MAT

Serie A

Conferencias, seminarios y trabajos de Matemática

ISSN:1515-4904

14

Terceras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico

María C. Maciel
Domingo A. Tarzia (Eds.)

Departamento de Matemática,
Rosario,
Argentina
Marzo 2007

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

ISSN 1515-4904

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 14

TERCERAS JORNADAS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES, OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Maria Cristina Maciel - Domingo Alberto Tarzia (Eds.)

INDICE

Rosario, Marzo 2007

MAT - Serie A, 14 (2007) 31-34

SOBRE LA NO CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS EN DIMENSIÓN INFINITA§

RUBEN D. SPIES(1,2,†) Y KARINA G. TEMPERINI (1,3,‡)

(1) INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL, IMAL, CONICET-UNL
(2) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
(3) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL, SANTA FE, ARGENTINA

RESUMEN. Un procedimiento muy utilizado en diversas aplicaciones para aproximar las soluciones de un problema inverso infinito-dimensional de la forma $Ax = b$, donde A es un operador lineal y compacto sobre un cierto espacio de Hilbert X y b es el dato dado, consiste en encontrar una sucesión $\{X_N\}$ de subespacios aproximantes finito-dimensionales de X cuya unión es densa en X y construir la sucesión $\{x_N\}$ de soluciones de mínimos cuadrados del problema en cada subespacio X_N. En [3], Seidman demostró que si el problema es mal condicionado, entonces sin ninguna hipótesis adicional sobre la solución exacta o sobre la sucesión de subespacios aproximantes $\{X_N\}$, no se puede garantizar que la sucesión $\{x_N\}$ convergerá a la solución exacta. En este artículo se extiende este resultado: se prueba que si X es separable, entonces para cualquier $b \in X$, $b \neq 0$, y para cualquier función no negativa definida sobre los naturales $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, existe un operador lineal, compacto e inyectivo A y una sucesión creciente de subespacios finito-dimensionales $X_N \subset X$ tales que $\|x_N - A^{-1}b\| \geq f(N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$, donde x_N es la solución de mínimos cuadrados del problema $Ax = b$ en X_N.

1. Introducción y Preliminares

Dentro de un marco matemático bastante general un problema inverso lineal en dimensión infinita se puede presentar como la necesidad de determinar x en una ecuación de la forma

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

donde $A : X \to Y$ es un operador lineal y acotado, X, Y son espacios de Hilbert de dimensión infinita, el rango de A no es cerrado y b es un dato conocido. En tal caso, la inversa generalizada de Moore-Penrose del operador A, $A^\dagger$, no es acotada y por lo tanto el problema inverso (1.1) es mal condicionado [1]. Es bien sabido que si $b \in \mathcal{R}(A^\dagger)$, la mejor solución aproximada (i.e. la solución de mínimos cuadrados de mínima norma) de (1.1) está dada por $x^\dagger \doteq A^\dagger b$. En lo que sigue nos referiremos a $x^\dagger$ como la "solución exacta" de (1.1). Un procedimiento estándar para aproximar las soluciones de este tipo de problemas es la estimación de mínimos cuadrados. Dada una sucesión creciente $\{X_N\}$ de subespacios de X de dimensión finita cuya unión es densa en X, x_N es solución de mínimos cuadrados en X_N si minimiza $\|Ax - b\|^2$ para $x \in X_N$.

Palabras clave. Mínimos Cuadrados, Espacios de Hilbert, inversa generalizada de Moore-Penrose.
† E-mail: rspies@imalpde.ceride.gov.ar, ‡ ktemperini@ceride.gov.ar
§ Investigación financiada en parte por CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la Argentina, por UNL, Universidad Nacional del Litoral a través del proyecto CAI+D 2006 PE 236 y por Fundación Antorchas de Argentina.

Es sabido que en problemas mal condicionados, sin supuestos adicionales sobre la solución exacta o sobre la sucesión de subespacios aproximantes X_N, no se puede garantizar que la sucesión de soluciones de mínimos cuadrados converja a la solución exacta. Más precisamente, T. Seidman probó en [3] que si X es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de X y $X_N \doteq \operatorname{span}\{e_1, ..., e_N\}$, entonces existen un operador lineal $A : X \to X$ compacto, inyectivo, autoadjunto y de rango denso en X y $b \in \mathcal{R}(A)$, $b = Ax^*$ para algún $x^* \in X$, tales que si x_N es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ en X_N, entonces $\|x_N - x^*\| \to \infty$. Es importante señalar aquí que esta falta de convergencia no es una consecuencia del método de mínimos cuadrados, sino de elegir la sucesión de subespacios aproximantes sin tener en cuenta el operador A que define el problema. Por ejemplo, Luecke y Hickey [2] probaron que cuando el operador A es compacto y los subespacios X_N son los autoespacios asociados a la descomposición en valores singulares de A, la sucesión de soluciones de mínimos cuadrados siempre converge a la solución exacta.

En este trabajo se extiende el resultado de Seidman en el siguiente sentido: se demuestra que es posible que la solución de mínimos cuadrados diverja de la solución exacta con cualquier velocidad arbitrariamente grande, prescrita a-priori. Para ello, necesitamos introducir las siguientes definiciones.

Definición 1.1. *Sean X un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortogonal de X. Se dice que un elemento $x \in X$ es "degenerado con respecto a la base B" si puede escribirse como una combinación lineal finita de elementos de B; caso contrario se dice que x es "no degenerado con respecto a B". En particular, si $\langle x, e_n \rangle \neq 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ se dice que x es "fuertemente no degenerado con respecto a B". Si $\langle x, e_n \rangle \neq 0$ para infinitos valores de n, se dice que x es "débilmente no degenerado con respecto a B". Claramente, todo elemento fuertemente no degenerado en una base es también débilmente no degenerado en la misma base.*

2. Resultados Principales

El siguiente teorema afirma que dados un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita arbitrario X y un elemento $b \in X$, $b \neq 0$, existe un operador lineal A tal que las soluciones de mínimos cuadrados del problema $Ax = b$ en X_N se alejan de la solución exacta con velocidad arbitrariamente grande. Por razones de brevedad presentaremos aquí sólo un bosquejo de la demostración. Mayores detalles pueden encontrarse en [4].

Teorema 2.1. ([4]) *Sean X un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función creciente arbitraria. Entonces para cada $b \in X$, $b \neq 0$, existen una sucesión creciente de subespacios X_N cuya unión es densa en X y un operador lineal $A = A(b, f) : X \to X$, compacto, inyectivo y de rango denso en X, tales que $b = Ax^*$ para algún $x^* \in X$, y si x_N es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ en X_N, entonces $\|x_N - x^*\| \geqslant f(N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dado $b \in X$, $b \neq 0$, es posible probar que existe una base ortonormal $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que b es fuertemente no degenerado con respecto a B. Luego, dada esta base B, para cada par de sucesiones $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in \ell^2$ que satisfacen

$$\alpha_n \neq 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}, \; \beta_1 = 0, \; \beta_n \neq 0 \; \forall \, n \geq 2, \tag{2.1}$$

se tiene que el operador lineal $A : X \to X$ definido por

$$Ax \doteq \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \xi_n + \beta_n \xi_1) \, e_n,$$

donde $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \in X$, es compacto, inyectivo y tiene rango denso en X.

Por último, se puede ver que dado cualquier $b \in X$ fuertemente no degenerado con respecto a B es posible elegir las sucesiones $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in \ell^2$ de manera tal que, además de satisfacer (2.1), se tenga que $b \in \mathcal{R}(A)$ y, si x_N es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ en X_N, entonces $\|x_N - A^{-1}b\| \geq f(N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. $\square$

Cuando se aplica el método de mínimos cuadrados para resolver problemas concretos, usualmente la base $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ está dada y los subespacios X_N se eligen como $X_N \doteq \text{span}\{e_1, ..., e_N\}$. En el siguiente resultado se muestra que en este caso, para cualquier $b \in X$ débilmente no degenerado con respecto a la base B y para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ creciente no negativa, es posible construir un operador $A = A(b, f)$ tal que las soluciones de mínimos cuadrados de $Ax = b$ en X_N diverjan de la solución exacta con velocidad arbitraria. Nuevamente presentamos aquí sólo un bosquejo de la demostración de este resultado.

Corolario 2.2. ([4]) *Sean X un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función creciente arbitraria, $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de X, $b \in X$ débilmente no degenerado con respecto a la base B y $X_N \doteq \text{span}\{e_1, ..., e_N\}$. Entonces existe un operador lineal $A = A(b, f) : X \to X$, compacto, inyectivo y de rango denso en X tal que $b = A\hat{x}$ para algún $\hat{x} \in X$ y, si x_N es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ en X_N, entonces $\|x_N - \hat{x}\| \geqslant f(N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Se definen

$$\Delta \doteq \{n \in \mathbb{N} : \langle b, e_n \rangle \neq 0\}, \quad \Gamma \doteq \mathbb{N} \setminus \Delta,$$
$$B^{\Delta} \doteq \{e_{n_j} : n_j \in \Delta\}, \quad B^{\Gamma} \doteq \{e_{m_j} : m_j \in \Gamma\}$$

y $X_b \doteq \overline{\text{span}\, B^{\Delta}}$. Es inmediato que

$$\overline{\text{span}\, B^{\Gamma}} = X_b^{\perp}$$

y que b es fuertemente no degenerado con respecto a la base B^{Δ} de X_b. Como X_b es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, el Teorema 2.1 implica que existe un operador lineal $A^{\Delta} : X_b \to X_b$ compacto, inyectivo y de rango denso en X_b tal que $b = A^{\Delta}\hat{x}$ para algún $\hat{x} \in X_b$ y si x_M^{Δ} es la solución de mínimos cuadrados de $A^{\Delta}x = b$ en

$$X_M^{\Delta} \doteq \text{span}\,\{e_{n_j}\}_{j=1}^{M} \subset X_b,$$

entonces

$$\left\|x_M^{\Delta} - \hat{x}\right\| \geq \tilde{f}(M) \;\forall\; M \in \mathbb{N},$$

donde $\tilde{f}(j) \doteq f(n_{j+1})$.

Finalmente, se construye el operador A como una extensión apropiada de A^{Δ} a todo el espacio X. La forma en que se realiza esta extensión depende de la cardinalidad del conjunto Γ. $\square$

Puede pensarse que el resultado del corolario anterior tiene poca relevancia desde el punto de vista práctico pues podría suceder que en un entorno de b, el único valor de $\eta \in \mathcal{R}(A)$ para el cual se tiene que las soluciones de mínimos cuadrados de $Ax = \eta$ en X_N satisfacen que $\|x_N - A^{-1}\eta\| \geqslant f(N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$ sea, precisamente, $\eta = b$. Sin embargo, en el siguiente resultado se prueba que esto no es así. En efecto, veremos que en todo entorno reducido de centro en b y radio $\delta > 0$ existe una sucesión $\{b_k^{\delta}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(A)$ tal que $b_k^{\delta} \to b$ cuando $k \to \infty$ y $\left\|x_N^k - A^{-1}b_k^{\delta}\right\| \geqslant f(N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$, donde x_N^k es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b_k^{\delta}$ en X_N. Es decir, para cada elemento de la sucesión $\{b_k^{\delta}\}_{k=1}^{\infty}$ (i.e. para cada k fijo), las soluciones de mínimos cuadrados aproximantes

$\{x_N^k\}_{N=1}^{\infty}$, también se alejan de la solución exacta con velocidad arbitrariamente grande, de la misma forma con que lo hacen las soluciones de mínimos cuadrados obtenidas con dato igual a b.

Corolario 2.3. *Sean X un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de X, $X_N \doteq \text{span}\{e_1, ..., e_N\}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función creciente arbitraria, $b \in X$ no degenerado con respecto a B y $A = A(b, f)$ el operador cuya existencia se probó en el Corolario 2.2. Entonces, en todo entorno reducido de centro en b y radio $\delta > 0$ existe una sucesión $\{b_k^\delta\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(A)$ tal que $b_k^\delta \to b$ cuando $k \to \infty$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, la solución de mínimos cuadrados x_N^k de $Ax = b_k^\delta$ en X_N verifica que $\left\|x_N^k - A^{-1}b_k^\delta\right\| \geqslant f(N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ dado, definimos $b_k^\delta \doteq \left(1 + \frac{\delta}{2k\|b\|}\right) b$ para cada $k \in \mathbb{N}$ ($b \neq 0$ por ser no degenerado con respecto a β). Como $0 < \left\|b_k^\delta - b\right\| = \frac{\delta}{2k} < \delta$, se tiene que $\{b_k^\delta\}_{k=1}^{\infty}$ está en el entorno reducido de centro en b y radio δ. Claramente, $b_k^\delta \to b$ cuando $k \to \infty$. Puesto que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio de X, resulta que $b_k^\delta \in \mathcal{R}(A) \, \forall \, k \in \mathbb{N}$. Si x_N es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ en X_N, entonces $x_N^k \doteq \left(1 + \frac{\delta}{2k\|b\|}\right) x_N$ es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b_k^\delta$ en X_N. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\left\|x_N^k - A^{-1}b_k^\delta\right\| &= \left(1 + \frac{\delta}{2k\,\|b\|}\right) \left\|x_N - A^{-1}b\right\| \\
&\geq \left\|x_N - A^{-1}b\right\| \\
&\geq f(N) \; \forall \; N \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del Corolario 2.2.

□

Obs. 1. *En la demostración se usó el siguiente resultado: si x_N es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ en X_N, entonces σx_N con $\sigma \neq 0$, es la solución de mínimos cuadrados de $Ax = \sigma b$ en X_N.*

Referencias

[1] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[2] G. R. Luecke and K. R. Hickey, *Convergence of approximate solutions of an operator equation*, Houston Journal of Mathematics **11**, 3, 345-354, 1985.

[3] T. I. Seidman, *Nonconvergence Results for the Application of Least-Squares Estimation to Ill-Posed Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **30**, 4, 535-547, 1980.

[4] R. D. Spies and K. G. Temperini, *Arbitrary divergence speed of the least-squares method in infinite-dimensional inverse ill-posed problems*, Inverse Problems, **22**, 2, 611–626, 2006.