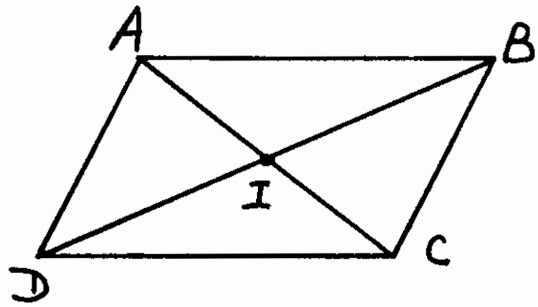
23) En todo paralelogramo se verifica:

(i) Los lados opuestos son iguales;

(ii) Los ángulos opuestos son iguales;

(iii) Las diagonales se cortan en su punto medio I;

(iv) Los lados opuestos son iguales y paralelos.



Recíprocamente, un cuadrilátero es un paralelogramo si se cumple una sola de las condiciones anteriores: (i), (ii), (iii), (iv).

24) Si las diagonales de un paralelogramo son:

(i) iguales, entonces es un rectángulo;

(ii) perpendiculares, entonces es un rombo;

(iii) iguales y perpendiculares, entonces es un cuadrado.

Segmentos proporcionales y semejanza de triángulos.

Definición. – Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados correspondientes proporcionales.

25) Toda paralela a uno de los lados de un triángulo forma con los otros dos un triángulo semejante al primero.

26) Dos triángulos son semejantes en los siguientes casos:

(i) si tienen dos ángulos respectivamente iguales;

(ii) si tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados proporcionales;

(iii) si tienen los tres lados proporcionales.

27) Teorema de Thales: Dos rectas cortadas por paralelas determinan sobre éstas segmentos proporcionales.

28) La paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales.

29) En todo triángulo la bisectriz interior de un ángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes.

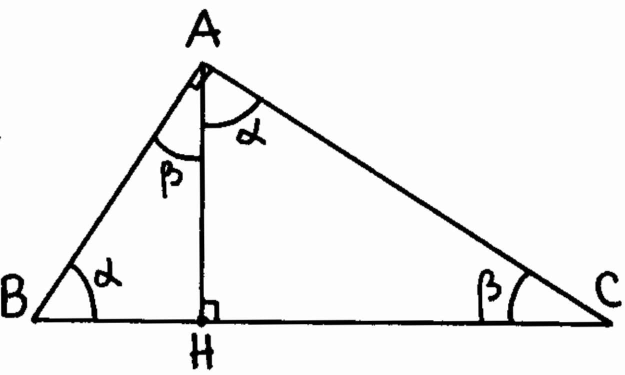
Relaciones métricas en un triángulo rectángulo.

30) Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la misma.

Sea el punto H el pie de la perpendicular sobre BC que pasa por el punto A. De la semejanza entre los triángulos ABC y ABH se deduce $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$, es decir

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}\ \overline{BH}$$

En forma análoga, se tiene: $\overline{AC}^2 = \overline{BC}\ \overline{HC}$.



31) Teorema de Pitágoras. – La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Sumando las relaciones anteriores, se deduce

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}\ \overline{BH} + \overline{BC}\ \overline{HC} = \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{HC}) = \overline{BC}^2.$$

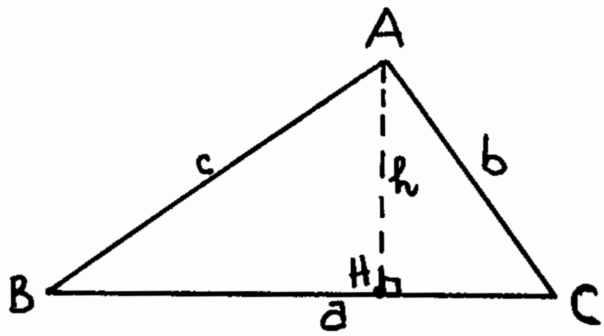
32) La altura sobre la hipotenusa es medio proporcional entre los dos segmentos en que la divide (Surge de la semejanza de los triángulos ABH y AHC).

Otras relaciones métricas en un triángulo cualquiera.

33) El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

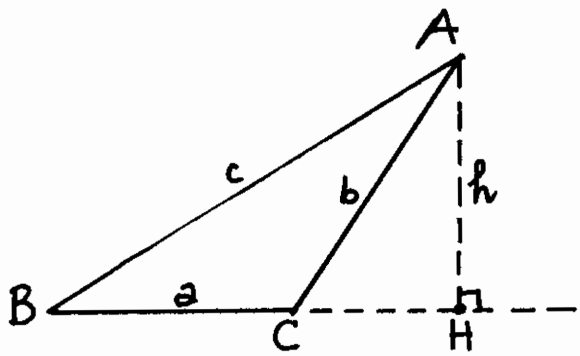
$$\begin{aligned} c^2 = h^2 + (a - \overline{HC})^2 &= (b^2 - \overline{HC}^2) + (a^2 + \overline{HC}^2 - 2a\overline{HC}) \\ &= a^2 + b^2 - 2a\overline{HC}. \end{aligned}$$



34) El cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso, es igual a la suma de los cuadrados de los otros más el duplo del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$\begin{aligned} c^2 = h^2 + (a + \overline{HC})^2 &= (b^2 - \overline{HC}^2) + (a^2 + \overline{HC}^2 + 2a\overline{HC}) \\ &= a^2 + b^2 + 2a\overline{HC}. \end{aligned}$$



35) Cálculo de la altura de un triángulo, conociendo sus lados.

Se considerará el caso en que el ángulo C es agudo. Teniendo en cuenta que

$$\overline{CH} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} ,$$

la aplicación del Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ACH ($h_a = h$) y las relaciones

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \qquad p-a = \frac{b+c-a}{2}, \qquad p-b = \frac{a+c-b}{2}, \qquad p-c = \frac{a+b-c}{2},$$

se deduce

$$h_a{}^2 = b^2 - \overline{CH}^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2 = \frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)\,(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2} = \frac{[(a+b)^2-c^2]\,[c^2-(a-b)^2]}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,(c+b-a)}{4a^2} = \frac{4\,p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{a^2}$$

es decir

$$h_a = \tfrac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,.$$

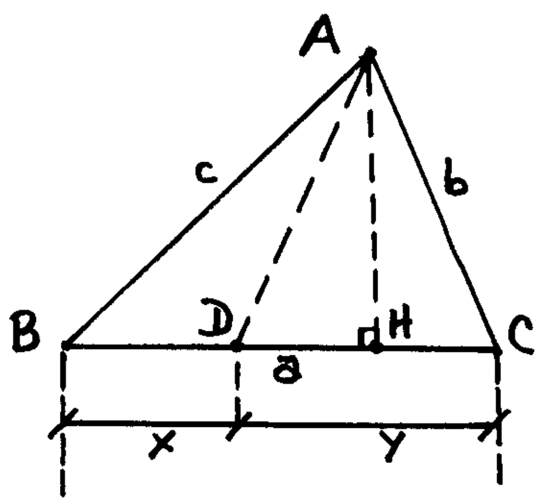
36) El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que lo contiene, es decir la mitad del producto de su base por su altura. Por lo tanto, un triángulo cualquiera tiene por área:

$$S = \tfrac{1}{2}\,a\,h_a = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad \text{(Fórmula de Herón).}$$

Otras relaciones métricas en el triángulo.

37) Fórmula de Stewart. – Permite calcular la distancia de un vértice A a un punto cualquiera D del lado opuesto BC en un triángulo ABC. Si $x = \overline{BD}$, $y = \overline{DC}$ (es decir, $a = \overline{BC} = x+y$), entonces se tiene:

$$\overline{AD}^2 . a = b^2 x + c^2 y - a\,x\,y.$$



Si se tiene en cuenta las relaciones

$$c^2 = x^2 + \overline{AD}^2 + 2\,x\,\overline{DH} \ , \quad b^2 = y^2 + \overline{AD}^2 - 2\,y\,\overline{DH} \ ,$$

se multiplica la de la izquierda por y, y la de la derecha por x, se suman ambas igualdades se obtiene

$$b^2 x + c^2 y = \overline{AD}^2(x+y) + xy\,(x+y) \ ,$$

y por ende la fórmula correspondiente.

38) Se puede aplicar la fórmula anterior al cálculo de:

(i) las medianas en función de los lados:

Al ser D el punto medio del segmento BC se tiene $x = y = \frac{a}{2}$, y por lo tanto se deduce

$$a\,m_a{}^2 = a\ \overline{AD}^2 = b^2\,\tfrac{a}{2} + c^2\,\tfrac{a}{2} - a(\tfrac{a}{2})^2$$

$$m_a = \frac{\sqrt{2\,(b^2+c^2)-a^2}}{2}.$$

(ii) las longitudes de las bisectrices interiores de un ángulo hasta el lado opuesto :

Aplicando el Teorema de Thales, las longitudes x, y, son proporcionales a los lados c, b, y teniendo en cuenta propiedades de las proporciones se deduce:

$$x / c = y / b = (x+y) / (b+c)\ .$$

Por lo tanto $x = a\,c / (b+c)$; $y = a\,b / (b+c)$, de donde surge

$$V_a{}^2 . a = b^2 . ac / (b+c) + c^2 . ab / (b+c) - a^3 bc / (b+c)^2,$$

y por ende se obtiene la expresión:

$$V_a = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{(b+c)} = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{(b+c)} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{(b+c)}.$$

Se han utilizado las siguientes notaciones:

h_a : altura del triángulo ABC respecto del lado a;
m_a : mediana del triángulo ABC desde el vértice A al lado opuesto a;
V_a : longitud de la bisectriz interior del triángulo ABC desde el vértice A al lado opuesto a.

Problemas Básicos de la Geometría del Plano.

1) Divida un ángulo de 60^{o} en dos partes cuyas medidas estén en la razón $\frac{5}{7}$.

2) Indique, al menos tres respuestas, para la siguiente pregunta de abstracción: ¿Cómo se puede demostrar que dos rectas del plano son paralelas?

3) Sea la proposición directa:

"Si ABC es un triángulo equilátero entonces ABC es un triángulo isósceles" .

(i) Indique si puede expresarse en forma equivalente diciendo :

(a) Que un triángulo sea equilátero es condición suficiente (pero no necesaria) para que sea isósceles.

(b) Que un triángulo sea isósceles es condición necesaria (pero no suficiente) para que sea equilátero .

(c) Un triángulo es isósceles si es equilátero.

(d) Un triángulo es equilátero sólo si es isósceles.

La proposición recíproca de la directa dada es : "Si ABC es un triángulo isósceles entonces ABC es un triángulo equilátero".

La proposición inversa es : "Si ABC no es un triángulo equilátero entonces ABC no es un triángulo isósceles".

La proposición contrarrecíproca es : "Si ABC no es un triángulo isósceles entonces ABC no es un triángulo equilátero".

(ii) ¿Indique y justifique cuál de las cuatro proposiciones directa, recíproca, inversa y contrarrecíproca, es verdadera o falsa.

4) Calcule la altura y el área de un triángulo equilátero en función de su lado.

5) Calcule la diagonal de un cuadrado en función de su lado.

6) Demostrar que si un triángulo rectángulo ABC con hipotenusa c y con catetos a y b, satisface la relación $c = \sqrt{2ab}$, entonces el triángulo ABC es isósceles.

<u>Definición</u>._ Se llama <u>terna pitagórica</u> a una terna de números enteros positivos que cumplen con la condición:

$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

<u>Observación</u>.– Las ternas pitagóricas pueden ser los lados de triángulos rectángulos, siendo X e Y los dos catetos y Z la hipotenusa.

7) (i) Verifique que existen infinitas ternas pitagóricas dadas por:

$$X = 2uv\ , \qquad Y = u^2 - v^2$$

con u y v números naturales cualesquiera con $u > v$, con Z a determinar .

(ii) Para tener varias ternas pitagóricas, complete la siguiente tabla y compruebe que X, Y, y Z son los lados de un triángulo rectángulo.

u	v	X	Y	Z
2	1	4	3	5
3	1	.....	.....	.....
3	2	.....	.....	.....
4	1	.....	.....	.....
4	2	.....	.....	.....
4	3	.....	.....	.....
5	1	10	24	26

8) Halle la representación gráfica de los números $\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras a sucesivos triángulos rectángulos en los cuales uno de sus catetos es 1. Se comienza con el triángulo rectángulo de catetos 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$.

9) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado inscripto en una circunferencia de radio 3 cm? Represente este número en la recta real.

10) Un jardinero quiere armar un cantero circular dividiéndolo en sectores de modo que: el de las violetas sea el doble que el de las margaritas y éste sea la tercera parte del de los pensamientos. ¿Qué ángulo central corresponde a cada sector?

11) Dado un cuadrado, construya un triángulo rectángulo que tenga por base un lado del cuadrado y su área sea igual al área del cuadrado.

12) De una tira de papel rectangular de 2,05 m por 0,22 m se cortan todos los cuadrados de 22 cm de lado que contiene. Estos cuadrados se colocan lado a lado de manera que formen un nuevo cuadrado. ¿Cuál es el perímetro de este nuevo cuadrado?

13) Para alambrar un campo cuadrado de 100 m^2 se gastan \$ 100 de material. ¿Cuánto se gastará de material para alambrar (con el mismo material), un campo cuadrado de 400 m^2 de superficie?

14) Si dibujamos en una hoja un ángulo de 30° y lo miramos con una buena lupa que magnifica todas las longitudes duplicándolas. ¿Se verá un ángulo de 60°?

15) Mientras Alvaro gira sobre un caballito de una calesita que está colocado a 5 m del eje central de la calesita, su mamá se pregunta ¿cuántos kilómetros habrá "trotado" el caballito de madera después de 10 años de dar todos los días 200 vueltas por día? Responda a la mamá de Alvaro considerando todos los años de 365 días.

16) A Pablo y a Ignacio les encanta jugar carreras de bicicletas, donde gana el primero en dar 3 vueltas completas alrededor del parque. El parque es un terreno rectangular que tiene 220m de frente y 100m de profundidad. Hoy ganó Pablo, ya que al completar sus tres vueltas, Ignacio solo había realizado 19/8 de vuelta. ¿Cuántos metros recorrió cada uno? ¿Cuántas vueltas completas dio Ignacio?. Si los radios de la bicicleta de Pablo miden 24 cm, ¿cuántos metros recorre su bicicleta cuando la rueda da una vuelta completa? ¿Cuántas vueltas completas dieron sus ruedas durante la carrera?

17) Para un recital en el parque, los organizadores piensan colocar una torre con parlantes justo en el

centro del parque. Si cada parlante tiene un ángulo de audición óptima de 72°. ¿Cuántos parlantes hacen falta para que se escuche bien desde todos lados?

18) En el paralelogramo ABCD, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 5 y los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ miden 6. Se traza la bisectriz del ángulo A que corta al lado $\overline{BC}$ en el punto E. Calcule las medidas $\overline{BE}$ y $\overline{EC}$.

19) Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$. Se traza la bisectriz del ángulo B que corta al lado AC en D. Sabiendo que $\overline{BC} = \overline{BD}$, calcule la medida del ángulo A.

20) Sea ABC un triángulo con $\angle\ A = 50°$. Se prolonga el lado BC en ambas direcciones y sobre las prolongaciones se indican los puntos P y Q de manera tal que $\overline{PB} = \overline{BA}$; $\overline{CQ} = \overline{CA}$ y $\overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CQ} = \overline{PQ}$. Calcule la medida del ángulo PAQ.

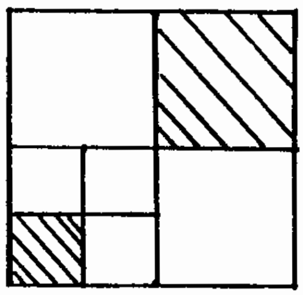
21) Sea ABC un triángulo que tiene $\angle\ A = 36°$ y $\angle\ B = 21°$. Sobre el lado AB se marcan los puntos D y E de modo que $\overline{AD} = \overline{DC}$ y $\overline{EB} = \overline{EC}$. Halle la medida del $\angle$ DCE.

22) En un triángulo ABC se consideran los puntos medios M y N de los segmentos AB y AC respectivamente. Entonces MN // BC y se tiene que $\overline{MN} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$.

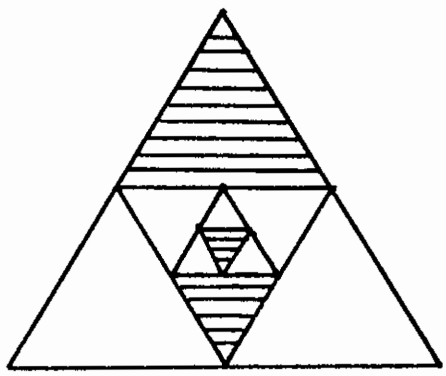
23) Dibuje un triángulo ABC que tenga $\angle\ A = 30°$ y $\angle\ B = 70°$. Sobre la prolongación del lado $\overline{AC}$ marque el punto D de manera que sea $\overline{CD} = \overline{CB}$. Complete el triángulo DCB. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

24) Un triángulo tiene por lados 9 m, 12 m y 15 m. ¿Cuáles son los lados de otro triángulo semejante de 72 m de perímetro?

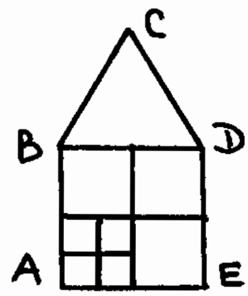
25) El cuadrado grande se dividió en 4 cuadrados iguales y, uno de éstos se dividió de nuevo en 4 cuadraditos iguales, como se ve en la figura. ¿Qué parte del cuadrado grande está pintada?



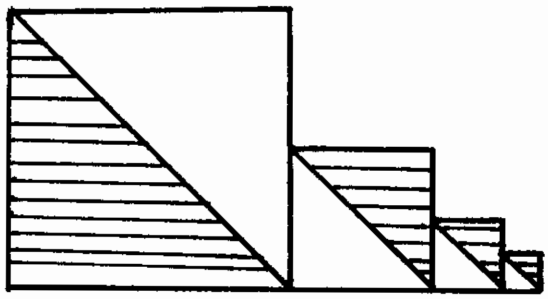
26) Un triángulo equilátero se dividió en triángulos iguales como muestra la figura. Uno de esos triángulos volvió a dividirse en triángulos equiláteros iguales. Por último uno de los triángulos pequeños se dividió en triángulos iguales y se pintó uno de cada tamaño. ¿Qué parte del triángulo grande representa lo pintado?



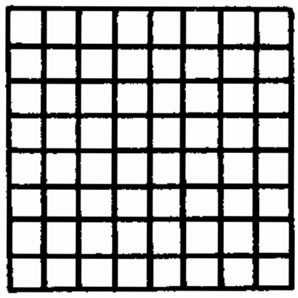
27) Se dibujó un triángulo equilátero BCD y un cuadrado ABDE. Este cuadrado se dividió en cuatro cuadrados iguales y uno de éstos se dividió de nuevo en cuatro cuadraditos como se ve en la figura. Sabiendo que el lado de cada uno de estos cuadraditos mide 5 cm, calcule el perímetro del polígono ABCDE.



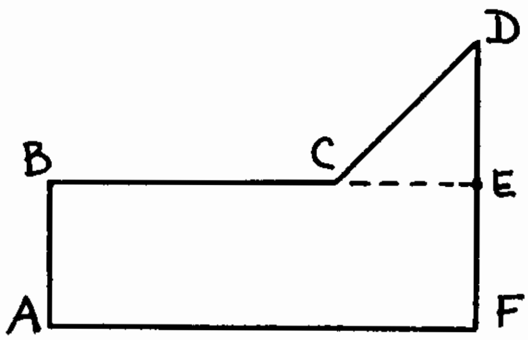
28) La figura está formada por 4 cuadrados. Cada cuadrado tiene el lado igual a la mitad del anterior. El perímetro del cuadrado más grande es 48 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura?. ¿Qué parte de la superficie del cuadrado grande equivale a la superficie sombreada?



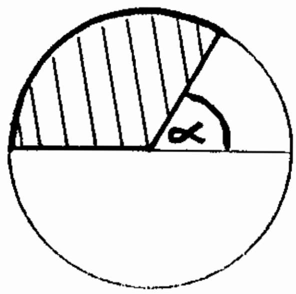
29) Se quieren construir rectángulos, que no sean cuadrados, de área mayor que 36, tomando como unidad el área de un cuadradito de la cuadrícula. Si los vértices deben estar en las intersecciones de la cuadrícula, y los lados deben coincidir con las líneas de la misma, ¿cuántos rectángulos se pueden formar?



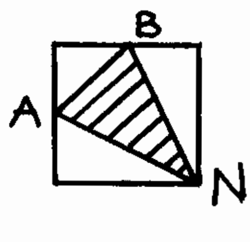
30) En la figura, ABEF es un rectángulo y CDE es un triángulo isósceles. $\overline{AB}$ = 100 cm; $\overline{AF}$ es el triple de $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ es el doble de $\overline{AB}$. Sabiendo que el perímetro de la figura es 9,41 m, calcule la longitud de $\overline{CD}$.



31) En el gráfico, el ángulo sombreado representa la cantidad de chicos de primer año que trabajan en el verano. El ángulo sombreado es el doble de α. ¿Qué porcentaje de los chicos de primer año trabaja en el verano?. Si en primer año hay en total 75 chicos, ¿cuántos trabajan en el verano?



32) Sean A y B los puntos medios de dos lados adyacentes de un cuadrado y sea N el vértice opuesto del cuadrado. ¿Qué fracción, con respecto al área del cuadrado, representa el triángulo ABN?



33) En el rectángulo ABCD se trazan los segmentos:

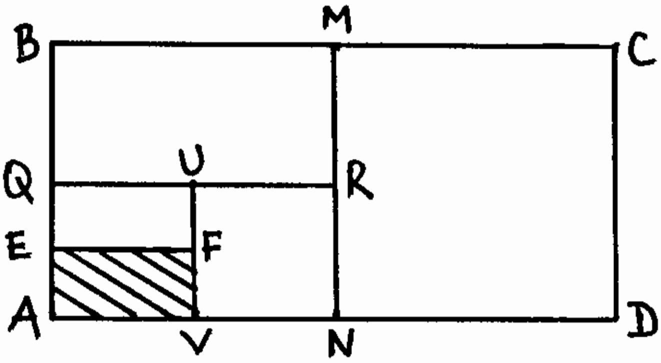
(i) MN vertical, que divide a BC en dos partes iguales;

(ii) QR horizontal, que divide a BA en dos partes iguales;

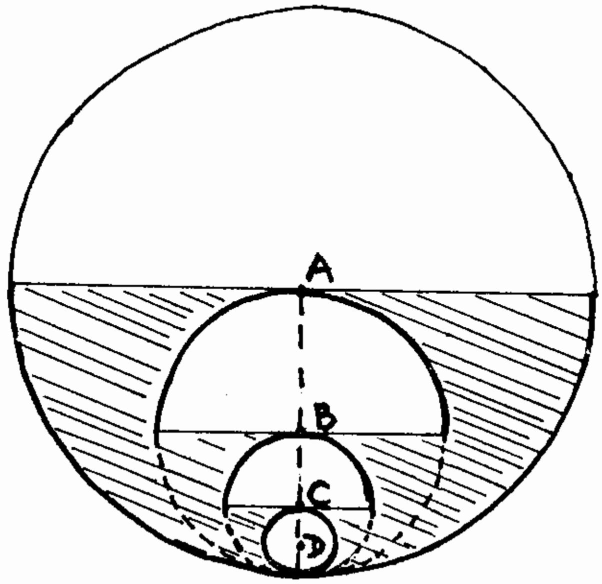
(iii) UV vertical, que divide a QR en dos partes iguales, y

(iv) EF horizontal, que divide a QA en dos partes iguales.

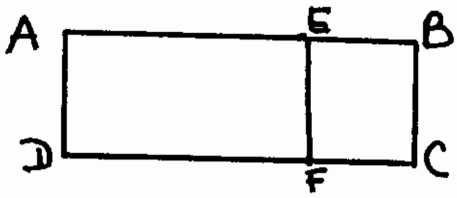
El rectángulo sombreado tiene 20 cm de perímetro. Calcule el perímetro del ABCD.



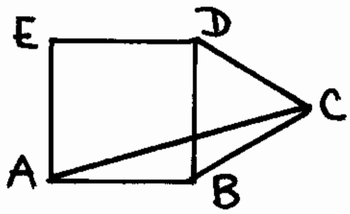
34) Los puntos A, B, C, y D son los centros de las circunferencias indicados en la figura. Los cuatro están alineados y $\overline{AD} = 35$ cm. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



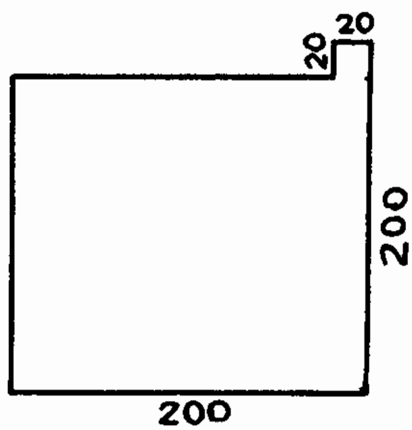
35) Dos personas se reparten un terreno como el del dibujo, siendo $\overline{AB} = 65\,\text{m}$ y $\overline{AD} = 23\,\text{m}$. Le corresponde a una 69 m^2 más que a la otra. Para partirlo se trazó EF // AD. ¿Cuál es la distancia de A a E?



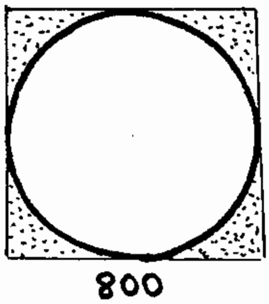
36) ABDE es un cuadrado y BCD es un triángulo equilátero. Halle el valor del $\angle$CAB.



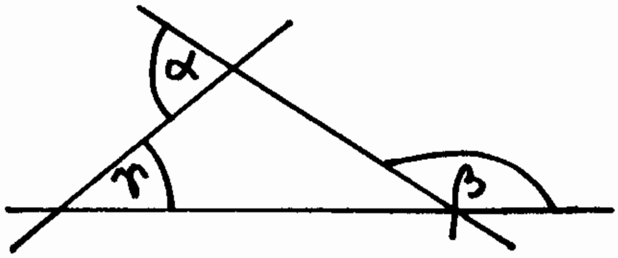
37) Un chacarero tiene un campo cuadrado de 200 m de lado. Un segundo chacarero tiene otro campo con la siguiente forma y dimensiones (ver dibujo). Ambos deciden cercar sus campos con alambre y postes cada medio metro. Si se tarda 3 minutos en fijar cada poste, ¿cuál de los dos tardará más tiempo? Ambos deciden abonar la tierra de sus campos. Si se tarda medio minuto en echar el abono sobre cada metro cuadrado, ¿cuál de los dos tardará más tiempo?



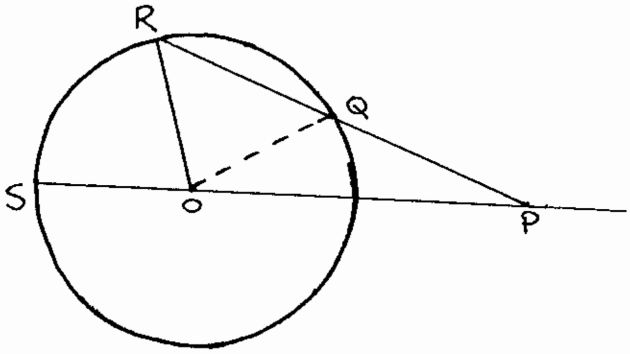
38) Un señor que tiene un terreno cuadrado de 800 m de lado decide regalar a su hijo las cuatro esquinas de su terreno que quedan fuera del círculo central, como se ve en la figura. ¿Es cierto que se quedó con menos de las 3/4 partes de su terreno?



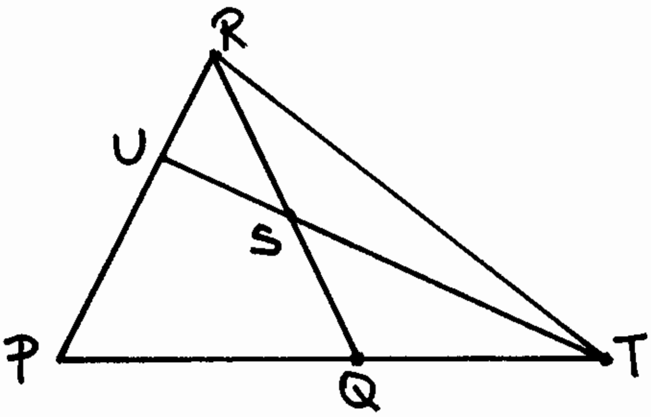
39) Indique el valor de la expresión $\alpha + \beta - \gamma$ de acuerdo al siguiente dibujo.



40) En la figura, PS es un segmento que contiene al centro O de la circunferencia de radio r, $\overline{PQ}$ tiene longitud r. Si el $\angle$ROS mide 60°, ¿cuál es la medida del $\angle$ OPQ?



41) En la figura, $\overline{PR} = \overline{QR}$; $\angle PRQ = 40°$; $\angle$ PTU $= 25°$. Halle la medida del $\angle$ RST.



III.2. PROBLEMAS CON MEDICIONES: PERÍMETRO Y ÁREA.

Problemas sobre Longitudes y Perímetros de Figuras Planas.

1) Las dos diagonales de un rectángulo tienen la misma longitud.

2) Una columna de 30 m de altura se quebró de tal manera que la parte más alta toca el suelo a 16 m de la base. ¿ A qué altura se ha roto ?

3) Dos columnas de 30 m y 40 m de altura están distanciadas 50 m. Un pájaro que va a tomar agua a una fuente que se encuentra, en el suelo, entre las dos columnas recorre la misma distancia desde la cima de cualesquiera de ellas. ¿ A qué distancia de las columnas se encuentra la fuente?

4) En un círculo de 25 cm de diámetro se inscribe un rectángulo cuyos lados difieren en 17 cm. ¿ Cuánto miden sus lados?

5) I es el punto medio del segmento AB. J es un punto de la perpendicular en I a la recta AB. Demuestre que el triángulo JAB es isósceles.

6) A y B son dos puntos de la circunferencia de centro O. B y O son dos puntos de la circunferencia de centro A. Demuestre que AOB es un triángulo equilátero.

7) ABC es un triángulo rectángulo en A. La recta mediatriz d de AB corta a AB en el punto M y a BC en el punto O. Muestre que O es el punto medio de BC.

8) Se considera un triángulo ABC inscripto en un círculo de centro O. Hacia el exterior de ABC, se construye un triángulo isósceles ABD, tal que DA = DB. Demuestre que OD es perpendicular a AB.

9) Se considera un triángulo ABC rectángulo en A. Construya dos paralelogramos ACDE y ABGF. Demuestre que DE es perpendicular a FG.

10) Sea B' el punto simétrico de B respecto de A. Sea C un punto no perteneciente a la recta B'B. Entonces la bisectriz interior del ángulo BAC es pependicular a la bisectriz interior del ángulo B'AC.

11) El lado de un triángulo equilátero T es $\frac{3}{7}$ del lado de un cuadrado C. Encuentre una fracción que indique qué parte del perímetro de C es el perímetro de T.

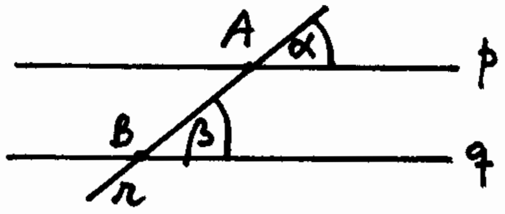
12) En un campo, para cercar con 5 hilos un corral triangular, se usaron 525 m de alambre. El triángulo, que es isósceles, tiene dos lados iguales que miden, cada uno, el triple de lo que mide el tercer lado. Halle la longitud de cada lado del corral.

13) La Comisión Directiva de un Club decidió iluminar el recinto del natatorio colocando en el cerco un reflector cada 3 m. Se usaron 36 reflectores. Se sabe que el cerco es rectangular y que tiene el doble de largo que de ancho. ¿ Cuánto miden el largo y el ancho del cerco?

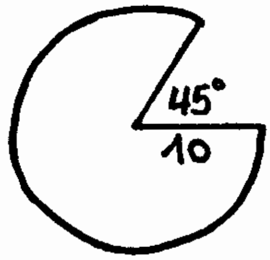
14) Se quiere hacer un pedestal de forma de exágono regular para el mástil de la escuela. Si el mástil

debe estar en el centro del exágono y a 86,5 cm de distancia de cada uno de los lados. ¿Cuál será el perímetro del pedestal?

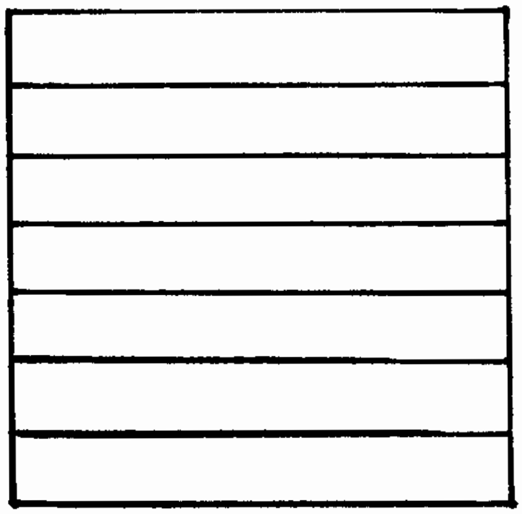
15) Si las rectas p, q y r son tales que $\alpha = \beta$ entonces p || q.



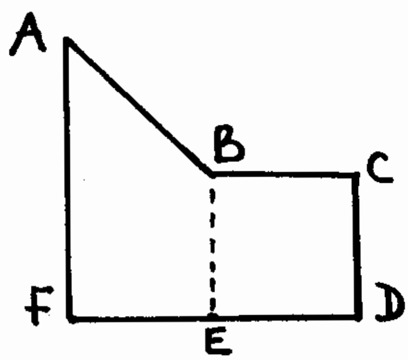
16) Calcule el perímetro de la figura:



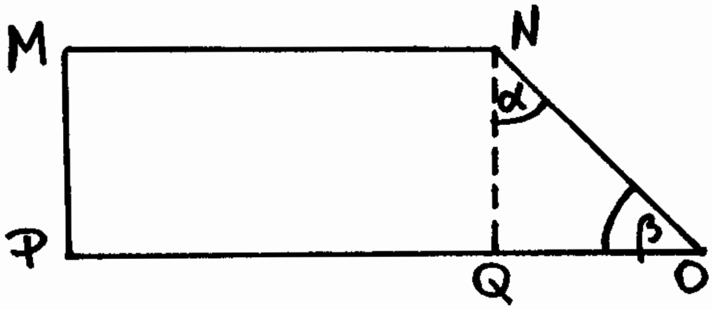
17) Divida un cuadrado como muestra la figura, en 7 rectángulos congruentes, cada uno de los cuales mide 96 cm de perímetro. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



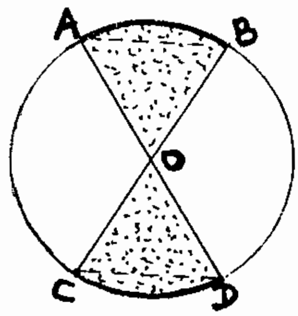
18) Se quiere alambrar el campo de la figura con tres vueltas de alambre de púa. Si $\overline{AB}$ mide 4,2 hm; $\overline{AF}$ es el doble de $\overline{CD}$; E es el punto medio de $\overline{FD}$ y BCDE es un cuadrado de 3 hm de lado. ¿Cuántos metros de alambres se necesitan?



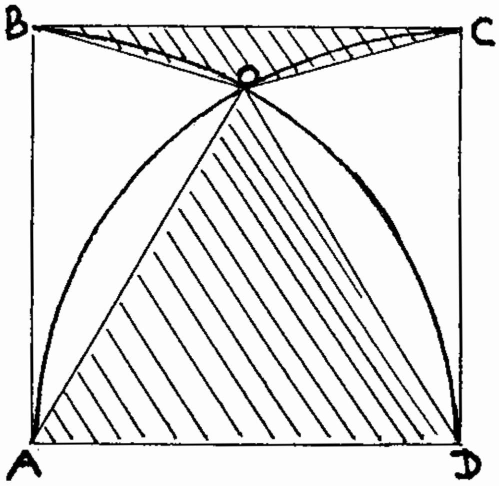
19) Calcule el perímetro del trapecio MNOP sabiendo que:
$\alpha = \beta$; $\overline{NO} = 10\sqrt{2}$ m; $\overline{PQ} = 20$ m; $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{PQ}$.



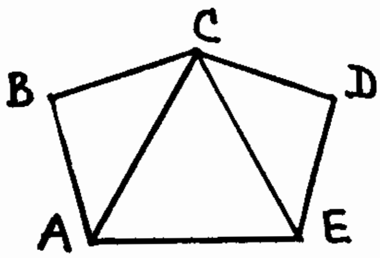
20) Sobre el círculo de centro O y de 10 cm de radio se dibuja la figura ABODC según se muestra en el gráfico. El triángulo ABO es equilátero. Calcule el perímetro de ABODC.



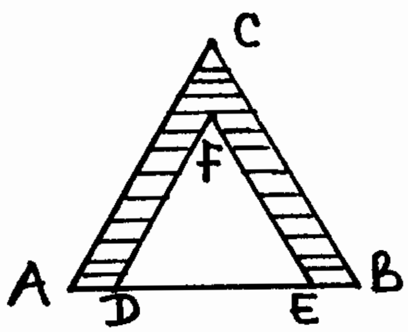
21) ABCD es un cuadrado de 40 cm de lado. AC y BD son arcos de circunferencia centrados, uno en D y el otro en A. ¿Cuál es el perímetro y el área de la figura sombreada?



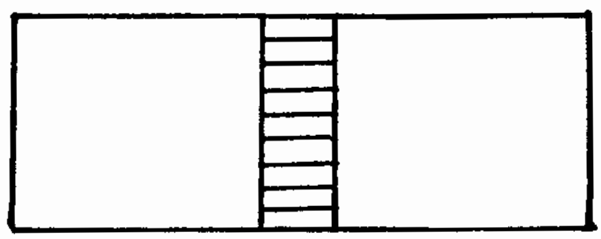
22) Sabiendo que el triángulo ACE es equilátero de 18 cm de perímetro, ABC y CDE son triángulos isósceles de 14 cm de perímetro, calcule el perímetro del pentágono ABCDE.



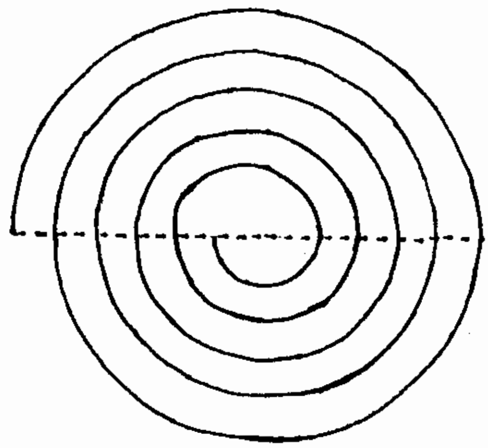
23) Los triángulos ABC y DEF son equiláteros. El ABC tiene 81 cm de perímetro. El lado $\overline{DF}$ mide las dos terceras partes de lo que mide el lado $\overline{AB}$. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?



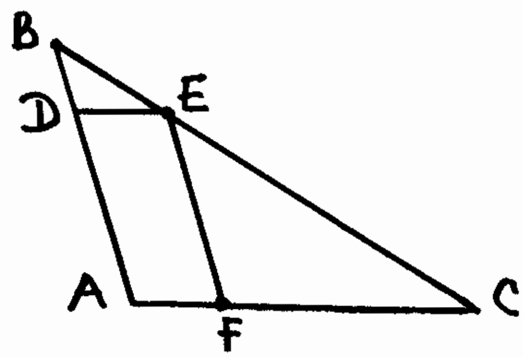
24) Un terreno rectangular de 81,50 m de largo se parte en dos lotes iguales por un camino de 2,50 m de ancho como muestra la figura. Se alambra cada lote con un alambre que cuesta \$3 el metro. El gasto total es de \$768. ¿Cuáles son las dimensiones de cada lote?



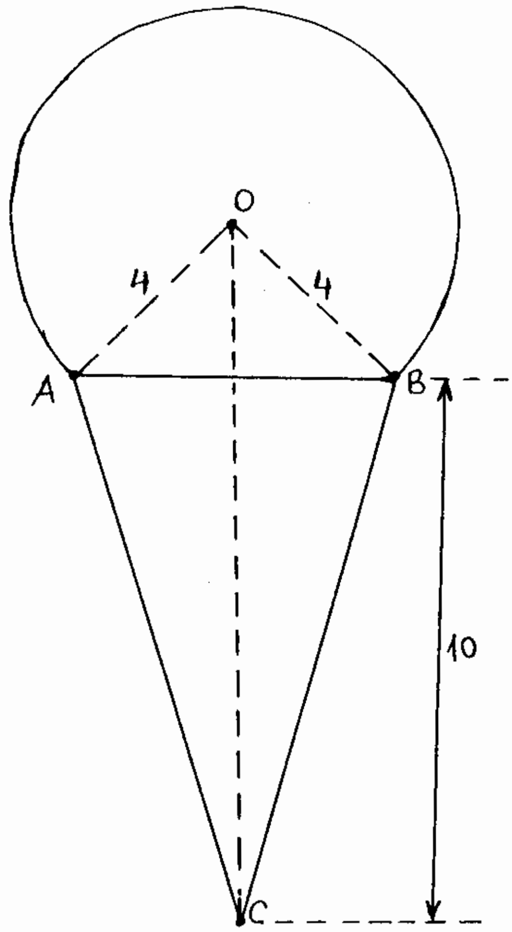
25) La espiral de la figura está formada por 10 semicircunferencias. Cada una tiene un diámetro 10 cm menor que la anterior. La más grande tiene un radio de 60 cm. ¿Cuál es en m, la longitud de la espiral?



26) Calcule el perímetro del paralelogramo ADEF, siendo $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{BC} = 16$ cm, $\overline{AC} = 14$ cm y $\overline{BE} = 4$ cm.



27) La siguiente figura está obtenida colocando las tres cuartas partes de una circunferencia de 4 cm y centro en el punto O sobre un triángulo isósceles de altura 10 cm. ¿Cuál es el perímetro exterior, en cm, de la figura dada?



Problemas sobre Áreas de Figuras Planas.

1) En una inmobiliaria se ofrece un terreno rectangular cuya superficie es de 216 m^2. Un posible comprador pregunta las dimensiones del terreno. El empleado de la inmobiliaria solo recuerda que eran números enteros y que para cercarlo con 3 hilos de alambre de \$ 2,85 el metro se gastaron \$513. ¿Cuáles serán las dimensiones del terreno?

2) Se reduce en un 10 % la longitud de un par de lados opuestos de un cuadrado y se incrementa en un 10 % la del otro par. Indique la modificación que sufre el área del cuadrado.

3) En cuánto hay que incrementar el lado de un triángulo equilátero para que el área del nuevo triángulo sea cuatro veces el área del triángulo original.

4) Demuestre la siguiente proposición

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

utilizando el concepto de área construyendo dos rectángulos de base 1 y de altura $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ respectivamente.

5) Un terreno rectangular tiene 40 m más de largo que de ancho. Si tuviese 20 m menos de largo y 10 m más de ancho su área sería la misma. Calcule sus dimensiones.

6) Halle el área del trapecio PQRS, rectangular en Q, sabiendo que $\overline{SP} = \overline{SR}$; $\overline{PQ} = 8$; $\overline{QR} = 6$ y $\angle PSR = 60^\circ$.

7) ¿Cuál es la proporción entre el área de un cuadrado inscripto en un círculo y el área de un cuadrado inscripto en uno de sus semicírculos?

8) (i) Dado un círculo de radio $r > 0$ calcule el lado del cuadrado inscripto y el lado del cuadrado circunscripto en dicho círculo. Calcule el porcentaje de área que ocupa la región más pequeña respecto de la más grande.

(ii) Dado un cuadrado de lado l calcule el radio del círculo inscripto y del círculo circunscripto en dicho cuadrado. Calcule el porcentaje de área que ocupa la región más pequeña respecto de la más grande.

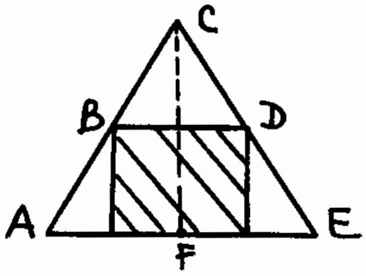
(iii) Calcule el área de la región comprendida entre cada cuadrado y el círculo en (i), y entre cada círculo y el cuadrado en (ii).

9) Indique las dimensiones de un rectángulo cuya área se escribe como:

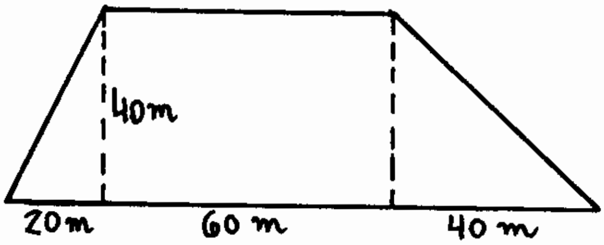
(i) $\sqrt{3}\,(a+2) + \sqrt{5}\,(a+2)$	$l =$	$L =$ .....
(ii) $(3+\sqrt{2})(a-\frac{1}{2}) + (3+\sqrt{2})(a+4)$	$l =$	$L =$ .....
(iii) $a^2 + 2a$	$l =$	$L =$ .....
(iv) $(3-\sqrt{2})(\frac{3}{4}+x) + (\frac{1}{3}-x)(3-\sqrt{2})$	$l =$	$L =$ .....
(v) $a^2 + 3b + 3a + ab$	$l =$	$L =$ .....

10) Las diagonales de un trapecio rectángular miden 16 cm y 20 cm, y su base mayor 15 cm. Calcule su área.

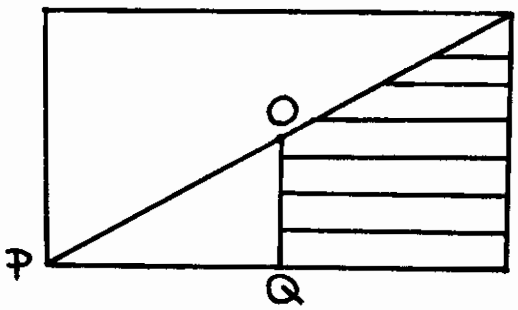
11) Calcule el área de la figura sombreada sabiendo que: $\overline{AB} = \overline{BC}$; $\overline{CD} = \overline{DE}$; $\overline{CF} = 4$; $\overline{AE} = 5$ y $\angle A = \angle E$.



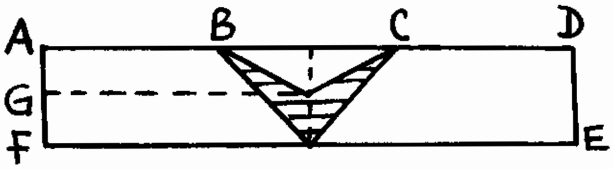
12) En el pueblo hacen un concurso para diseñar una plaza con la forma y dimensiones de la figura. Los urbanistas deben presentar sus diseños en una hoja rectangular donde el encabezamiento ocupe 20 cm por el ancho de la hoja y las especificaciones que irán a la derecha ocupen 20 cm por todo el alto del dibujo. La escala a emplear es 2 m : 0,8 cm. ¿Cuáles son las dimensiones mínimas del papel a emplear? ¿Cuál es la superficie total del plano de la plaza? Trace un esquema aproximado.



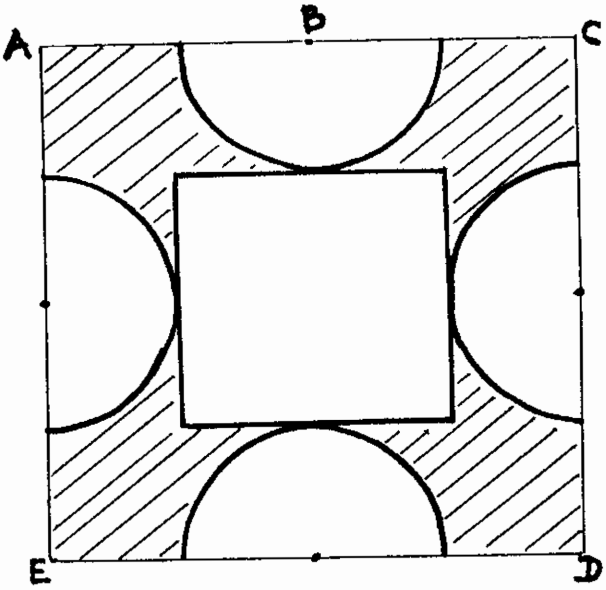
13) Se ha dibujado un rectángulo con centro O. Se sabe que el área del triángulo rectángulo OPQ vale 7 cm^2. Calcule el área de la figura sombreada.



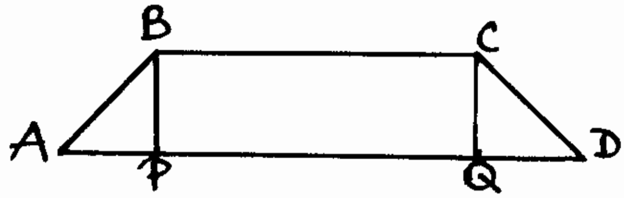
14) ADEF es un rectángulo de base b = 180m y altura h = 35m. Calcule el área de la figura sombreada sabiendo que: $\overline{AG} = h/2$; $\overline{AB} = \overline{CD} = b/3$.



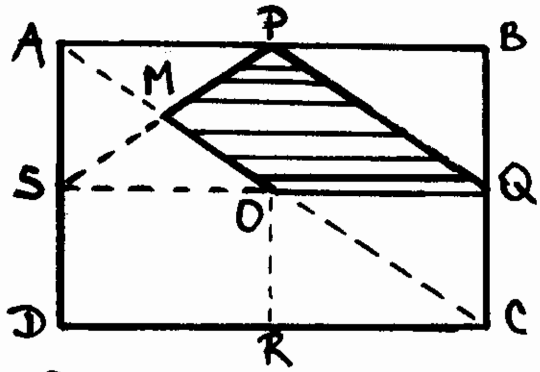
15) Si ACDE es un cuadrado de 32 cm de perímetro, su lado es igual al doble del diámetro de cada una de las semicircunferencias y B es el punto medio de AC. Calcule el área sombreada.



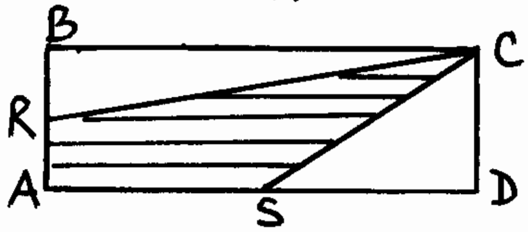
16) El área del trapecio isósceles de la figura vale 48 cm^2. Si $\overline{AP} = \overline{BP}$ y $\overline{AQ}$ es el triple de $\overline{AP}$. Calcule las longitudes de las bases y de la altura del trapecio.



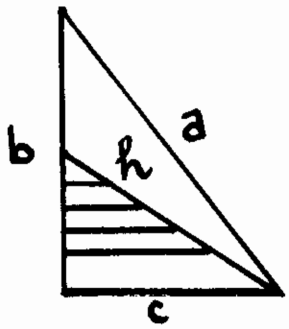
17) ABCD es un rectángulo, $\overline{AD} = 6\,cm$; $\overline{DC} = 8\,cm$. P, Q, R y S son los puntos medios de los lados. Las diagonales de ABCD se cortan en O y las diagonales de APOS, se cortan en M. Calcule el área del cuadrilátero PQOM.



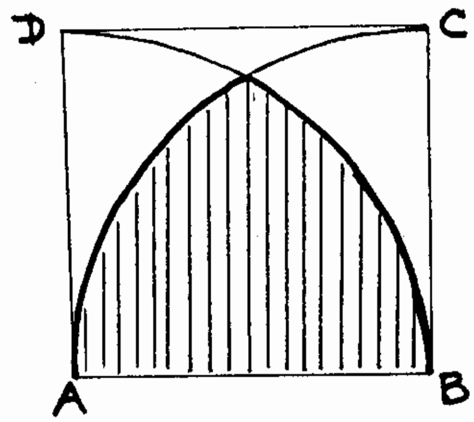
18) El rectángulo ABCD tiene 32 cm de perímetro. $\overline{AD}$ es el triple de $\overline{AB}$, R es punto medio de AB y S es punto medio de AD. Calcule el área del cuadrilátero ARCS e indique qué parte es del área del ABCD.



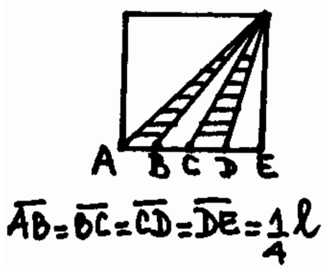
19) Un terreno que tiene forma de triángulo rectángulo con $b = 240\,m$ y $a = 250\,m$, se divide en dos partes uniendo en línea recta, el punto medio de un lado con el vértice opuesto. ¿Cuántos metros de alambre de púa se necesitan para bordear la superficie sombreada?. ¿Qué parte de la superficie del terreno original corresponde a la parte sombreada?

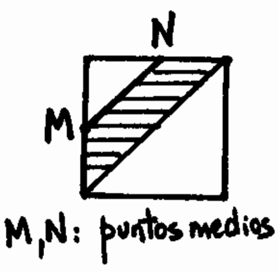


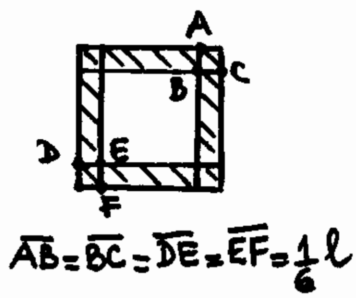
20) ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. Se trazan dos arcos de circunferencia centrados uno en A y el otro en B, de radio $\overline{AB}$. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



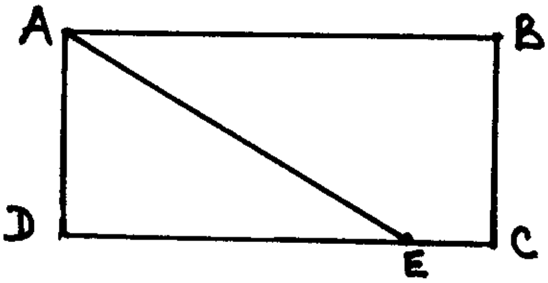
21) Para cada figura, determine qué parte del cuadrado de lado l representa la zona sombreada.



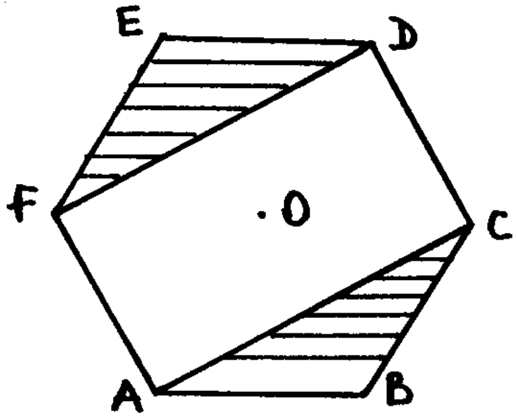




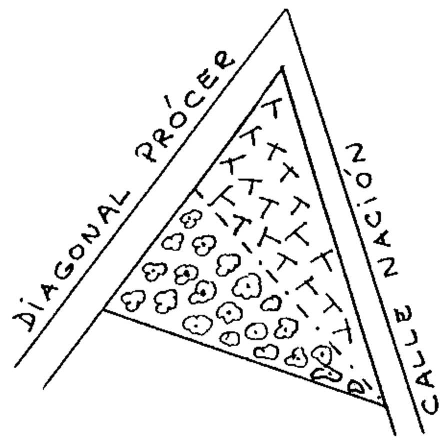
22) Para cercar el terreno rectangular ABCD a un costo de \$ 1,20 el metro, se gastan en total \$ 276. El terreno tiene 35 m más de largo que de ancho. Se parte en dos por la línea AE como muestra la figura. El área de AED es las dos terceras partes del área de ABCE. ¿Cuál es el área de la parcela AED?



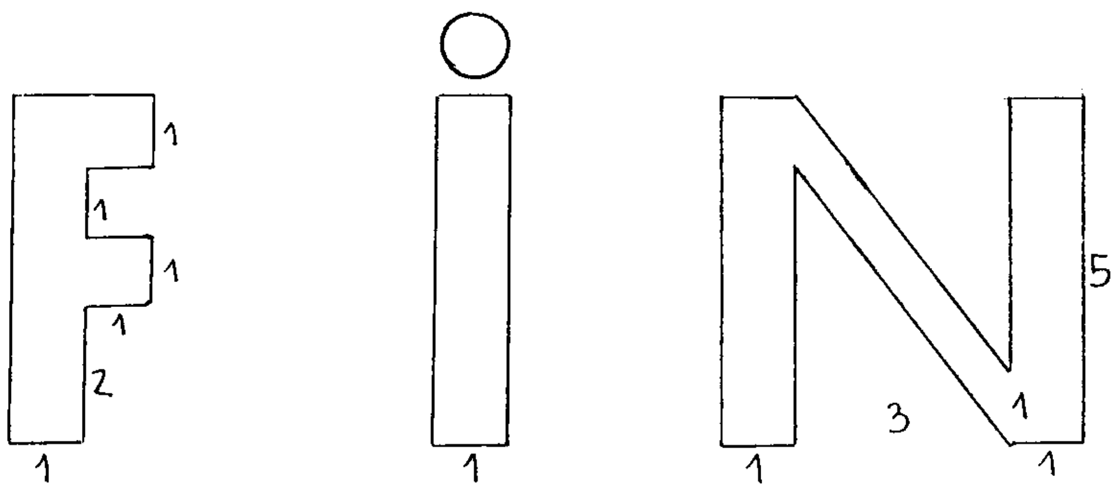
23) El hexágono regular ABCDEF tiene 48 cm de perímetro y 6,9 cm de apotema. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



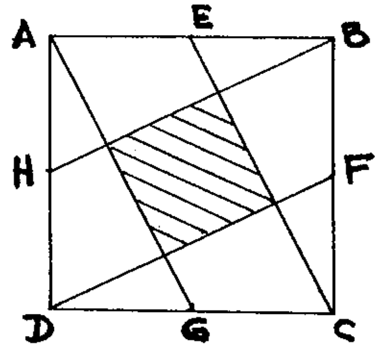
24) En la esquina de Diagonal Prócer y Calle Nación se decide construir una plaza en el terreno triangular que se ve en el plano. El Consejo Vecinal decide partirla en dos sectores triangulares de igual superficie, uno para juegos y el otro para flores. El lado del terreno que da sobre Diagonal Prócer tiene 30 m. Indique donde se debe colocar la división correspondiente para que se cumpla con lo resuelto.



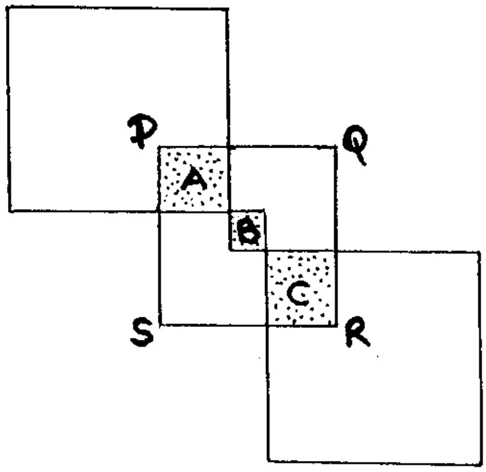
25) ¿Cuál es el área de la "N"? Puede cubrirse la "N" con el doble del papel necesario para la "F"?. ¿Cuánto se necesita para cubrir la "I".



26) En la figura E, F, G y H son los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD. ¿En qué proporción está el área del cuadrado sombreado con respecto al área del cuadrado grande?



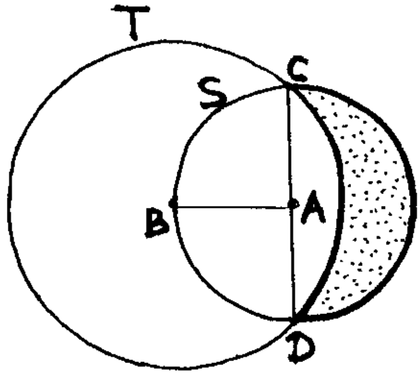
27) La suma de las áreas de los cuadrados A, B y C es 9. Si A = C y el área de A es cuatro veces la de B, halle el lado del cuadrado PQRS.



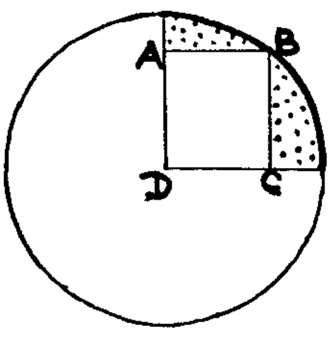
28) Calcule el área sombreada, sabiendo que:

(i) A y B son los centros de las circunferencias S y T respectivamente;

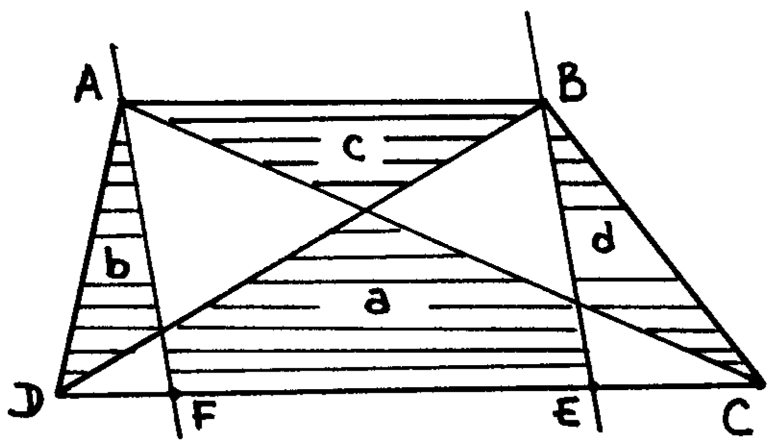
(ii) B pertenece a la circunferencia S, $\overline{CD}$ es un diámetro de S y mide 4 cm.



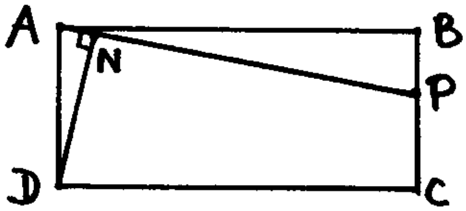
29) En la figura, ABCD es un rectángulo, D es el centro de un círculo y B un punto sobre el círculo. Si $\overline{AD} = 4$ y $\overline{CD} = 3$, halle el área de la región sombreada.



30) En el trapecio ABCD se han trazado las diagonales y dos rectas paralelas entre sí, una por A y la otra por B. Se designa con b, c y d las áreas de los triángulos sombreados y con a al área del pentágono sombreado. Pruebe que $a = b + c + d$.



31) ABCD es un rectángulo con $\overline{AB} = 5$ y $\overline{CB} = 3$. Si DN es perpendicular a AP, calcule $\overline{AP} \cdot \overline{DN}$.



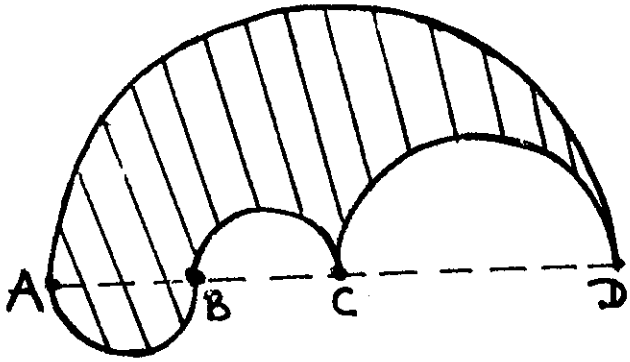
32) En la figura $\overline{AD} = 12$ cm, todos los arcos son semicircunferencias, C es punto medio de AD y B es punto medio de AC.

(i) Determine el perímetro y el área de la figura rayada;

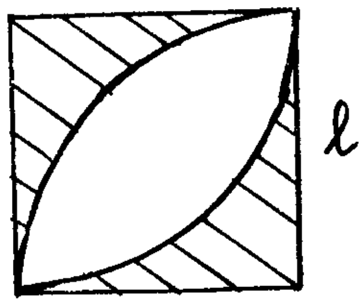
(ii) Halle la razón entre:

(a) el área de la figura rayada y el área del círculo de diámetro $\overline{AD}$;

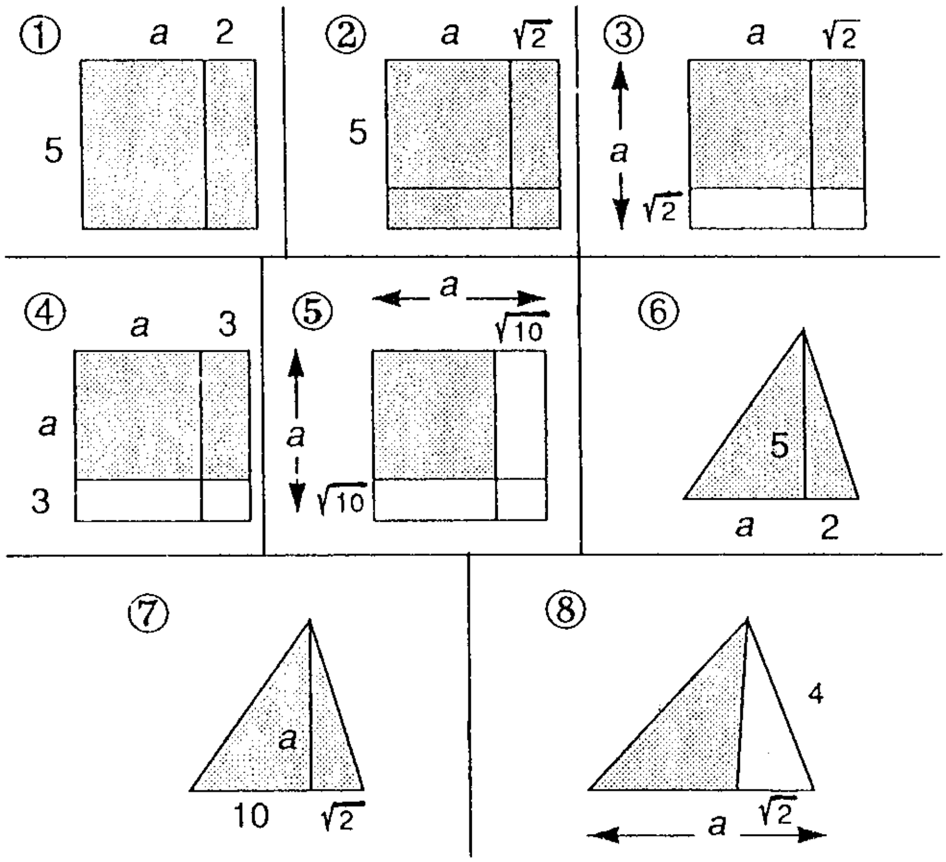
(b) el perímetro de la figura rayada y la longitud de la circunferencia de diámetro $\overline{AD}$.



33) Calcule el área de la superficie sombreada de un cuadrado de lado l, en el que las curvas son arcos de circunferencia trazados desde los vértices opuestos y cuyo radio es el lado del cuadrado. Calcule el porcentaje de dicha área respecto del área del cuadrado.

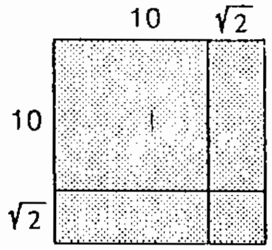


34) Indique el valor del parámetro a si el área de la región sombreada es 100.

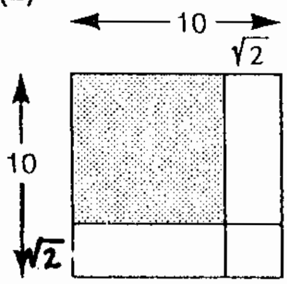


35) Calcule el área de la zona sombreada.

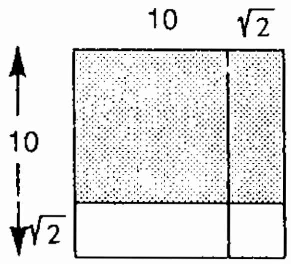
(1)



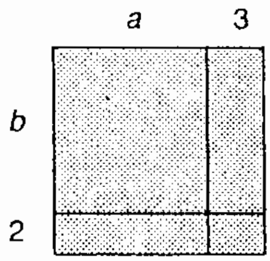
(2)



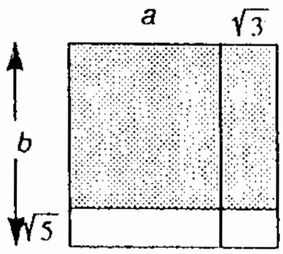
(3)



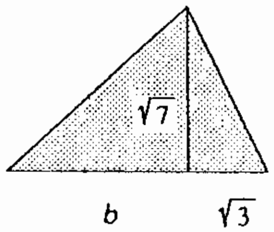
(4)



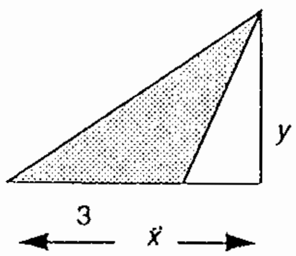
(5)



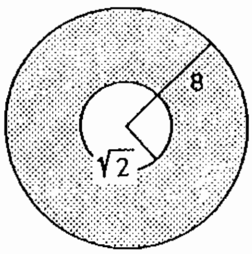
(6)



(7)



(8)



Problemas sobre Cuerpos del Espacio como Aplicación de la geometría del Plano.

1) Calcule las longitudes de todos los segmentos determinados por dos vértices cualesquiera de un cubo de lado a. ¿Cuántas longitudes diferentes existen?

2) Para confeccionar una pirámide se usaron, para la base, un cartón cuadrado de 156,25 cm^2 y para las caras, 225 cm^2 de cartulina. ¿Cuál es la altura de las caras laterales de la pirámide?. ¿Cuánto miden las aristas de la base?

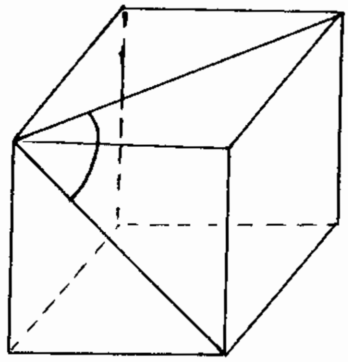
3) Un tanque en forma de prisma recto de base cuadrada de 5 m de lado contiene agua hasta los 4m de altura. En el fondo del tanque se coloca un cubo sólido de 3 m de arista. ¿Qué altura alcanza el agua dentro del tanque?

4) Una señora tiene que enmantecar y enharinar un molde redondo de 24 cm de diámetro y 8 cm de alto para cocinar una torta. Pero se da cuenta que el molde redondo se lo prestó a su vecina y no lo tiene. Decide reemplazarlo por uno rectangular que tiene 28 cm de largo, 22 cm de ancho y 6 cm de alto. Servirá este molde rectangular para cocinar la torta o será muy chico?

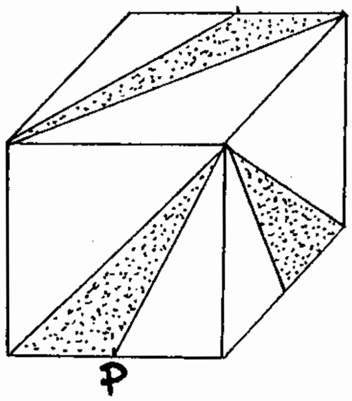
5) Las áreas de tres caras adyacentes de un paralelepípedo rectangular son 6 cm^2, 8 cm^2 y 12 cm^2. Indique su volumen.

6) (i) Un cubo de madera de 3 cm de lado está pintado en toda su superficie exterior de color rojo. Realizando cortes horizontales y verticales se obtienen 27 cubitos de 1 cm de lado. Determine el número de cubitos que tienen 3, 2, 1 y 0 caras rojas respectivamente.
(ii) Idem para un cubo de lado 4 cm con el cual se obtienen 64 cubitos de 1 cm de lado.

7) ¿Cuánto mide el ángulo que forman las diagonales de las dos caras del cubo que se señalan en la figura?



8) En todas las caras de un cubo se pintaron triángulos como muestra la figura. P es el punto medio de la arista. La superficie pintada es 54 cm^2. ¿Cuántos cm de cinta se necesita para bordear todas las aristas del cubo?



III.3. PROBLEMAS PARA PENSAR.

1) Si a la medida de dos lados paralelos de un cuadrado se le aumenta el 25 % y a la medida de los otros dos se le quita el 40 %. ¿Qué ocurrirá con su área?

2) Las piezas de un rompecabezas rectangular son 9 cuadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 y 18. ¿Cómo deben ubicarse las 9 piezas para armar el rompecabezas?

3) ABCD es un trapecio de bases AB y CD, y de lados $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CD} = 10$, $\overline{AD} = 4$. Las rectas AD y BC se cortan en el punto E. Demuestre que el triángulo DCE es isósceles.

4) Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sean los puntos P y Q pertenecientes a BC y AB respectivamente de manera que se tenga $\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$. Halle el valor de $\angle B$.

5) ¿Cuántos triángulos distintos hay de perímetro 17 y lados enteros?

6) Se tiene un rectángulo R de 2310 m^2 de área. Se quieren construir rectángulos cuya área sea 1/3 del área de R. Si las longitudes de los lados sólo pueden ser números enteros de metros (sin decimales). ¿Cuál es el menor perímetro entre todos ellos?

7) Pablo debe recortar el tablero para una mesa cuadrada de una pieza de madera rectangular. La pieza mide 40 cm por 90 cm , pero el tablero tiene que medir 60 cm por 60 cm. Pablo corta la pieza en dos partes iguales de manera que al unirlas forman el cuadrado que necesita. ¿Cómo lo hizo?

8) A, B y C son tres puntos alineados. B es el punto medio de $\overline{AC}$. El punto D no está en la recta AC, pero $\overline{DA} = \overline{DB}$ y $\overline{DB} = \overline{CB}$. Si hay 10 cm de A a D, ¿cuál es la distancia de D a C?

9) Una hormiga sale del hormiguero en busca de comida. Camina primero 50 cm hacia el este, luego 50 cm hacia el sudoeste, allí decide caminar 50 cm en dirección oeste y finalmente 50 cm en dirección sudeste. Por fin decide regresar con la comida al hormiguero. ¿En que dirección tiene que caminar para ir derecho al hormiguero?. ¿Es cierto que tiene que recorrer más de 50 cm pero menos de 1m?

10) Se trata de diseñar una casa de 70 m^2 en un terreno rectangular de 10 m de frente y 9 m de fondo . El cliente quiere un living comedor de 28 m^2, dos dormitorios que en total ocupen 21 m^2, un baño de 6 m^2, una cocina de 6 m^2 y los metros cuadrados restantes son para circulación. Además el living y las habitaciones tienen que tener ventanas a la calle o al jardín que se construirá en la parte libre del terreno y cada dormitorio tiene que tener como mínimo 3 m de ancho y 3 m de largo. Trabaje a escala y presente el plano de la casa.

11) Juan vive en un bosque a 100 m del árbol más viejo y a 400 m del guardabosque. Su amigo José decide mudarse al bosque a 200 m de distancia de la casa de Juan. Dibuje en un plano todos los lugares posibles que tiene José para su casa. Además José quiere que su casa, la de Juan y la del guardabosque queden alineadas. Ubique en el plano anterior la casa de José.
Tiempo después, un tercer amigo llamado Matías, se muda al mismo bosque a una casa que dista 200 m de la casa de Juan y también a 200 m de la de José, es decir que las tres casas son equidistantes. Complete el plano con las posibles ubicaciones de la casa de Matías.

12) Divida un hexágono regular en 4 triángulos, de modo tal que haya uno cuya área sea igual a la suma de las áreas de los otros tres.

13) Un tejido pierde 1/10 de su longitud y 1/8 de su anchura cuando se lava. Si el ancho original de la tela es de 1,60 m, ¿cuántos metros se deben comprar para obtener 189 m^2 después de lavarla?

14) Sea ABC un triángulo rectángulo en A; si $\angle C = 30°$ y $\overline{AB} = 10$ demuestre que $\overline{BC} = 20$.

15) Dado un triángulo ABC, indique paso a paso cómo se determina un punto M en el lado $\overline{AB}$ de modo que $\overline{MA} + \overline{AC} = \overline{MB} + \overline{BC}$, utilizando sólo regla y compás.

16) Considere un triángulo cuyos lados son 4, 5 y 6. Cada vértice del triángulo es el centro de un círculo y los tres círculos son exteriores y tangentes entre sí. Encuentre los radios de los círculos.

17) Dadas tres circunferencias mutuamente tangentes exteriores (es decir, cada una es tangente a las otras dos), al unir sus centros queda determinado un triángulo de lados 5, 7 y 9. Halle las longitudes de los radios de cada una de las tres circunferencias.

18) ¿Qué angulo forman las agujas del reloj a las 12:35 hs?

19) El tamaño de los televisores se mide en pulgadas e indica la medida de la diagonal de la pantalla, que tiene forma rectangular. Las dimensiones de la pantalla están en la relación 3 a 4. Calcule en cm las dimensiones de los televisores de 26 y 20 pulgadas (1 pulgada = 2,54 cm).

20) Dibuje un triángulo rectángulo. En cada uno de sus lados trace un semicírculo cuyo centro sea el punto medio del lado y cuyo radio sea la mitad del lado correspondiente del triángulo: Indique, justificando la respuesta, si es cierto o falso que:

La suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

21) Un pastor construye en un prado una cerca con forma de hexágono regular de 5 m de lado para que paste una oveja. El pastor ata la oveja cada día en un vértice distinto de la cerca con una cuerda de 2,5 m de longitud y el séptimo día la ata en el centro con la misma cuerda. La oveja come cada día todo el pasto que está a su alcance.

(i) ¿Qué superficie de pasto se come la oveja cada día durante los seis primeros?

(ii) ¿Cuántas veces es mayor la superficie que come el último día respecto de uno de los seis días primeros?

(iii) Con este sistema hay una región del cercado que se queda sin pastar. ¿Cuál es su superficie ?

22) Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC, y sea H la proyección ortogonal de B sobre la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Muestre que las rectas HM y AC son paralelas.

23) Se considera un trapecio ABCD de bases AB y CD. Las rectas AD y BC se cortan en P. La paralela a AD trazada por B corta DC en M. Sean I, J, K y L los puntos medios respectivamente de AP, BP, BM y BC. Pruebe que:

(i) IJ es paralela a AB ; (ii) KL es paralela a CD ;

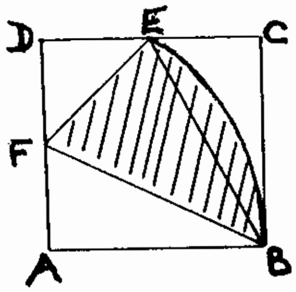
(iii) IJ y KL son paralelas.

24) Se considera un triángulo ABC. Sea AI la bisectriz interior del ángulo A. Sobre la recta AB se considera el punto E tal que AE = AC y que A esté entre B y E. Demuestre que la recta EC es paralela a AI.

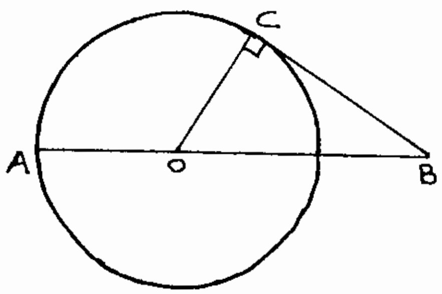
25) Sea ABCD un paralelogramo. Demuestre que las bisectrices interiores de los ángulos en A y en B de ABCD son perpendiculares.

26) Se considera un triángulo ABC isósceles en A, y un rombo BMCN, con BC una de sus diagonales. Pruebe que los puntos A, M y N están alineados.

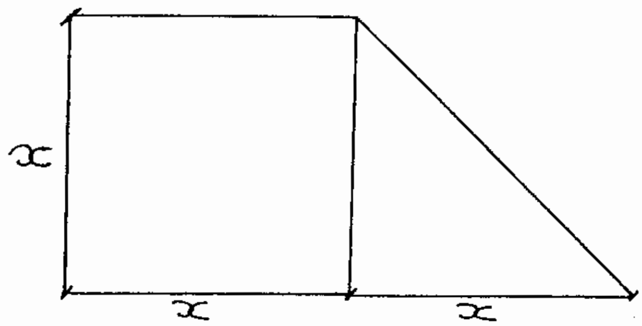
27) Sea ABCD un paralelogramo. Sea E el punto de la recta AB tal que BE = BC y que B esté entre A y E. La recta EC corta AD en F. Demuestre que el triángulo CDF es un triángulo isósceles.



28) ABCD es un cuadrado de 4 cm de lado. E y F son puntos medios de los lados. BE es un arco de circunferencia de radio igual a la longitud de $\overline{BE}$. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



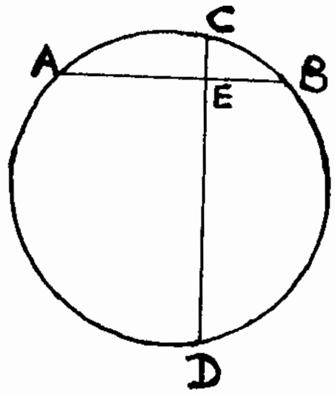
29) Halle el radio de la circunferencia sabiendo que : $\overline{CB} = 4$ cm, $\overline{AB} = 8$ cm.



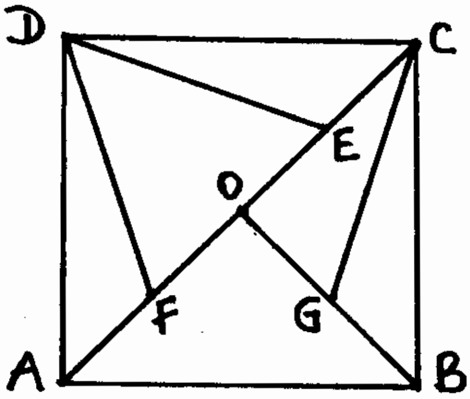
30) Se pretende repoblar con 60.000 árboles un bosque quemado cuya forma se presenta en la figura. Si cada árbol dispone de 1 m^2 de superficie. ¿Cuánto mide el perímetro del campo?

31) En una circunferencia, dos cuerdas perpendiculares AB y CD se cortan en un punto E, como se indica en la figura. Halle la longitud de la circunferencia sabiendo que:

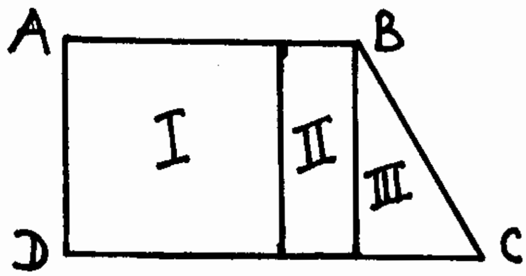
$$\overline{AE} = 3,\ \overline{EB} = 2,\ \overline{CE} = 1 \text{ y } \overline{ED} = 6.$$



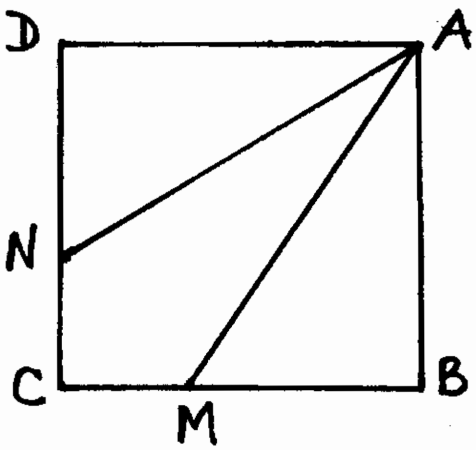
32) En el cuadrado ABCD se dividió AC en cuatro partes iguales y OB en dos partes iguales. Considere todos los triángulos de la figura y determine cuáles tienen igual área.



33) El terreno ABCD de la figura tiene forma de un trapecio rectángular y se dividió en tres parcelas. La parcela I es un cuadrado y la parcela II es un rectángulo con área igual a $\frac{1}{3}$ de la del cuadrado. Todo el terreno tiene 3840 m^2 de área y $\overline{AD} = 48$ m. ¿Cuál es la longitud de $\overline{CD}$?

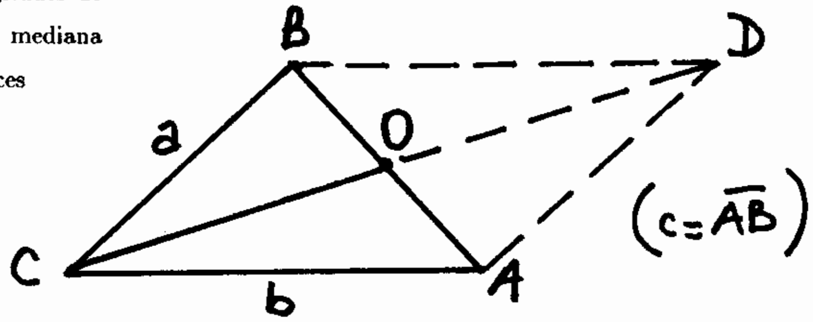


34) Tres hermanos han heredado un campo cuadrado que se divide como indica la figura, pues en A existe un pozo de agua que todos necesitan usar. ¿Dónde deben estar M y N para que las tres superficies ABM, AMCN y AND tengan igual área?

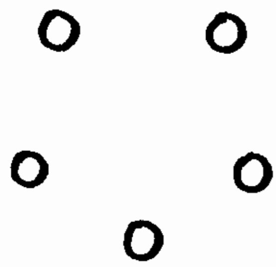


35) Pruebe que si a y b son las longitudes de dos lados de un triángulo y m_c es la mediana correspondiente al tercer lado c, entonces

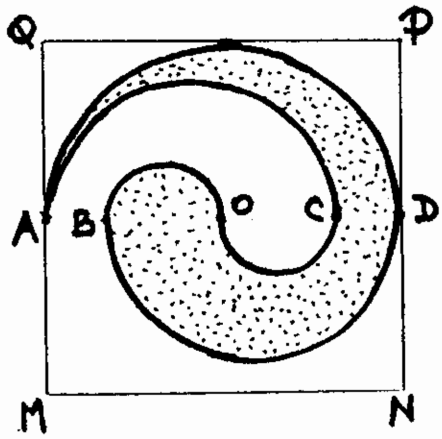
$$m_c < \frac{a+b}{2} .$$



36) Los alumnos de primer año quieren hacer en el patio de la escuela un arenero que tenga forma de pentágono regular de manera que las cinco macetas que están ubicadas como indica la figura, queden cada una en la mitad de un lado del pentágono. Indique la ubicación del arenero.



37) Dado el cuadrado MNPQ de lado 1, sea A el punto medio de MQ y D el punto medio de NP. Sean los puntos B y C pertenecientes al segmento AD tal que $\overline{AB} = \overline{CD} = 0{,}1993$. O es el centro del cuadrado y los arcos AD, AC, OC, BD, BO son semicircunferencias. Halle el área sombreada.



Medias aritmética, geométrica, armónica y cuadrática.

Definición.- Sean a y b números reales positivos. Entonces:

$m = \frac{a+b}{2}$: media aritmética de a y b ; $g = \sqrt{ab}$: media geométrica de a y b ;

$h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$: media armónica de a y b ; $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$: media cuadrática de a y b.

1) Sean a y b dos números reales positivos. Sea una circunferencia de centro O y de diámetro $\overline{AB} = a+b$. Sea C un punto de la recta determinada por los puntos A, O y B de manera que $\overline{AC} = a$ y $\overline{CB} = b$.

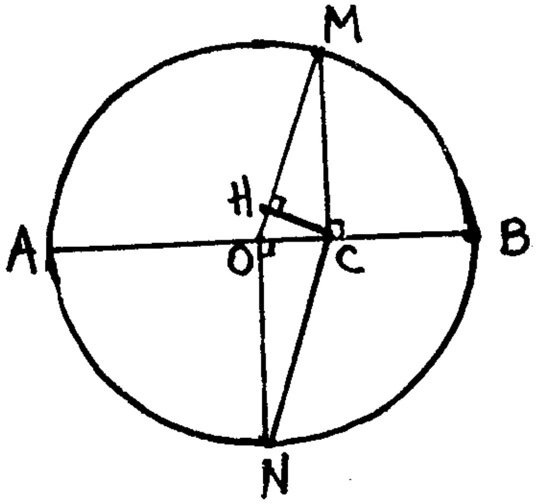
(i) Demuestre que (ver dibujo)

$$m = \overline{OM}, \quad g = \overline{CM},$$
$$h = \overline{MH}, \quad q = \overline{CN}.$$

(ii) Justifique geométricamente las desigualdades

$$h \leq g \leq m \leq q.$$

¿ En qué casos se tiene una igualdad ?



2) Sean un rectángulo de lados a y b, y un cuadrado de lado c. Determine c en función de a y b en los siguientes casos:

(i) El cuadrado y el rectángulo tienen el mismo perímetro (c es la media aritmetica de a y b);

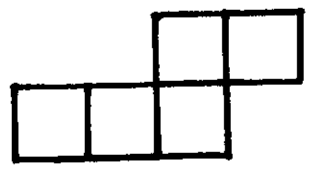
(ii) El cuadrado y el rectángulo tienen la misma área (c es la media geométrica de a y b);

(iii) El cuadrado y el rectángulo tienen las diagonales de la misma longitud (c es la media cuadrática de a y b);

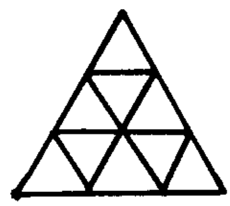
(iv) La razón de las áreas es igual a la de los perímetros (c es la media armónica de a y b).

Problemas con Fósforos.

1) En la figura, cambiando de lugar sólo 2 fósforos, sin sacar ninguno. ¿ Cómo obtendrá 4 cuadrados?



2) Quite 5 fósforos de manera tal que queden 5 triángulos iguales.



BIBLIOGRAFÍA

A continuación se indican referencias adicionales a las dadas en páginas 45 y 46.

- C. AMIGO - P. PEÑA - A. PÉREZ - A. RODRÍGUEZ - F. SIVIT, "Matemáticas 3", McGrawHill, Madrid (1994).

- C. AMIGO - P. PEÑA - A. PÉREZ - A. RODRÍGUEZ - F. SIVIT, "Matemáticas 4", McGrawHill, Madrid (1995).

- S.R. CLEMENS - P.G. O'DAFFER - T.J. COONEY, "Geometría con aplicaciones y solución de problemas", Addison -Wesley Iberoamericana, Wilmington (1989).

- Y.S. DUBNOV, "Errores de las demostraciones geométricas", Limusa, México (1973).

- C. GAUTIER - D. GERLL - A. GOLDEMBERG, "Classes de seconde et première", Ellipses, Paris (1994).

- R.B. NELSEN, "Proofs without words. Exercises in visual thinking", MAA-Mathematical Association of America, Washington (1993).

- L. PANCORBO - Ma.V. BECERRA - R. MARTÍNEZ - R. RODRÍGUEZ, "Matemáticas 1", McGrawHill, Madrid (1995).

- G. SÁNCHEZ VÁZQUEZ, "Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos", Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", Sevilla (1996).

- R. SCHADLER, "Geometry problems", Dale Seymour Publications, Palo Alto (1984).

- A. SOIFER, "Les mathématiques par la résolution de problèmes", Éditions du Choix, Argenteuil (1995).

Domingo Alberto TARZIA

Rosario, Mayo 2001

Departamento de Matemática - CONICET,
Fac. de Ciencias Empresariales, Univ. Austral
Paraguay 1950, (S2000FZF) Rosario, ARGENTINA.

TEL. (0341) 481-4990, Int. 137; FAX (0341) 481-0505
E-mail: Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

INFORMACION PARA LOS AUTORES

Los trabajos han de estar escritos en español o inglés. Excepcionalmente el Director y el Comité Editorial podrán admitir trabajos escritos en otros idiomas ampliamente utilizados. Deberá presentarse el texto mecanografiado o elaborado mediante un procesador de textos, con caracteres de 12 puntos, en un rectángulo de 16cm×24cm y en una sola cara del papel. Trabajos escritos en LATEX o en MS-WORD serán bienvenidos y en ese caso el autor deberá adjuntar un diskette con los archivos correspondientes, o bien enviarlos por correo electrónico.

En cada trabajo deberá constar, en la primer página, a partir de la quinta línea, el título en letras mayúsculas y sin punto final, el nombre de el o los autores, su identificación institucional y su correspondiente dirección postal y electrónica. Se acompañará un resumen que no exceda las 200 palabras en español y otro en inglés, añadiendo en ambos las palabras claves. También se solicita la inclusión de la corresponiente AMS-Mathematics Subject Classification.

Las tablas y gráficos deberán insertarse en el texto y estar numeradas en forma correlativa.

Las referencias bibliográficas se compondrán sólo de los trabajos mencionados en el texto y se incluirán al final, por orden alfabético de autores y en orden cronológico, si existieran varios trabajos del mismo autor; cada una precedida por el correspondiente número de orden, entre corchetes. Las citas en el texto se efectuarán según los siguientes modelos: [1]; Caffarelli & Vazquez [1]; Caffarelli & Vazquez (1995, [1]). Y en la referencia final:

[1] CAFFARELLI L. A. & VAZQUEZ J.L., *A free-boundary problem for the heat equation arising inflame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), pp. 411-441.

[2] FASANO A. & PRIMICERIO M., *Blow-up and regularization for the Hele-Shaw problem,* in *Variational and free boundary problems*, Friedman A. & Spruck J. (Eds.), IMA Math. Appl. Vol. 53, Springer Verlag, New York (1993), pp. 73-85.

[3] RODRIGUES J. F., *Obstacle problems in mathematical physics*, North-Holland Mathematics Studies N. 134, North-Holland, Amsterdam (1987).

Al final de la última página deberán dejarse al menos 2 líneas en blanco para incluir los datos de recepción.

INTERCAMBIOS

Departamento de Matemática – Biblioteca, Servicio de Canje
Facultad de Ciencias Empresariales -Universidad Austral
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA

NUMEROS APARECIDOS

Serie A:

- #1(2000): E.Mascolo – F.Siepe, "Functionals of the Calculus of Variations with non standard growth conditions".
- #2(2000): D.A.Tarzia, "A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems".
- #3(2001): D.A.Tarzia (Ed.), "VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Primera Parte.
- #4(2001): D.A.Tarzia (Ed.), "VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Segunda Parte.
- #5(2001): D.A.Tarzia (Ed.), "VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Tercera Parte.
- #6(2002): F.Talamucci,"Some Problems Concerning with Mass and Heat Transfer in a Multi-Component System".

Serie B:

- #1(2000): D.A.Tarzia, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática".
- #2(2003): D.A.Tarzia, "Matemática: Operaciones Numéricas y Geometría del Plano".

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD AUSTRAL
Paraguay 1950 S2000FZF ROSARIO ARGENTINA
TEL: (54) 341-481-4990 FAX: (54) 341-481-0505
E-mail: Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar