

MAT

Serie 

Conferencias, seminarios
y trabajos de Matemática

ISSN: 1515-4904



*VI Seminario sobre
Problemas de
Frontera Libre y
sus Aplicaciones.*

Tercera Parte

Departamento
de Matemática,
Rosario,
Argentina
2001

UNIVERSIDAD AUSTRAL

FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES



MAT

Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA

ISSN: 1515-4904
Propiedad de ACES

DIRECTOR

D. A. TARZIA Departamento de Matemática – CONICET, FCE-UA,
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA.
Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

COMITE EDITORIAL Y CIENTIFICO

L. A. CAFFARELLI Department of Mathematics, Univ. of Texas at Austin,
RLM 8100 Austin , TEXAS 78712, USA.
caffarel@math.utexas.edu

R. DURAN Depto. de Matemática, FCEyN, Univ. de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria, Pab. 1, 1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.
rduran@dm.uba.ar

A. FASANO Dipartimento di Matematica “U. Dini”, Univ. di Firenze,
Viale Morgagni 67/A, 50134 FIRENZE, ITALIA.
fasano@udini.math.unifi.it

M. PRIMICERIO Dipartimento di Matematica “U. Dini”, Univ. di Firenze,
Viale Morgagni 67/A, 50134 FIRENZE, ITALIA.
primice@udini.math.unifi.it

M. C. TURNER FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba,
Ciudad Universitaria, 5000 CORDOBA, ARGENTINA.
turner@mate.uncor.edu

R. WEDER Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,
Univ. Nac. Autónoma de México (UNAM)
Apartado Postal 20-726, MEXICO, DF 010000.
weder@servidor.unam.mx

N. WOLANSKI Depto. de Matemática, FCEyN, Univ. de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria, Pab. 1, 1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.
wolanski@dm.uba.ar

SECRETARIA DE REDACCION

G. GARGUICHEVICH Depto. de Matemática, FCE-UA,
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA.
Graciela.Garguichevich@fce.austral.edu.ar

MAT es una publicación del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral (FCE-UA) cuyo objetivo es contribuir a la difusión de conocimientos y resultados matemáticos. Se compone de dos series:

- Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA.
- Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACION MATEMATICA.

La Serie A contiene trabajos originales de investigación y/o recopilación que presenten una exposición interesante y actualizada de algunos aspectos de la Matemática, además de cursos, conferencias, seminarios y congresos realizados en el Depto. de Matemática. El Director, los miembros del Comité Editorial y Científico y/o los árbitros que ellos designen serán los encargados de dictaminar sobre los merecimientos de los artículos que se publiquen.

La Serie B se compone de cursos especialmente diseñados para profesores de Matemática de cada uno de los niveles de educación: E.G.B., Polimodal, Terciaria y Universitaria.

Además, se publican bajo el título **MAT**- PREPUBLICACIONES DE MATEMATICA, versiones preliminares de trabajos inéditos de investigación de los integrantes del Departamento y colaboradores.

La serie A y las Prepublicaciones podrán ser consultadas en: www.austral.edu.ar/MAT

MAT

SERIE A : CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 5

VI SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES Tercera Parte

Domingo A. Tarzia (Ed.)

INDICE

- **Adriana C. Briozzo – Domingo A. Tarzia**, “On a two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, 1-10.
- **Germán Torres – Cristina V. Turner**, “Métodos de diferencias finitas para un problema de Bingham unidimensional”, 11-26.
- **Analía Gastón – Gustavo Sánchez Sarmiento – Horacio Reggiardo**, “Un problemas de frontera libre: Fusión de una vaina de acero dentro de una cuchara de acería”, 27-32.
- **Ma. Fernanda Natale – Domingo A. Tarzia**, “An exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficient”, 33-36.
- **Claudia Lederman – Juan L. Vazquez – Noemí Wolanski**, “Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion with transport”, 37-41.

Rosario, Octubre 2001

El VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones tuvo lugar en el Departamento de Matemática de la FCE de la Universidad Austral, en Rosario, del 16 al 18 de Diciembre de 1998. Fue realizado con el apoyo del Proyecto de Investigación Plurianual del CONICET “Problemas de Frontera Libre para la Ecuación del Calor-Difusión” y gracias a un subsidio otorgado por el CONICET.

Los problemas de frontera libre son aquellos problemas de contorno donde interviene además, una superficie incógnita (la “frontera libre”) que separa dos o más regiones, sobre la cual se conocen datos que dependen del modelo analizado. Según el número de dimensiones del espacio, en lugar de una superficie de separación se podrá tener una curva o un número finito de puntos.

El avance considerable que se ha obtenido en el desarrollo teórico de estos temas a nivel nacional y sus potenciales aplicaciones a la industria (electropintura, envenenamiento y regeneración de catalizadores; combustión de sólidos; solidificación de aleaciones binarias; soldadura de metales; colada continua del acero; congelación de alimentos en la industria frigorífica; almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase; oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares, en caso de accidentes; procesos de ablación térmica; difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos, para el tratamiento médico de tumores mediante la aplicación de radiaciones; problemas de control óptimo ligados a procesos con cambio de fase; solidificación de suelos húmedos; derretimiento de glaciares; crecimiento de raíces de cultivo; precio en las opciones americanas; etc.) impulsaron su realización, prosiguiendo la línea de los Seminarios anteriores, con el objetivo de facilitar la interacción entre las personas y grupos de investigación que trabajan en dichos problemas y en temas conexos, y de despertar el interés y promover el acercamiento de jóvenes graduados.

COMITE ORGANIZADOR: Dr. L. A. Caffarelli, Austin - Texas (EEUU); Dr. E. A. García, Buenos Aires; Dr. D. A. Tarzia, Rosario (Coordinador); Ing. L. T. Villa, Salta; Dra. N. Wolanski, Buenos Aires.

SECRETARÍA LOCAL: Lic. A. C. Briozzo, Lic. G. G. Garguichevich, Ariel Lombardi, Lic. P. R. Marangunic, Lic. M. F. Natale, Lic. E. A. Santillan Marcus (Coordinador), Lic. M. C. Sanziel

Esta tercera parte contiene cinco de las conferencias y comunicaciones presentadas. La nómina general se incluye, en orden cronológico, en MAT – Serie A, 3 (2001), pág. 42.

Los manuscritos fueron recibidos y aceptados en agosto de 2001.

On A Two-Phase Stefan Problem with Nonlinear Thermal Coefficients *

Adriana C. BRIOZZO (1) and Domingo A. TARZIA (1) (2)

(1) Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA.

(2) CONICET, ARGENTINA.

E-mail: Adriana.Briozzo@fce.austral.edu.ar;
Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Abstract

We review some recent results concerning a heat conduction problem with a particular nonlinear thermal coefficients in both solid and liquid phases for a semi-infinite material $x > 0$, with phase change temperature T_1 , an initial temperature $T_2 (> T_1)$ and a heat flux of the type $q(t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}$ imposed on the fixed face $x = 0$.

We determine necessary and/or sufficient conditions on the parameters of the problem in order to obtain an instantaneous nonlinear two-phase Stefan problem (solidification process). We also give the corresponding explicit solution.

Resumen: Se da una revisión de algunos resultados recientes que conciernen a una ecuación del calor con particulares coeficientes térmicos no lineales en ambas fases sólida y líquida de un cuerpo semi-infinito $x > 0$, con una temperatura de cambio de fase T_1 , una temperatura inicial $T_2 (> T_1)$ y un flujo de calor del tipo $q(t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}$ que se impone en el borde fijo $x = 0$. Se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros del problema con el objetivo de obtener un problema no lineal instantáneo de Stefan a dos fases (proceso de solidificación). Se da también la correspondiente solución explícita.

Key words: Stefan problem, Instantaneous phase-change problem, Free boundary problem, Nonlinear thermal coefficients, Explicit solution.

Palabras claves: Problema de Stefan, Problema de cambio de fase instantáneo, Problemas de frontera libre, Coeficientes térmicos no lineales, Solución explícita.

AMS Subject classification: 35R35, 80A22, 35C05.

1. INTRODUCTION

We consider the two-phase Stefan problem (solidification process)[Ta2] with nonlinear thermal coefficients for a semi-infinite region $x > 0$ with phase change temperature T_1 , an

*MAT - Serie A, 5 (2001), 1-10.

initial temperature $T_2 > T_1$ and an imposed heat flux of the type $q(t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}$, ($q_0 > 0$) on the fixed face $x = 0$. For $t > 0$ we are going to determine, if there exist, the temperature distribution $u(x, t)$ and the free boundary $x = y(t)$, where

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t) < T_1 & 0 < x < y(t) \\ T_1 & x = y(t) \\ u_2(x, t) > T_1 & x > y(t) \end{cases}, \quad (1.1)$$

which must verify the following conditions

$$C_1(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_1(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right], \quad 0 < x < y(t), \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$C_2(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right], \quad x > y(t), \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$y(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$u_2(x, 0) = T_2 > T_1, \quad x > 0, \quad (1.5)$$

$$u_1(y(t), t) = u_2(y(t), t) = T_1, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$K_1(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} - K_2(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} = Ly'(t), \quad \text{on } x = y(t), \quad t > 0, \quad (1.7)$$

$$K_1(u_1(0, t)) \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad (1.8)$$

where

x : spatial coordinate, t : time,

$u_i(x, t)$: temperature distribution for phase i ,

T_1 : phase-change or freezing temperature,

T_2 : initial temperature, L : volumetric latent heat,

$C_i(u_i)$: volumetric heat capacity for phase i ,

$K_i(u_i)$: thermal conductivity for phase i ,

$y(t)$: free boundary (solid-liquid interface) at time t ,

q_0 : positive given constant which characterizes the heat flux on the fixed face,

$i = 1$: solid phase, $i = 2$: liquid phase.

We assume that the volumetric heat capacity and the thermal conductivity for each phase i ($i = 1, 2$) are related as follow :

$$C_i(u_i) = \frac{K_i(u_i)c_0}{k_0 a_i^2 \left[b_i - \frac{1}{k_0} \int_0^{\frac{u_i - T_1}{T_2 - T_1}} K_i(T_1 + (T_2 - T_1)z) dz \right]^2} \quad (1.9)$$

with the assumption given by

$$\frac{1}{k_0(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} K_2(z) dz < b_2 \quad (1.10)$$

where a_i, b_i ($i = 1, 2$) are positive constants and k_0, c_0 are scales for the thermal conductivity and volumetric heat capacity respectively. The heat flux condition of the type (1.8) was firstly considered in [Ta1] where an inequality for the coefficient q_0 was found in order to have an instantaneous two-phase Stefan problem with constant thermal coefficients, for both solid and liquid phases. Other problems in this direction are given by [BrTa1, HiHa, NaTa, Ro1, Ro2, SoWiAl]. The nonlinear relations (1.9) follows from the solidification of iron on a cooper base [TrBr]. Furthermore, these relations imply that the material is of the Storm's type, that is to say [BrNaTa, HiHa, NaTa, Ro2, St]

$$\frac{1}{\sqrt{K_i(u_i)C_i(u_i)}} \frac{d}{dT} \left(\log \sqrt{\frac{C_i(u_i)}{K_i(u_i)}} \right) = \frac{a_i}{\sqrt{c_0 k_0}(T_2 - T_1)} = const. , i = 1, 2$$

The goal of this paper is to determine which conditions on the parameters of the problem (in particular q_0) must be satisfied in order to have an instantaneous phase-change process.

In Section 2 we consider the associated nonlinear heat conduction problem corresponding to the initial liquid temperature T_2 and the heat flux condition on $x = 0$ of the type $\frac{q_0}{\sqrt{t}}$ for $t > 0$. The nonlinear condition between the thermal conductivity heat capacity is supposed to be of the type (1.9). We give a necessary condition for the heat flux input coefficient q_0 , *i.e.*

$$q_0 > \frac{\sqrt{c_0 k_0}(T_2 - T_1)}{a_2} Q^{-1} \left((k_0 b_2(T_2 - T_1))^{-1} \int_{T_1}^{T_2} K_2(z) dz \right) \tag{1.11}$$

in order to obtain an instantaneous change phase process, where Q is the real function defined by

$$Q(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2)(1 - \operatorname{erf}(x)) , x > 0, \tag{1.12}$$

with the properties $Q(0) = 0, Q(+\infty) = 1, Q'(x) > 0, \forall x > 0$, where the error function is given by

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-w^2)dw . \tag{1.13}$$

In the Section 3 we consider the nonlinear two phase Stefan problem (1.2) – (1.8) and we prove that it admits a similarity solution if the condition (1.11) for the coefficient q_0 obtained in Section 2 is verified. Some of these results are proved in [BrTa2].

2.- A NONLINEAR HEAT CONDUCTION PROBLEM AND ITS INSTANTANEOUS PHASE-CHANGE PROCESS.

We consider a semi-infinite slab $x \geq 0$ of a material that freezes at temperature T_1 . We suppose that it is initially hot at the uniform temperature $T_2 > T_1$ and it has nonlinear heat transfer coefficients. However, what happens if a heat flux of the type $\frac{q_0}{\sqrt{t}}$ is imposed at $x = 0$? Our interest is found relations among data in order to obtain an instantaneous phase change process, that is the temperature of the material at $x = 0$ must be less than T_1 for all positive time. Then, we consider the following nonlinear heat conduction problem corresponding to the initial phase (liquid phase) given by

$$C_2(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] , x > 0 , t > 0 , \tag{2.1}$$

$$u(x, 0) = T_2, \quad x > 0, \quad (2.2)$$

$$K_2(u(0, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

where K_2 and C_2 have the relation (1.9).

Then the question that follows is: Which conditions must be satisfied for the parameters q_0, T_1, T_2, K_2 and C_2 in order to have that the temperature $u(0, t) < T_1, \forall t > 0$? If the answer is affirmative we can assure [SoWiAl, Ta1, TaTu] that the phase-change is instantaneous. Next, we are going to calculate the explicit solution to the problem (2.1) – (2.3), for the liquid phase and, we are going to demonstrate that this solution is constant in $(0, t)$ for all t . Then we can answer affirmatively to the previous question by considering that the condition (1.10) is assumed. In order to obtain that explicit solution for the problem (2.1) – (2.3) we define the new variables and parameters

$$\begin{cases} x_* = x \sqrt{\frac{c_0}{k_0 t_s}}, & t_* = \frac{t}{t_s} \\ u_*(x_*, t_*) = \frac{u(x, t) - T_1}{T_2 - T_1} > 0 \\ K_{2*}(u_*) = \frac{K_2(u)}{k_0}, & C_{2*}(u_*) = \frac{C_2(u)}{c_0}, \end{cases} \quad (2.4)$$

where t_s is a time scale. Following [BrTrAv], we consider the Kirchhoff transformation given by

$$\eta(x_*, t_*) = \mu(u_*(x_*, t_*)) = \int_0^{u_*(x_*, t_*)} K_{2*}(z) dz \quad (2.5)$$

where

$$\mu(\Psi) = \int_0^{\Psi} K_{2*}(z) dz \quad (2.6)$$

Next, we define the new variables

$$\begin{cases} \chi(x_*, t_*) = \int_0^{x_*} \frac{1}{a_2(b_2 - \eta(z, t_*))} dz, & x_* > 0, \quad t_* > 0 \\ \tau = t_* \\ \bar{\mu}(\chi, \tau) = \eta(x_*, t_*) & \chi > 0, \quad \tau > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Now we are in condition in order to assume a similarity solution of the type

$$g(\phi) = \frac{\bar{\mu}(\chi, \tau)}{\theta}, \quad \phi = \frac{\chi}{2\sqrt{\tau}}, \quad \text{with } \theta = \int_0^1 K_{2*}(z) dz, \quad (2.8)$$

then our problem reduce to the following conditions

$$2(\phi + \lambda)g'(\phi) + g''(\phi) = 0, \quad \phi > 0, \quad (2.9)$$

$$g(+\infty) = 1, \quad (2.10)$$

$$g'(0) = \frac{2\lambda}{\theta} (b_2 - \theta g(0)) \quad (2.11)$$

for the unknown function g , with

$$q_{0*} = \frac{q_0}{\sqrt{c_0 k_0} (T_2 - T_1)} \quad , \quad \lambda = a_2 q_{0*}. \quad (2.12)$$

The solution to the equation (2.9) and conditions (2.10)-(2.11) is given by

$$g(\phi) = A [\operatorname{erf}(\phi + \lambda) - \operatorname{erf}(\lambda)] + B \quad , \quad \phi > 0 \quad (2.13)$$

where constants A and B are given by the following expressions

$$A = \frac{\lambda (b_2 - \theta) \sqrt{\pi}}{\theta [\exp(-\lambda^2) - \sqrt{\pi} \lambda (1 - \operatorname{erf}(\lambda))]} \quad , \quad B = 1 - \frac{\lambda (b_2 - \theta) \sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf}(\lambda))}{\theta [\exp(-\lambda^2) - \sqrt{\pi} \lambda (1 - \operatorname{erf}(\lambda))]} \quad (2.14)$$

Then, we obtain the following result.

Theorem 1 *The parametric solution to the problem (2.1)-(2.3) is given by*

$$u(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \mu^{-1} \left(\theta A \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \lambda\right) - \operatorname{erf}(\lambda) \right) + \theta B \right) \quad , \quad (2.15)$$

with

$$\begin{cases} x = a_2 \sqrt{\frac{k_0 t_s \tau}{c_0}} \left\{ (b_2 - B + A \operatorname{erf}(\lambda)) \chi - 2A \sqrt{\tau} \left[\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \lambda\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \lambda\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \lambda\right)^2\right) - \lambda \operatorname{erf}(\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\lambda^2) \right] \right\} \quad , \quad \chi > 0 \quad , \quad \tau > 0. \\ t = t_s \tau \quad , \quad \tau > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

where A, B are defined in (2.14). Moreover, we have that

$$u(0, t) < T_1, \forall t > 0 \iff q_0 \text{ satisfies (1.11)}. \quad (2.17)$$

Proof.- See [BrTa2]. ■

3.- EXPLICIT SOLUTION FOR THE INSTANTANEOUS TWO-PHASE STEFAN PROCESS WITH NONLINEAR THERMAL COEFFICIENTS.

From now on we will consider the problem (1.2)-(1.8) and we will prove that it is well posed for $t > 0$ when data satisfy condition (1.11). In order to obtain the explicit solution corresponding to the problem (1.2) – (1.8) we will consider the same kind of transformations used for problem (2.1) – (2.3) and we define the new variables and parameters

$$\begin{cases} x_* = x \sqrt{\frac{c_0}{k_0 t_s}} \quad , \quad t_* = \frac{t}{t_s} \\ u_{1*}(x_*, t_*) = \frac{u_1(x, t) - T_1}{T_2 - T_1} < 0 \quad , \quad u_{2*}(x_*, t_*) = \frac{u_2(x, t) - T_1}{T_2 - T_1} > 0 \\ K_{1*}(u_{1*}) = \frac{K_1(u_1)}{k_0} \quad , \quad K_{2*}(u_{2*}) = \frac{K_2(u_2)}{k_0} \\ C_{1*}(u_{1*}) = \frac{C_1(u_1)}{c_0} \quad , \quad C_{2*}(u_{2*}) = \frac{C_2(u_2)}{c_0} \\ L_* = \frac{L}{c_0 (T_2 - T_1)} \quad , \quad y_*(t_*) = y(t) \sqrt{\frac{c_0}{k_0 t_s}} \end{cases} \quad (3.1)$$

Following [BrTrAv], we consider the Kirchhoff transformation given by

$$\eta_i(x_*, t_*) = \mu_i(u_{i*}(x_*, t_*)) = \int_0^{u_{i*}(x_*, t_*)} K_{i*}(z) dz \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

where

$$\mu_i(\Psi) = \int_0^{\Psi} K_{i*}(z) dz \quad , \quad i = 1, 2 . \quad (3.3)$$

Next, we define the new variables through the Storm transformation given by [KnPh, St]

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1(x_*, t_*) = \int_0^{x_*} \frac{1}{a_1(b_1 - \eta_1(z, t_*))} dz \quad , \quad 0 < x_* < y_*(t_*) \quad , \\ \chi_2(x_*, t_*) = \int_{y_*(t_*)}^{x_*} \frac{1}{a_2(b_2 - \eta_2(z, t_*))} dz \quad , \quad x_* > y_*(t_*) \\ \tau = t_* \end{array} \right. \quad (3.4)$$

and

$$\bar{\mu}_i(\chi_i, \tau) = \eta_i(x_*, t_*) \quad , \quad i = 1, 2 . \quad (3.5)$$

Then, the free boundary is now given by

$$S(\tau) = \chi_1(y_*(\tau), \tau) = \int_0^{y_*(\tau)} \frac{1}{a_1(b_1 - \eta_1(z, \tau))} dz . \quad (3.6)$$

Owing to the condition on the free boundary and following [TrBr] we have that the interface between the two phases must move as

$$y_*(t_*) = \delta \sqrt{t_*} \quad , \quad (3.7)$$

and the flux of η_2 on the free boundary takes the explicit form :

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x_*}(y_*(t_*), t_*) = \frac{\gamma}{\sqrt{t_*}} \quad , \quad (3.8)$$

where the positive constants δ and γ must be determined. Now the free boundary $S(\tau)$ may be expressed in terms of the transformed coordinates as follows

$$S(\tau) = 2(\Lambda_1 - \lambda_1)\sqrt{\tau} \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad \Lambda_1 > \lambda_1 > 0 \quad (3.9)$$

where

$$\lambda_1 = a_1 q_{0*} \quad , \quad \Lambda_1 = a_1 \gamma + \frac{\delta}{2} \left[\frac{1}{a_1 b_1} + a_1 L_* \right] . \quad (3.10)$$

Then, the problem take the following form

$$\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{\mu}_1}{\partial \chi_1^2} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \chi_1} \quad , \quad 0 < \chi_1 < S(\tau) \quad , \quad \tau > 0 \quad , \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{\mu}_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial \chi_2}, \quad \chi_2 > 0, \quad \tau > 0, \quad (3.12)$$

$$\bar{\mu}_2(\chi_2, 0) = \theta_2, \quad \chi_2 > 0 \quad (3.13)$$

$$\bar{\mu}_1(S(\tau), \tau) = \bar{\mu}_2(0, \tau) = 0, \quad \tau > 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \chi_1}(S(\tau), \tau) \frac{1}{a_1 b_1} - \frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial \chi_2}(0, \tau) \frac{1}{a_2 b_2} = L_* \frac{\delta}{2\sqrt{\tau}}, \quad \tau > 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \chi_1}(0, \tau) = \frac{\lambda_1 (b_1 - \bar{\mu}_1(0, \tau))}{\sqrt{\tau}}, \quad \tau > 0, \quad (3.16)$$

where

$$\lambda_2 = a_2 \gamma + \frac{\delta}{2a_2 b_2}. \quad (3.17)$$

Now we can remark that problem (3.11)-(3.16) is a two-phase Stefan problem with convective terms in both heat equations and a convective boundary condition on the fixed face. From (3.10) and (3.17) we have for the unknowns γ and δ the following relations

$$\gamma = \frac{\Lambda_1 a_1 b_1 - a_2 b_2 \lambda_2 [1 + a_1^2 b_1 L_*]}{a_1^2 b_1 (1 - a_2^2 b_2 L_*) - a_2^2 b_2}, \quad \delta = (\lambda_2 - a_2 \gamma) 2a_2 b_2. \quad (3.18)$$

If we assume a similarity solution for the problem (3.11)-(3.17) of the following type

$$\begin{cases} g_1(\phi_1) = \bar{\mu}_1(\chi_1, \tau), \quad \phi_1 = \frac{\chi_1}{2\sqrt{\tau}}, \\ g_2(\phi_2) = \frac{\bar{\mu}_2(\chi_2, \tau)}{\theta_2}, \quad \phi_2 = \frac{\chi_2}{2\sqrt{\tau}}, \quad \theta_2 = \int_0^1 K_{2*}(z) dz \end{cases} \quad (3.19)$$

then it reduces to the problem (3.20)-(3.25) given by

$$2(\phi_1 + \lambda_1)g_1'(\phi_1) + g_1''(\phi_1) = 0, \quad 0 < \phi_1 < \Lambda_1 - \lambda_1, \quad (3.20)$$

$$2(\phi_2 + \lambda_2)g_2'(\phi_2) + g_2''(\phi_2) = 0, \quad 0 < \phi_2, \quad (3.21)$$

$$g_2(+\infty) = 1, \quad (3.22)$$

$$g_1(\Lambda_1 - \lambda_1) = g_2(0) = 0 \quad (3.23)$$

$$g_1'(0) = 2q_{0*} a_1 (b_1 - g_1(0)) \quad (3.24)$$

$$\frac{g_1'(\Lambda_1 - \lambda_1)}{a_1 b_1} - \frac{g_2'(0)\theta_2}{a_2 b_2} = L_* \delta, \quad (3.25)$$

for the unknown functions g_1 and g_2 , and the unknown coefficients Λ_1 and λ_2 .

The solution to the equations (3.20)-(3.21) and conditions (3.22)-(3.23) is given by

$$\begin{cases} g_1(\phi_1) = b_1 \frac{\text{erf}(\phi_1 + \lambda_1) - \text{erf}(\Lambda_1)}{\tilde{g}(\lambda_1) - \text{erf}(\Lambda_1)}, \quad 0 < \phi_1 < \Lambda_1 - \lambda_1 \\ g_2(\phi_2) = \frac{\text{erf}(\phi_2 + \lambda_2) - \text{erf}(\lambda_2)}{1 - \text{erf}(\lambda_2)}, \quad 0 < \phi_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

where

$$\tilde{g}(z) = \text{erf}(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-z^2)}{z} = g(z, \frac{1}{\sqrt{\pi}}) \quad (3.27)$$

and $g(z, p)$ was defined in [BrNaTa] with the following useful properties

$$\tilde{g}(+\infty) = 1 \quad , \quad \tilde{g}(0) = +\infty \quad , \quad \tilde{g}'(z) < 0 \quad , \quad \forall z > 0. \quad (3.28)$$

Then, the new unknowns coefficients Λ_1 and λ_2 must satisfy the following system of equations given by

$$\begin{cases} (i) \quad \lambda_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2 (1 + a_1^2 b_1 L_*)} [\Lambda_1 - \overline{A}_1 G(\Lambda_1)] \\ (ii) \quad G(\Lambda_1) = \frac{\theta_2}{\sqrt{\pi} a_1 b_1 a_2 b_2} F(\lambda_2) \end{cases} \quad (3.29)$$

where

$$\overline{A}_1 = a_1^2 b_1 (1 - a_2^2 b_2 L_*) - a_2^2 b_2 \quad (3.30)$$

and

$$\begin{cases} G(z) = \frac{(1 + a_1^2 b_1 L_*) \exp(-z^2)}{\sqrt{\pi} a_1^2 b_1 [\tilde{g}(\lambda_1) - \text{erf}(z)]} - L_* z \quad , \quad z > 0 \\ F(z) = \frac{\exp(-z^2)}{1 - \text{erf}(z)} \quad , \quad z > 0 . \end{cases} \quad (3.31)$$

In order to obtain the solution to our problem (3.29) we can define $\lambda_2 = \lambda_2(\Lambda_1)$ from (3.29(i)).

Taking into account that L_* is from a physical point of view the inverse of the Stefan number we can obtain now the existence theorem of solution in order to have a instantaneous phase change process for problem (1.2)-(1.8) as a function of this important physical number. Then we have the following result.

Lemma 2 *If q_0 satisfies the inequality (1.11), then the system of equations (3.29) admit a unique solution $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(\tilde{\Lambda}_1)$ when data satisfies*

$$\frac{L}{c_0(T_2 - T_1)} = L_* \geq \frac{1}{a_2^2 b_2} \quad \text{or} \quad 0 < \frac{L}{c_0(T_2 - T_1)} = L_* \leq \max \left\{ 0, \frac{1}{a_2^2 b_2} - \frac{1}{a_1^2 b_1} \right\}$$

and at least one solution $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(\tilde{\Lambda}_1)$ when

$$\max \left\{ 0, \frac{1}{a_2^2 b_2} - \frac{1}{a_1^2 b_1} \right\} < \frac{L}{c_0(T_2 - T_1)} < \frac{1}{a_2^2 b_2}.$$

Proof.- It follows from the properties of functions λ_2, G and F obtained in [BrTa2]. ■

Therefore, we have obtained the following theorem in terms of the original data of the problem (1.2)-(1.8), that is:

Theorem 3 *If q_0 satisfies the inequality (1.11) then, an explicit solution to the problem (1.2)-(1.8) is given by*

$$\begin{cases} u_1(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \mu_1^{-1} \left(b_1 \frac{\text{erf}\left(\frac{\chi_1}{2\sqrt{\tau}} + \lambda_1\right) - \text{erf}(\tilde{\Lambda}_1)}{\tilde{g}(\lambda_1) - \text{erf}(\tilde{\Lambda}_1)} \right) , \\ \quad 0 < \chi_1 < S(\tau), \tau > 0 \\ \\ u_2(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \mu_2^{-1} \left(\frac{\text{erf}\left(\frac{\chi_2}{2\sqrt{\tau}} + \tilde{\lambda}_2\right) - \text{erf}(\tilde{\lambda}_2)}{1 - \text{erf}(\tilde{\lambda}_2)} \right) , \\ \quad \chi_2 > 0, \tau > 0 \end{cases}$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \frac{\sqrt{\frac{k_0 t_s \tau}{c_0}} a_1 b_1 \left(\frac{\chi_1}{2\sqrt{\tau}} + \lambda_1 \right)}{\tilde{g}(\lambda_1) - \operatorname{erf}(\tilde{\Lambda}_1)} \left[\tilde{g}(\lambda_1) - \tilde{g}\left(\frac{\chi_1}{2\sqrt{\tau}} + \lambda_1\right) \right], \quad 0 < \chi_1 < S(\tau), \quad \tau > 0 \\ x = \left[a_2 b_2 + \theta_2 a_2 \frac{\operatorname{erf}(\tilde{\lambda}_2)}{\operatorname{erf} c(\tilde{\lambda}_2)} \right] \chi_2 - \\ - \frac{2\sqrt{\tau} a_2 \theta_2}{1 - \operatorname{erf}(\tilde{\lambda}_2)} \left[\left(\frac{\chi_2}{2\sqrt{\tau}} + \tilde{\lambda}_2 \right) \tilde{g}\left(\frac{\chi_2}{2\sqrt{\tau}} + \tilde{\lambda}_2\right) - \tilde{\lambda}_2 \tilde{g}(\tilde{\lambda}_2) \right] + \tilde{\delta} \sqrt{\tau}, \quad \chi_2 > 0, \quad \tau > 0 \\ t = t_s \tau, \quad \tau > 0 \end{array} \right.$$

where $y(t) = \sqrt{\frac{k_0}{c_0}} \tilde{\delta} \sqrt{t}$ is the free boundary, and the coefficients $\tilde{\gamma}$ and $\tilde{\delta}$ are given by

$$\tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\Lambda}_1 a_1 b_1 - a_2 b_2 \tilde{\lambda}_2 [1 + a_1^2 b_1 L_*]}{a_1^2 b_1 (1 - a_2^2 b_2 L_*) - a_2^2 b_2}, \quad \tilde{\delta} = (\tilde{\lambda}_2 - a_2 \tilde{\gamma}) 2 a_2 b_2,$$

where $\tilde{\Lambda}_1$ and $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(\tilde{\Lambda}_1)$ are the solution of the system (3.29). Moreover this solution is unique when

$$\frac{L}{c_0(T_2 - T_1)} = L_* \geq \frac{1}{a_2^2 b_2} \quad \text{or} \quad 0 < \frac{L}{c_0(T_2 - T_1)} = L_* \leq \max \left\{ 0, \frac{1}{a_2^2 b_2} - \frac{1}{a_1^2 b_1} \right\}.$$

ACKNOWLEDGMENTS

This paper has been partially sponsored by CONICET - UA (Rosario-Argentina). This financial support was granted to the Project PIP No. 4798/96 "Free Boundary Problems for the Heat Equation".

References

- [BrTa1] Briozzo, A. C. - Tarzia, D. A., *Explicit solution of a free boundary problem for a non linear absorption model of mixed saturated-unsaturated flow*, Adv. Water Resources, **21**(1998), 713-721.
- [BrTa2] Briozzo, A. C. - Tarzia, D. A., *An Explicit Solution for an Instantaneous Two-Phase Stefan Problem with Nonlinear Thermal Coefficients*, Preprint (2000), Submitted to IMA J. Appl. Math.
- [BrNaTa] Briozzo, A. C. - Natale, M. F. - Tarzia, D. A., *Determination of unknown thermal coefficients for Storm's type materials through a phase-change process*, Int. J. of Nonlinear Mechanics, **34** (1999), 329-340.
- [BrTrAv] Broadbridge, P. - Tritscher, P. - Avagliano, A., *Free boundary problems with non-linear diffusion*, Mathl. Comput. Modeling, **18** (1993), 15-34.

- [HiHa] Hill, J. M. - Hart, V. G., *The Stefan problem in nonlinear heat conduction*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), 37 (1986), 206-229.
- [KnPh] Knight, J. H. - Philip, J. R., *Exact solution in nonlinear diffusion*, J. Engng Math., 8 (1974), 219-227.
- [NaTa] Natale, M. F. - Tarzia, D. A., *Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm's type materials*, J. Phys. A:Math. Gen., 37 (2000), 395-404.
- [Ro1] Rogers, C. - Broadbridge, P., *On a class of moving boundary problems in nonlinear heat conduction: application of a Backlund transformation*, Int. J. Non-linear Mechanics, 21 (1986), 249-256.
- [Ro2] Rogers, C., *Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*, J. Phys. A: Math. Gen., 18 (1985), 105-109.
- [SoWiAl] Solomon, A. D. - Wilson, D.G. - Alexiades, V., *Explicit solutions to phase change problems*, Quart. Appl.Math., 51 (1983), 237-243.
- [St] Storm, M. L., *Heat conduction in simple metals*, J. Appl. Phys., 22 (1951), 940-951.
- [Ta1] Tarzia, D. A. , *An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*, Quart. Appl.Math., 39 (1981/82), 491-497.
- [Ta2] Tarzia, D. A., *A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT - Serie A, # 2 (2000), (with 5869 titles on the subject, 300 pages). See [www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2\(2000\)/](http://www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)/)
- [TaTu] Tarzia D. A. - Turner, C. V., *A note on the existence of a waiting time for a two-phase Stefan problem*, Quart. Appl.Math; 50 (1994), 1-10.
- [TrBr] Tritscher, P. - Broadbridge, P., *A similarity solution of a multiphase Stefan problem incorporating general non-linear heat conduction*, Int. J. Heat Mass Transfer; 37 (1994), 2113-2121.

Método de Diferencias Finitas para un Problema de Bingham Unidimensional

Germán A. Torres * y Cristina Turner †

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba, 5000 Córdoba, Argentina

Abstract

In this work, a numerical method of finite differences is proposed to solve an unidimensional Bingham problem, and some theoretical properties of the solution are proved, and corroborate numerical results. A Bingham fluid is a non-newtonian fluid, whose viscous behaviour makes his layers move only if shear stress is greater than a threshold value τ_0 . There are some previous theoretical results that allows us to affirm existence and uniqueness of the solution under certain initial conditions. The proposed method is a finite difference scheme with spatial variable step, that is, while we move a fixed time step, we adjust the grid in such a way that the spatial step represents the free boundary advance. Using an internal calculus of fixed point is possible to reduce the number of flops, making feasible the implementation of the method in a computer. Besides that, a theorem of existence and uniqueness is proved for more general cases, and also a result about asymptotic behaviour is demonstrated.

Resumen

En este trabajo se propone un método numérico de diferencias finitas para resolver un problema de Bingham unidimensional y se demuestran algunas propiedades teóricas de la solución que sirven para corroborar los resultados numéricos. Un fluido de Bingham es un fluido no newtoniano cuyo comportamiento viscoso hace que sus capas se desplacen entre sí sólo si la tensión tangencial supera una cierta tensión umbral τ_0 . Hay varios resultados teóricos previos que nos permiten afirmar la existencia y unicidad de la solución bajo ciertas condiciones iniciales. El método consiste en el uso de diferencias finitas, más precisamente en la discretización de la variable temporal con un paso fijo, mientras que en la variable espacial se elige un paso variable, de modo tal que la grilla se vaya adaptando a la frontera libre a medida que el tiempo transcurre. Usando una iteración interna de punto fijo es posible reducir notablemente el costo computacional, haciendo factible la implementación práctica del método. Además se prueba un resultado de existencia y unicidad para problemas más generales y se demuestra cuál es el comportamiento asintótico.

Key words: Bingham fluid, finite differences, non-newtonian fluids

Palabras Claves: Fluido de Bingham, diferencias finitas, fluidos no newtonianos

AMS Subject Classification: 35A40, 35B40, 35R35, 39A12, 65M06

*torres@mate.uncor.edu

†turner@mate.uncor.edu

1 Introducción

Consideramos el fluido encerrado entre dos placas paralelas, y mediante el uso de la ecuación de Navier-Stokes para la región viscosa y la ecuación de movimiento de Newton para la parte rígida es posible modelar el comportamiento del sistema. La frontera que separa las dos regiones previamente mencionadas (la viscosa y la rígida) es desconocida y se encuentra en movimiento, y es una de las incógnitas más importantes del problema.

Existe una formulación débil, en forma variacional, para problemas de frontera libre del tipo del fluido de Bingham. Se puede consultar en [4],[5], [8], [9] y [10]. Además en [11] hay detallada una extensa bibliografía acerca del tema.

Según sea la relación entre el tensión de corte y la tensión tangencial, es posible realizar una clasificación de los fluidos. Si la tensión tangencial es un múltiplo de la tensión de corte (la tensión de corte es la velocidad de cambio de la velocidad de las capas del fluido), donde el coeficiente multiplicativo es la viscosidad, entonces el fluido es denominado newtoniano, caso contrario se llamará no newtoniano. Ejemplos de fluidos newtonianos son: agua, benceno, alcohol, glicerina. Ejemplos de fluidos no newtonianos son: plasma de la sangre, chocolate, mayonesa, salsa de tomate, pasta dental, algunas grasas, aguas cloacales, y en general líquidos con partículas en suspensión.

Entre los fluidos no newtonianos tenemos los fluidos de Bingham, que son aquéllos cuya relación entre la tensión tangencial τ y la tensión de corte σ es lineal. Es decir,

$$\tau = \tau_0 + \eta\sigma. \quad (1.1)$$

donde η es la viscosidad y τ_0 es la tensión umbral.

Suponemos que el fluido es incompresible, laminar, y con densidad ρ constante. Fijado el sistema de coordenadas, donde la dirección y es la vertical, la x es la dirección de movimiento, y z la restante, se hacen las siguientes hipótesis:

1. El gradiente de presión se aplica en un solo sentido, es decir, $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$.
2. El fluido es laminar, es decir, $v = w = 0$.
3. La componente no nula de la velocidad es sólo función del tiempo y de la componente vertical de la posición, es decir, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.
4. No hay intercambio de material entre la región viscosa y la región rígida, es decir, $u_y(s(t), t) = 0$.
5. El fluido tiene la condición de adherencia en las paredes de las placas, es decir, que la velocidad del fluido allí es cero.

Usando todas estas hipótesis simplificativas se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que llamaremos Problema (P). Haciendo un simple cambio de variables, podemos independizarnos de algunas constantes quedando:

$$u_t - u_{yy} = f(t), \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$u(y, 0) = u_0(y), \quad s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < y < 1, \quad (1.4)$$

$$u_y(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$u_t(s(t), t) = f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)}, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Como vemos, en el sistema ha quedado un problema del tipo de conducción del calor, donde el término fuente es el gradiente de presión f que, según las hipótesis, depende sólo de la variable temporal. Este sistema es llamado un problema de frontera libre puesto que la función $s(t)$, que es la frontera que separa dos regiones, forma parte de las incógnitas. Para que haya desplazamientos de las capas del fluido, debemos suponer que el gradiente de presión supera la tensión umbral τ_0 , es decir,

$$f(t) > \tau_0, \quad \forall t > 0. \quad (1.7)$$

También se puede colocar una condición más general en lugar de tener una condición de contorno fija (como en (1.3)), simulando la situación de dos fluidos de distinta naturaleza en contacto, quedando una ecuación alternativa:

$$u(1, t) = g(t), \quad t > 0. \quad (1.8)$$

Se puede observar que tal función g no acarrea mayores problemas puesto que se puede reescribir el sistema considerando una nueva función para el gradiente de presión.

Un sencillo cálculo de derivación nos permite obtener el problema derivado, que nos será de utilidad más adelante.

Si $w = u_y$ se tiene el problema (P_y)

$$w_t - w_{yy} = 0, \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (1.9)$$

$$w_y(1, t) = -f(t), \quad t > 0, \quad (1.10)$$

$$w(y, 0) = u'_0(y), \quad s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < y < 1, \quad (1.11)$$

$$w(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.12)$$

$$w_y(s(t), t) = -\frac{\tau_0}{s(t)}, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

2 Resultados previos

Si suponemos que el gradiente de presión tiende a un valor estacionario, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_0$, y suponemos u independiente del tiempo en (1.2)-(1.6), se puede obtener la solución estacionaria.

$$u_\infty(y) = -\frac{f_0}{2} (y^2 - 1) + f_0 s_\infty (y - 1), \quad s_\infty = \frac{\tau_0}{f_0}. \quad (2.1)$$

Elena Comparini probó en [1] la existencia y unicidad del problema (P) para todo tiempo, dependencia continua respecto de los datos, un resultado de monotonicidad y la convergencia asintótica, cuando el gradiente de presión tiende a un valor constante y cuando las condiciones iniciales cumplen ciertas hipótesis. Llamemos

$$u_0(1) = 0, \quad u'_0(y) \leq 0, \quad u''_0(y) \leq 0, \quad (A1)$$

$$u_0'(y) \geq -f_0 \left(y - \frac{\tau_0}{f_0} \right), \quad u_0''(y) \geq -f_0. \quad (A2)$$

Proposición 2.1 Si $s_0 > s_\infty$, (A1), (A2), $f' \geq 0$ y $u_0'''(y) \leq 0$ se tiene existencia y unicidad del problema (P) para todo tiempo y

$$s(t) > s_\infty, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$0 \leq u(y, t) \leq u_\infty(y), \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$u_{\infty y}(y) \leq u_y(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (2.4)$$

$$f(t) - f_0 \leq u_t(y, t) \leq f(t) \leq f_0, \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

$$s'(t) < 0, \quad t > 0. \quad (2.6)$$

Se observa además que la siguiente integral está acotada.

$$\int_0^\infty \left(\frac{s_\infty}{s(t)} - \frac{f(t)}{f_0} \right) dt. \quad (2.7)$$

Esto nos dice que el integrando converge a cero cuando t tiende a infinito, concluyendo que la frontera libre es, asintóticamente, inversamente proporcional al término fuente multiplicada por la tensión umbral.

$$s(t) \approx \frac{\tau_0}{f(t)}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

3 Generalizaciones

En esta sección se generalizarán los resultados expuestos en [1]. Llamemos (B1) a:

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad u_0(1) = 0, \quad u_0'(y) \leq 0 \quad \forall y \in [s_0, 1]. \quad (B1)$$

Notar que (B1) dice que $u_0(y) \geq 0$.

Proposición 3.1 Se puede ver que:

1. Si la hipótesis (B1) se cumple, entonces

$$u(y, t) \geq 0, \quad (3.1)$$

$$u_y(y, t) \leq 0. \quad (3.2)$$

2. Si se cumple (B1), $u_0'''(y) \leq 0 \quad \forall y \in [s_0, 1]$ y $f'(t) \geq 0 \quad \forall t > 0$, entonces $s'(t) < 0$ para los t donde la solución exista y para los t tales que $s(t) > 0$.

3. Si u es solución de (1.2)-(1.6) se cumple la siguiente relación

$$\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{\tau_0}{s(\tau)} \right] d\tau = u(s(t), t) - u_0(s_0). \quad (3.3)$$

para los t donde la solución exista.

Demostración: (1) y (2) son una consecuencia obvia del Principio del Máximo y el Lema de Hopf y (3) resulta de las ecuaciones de Green.

□

Observación 1 *Se observa que la acotación de la integral depende de la velocidad del fluido en la frontera libre. Pero ahora no podemos asegurar que el integrando tienda a cero, puesto que los experimentos numéricos del método que se propondrá a continuación revelaron que la velocidad del fluido en la frontera libre tiende a infinito.*

Proposición 3.2 *Supongamos que se cumple la hipótesis (B1), que $u_0'''(y) \leq 0$, $\forall y \in [s_0, 1]$, y que $f'(t) \geq 0$, $\forall t > 0$. Entonces*

$$w_{yy}(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

$$w_y(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$w_t(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$s(t) > \frac{\tau_0}{f(t)}, \quad t > 0. \quad (3.7)$$

siempre que $s(t) > 0$.

Demostración: La función $v \doteq w_{yy}$ resuelve el siguiente sistema de ecuaciones,

$$v_t - v_{yy} = 0, \quad s(t) < y < 1, \quad t > 0, \quad (3.8)$$

$$v_y(1, t) = -f'(t) \leq 0, \quad t > 0, \quad (3.9)$$

$$v(y, 0) = u_0'''(y) \leq 0, \quad 0 < s_0 < y < 1, \quad (3.10)$$

$$v(s(t), t) = \frac{\tau_0 s'(t)}{s(t)} \leq 0, \quad t > 0. \quad (3.11)$$

Por el lema de Hopf la solución no tiene máximo en $y = 1$. Luego es fácil ver por el Principio del Máximo que $v \leq 0$, lo cual nos dice que $w_{yy} \leq 0$. Como $w_{yy} = w_t$, entonces $w_t \leq 0$. También, como $w_{yy} \leq 0$ resulta que $w_y(y, t)$ es decreciente respecto de y para cada t . Luego el máximo de w_y está en la frontera libre. Como $w_y(s(t), t) = -\frac{\tau_0}{s(t)} \leq 0$ entonces $w_y \leq 0$. Otra consecuencia de ser w_y decreciente es que $w_y(s(t), t) \geq w_y(1, t)$, lo cual, reemplazando sus valores respectivos da que $s(t) > \frac{\tau_0}{f(t)}$. Esto concluye la demostración. □

Teorema 3.3 *Sea f una función diferenciable que cumple $f(t) > \tau_0 \forall t > 0$, $f'(t) \geq 0 \forall t > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$. Asumimos también que se cumplen la hipótesis (C1) conformada por estas cinco ecuaciones:*

$$\begin{cases} u_0(1) = 0, & u_0'(y) \leq 0 \forall y \in [s_0, 1], & u_0''(y) \leq 0 \forall y \in [s_0, 1], \\ s_0 > 0, & u_0'''(y) \leq 0 \forall y \in [s_0, 1] \end{cases} \quad (C1)$$

Luego existe única solución del problema (P_y) para todo tiempo y además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0, \quad s(t) > \frac{\tau_0}{f(t)} \forall t > 0. \quad (3.12)$$

Demostración: Llamamos problema (P_y^n) al sistema (P_y) salvo que el término $f(t)$ es reemplazado por $f_n(t)$, donde, para $n \in N$ y $\epsilon > 0$ arbitrario

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq n \\ \text{polinomio que empalme a } f \text{ en forma diferenciable,} & n < t < n + \epsilon \\ f(n + \epsilon), & t \geq n + \epsilon \end{cases} \quad (3.13)$$

Como la función f tiene límite infinito, a partir de un N en adelante se cumplen las hipótesis de existencia y unicidad de la Proposición (2.1), lo cual nos dice que cada problema (P_y^n) con $n \geq N$ tiene solución única para t arbitrariamente grande, cumpliéndose también que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s^n(t) = \frac{\tau_0}{f(n + \epsilon)}, \quad s^n(t) > \frac{\tau_0}{f(n + \epsilon)}. \quad (3.14)$$

A la solución de este problema la llamamos $\{w^n, s^n\}$.

Sea T un número positivo arbitrario. Tomo n tal que $n \geq N$ y $n \geq T$. Luego el problema (P_y) coincide con el problema (P_y^n) en el intervalo $[0, T]$. Luego, de acuerdo al párrafo anterior, el problema (P_y) tiene única solución en el intervalo $[0, T]$ para todo T arbitrario. Esto me dice que el problema (P_y) admite solución para t arbitrariamente grande.

A partir de ahora consideraremos que $n \geq N$ para que se cumplan las hipótesis de existencia y unicidad. Llamamos $\{w^n, s^n\}$ solución de (P_y^n) para $n \geq N$ y llamaremos $\{w, s\}$ solución de (P_y) . Probaremos que esa sucesión de soluciones converge a la solución general.

Por unicidad de la solución, y debido a que $f_n(t) = f(t)$ para $t \leq n$, se tiene que

$$\begin{cases} s^n(t) = s(t) & t \leq n \\ w^n(y, t) = w(y, t) & s(t) \leq y \leq 1, t \leq n \end{cases} \quad (3.15)$$

Esto dice que $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n(t) = s(t)$. Por un teorema de monotonía para problemas de este tipo, se sabe que si $f_n < f_{n+1}$ entonces $s^n > s^{n+1}$. Ver [1]. También sabemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} s^n(t) = \frac{\tau_0}{f(n+\epsilon)}$ para todo n .

Sea $\epsilon_1 > 0$. Luego existe $N_1 \geq N$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $\frac{\tau_0}{f(n+\epsilon)} < \epsilon_1$. En particular $\frac{\tau_0}{f(N_1+\epsilon)} < \epsilon_1$. Luego existe M , un número real, tal que si $t \geq M$, entonces $s^{N_1}(t) < \epsilon_1$. Por monotonía, $s^n(t) < s^{N_1}(t) < \epsilon_1$ para $n \geq N_1$ y $t \geq M$. Dado $t \geq M$, tomo $n \geq t$, luego $s^n(t) = s(t)$, que da como resultado que $s(t) < \epsilon_1$. Notar que $s(t) > 0$, $\forall t > 0$. Haciendo uso de la Proposición (3.2) se obtiene por (3.7) el otro resultado que buscábamos. Esto concluye la demostración. \square

4 Método de Diferencias Finitas con Paso Espacial Variable

Por simplicidad trabajaremos con el sistema (1.9)-(1.13). El método consiste en discretizar la ecuación principal. Fijado un paso de tiempo Δt , se construye una grilla de tal forma que la frontera libre pase por los nodos de ésta. En cada paso de tiempo se calcula un paso

espacial Δy adecuado para tal fin. El algoritmo se ha construido para el caso cuando la frontera libre es decreciente. Para métodos similares ver [3], [6] y [7]. Definimos entonces Δt arbitrario y

$$y_{i+1} = 1 - (\Delta y_1 + \dots + \Delta y_i), \quad i \geq 1, \quad y_1 = 1, \quad (4.1)$$

$$t_n = (n-1)\Delta t, \quad n \geq 1. \quad (4.2)$$

Dividimos el intervalo $[s_0, 1]$ en $m-1$ partes, donde m es un número natural arbitrario mayor o igual que tres. Definimos

$$\Delta y_i = \frac{1 - s_0}{m-1}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (4.3)$$

Con esta elección los puntos y_1, \dots, y_m son una partición de $[s_0, 1]$ igualmente distribuida. Se ve claramente que $y_m = s_0$. De aquí en adelante construiremos $\Delta y_m, \Delta y_{m+1}, \dots$, de manera tal que (y_{n+m-1}, t_n) sea un punto de la frontera libre. Denotamos $w_{in} \doteq w(y_i, t_n)$. Realizamos aproximaciones mediante diferencias finitas para las derivadas y reemplazando en (1.9)-(1.13) queda lo que llamamos problema (Pd_y):

$$w_{1,n+1} - w_{2,n+1} = -\Delta y_i f_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}} w_{i-1,n+1} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i} + \Delta y_i \right) w_{i,n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i} w_{i+1,n+1} = \\ = -\Delta y_i w_{i,n}, \quad i = 2 \dots n+m-1, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$w_{n+m,n+1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.6)$$

$$w_{i1} = u'_0(y_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.7)$$

$$\Delta y_{n+m-1} = \left(\frac{w_{n+m-1,n+1}}{w_{n+m-1,n+1} - \tau_0} \right) y_{n+m-1}, \quad n \geq 1. \quad (4.8)$$

La idea del proceso es la siguiente:

1. Elegidos y_1, \dots, y_m , se puede calcular $\{w_{i1}\}_{i=1}^m$ mediante la ecuación (4.7). De este modo el primer paso quedaría resuelto.
2. Hasta el momento sólo disponemos de $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{m-1}$. Si pudiéramos conocer el valor de Δy_m , entonces utilizando el sistema (4.4)-(4.6) para $n=1$, entonces sería posible calcular $\{w_{i2}\}_{i=1}^{m+1}$. Luego nos dedicaremos a calcular Δy_m .
3. Esto nos permite realizar un paso inductivo. Supongamos conocidos los valores $\{w_{in}\}_{i=1}^{n+m-1}$ y $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-2}$. Si supiéramos cuánto vale Δy_{n+m-1} , entonces podríamos resolver el sistema lineal (4.4)-(4.6) y obtener $\{w_{i,n+1}\}_{i=1}^{m+n}$.

Como vemos, lo único que nos queda es tratar de encontrar el valor de Δy_{n+m-1} , de tal forma que sea consistente con la ecuación (4.8). Lo que proponemos es lo siguiente:

1. Dar un valor inicial $\Delta y_{n+m-1}^{(1)}$ tal que $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(1)} < y_{n+m-1}$.
2. Calcular una iteración interna en r determinada por la ecuación (4.8), es decir,

$$\Delta y_{n+m-1}^{(r+1)} = \left(\frac{w_{n+m-1,n+1}^{(r)}}{w_{n+m-1,n+1}^{(r)} - \tau_0} \right) y_{n+m-1}, \quad n \geq 1. \quad (4.9)$$

donde $w_{n+m-1,n+1}^{(r)}$ se calcula resolviendo (4.4)-(4.6) usando $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-2}$, $\Delta y_{n+m-1}^{(r)}$.

Si la sucesión $\{\Delta y_{n+m-1}^{(r)}\}$ fuera convergente a un número $\Delta y_{n+m-1} > 0$, resolveríamos (4.4)-(4.6) usando $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-2}$, Δy_{n+m-1} , lo cual nos daría $\{w_{i,n+1}\}_{i=1}^{m+n}$, y de esta manera quedaría resuelto el problema para el nivel $n + 1$.

Proposición 4.1 *Sea A una matriz cuadrada tridiagonal, donde los elementos de la diagonal principal y las dos adyacentes son todos distintos de cero. Entonces A es una matriz irreducible, es decir, el sistema no puede desacoplarse.*

Demostración: Ver [12]. □

Proposición 4.2 *Si $\Delta t > 0$ y $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, entonces la matriz del sistema lineal formado por las ecuaciones (4.4)-(4.6) es no singular.*

Demostración: Claramente la matriz del sistema es diagonalmente dominante en sentido fuerte. Usando la proposición anterior se observa que esta matriz es también irreducible. Como un corolario del Segundo Teorema de Gershgorin resulta que la matriz es invertible. □

Ahora despejaremos explícitamente la solución del sistema lineal (4.4)-(4.6) con el objeto de obtener propiedades de la solución.

De la ecuación (4.4) se deduce que:

$$w_{1,n+1} = w_{2,n+1} - \Delta y_1 f_{n+1}. \quad (4.10)$$

Caso $i = 2$: Reemplazamos por el valor de $w_{1,n+1}$ y despejamos $w_{2,n+1}$, quedando:

$$w_{2,n+1} = \frac{-\frac{\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + w_{2n} + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2} w_{3,n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}. \quad (4.11)$$

Notemos que

$$w_{2,n+1} = a_{2,n+1} + b_{2,n+1} w_{3,n+1}, \quad (4.12)$$

donde

$$a_{2,n+1} = \frac{\frac{-\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + w_{2n}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \quad b_{2,n+1} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta y_2^2}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \quad (4.13)$$

donde

$$a_{2,n+1} = a_{2,n+1}(\Delta t, \Delta y_2, f_{n+1}, w_{2n}), \quad b_{2,n+1} = b_{2,n+1}(\Delta t, \Delta y_2), \quad 0 < b_{2,n+1} < 1. \quad (4.14)$$

Caso $i = k$, donde $3 \leq k \leq n + m - 2$: Reemplazamos por el valor de $w_{k-1,n+1}$ y despejamos $w_{k,n+1}$, quedando:

$$w_{k,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1} \Delta y_k} a_{k-1,n+1} + w_{kn} + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2} w_{k+1,n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1} \Delta y_k} (1 - b_{k-1,n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}. \quad (4.15)$$

Notemos que:

$$w_{k,n+1} = a_{k,n+1} + b_{k,n+1} w_{k+1,n+1}, \quad (4.16)$$

donde

$$a_{k,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1} \Delta y_k} a_{k-1,n+1} + w_{kn}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1} \Delta y_k} (1 - b_{k-1,n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}, \quad (4.17)$$

$$b_{k,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1} \Delta y_k} (1 - b_{k-1,n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}, \quad (4.18)$$

donde

$$a_{k,n+1} = a_{k,n+1}(\Delta t, \Delta y_2, \dots, \Delta y_k, f_{n+1}, w_{2n}, \dots, w_{kn}), \quad (4.19)$$

$$b_{k,n+1} = b_{k,n+1}(\Delta t, \Delta y_2, \dots, \Delta y_k), \quad (4.20)$$

$$0 < b_{k,n+1} < 1. \quad (4.21)$$

Caso $i = n + m - 1$: Siguiendo el mismo procedimiento de antes, queda:

$$w_{n+m-1,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}} a_{n+m-2,n+1} + w_{n+m-1,n}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}} (1 - b_{n+m-2,n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-1}^2}}, \quad (4.22)$$

donde

$$w_{n+m-1,n+1} = a_{n+m-1,n+1}, \quad (4.23)$$

donde

$$a_{n+m-1,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}} a_{n+m-2,n+1} + w_{n+m-1,n}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}} (1 - b_{n+m-2,n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-1}^2}}, \quad (4.24)$$

donde

$$a_{n+m-1,n+1} = a_{n+m-1,n+1}(\Delta t, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{n+m-1}, f_{n+1}, w_{2n}, \dots, w_{n+m-1,n}). \quad (4.25)$$

Proposición 4.3 *Los $\{b_{i,n+1}\}_{i=2}^{n+m-2}$ no dependen de n .*

Demostración: Es una simple observación de (4.13), (4.14), (4.18), (4.20) para $3 \leq k \leq n+m-2$.

□

Usando la proposición anterior, y resumiendo todas las fórmulas, queda:

$$w_{1,n+1} = w_{2,n+1} - \Delta y_1 f_{n+1}, \quad (4.26)$$

$$w_{i,n+1} = a_{i,n+1} + b_i w_{i+1,n+1}, \quad i = 2, \dots, n+m-2, \quad (4.27)$$

$$w_{n+m-1,n+1} = a_{n+m-1,n+1}. \quad (4.28)$$

Donde los coeficientes están dados por:

$$a_{2,n+1} = \frac{\frac{-\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + w_{2n}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \quad (4.29)$$

$$a_{i,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1} \Delta y_i} a_{i-1,n+1} + w_{in}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1} \Delta y_i} (1 - b_{i-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2}}, \quad i = 3, \dots, n+m-1, \quad (4.30)$$

$$b_2 = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \quad (4.31)$$

$$b_i = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_i^2}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1} \Delta y_i} (1 - b_{i-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2}}, \quad i = 3, \dots, n+m-2. \quad (4.32)$$

Y los coeficientes son función de las siguientes variables:

$$a_{i,n+1} = a_{i,n+1}(\Delta t, \Delta y_2, \dots, \Delta y_i, f_{n+1}, w_{2n}, \dots, w_{in}), \quad i = 2, \dots, n+m-1, \quad (4.33)$$

$$b_i = b_i(\Delta t, \Delta y_2, \dots, \Delta y_i), \quad i = 2, \dots, n+m-2, \quad (4.34)$$

$$0 < b_i < 1, \quad i = 2, \dots, n+m-2. \quad (4.35)$$

Proposición 4.4 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, $f(t) > 0 \forall t$, y que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n . Asumiendo que $w_{in} \leq 0, i = 1, \dots, n+m-1$, entonces $a_{i,n+1} < 0, i = 2, \dots, n+m-1$.*

Demostración: Lo que dice esta proposición es que si en el nivel n las incógnitas son no negativas, entonces los coeficientes resultan todos negativos, lo cual, como se verá más adelante, nos será útil para averiguar el signo de la solución en el nivel $n+1$.

La demostración consiste en un sencillo paso inductivo. Si observamos la ecuación (4.29) es claro que $a_{2,n+1} < 0$. Si suponemos ahora que $a_{i-1,n+1} < 0$, con la ayuda de (4.30) y (4.35) se obtiene que $a_{i,n+1} < 0$, donde $i = 3, \dots, n+m-1$. □

Proposición 4.5 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, $f(t) > 0 \forall t$, y que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n . Asumiendo que $w_{in} \leq 0, i = 1, \dots, n+m-1$, entonces $w_{i,n+1} < 0, i = 1, \dots, n+m-1$.*

Demostración: Se realiza un sencillo paso inductivo hacia atrás. Por la fórmula (4.28) y la Proposición (4.4) se observa que $w_{n+m-1,n+1} < 0$. Supongamos que $w_{i+1,n+1} < 0$, entonces, usando la ecuación (4.27) se tiene que

$$w_{i,n+1} = a_{i,n+1} + b_i w_{i+1,n+1} < 0. \quad (4.36)$$

Observación 2 *Si comenzamos con la condición inicial sobre u'_0 determinada por (B1), resulta que los $w_{i,n+1}$ son todos números negativos, coincidiendo con el resultado teórico expresado en (3.2).*

Proposición 4.6 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, que $f(t) > 0 \forall t$, que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n , que $w_{in} \leq 0, i = 1, \dots, n+m-1$, y que $y_{n+m-1} = 1 - (\Delta y_1 + \dots + \Delta y_{n+m-2})$ es un número en el intervalo $(0,1)$. Entonces si comenzamos la iteración interna propuesta en (4.9) con un valor inicial $\Delta y_{n+m-1}^{(1)}$ que cumpla $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(1)} < y_{n+m-1}$, se genera una sucesión en r , bien definida.*

Demostración: Mediante el uso de la Proposición (4.5), y mediante la ecuación que define la iteración, es decir, la fórmula (4.9), resulta que $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(r)} < y_{n+m-1} \forall r$. □

Definición 4.7 *Definimos los siguientes números:*

$$A_{in} = \frac{w_{i,n} - w_{i+1,n}}{\Delta y_i}, \quad i = 1, \dots, n+m-2, \quad n \geq 1, \quad (4.37)$$

$$B_{in} = \frac{w_{in} - w_{i,n-1}}{\Delta t}, \quad i = 1, \dots, n+m-2, \quad n \geq 1. \quad (4.38)$$

Proposición 4.8 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, que $f(t) > 0 \forall t$, que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n , que $w_{in} \leq 0, i = 1, \dots, n+m-1$, que $y_{n+m-1} = 1 - (\Delta y_1 + \dots + \Delta y_{n+m-2})$ es un número en el intervalo $(0,1)$. Asumiendo que $A_{in} \leq 0, i = 1, \dots, n+m-2$, entonces $A_{i,n+1} < 0, i = 1, \dots, n+m-1$.*

Demostración: Recordando que las w_{in} cumplían las ecuaciones (4.4)-(4.6) se observa que $\{A_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+m-1}$ satisfacen el siguiente sistema lineal:

$$A_{1,n+1} = -f_{n+1}, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} A_{i-1,n+1} - \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}\right) A_{i,n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}} A_{i+1,n+1} = \\ = -A_{in}, \quad i = 2, \dots, n+m-2, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$A_{n+m-1,n+1} = \frac{w_{n+m-1,n+1}}{\Delta y_{n+m-1}}. \quad (4.41)$$

Por hipótesis, $A_{1,n+1} < 0$. Además, por la Proposición (4.5) se ve que $A_{n+m-1,n+1} < 0$. Despejando explícitamente los $\{A_{i,n+1}\}_{i=2}^{n+m-2}$, se obtiene que:

$$A_{i,n+1} = Q_{i,n+1} + R_{i,n+1} A_{i+1,n+1}, \quad i = 2, \dots, n+m-2, \quad (4.42)$$

donde

$$Q_{2,n+1} = \frac{-\frac{\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + A_{2n}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y_2 \Delta y_3}}, \quad R_{2,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_2 \Delta y_3}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y_2 \Delta y_3}}, \quad (4.43)$$

$$Q_{i,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} Q_{i-1,n+1} + A_{in}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} (1 - R_{i-1,n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}}, \quad i = 3, \dots, n+m-2, \quad (4.44)$$

$$R_{i,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} (1 - R_{i-1,n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}}, \quad i = 3, \dots, n+m-2. \quad (4.45)$$

Notar que $Q_{2,n+1} < 0$ y $0 < R_{2,n+1} < 1$. Suponiendo que $Q_{i-1,n+1} < 0$ y $0 < R_{i-1,n+1} < 1$, y mirando (4.44) y (4.45) es fácil ver que $Q_{i,n+1} < 0$ y $0 < R_{i,n+1} < 1$. Luego, como estamos haciendo un paso inductivo, resulta $Q_{i,n+1} < 0$ y $0 < R_{i,n+1} < 1, i = 2, \dots, n+m-2$.

Suponiendo ahora que $A_{i+1,n+1} < 0$, observando (4.42) y debido a lo dicho en el párrafo anterior, resulta que $A_{i,n+1} < 0$. Luego, como estamos frente a un paso inductivo, tenemos que $A_{i,n+1} < 0, i = 2, \dots, n+m-2$. Con esto queda demostrada la proposición. \square

Proposición 4.9 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, que $f(t) > 0 \forall t$, que $f'(t) > 0 \forall t$, que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n , que $w_{in} \leq 0, i = 1, \dots, n+m-1$, que $y_{n+m-1} = 1 - (\Delta y_1 + \dots + \Delta y_{n+m-2})$ es un número en el intervalo $(0, 1)$. Asumiendo que $B_{in} \leq 0, i = 1, \dots, n+m-2$, entonces $B_{i,n+1} < 0, i = 1, \dots, n+m-1$.*

Demostración: Análoga a la demostración de la Proposición (4.8). □

Observación 3 *Hay que destacar que los números $\{A_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+m-1}$ son aproximaciones numéricas de w_y . Luego, el resultado de la Proposición (4.8) confirma los resultados teóricos, expresados en la Proposición (3.2), ecuación (3.5). Además, los números $\{B_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+m-1}$ son aproximaciones numéricas de w_t . Luego, el resultado de la Proposición (4.9) confirma los resultados teóricos, expresados en la Proposición (3.2), ecuación (3.6).*

Hasta este punto, la iteración interna propuesta es muy cara computacionalmente, puesto que cada iteración interna involucra la resolución de un sistema lineal de tamaño considerable a medida que el tiempo transcurre. Lo que haremos es simplificar los cálculos para que eso se reduzca notablemente.

Supongamos que el algoritmo está definido hasta el tiempo t_n . Sabemos que:

$$\Delta y_{n+m-1}^{(r+1)} = \left(\frac{w_{n+m-1}^{(r)}}{w_{n+m-1}^{(r)} - \tau_0} \right) y_{n+m-1}, \quad (4.46)$$

$$w_{n+m-1,n+1}^{(r+1)} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}^{(r)}} a_{n+m-2,n+1} + w_{n+m-1,n}^{(r)}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}^{(r)}} (1 - b_{n+m-2}) + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-1}^{(r)} 2}}. \quad (4.47)$$

Es claro que $w_{n+m-1,n} = 0$ ya que así se requirió en el nivel anterior o bien porque las condiciones iniciales son compatibles entre sí. Por simplicidad, renombramos algunas cosas y analizamos sus signos, quedando,

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta t a_{n+m-2,n+1}}{\Delta y_{n+m-2}} < 0, \quad \mathbf{c} = \frac{\Delta t (1 - b_{n+m-2})}{\Delta y_{n+m-2}} > 0. \quad (4.48)$$

$$\Delta y^{(r)} = \Delta y_{n+m-1}^{(r)} > 0, \quad w^{(r)} = w_{n+m-1,n+1}^{(r)} < 0, \quad y = y_{n+m-1}. \quad (4.49)$$

Reemplazando (4.47) en (4.46) y haciendo uso de los símbolos escritos en (4.48) y (4.49) se llega a la siguiente expresión:

$$\Delta y^{(r+1)} = \frac{\mathbf{a}y}{\mathbf{b} - \tau_0 \Delta y^{(r)} - \frac{\Delta t}{\Delta y^{(r)}} \tau_0}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{c} \tau_0. \quad (4.50)$$

Estas últimas fórmulas nos dicen que el Δy es un punto fijo de la función

$$F(x) = \frac{\mathbf{a}x}{\mathbf{b} - \tau_0 x - \frac{\Delta t}{x} \tau_0}, \quad (4.51)$$

cuyo gráfico nos muestra que tiene a lo sumo dos puntos fijos, el $x = 0$ y/o un punto fijo positivo. Luego, el algoritmo se reformula, de tal forma que mediante el cálculo recursivo de algunos coeficientes se pueda trabajar directamente sobre la función F sin tener que resolver sistemas lineales. El número de iteraciones se reduce notablemente. Si ese punto fijo positivo es contractivo, es claro que satisface (4.8), con lo cual el método queda bien definido. Hay que destacar el hecho de que en numerosos experimentos numéricos el punto fijo resulta contractivo.

5 Resultados numéricos

El algoritmo fue programado en Matlab en su totalidad. En todos los ensayos que se realizaron se comprobó que los resultados numéricos coincidían con los resultados teóricos. Como muestra la Proposición (3.3), si graficáramos la frontera libre se observaría que ésta converge a cero de manera monótona cuando el tiempo tiende a infinito.

- **Caso 1:** $s_0 = 0.8$, $\tau_0 = 1$, $f(t) = 2 - \frac{1}{(t+1)^3}$, $v'_0(y) = 0$.
- **Caso 2:** $s_0 = 0.8$, $\tau_0 = 1$, $f(t) = 2 + t$, $v'_0(y) = 0$.

Referencias

- [1] COMPARINI E., *A One Dimensional Bingham Flow*, Journal of Mathematical Analysis and its Applications, 1992, 127-139.
- [2] CRANK J., *Free and Moving Boundary Problems*, Claredon Press, Oxford (1984).
- [3] DOUGLAS J., JR. & GALLIE T. M., JR., *On the Numerical Integration of a Parabolic Equation Subject to a Moving Boundary Condition*, Duke Math. J., 22 (1955), pp. 557-571.
- [4] DUVAUT G. & LIONS J. L., *Inequalities in Mechanics and Physics*, vol. 219, Springer Verlag, 1976.
- [5] GLOWINKY-LIONS TREMOLIERES, *Analyse Numerique des Inequalities Variationales*, vol. 1,2, Dumond, 1976.
- [6] GUPTA R. S. & KUMAR D., *Variable Time Step Methods for One-Dimensional Stefan Problem with Mixed Boundary Condition*, Int. J. Heat Mass Transfer., vol 24, pp. 251-259, 1981.
- [7] MURRAY W. D. & LANDIS F., *Numerical and Machine Solutions of Transient Heat-Conduction Problems Involving Melting or Freezing*, J. Heat Transfer. 81C, pp. 106-112, 1959.
- [8] PRIMICERIO M., *Problemi di Diffusione a Frontiera Libera*, Bolletino U.M.I. (5) 18-A (1981), 11-68.
- [9] RUBINSTEIN L.I., *The Stefan Problem*, Trans. Math. Monographs-vol. 27, Amer Math. Soc. ,Providence 1971.
- [10] TARZIA D. A., *Introducción a las Inecuaciones Variacionales Elípticas y sus Aplicaciones a los Problemas de Frontera Libre*, CLAMI, 1981.

- [11] TARZIA D., *A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems*, MAT - Serie A, 2 (2000).
- [12] TREFETHEN L. N. & BAU D., *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997, pp. 227-228.

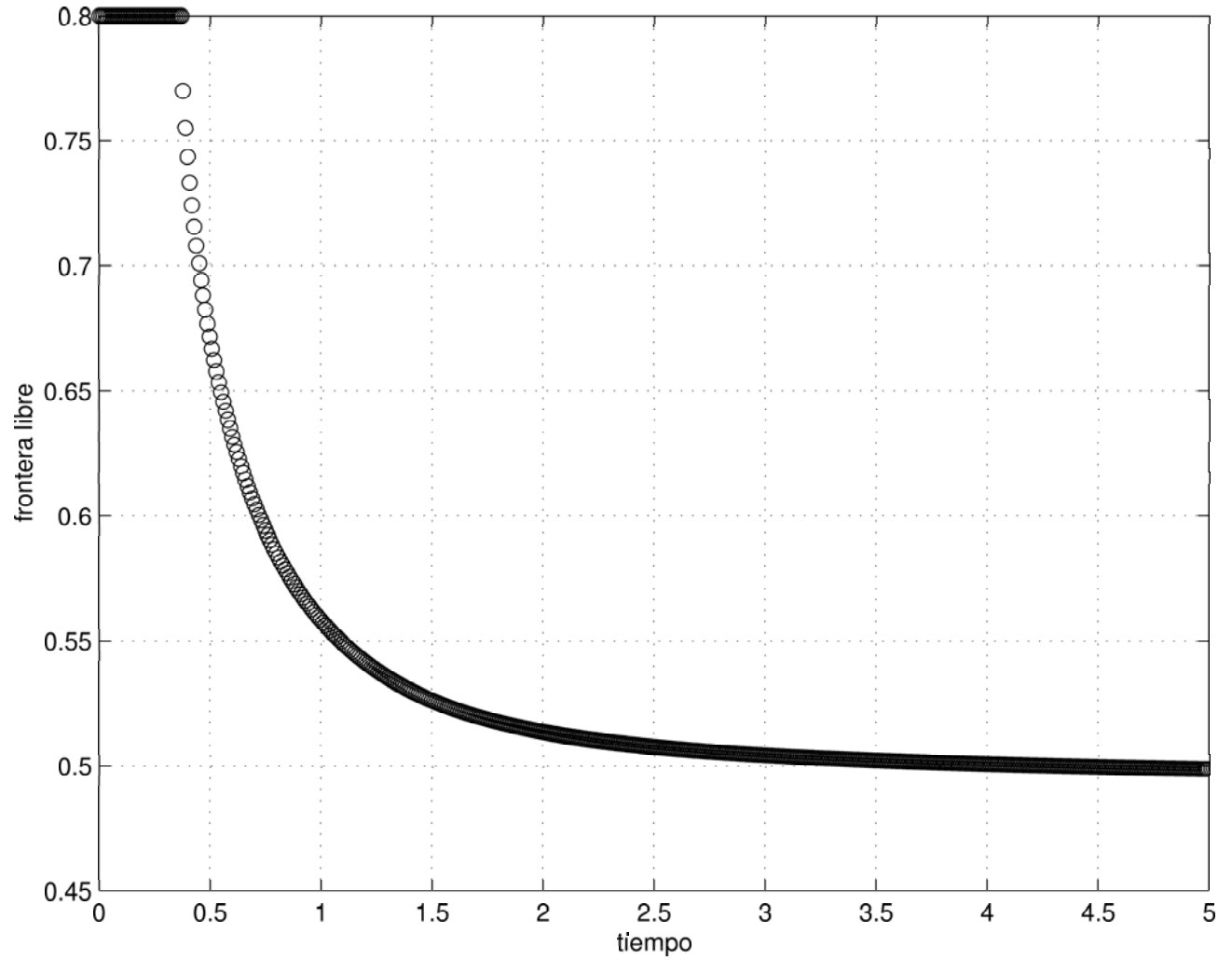


Figura 1: Caso 1.

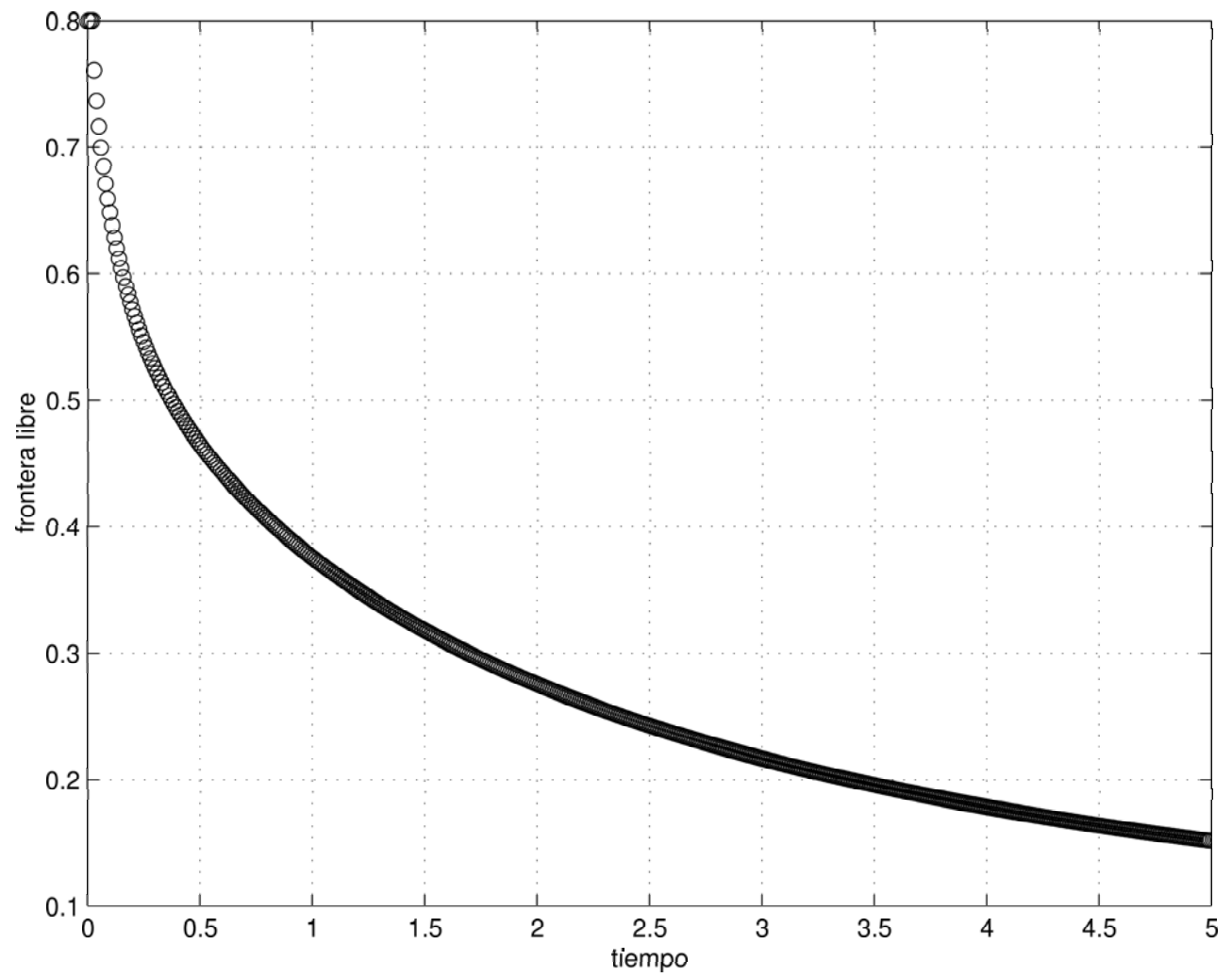


Figura 2: Caso 2.

UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE: FUSIÓN DE UNA VAINA DE ACERO DENTRO DE UNA CUCHARA DE ACERIA

Analía GASTÓN^{*}, Gustavo SÁNCHEZ SARMIENTO^{}, Horacio REGGIARDO^{***}**

^{*} Consejo de Investigaciones, Universidad Nacional de Rosario.
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario. Argentina.

^{**} Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires.
Av. Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires, Argentina.

^{***} STEIN S.A.C.I.F., Santiago de Chile 6463, (1408) Buenos Aires, Argentina.

RESUMEN. Se describe un modelo para analizar la fusión de minerales envainados sumergidos en cucharas con acero líquido. La aplicación del mismo permite determinar el tiempo de fusión y profundidad de penetración en la cuchara en función de la velocidad de inmersión, dimensión de la vaina y grado de sobrecalentamiento del baño de acero líquido. La solución numérica emplea una formulación en diferencias finitas implícita iterativa en la cual la posición del frente de solidificación se actualiza basándose en la resolución del balance de energía en la interfase sólido-líquido.

Palabras claves: Metalurgia de cuchara, Minerales envainados, Modelización

ABSTRACT. A model to analyze the melting of cored wire minerals immersed into ladles with liquid steel is described. Its application allows the determination of penetration depth and melting time as a function of the wire feed rate, wire dimension and degree of superheat of the steel bath in the ladle. The model uses an iterative implicit finite difference formulation, in which the position of the solidification front is updated, based on the resolution of the energy conservation at the solid-liquid interface.

Key words: Ladle metallurgy, Cored wire injection, modelization

INTRODUCCIÓN

En la fabricación de aceros y fundiciones de hierro, la desulfurización, desoxidación y modificación de inclusiones del metal líquido se realiza mediante la adición de ciertos minerales como SiCa, FeCa y FeTi, cuando el mismo se encuentra dentro de una cuchara.

Una forma habitual de adición es la introducción continua dentro del metal líquido de una vaina delgada de acero en cuyo interior ha sido almacenado el mineral. Apenas sumergida, se forma una capa concéntrica de acero solidificado sobre la superficie de la vaina debido a la rápida extracción de calor de dicho baño. El espesor de esta capa crece inicialmente hasta alcanzar un valor máximo, decreciendo luego hasta desaparecer. En ese instante el mineral es liberado abruptamente en el metal líquido. La velocidad con la que la vaina se introduce dentro de la cuchara debe ser tal que, en estado estacionario, el tiempo total transcurrido entre la introducción de una dada sección de la vaina y la finalización de la fundición de ésta, permita que la liberación del mineral se produzca a una profundidad adecuada dentro de la cuchara. En la figura 1 se muestra un esquema del proceso.

La profundidad de penetración depende básicamente de las dimensiones de la vaina, del grado de sobrecalentamiento y de la velocidad de inmersión, de manera que para un adecuado control del proceso deben conocerse con la mayor precisión cómo estas variables influyen en el proceso de fusión. El modelo computacional que se describe en este trabajo permite analizar el efecto de las variables mencionadas en este proceso.

MODELO MATEMÁTICO Y SU SOLUCION NUMÉRICA

Se adopta un modelo unidimensional que considera a la vaina como un cilindro infinito en el cual la energía fluye en dirección radial durante la fusión. El mismo consta de dos capas concéntricas, una exterior de acero y otra central que contiene el mineral a adicionar. En la interfase la energía es suministrada por convección forzada debido a la velocidad relativa entre el fluido y la vaina. Dado que el volumen del envainado es despreciable frente al del líquido contenido en la cuchara, se supone que el baño mantiene una temperatura constante durante el proceso de fusión.

Las ecuaciones que gobiernan la evolución de temperatura en la vaina son las siguientes:

a) Dentro del material de relleno:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k_m(T) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right] = c_m(T) r_m(T) \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \quad 0 < r < R_{int} \quad (1)$$

con las condiciones de contorno :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0 \quad (2)$$

$$k_m \frac{\partial T}{\partial r} = k_{as} \frac{\partial T}{\partial r} \quad r = R_{int} \quad (3)$$

b) Dentro de la vaina de acero:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k_{as}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right] = c_{as}(T) r_{as}(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad R_{int} < r < S(t), \quad t > 0 \quad (4)$$

sujeta a la condición de contorno (3) y a la condición de Stefan en la interfase sólido-líquido:

$$T(S(t),t) = T_f, \quad k_{as} \frac{\partial T}{\partial r}(S(t),t) - h_f (T_{mp} - T_f) = r_{as} L \dot{S}(t) \quad , \quad r = S(t), \quad t > 0 \quad (5)$$

siendo la condición inicial:

$$T(r,0) = T_o \quad , \quad 0 \leq r \leq R_{ext} = S(0) \quad (6)$$

$$T(r,0) = T_f \quad , \quad r \geq R_{ext} \quad (7)$$

El coeficiente de transferencia de calor entre el fluido y la vaina (eq. (5)) depende del tipo de flujo que impone las condiciones de inmersión, disponiendo de diferentes correlaciones para su evaluación [1, 2].

La solución numérica de las ecuaciones precedentes se basa en un esquema implícito iterativo en diferencias finitas, descrito en detalle en [3] y [4]. El problema tratado aquí corresponde a un cambio de fase isotérmico, en el cual la energía en la interfase sólido-líquido se transfiere por convección. El esquema empleado considera la discontinuidad de la derivada de la temperatura en el frente de solidificación, debido al cambio en las propiedades térmicas de una fase a otra. La temperatura del volumen de control donde se produce el cambio de fase

se determina por interpolación, una vez conocidas las temperaturas de los volúmenes situados a ambos lados y la posición del frente de solidificación.

RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados del modelo precedente fueron comparados con mediciones experimentales y con los resultados numéricos de otro modelo análogo descrito en [2]. El dispositivo experimental se muestra en la figura 2. La experiencia consistió en la fusión de una vaina rellena con SiCa, de diámetro exterior 17 mm y espesor 2.5 mm, que se mueve transversalmente dentro de una cuchara. La vaina estaba provista con dos termocuplas que registraban la temperatura en dos puntos interiores del mineral de relleno.

La figura 3 muestra la dependencia del tiempo de fusión en función del sobrecalentamiento del baño para una velocidad de inmersión de la vaina de 1 m/s. La figura 4 ilustra el tiempo de fusión en función de la velocidad de la vaina, para una temperatura del acero líquido de 1600°C. De estas gráficas se concluye que la concordancia entre ambos modelos y la experiencia es satisfactoria.

La figura 5 muestra cómo evoluciona el espesor del envainado durante la inmersión en la cuchara. Se observa un rápido crecimiento durante los instantes iniciales de la inyección, llegando casi a duplicar su valor inicial. Para un dado espesor y diámetro exterior de la vaina un aumento del 30% en la velocidad de inyección (de 1,5 a 2 m/s) reduce en un 27% aproximadamente el tiempo de fusión.

La figura 6 (a), (b) y (c) resume los resultados obtenidos respecto a la fusión de vainas rellenas con SiCa, que se emplean en la industria local. Los cálculos corresponden a un espesor de 0.4 mm y un diámetro exterior de 13, 16, y 21 mm, respectivamente. Se consideró un rango de velocidades de 1 a 5 m/s y de sobrecalentamientos del baño de acero de 30°C, 50°C, 70 °C y 100 °C por encima de la temperatura de líquidus de 1495 °C. Un sobrecalentamiento de 30°C (caso (a)) resulta insuficiente para fundir el envainado a una profundidad adecuada. En la práctica se busca que el mineral sea liberado lo más profundamente dentro de la cuchara, pero para este caso, la profundidad de penetración supera la altura promedio del acero en el recipiente, que para cucharas de 190 a 200 tn de acero, puede estimarse de 3.5 y 4 m. Para un sobrecalentamiento de 100°C, la liberación del mineral es muy temprana. El envainado fundiría a una profundidad adecuada para un sobrecalentamiento entre 60°C y 70°C. Se observa además que estos resultados no dependen fuertemente de la velocidad de inmersión.

La figura 7 compara la profundidad de penetración de los tres envainados con diferente diámetro exterior (13, 16 y 21 mm) e igual espesor (0.4 mm) para sobrecalentamientos de 30°C, 50°C, 70°C y 100°C. En estos ejemplos se consideró que la conductividad del relleno corresponde a la del material en polvo [2], resultando ésta de bajo valor. Es interesante destacar que al aumentar el diámetro exterior y mantener constante el espesor de la camisa de acero, se produce un aumento de la resistencia interna del mineral, mientras que disminuyen las resistencias de la vaina y la resistencia exterior, resultando que para una adecuada combinación del valor del coeficiente de transferencia de calor (dependiente de la velocidad de inmersión) y del sobrecalentamiento del acero líquido, las vainas de mayor diámetro funden primero. Este fenómeno desaparece como se observa en la figura 8 cuando se toma como conductividad del relleno la del mineral sólido que es mucho mayor que la del mineral en polvo [1].

En la figura 9 se presenta un ejemplo de cómo se modifican los resultados al variar el espesor de la vaina. Un aumento del espesor del 80% (de 0.4 a 0.72 mm) modifica la penetración de 2,65 a 4 m, a la velocidad de 1m/s, y de 3 a 4.90 m, a la velocidad de 5 m/s.

CONCLUSIONES

Se describió un modelo numérico para analizar la fusión de minerales envainados inyectados en una cuchara con acero líquido. El tiempo de fusión de la camisa de acero y la profundidad a la cual los minerales son liberados dependen del diámetro y espesor de las vainas, del sobrecalentamiento del metal líquido y de la velocidad de inyección. De este conjunto de variables, el sobrecalentamiento es el que tiene mayor influencia en el tiempo del proceso.

Generalmente, la máxima penetración está fijada, a priori, por las dimensiones de la cuchara y el sobrecalentamiento del baño, por el tipo de tratamiento metalúrgico. En consecuencia, deben seleccionarse las dimensiones y la velocidad de inyección en función de estos parámetros, de manera que la adición de los minerales resulte eficiente. Por medio de la simulación numérica pueden analizarse diferentes combinaciones, generando ábacos de operación que permitan identificar aquellas que aseguren un adecuado control del proceso en cada planta en particular.

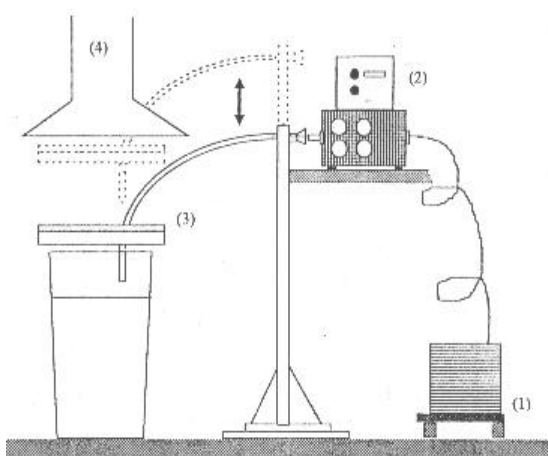


Fig.1. Esquema básico de trabajo para la inyección de minerales envainados
(1) Bobina (2) Máquina de inyección (3) Tubo guía (4) Campana de extracción de humos

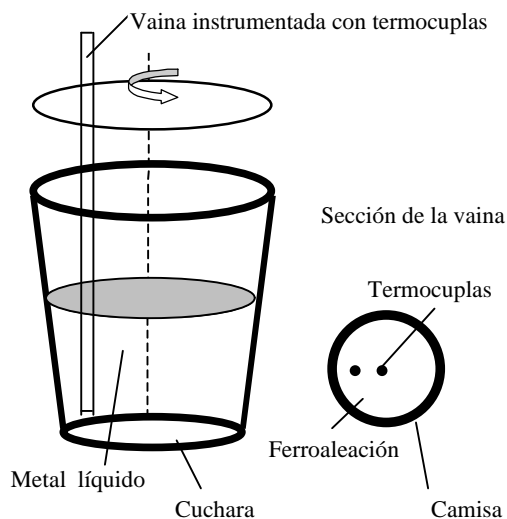


Fig.2: Dispositivo experimental para validación del modelo para la inyección de minerales envainados

REFERENCIAS

- [1] Y.E. Lee, “A model study of CaSi cored wire injection”, Proc. of the CIM 1990, Int. Symposium on developments in Ladle Steelmaking and Continuous Casting, G.D. Lawson (Ed.), 1990, 154-168.
- [2] M. Rebière, Y. Fautrelle and Y. Du Terrail, “Models and experiments on core wire dissolution in ladle metallurgy”, 6th Int. Conf. on Refining Processes, Scanninject VI, Mefos, Lulea, Sweden, 1992, 267-283.
- [3] A. Gastón, G. S. Sarmiento y H. Reggiardo, “Modelo de la penetración de minerales envainados dentro de acero líquido en cucharas”, Anales del X ENIEF-Congreso Sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, Bariloche-Argentina, E.Dari - C.Padra – R. Saliba (Eds.), Mecánica Computacional, Vol. XVII (1997), 289-298.
- [4] L. Clavier, E. Arquis, J.P. Caltagirone and D.Gobin, “A fixed grid method for the numerical solution of phase change problems”, Int. J. Numer. Meth. Eng., 37 (1994), 4247-4261.

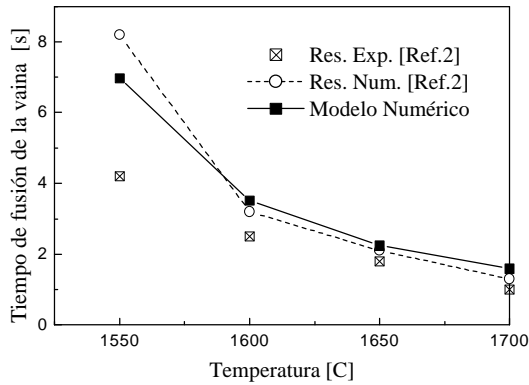


Fig.3. Influencia de la temperatura del acero en la cuchara en el tiempo de fusión
 Mineral: SiCa Espesor de la vaina: 2.5 mm
 Velocidad de inyección: 1 m/s

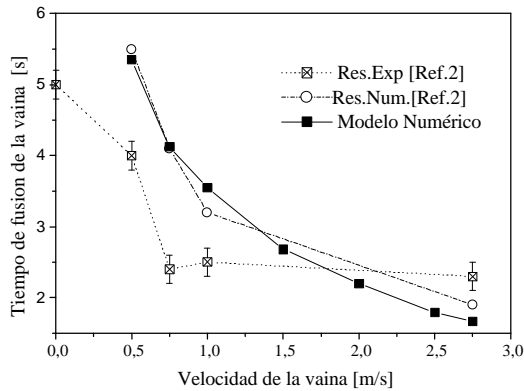


Fig.4. Influencia de la de la velocidad de la vaina en el tiempo de fusión
 Mineral: SiCa Espesor de la vaina: 2.5 mm

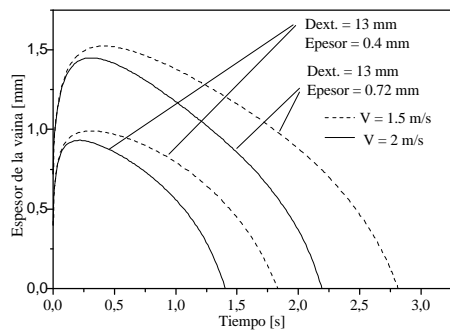
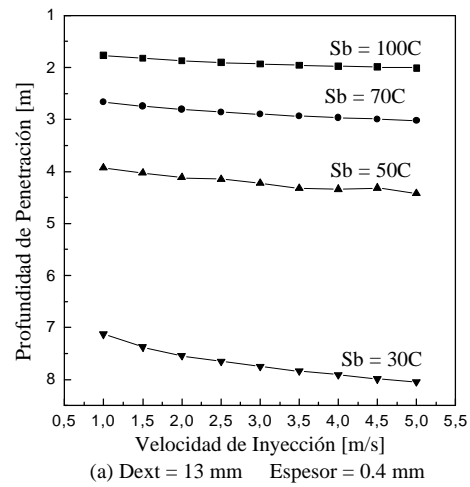
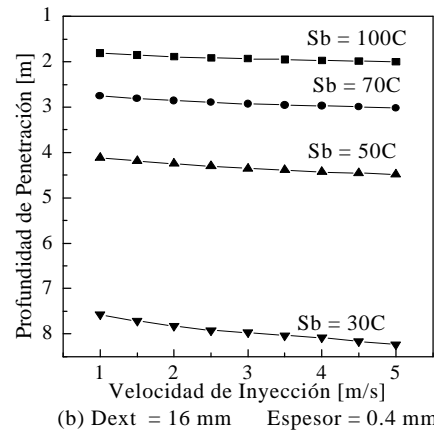


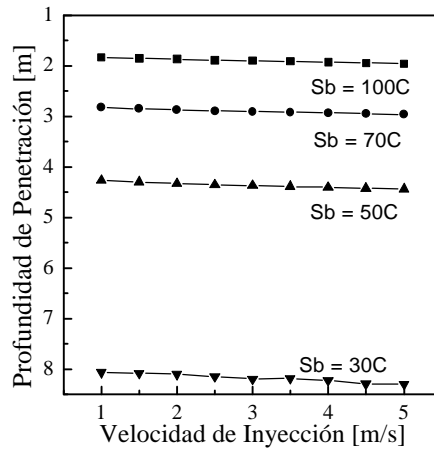
Fig.5. Variación del espesor de la vaina en función del tiempo
 Sobrecalentamiento: 70 C



(a) Dext = 13 mm Espesor = 0.4 mm



(b) Dext = 16 mm Espesor = 0.4 mm



(c) Dext = 21 mm Espesor = 0.4 mm

Fig.6. Profundidad de penetración en función de la velocidad de inyección
 Temperatura de líquidos: 1495 C
 Sobrecalentamiento: Sb

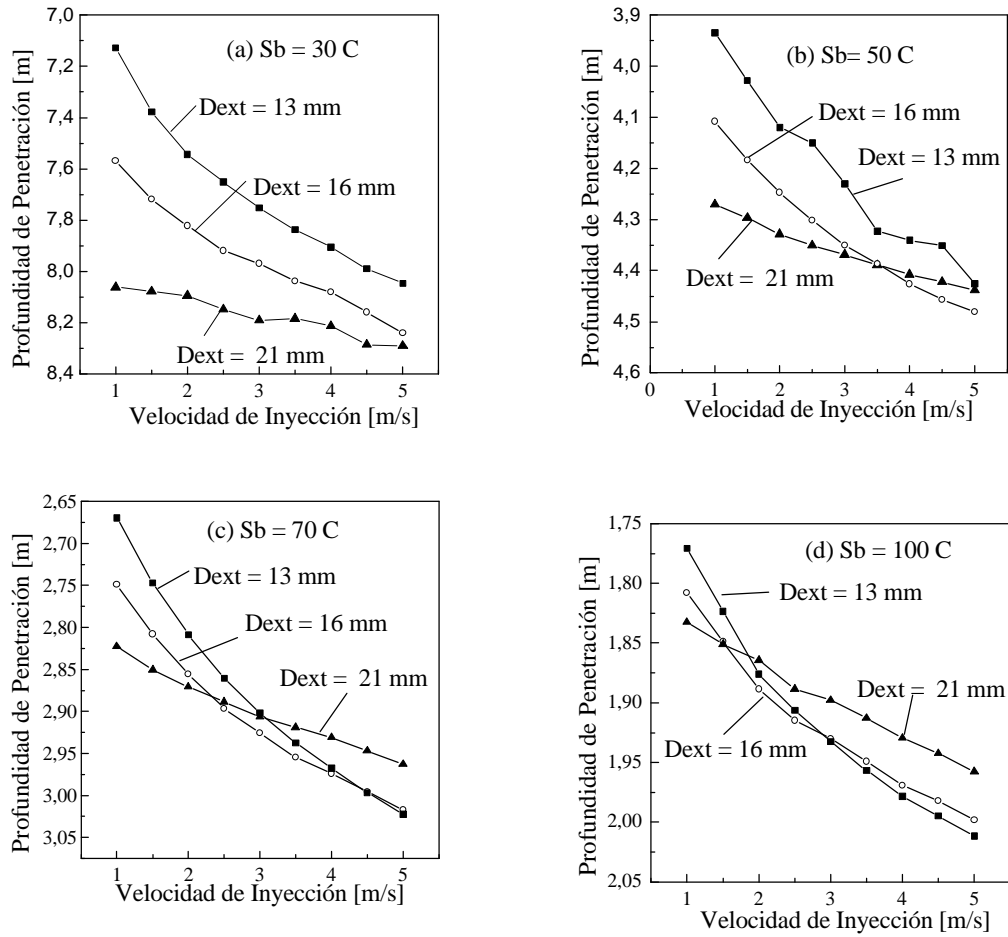


Fig. 7. Comparación de la profundidad de penetración en función de las dimensiones de la vaina para diferentes sobrecalentamientos del acero líquido.

Espesor de la vaina= 0.4 mm. Conductividad del mineral = $0.7579 + 6.4 \cdot 10^{-4}(T + 273K)$. Ref [2]

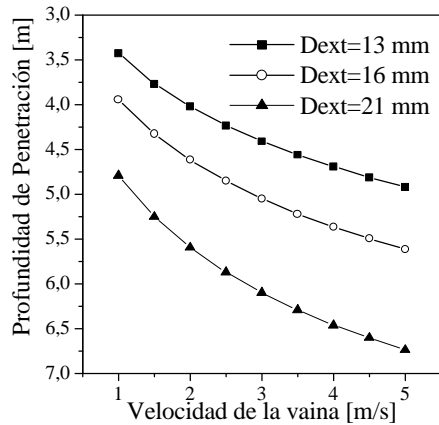


Fig 8. Profundidad de penetración
Espesor de la vaina= 0.4 mm.

Conductividad del mineral: 108.66 W/mC. Ref [1]

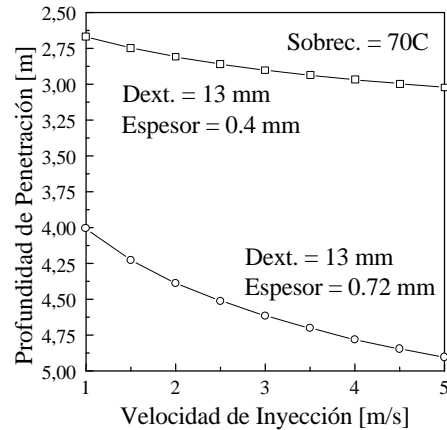


Fig.9. Comparación de la profundidad de penetración de dos vainas con distinto espesor e igual diámetro exterior

An Exact Solution for a One-Phase Stefan Problem with Nonlinear Thermal Coefficients *

Ma. Fernanda NATALE (1) and Domingo A. TARZIA (1) (2)

(1) Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA.

(2) CONICET, ARGENTINA.

E-mail: Maria.Natale@fce.austral.edu.ar;
Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Abstract

We study a one-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problem with nonlinear thermal coefficients. We prove the existence of solution by using an integral equation of Volterra type when the diffusion coefficient $k(T)/\rho(T)c(T)$ is constant. We also give the corresponding explicit solution.

Resumen: Se estudia el problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a una fase con coeficientes térmicos no lineales. Se prueba la existencia de una solución usando una ecuación integral de tipo Volterra cuando el coeficiente de difusión $k(T)/\rho(T)c(T)$ es constante. Se da también la correspondiente solución explícita.

Key words: Stefan problem, Free boundary problem, Nonlinear thermal coefficients, Explicit solution.

Palabras claves: Problema de Stefan, Problemas de frontera libre, Coeficientes térmicos no lineales, Solución explícita.

AMS Subject classification: 35R35, 80A22, 35C05.

I. Introduction.

The Lamé-Clapeyron-Stefan problem is nonlinear even in its simplest form because some boundary conditions are given on a free boundary whose law of motion is unknown beforehand and has to be determined while solving the problem. It becomes "doubly" nonlinear if the variability of the thermal parameters with temperature is also taken into consideration. It is essential to take into account the parametric nonlinearity when studying the problems related to the surface melting bodies. The present study provides the existence of an exact solutions to one such nonlinear unidimensional problem. We consider the following melting problem for a semi-infinite material:

*MAT - Serie A, 5 (2001), 33-36.

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T)\frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad , \quad 0 < y < s(t) \quad (1)$$

$$T(0, t) = T_b \quad , \quad T(s(t), t) = T_m < T_b \quad (2)$$

$$k(T(s(t), t))\frac{\partial T}{\partial y}(s(t), t) = -\rho_0 l s'(t) \quad , \quad s(0) = 0 \quad (3)$$

where $T = T(y, t)$ is the temperature of the solid phase, $\rho(T)$, $c(T)$, $k(T)$ are the density, specific heat, and thermal conductivity, respectively, T_m is the phase-change temperature, T_b is the temperature on the fixed face $y = 0$, $\rho_0 > 0$ is the constant density of mass at the melting temperature, $l > 0$ is the latent heat of fusion by unity of mass and $s(t)$ is the position of phase change location. This problem was first considered in [4]. We will prove an existence theorem considering the case $k(T)/\rho(T)c(T) = \text{constant} > 0$ through an integral equation equivalent to (1) – (3).

II. The one-phase Stefan problem with nonlinear coefficients

If we define the following transformation

$$\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_m}{T_b - T_m} \quad (T(y, t) = T_m + (T_b - T_m)\theta(y, t)) \quad (4)$$

and we assume a similarity solution of the type

$$\theta(y, t) = f(\eta) \quad , \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\alpha_0 t}} \quad (5)$$

we obtain the following free boundary problem:

$$[L(f)f'(\eta)]' + 2\eta N(f)f'(\eta) = 0 \quad , \quad 0 < \eta < \eta_0 \quad (6)$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(\eta_0) = 0 \quad (7)$$

$$f'(\eta_0) = -\frac{2\eta_0\alpha_0\rho_0 l}{k(T_m)(T_b - T_m)} \quad (8)$$

where $N(\theta) = \rho(T)c(T)/\rho_0 c_0$, $L(\theta) = k(T)/k_0$ and k_0, ρ_0, c_0 and $\alpha_0 = k_0/\rho_0 c_0$ are the reference thermal conductivity, density of mass, specific heat and thermal diffusivity respectively and the free boundary $s(t)$ must be of the type

$$s(t) = 2\eta_0\sqrt{\alpha_0 t} \quad (9)$$

where η_0 is also a positive parameter to be determined. We have that the problem (6)–(7) is equivalent to the following nonlinear integral equation of Volterra type:

$$f(\eta) = 1 - \frac{\Phi[\eta, L(f), N(f)]}{\Phi[\eta_0, L(f), N(f)]} \quad (10)$$

where Φ is given by

$$\Phi[\eta, L(f), N(f)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{1}{L(f)(t)} \exp\left(-2 \int_0^t \frac{N(f(s))}{L(f(s))} s ds\right) dt \quad (11)$$

The condition (8) becomes

$$\frac{1}{\Phi[\eta_0, L(f), N(f)]} = \frac{\eta_0 l \sqrt{\pi}}{c_0(T_b - T_m)} \exp\left(2 \int_0^{\eta_0} \frac{N(f(s))}{L(f(s))} s ds\right) \quad (12)$$

and then the following lemma holds.

Lemma 1. The solution of the free boundary problem (1) – (3) is given by (9) and $T(y, t) = T_m + (T_b - T_m) f(\eta)$, $\eta = y/2\sqrt{\alpha_0 t}$ where the function $f = f(\eta)$ and the coefficient $\eta_0 > 0$ must satisfy the nonlinear integral equation (10) and the condition (12). ■

From now on we suppose the particular case $N(f)/L(f) = \chi_0 > 0$ and then function Φ is now defined by

$$\Phi[\eta, L(f)] = \Phi[\eta, L(f), \chi_0 L(f)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{1}{L(f(t))} \exp(-\eta_0 t^2) dt \quad (13)$$

Firstly we shall prove that the integral equation (10) has a unique solution for any given $\eta_0 > 0$. Secondly, in order to solve the problem (1) – (3) we shall consider the system (10) and (12). Let $C^0[0, \eta_0]$ be the space of continuous real functions defined on $[0, \eta_0]$.

Then we have

Theorem 2. Let η_0 be a given positive real number. We suppose that the dimensionless thermal conductivity function $L(f)$ verify the properties

$$0 < L_1 \leq L(f) \leq L_2 \quad , \quad \forall f \in C^0[0, \eta_0] \quad (14)$$

$$|L(g) - L(h)| \leq L_3 \|g - h\| \quad , \quad \forall g, h \in C^0[0, \eta_0] \quad (15)$$

and the coefficients L_1, L_2 and L_3 verifies the restriction $2L_2^2 L_3 / L_1^3 < 1$ then there exists a unique solution of the integral equation (10).

Proof. Let $W : C^0[0, \eta_0] \rightarrow C^0[0, \eta_0]$ be defined by $W(f)_{(\eta)} = 1 - \Phi[\eta, L(f)] / \Phi[\eta_0, L(f)]$. The solution of the equation (10) is the fixed point of the operator W . We obtain that W is a contraction, therefore there exists a unique solution of (10) for a given $\eta_0 > 0$. ■

We remark that the solution f of the integral equation (10) depends on the real number $\eta_0 > 0$; for convenience in the notation from now on we take $f(\eta) = f_{\eta_0}(\eta) = f(\eta_0, \eta)$, $0 < \eta < \eta_0$, $\eta_0 > 0$.

Theorem 3. We suppose that the hypothesis of Theorem 2 hold and the inequality

$$2\chi_0 \eta_0 > \frac{d}{d\eta_0} (\log(L(f(\eta_0, \eta)))) \quad , \quad \forall \eta_0 > 0 \quad , \quad \forall \eta \in (0, \eta_0) \quad (16)$$

is verified, then there exists a unique solution of the free boundary problem (10) and (12).

A more complete version of these results and the corresponding study for the two-phase Stefan problem will be given in a forthcoming paper. Now, we show two explicit cases which satisfy the above results.

Example 1. In the particular case $N = L = 1$, the solution of integral equation (10) is given by [1] $f(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)/\text{erf}(\eta_0)$, $0 < \eta < \eta_0$ where $\eta_0 > 0$ is the unique solution of the equation

$$\frac{Ste}{\sqrt{\pi}} \equiv \frac{c_0(T_b - T_m)}{l\sqrt{\pi}} = x \text{erf}(x) \exp(x^2) \quad , \quad x > 0 \quad (17)$$

Example 2. In [2, 3] was considered $N(\theta) = 1$, and $L(\theta) = 1 + \beta\theta$. In this case the integral equation for f becomes

$$[(1 + \beta f)f'(\eta)]' + 2\eta f'(\eta) = 0 \quad , \quad 0 < \eta < \eta_0 \quad (18)$$

where η_0 is the unique solution of the following equation

$$\frac{1}{\Phi(\eta_0, 1 + \beta f, 1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{Ste} \eta_0 \exp\left(2 \int_0^{\eta_0} \frac{1}{1 + \beta f(s)} s ds\right) \quad (19)$$

where Ste is the Stefan number (see 17) and $\Phi(\eta_0, 1 + \beta f, 1)$ is the error modified function. Taking into account (4) the corresponding solution is given by

$$T(x, t) = T_b + (T_m - T_b) \frac{\Phi(\eta, 1 + \beta f, 1)}{\Phi(\eta_0, 1 + \beta f, 1)} \quad , \quad 0 < \eta < \eta_0 \quad , \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\alpha_0 t}} \quad (20)$$

Note that the example 1 is obtained taking $\beta = 0$.

ACKNOWLEDGMENTS

This paper has been partially sponsored by CONICET - UA (Rosario-Argentina). This financial support was granted to the Project PIP No. 4798/96 "Free Boundary Problems for the Heat Equation".

References

- [1] J. R. Cannon, "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).
- [2] S. H. Cho, J. E. Sunderland, "Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity", Journal of Heat Transfer, 96 C (1974), 214-217.
- [3] D. A. Tarzia, "The determination of unknown thermal coefficients through phase change process with temperature-dependent thermal conductivity", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 25, No. 1 (1998), 139-147.
- [4] G. A. Tirsikii, "Two exact solutions of Stefan's nonlinear problem", Soviet Physics Doklady, 4 (1959), 288-292.

Uniqueness of Solution to a Free Boundary Problem from Combustion with Transport *

C. LEDERMAN, J. L. VAZQUEZ and N. WOLANSKI

Abstract

We describe results on uniqueness and agreement between different kinds of solutions for a free boundary problem of interest in combustion theory, which were presented in a lecture in the “VI Seminario sobre problemas de frontera libre y sus aplicaciones”, Rosario, December 1998. For the detailed proofs of these results, we refer the reader to [LVW1].

1 Introduction

The purpose of these notes is to describe some results, which were proven in [LVW1], on a free boundary problem in heat propagation that in classical terms is formulated as follows: find a nonnegative function $u(x, t)$, defined and continuous in $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N \times (0, T)$, satisfying the equation

$$\Delta u + \sum a_i u_{x_i} - u_t = 0$$

in the positivity set $\mathcal{D} \cap \{u > 0\}$. Besides, we assume that the interior boundary of the positivity set, $\mathcal{D} \cap \partial\{u > 0\}$, so-called *free boundary*, is a regular hypersurface on which the following conditions are satisfied

$$u = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sqrt{2M}.$$

Here M is a positive constant, and ν denotes outward unit spatial normal to the free boundary. In addition, initial and boundary conditions have to be prescribed on the parabolic boundary of \mathcal{D} . Thus, if the domain is a space-time cylinder, $\mathcal{D} = \Omega \times (0, T)$, we prescribe initial data at $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{for } x \in \overline{\Omega},$$

as well as boundary conditions of Dirichlet or Neumann type on the lateral boundary, $\partial\Omega \times (0, T)$. We will refer to this free boundary problem as Problem P .

This free boundary problem arises in several contexts (cf. [V]). The most important motivation to date has come from combustion theory, where it appears as a limit situation in the description of the propagation of premixed equi-diffusional deflagration flames. In this case, u is the limit, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of solutions u^ε to equation P_ε :

$$\Delta u^\varepsilon + \sum a_i u_{x_i}^\varepsilon - u_t^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon),$$

where $u^\varepsilon(x, t) = T_f - T(x, t)$, with T the temperature of the reactive mixture and T_f the flame temperature, so that $T \leq T_f$ and $u^\varepsilon \geq 0$. The function $\beta_\varepsilon(u)$ represents the exothermic chemical reaction and is nonnegative and Lipschitz continuous, positive in an interval $(0, \theta_\varepsilon)$ near $u = 0$ and vanishes otherwise (i.e., reaction occurs only in the range $T_f - \theta_\varepsilon < T < T_f$). The parameter $\varepsilon > 0$ is essentially the inverse of the activation energy of the chemical reaction. Finally, the integral $\int \beta_\varepsilon(u) du = M$ is fixed. The vector (a_1, \dots, a_N) represents the transport velocity of the reactive mixture. For further details on the model see [BuL].

The study of the limit $P_\varepsilon \rightarrow P$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ was proposed in the 30's by Zeldovich and Frank-Kamenetski [ZF] and has been much discussed in the combustion literature. For the elliptic stationary case see [BCN]

* *Mathematics Subject Classifications*: 35K05, 35K60, 80A25.

Key words: Free boundary problem, combustion, heat equation, uniqueness.

C.L. and N.W. were supported by UBA grants TX47, by CONICET grant PIP0660/98, and by grant BID802/OC-AR PICT03-00000-00137.

J.L.V. was supported by DGICYT Project PB94-0153, and by HCM contract CHRX-CT94-0618.

and [LW]. The study of the limit in the general evolution case has been performed in [CV] in the one phase case, and in [CLW1] and [CLW2] in the two-phase case (i.e., with no sign restriction on u).

Problem P admits *classical* solutions only for good data and for small times, since singularities can arise in finite time. Various concepts of generalized solution have been introduced in the literature. When we perform the approximation process P_ε and pass to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ this gives rise to a kind of solutions to problem P , called *limit solutions* (see [CV]). On the other hand, the concept of *viscosity solution* for problem P was introduced in [CLW2].

In [LVW1] we investigate conditions under which the three concepts agree and produce a unique solution.

2 Main results

The purpose of [LVW1] is to contribute to the questions of unique characterization of the solution of the free-boundary problem P and the consistency of the different solution concepts. The results in [LVW1] can be summarized as saying that, under suitable assumptions on the domain, the reaction function β_ε and on the initial and boundary data,

if a classical solution of problem P exists in a certain time interval, then it is at the same time the unique classical solution, the unique limit solution and also the unique viscosity solution in that time interval.

For definiteness we take as spatial domain a cylinder of the form $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$ with $\Sigma \subset \mathbb{R}^{N-1}$ a smooth domain, or a semi-cylinder, and we put homogeneous Neumann conditions on the lateral boundary $\mathbb{R} \times \partial\Sigma$. We require monotonicity of the initial data in the direction of the cylinder axis. In the family of problems P_ε we assume that the functions β_ε are defined by scaling of a single function $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying:

1. β is a Lipschitz continuous function,
2. $\beta > 0$ in $(0, 1)$ and $\beta \equiv 0$ otherwise,
3. $\int \beta(s) ds = M$.

We then define $\beta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} \beta(\frac{s}{\varepsilon})$.

We write

$$\mathcal{L}u := \Delta u + \sum a_i u_{x_i} - u_t,$$

and we assume that the coefficients a_i in the operator are independent of x_1 , the direction of the cylinder axis, and belong to $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{\Sigma} \times [0, T])$.

Our results show in particular that there is a unique limit solution independently of the choice of the function β . Moreover, we actually prove that the limit exists for any approximation of the initial datum.

3 Classical and viscosity solutions

In this section we give precise definitions of the classical and viscosity solutions. In the situations considered in [LVW1] a classical solution is a viscosity solution.

Definition 3.1 *Let $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, with $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a domain, be a space-time cylinder. Let v be a continuous function in \overline{Q} . Then v is called a classical subsolution (supersolution) to P in Q if $v \geq 0$ in \overline{Q} and*

1. $\mathcal{L}v \geq 0$ (≤ 0) in $Q \cap \{v > 0\}$.
2. $v \in C^1(\overline{\{v > 0\}})$, $\nabla v \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{\{v > 0\}})$.
3. For any $(x, t) \in \{v = 0\} \cap \partial\{v > 0\}$, we have $\nabla v^+(x, t) \neq 0$ and

$$-\frac{\partial v^+}{\partial \nu} \geq \sqrt{2M} \quad (\leq \sqrt{2M}),$$

where $\nu := -\frac{\nabla v^+}{|\nabla v^+|}$. That is,

$$|\nabla v^+| \geq \sqrt{2M} \quad (\leq \sqrt{2M}).$$

We say that v is a classical solution to P in Q if it is both a classical subsolution and a classical supersolution to P .

Definition 3.2 Let $u \in C(\overline{Q})$; u is called a viscosity subsolution (supersolution) to P in Q if $u \geq 0$ in \overline{Q} and, for every space-time subcylinder $Q' \subset Q$ and for every v bounded classical supersolution (subsolution) to P in Q' , with $Q' \cap \partial\{v > 0\}$ bounded,

$$\begin{aligned} u &\leq v && (u \geq v) && \text{on } \partial_p Q' \text{ and} \\ v &> 0 && \text{on } \overline{\{u > 0\}} \cap \partial_p Q' \\ (u &> 0 && \text{on } \{v > 0\} \cap \partial_p Q') \end{aligned}$$

implies that $u \leq v$ ($u \geq v$) in Q' .

The function u is called a viscosity solution to P if it is both a viscosity supersolution and a viscosity subsolution to P .

The following result proves the consistency between both concepts of solution.

Proposition 3.1 (Proposition 2.1 in [LVW1]) If u is a bounded classical supersolution (subsolution) to P in Q with $Q \cap \partial\{u > 0\}$ bounded, then u is a viscosity supersolution (subsolution) to P in Q .

Definition 3.3 Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a domain and let $Q = \Omega \times (0, T)$. Let Γ_N be an open C^1 subset of $\partial\Omega$ and let $\partial_N Q = \Gamma_N \times (0, T)$.

Let $u \in C(\overline{Q})$. We say that u is a viscosity solution to P in Q with $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$, if $u \geq 0$ and there holds:

For every space-time subcylinder $Q' \subset Q$ and for every v bounded classical supersolution (subsolution) to P in Q' , with $Q' \cap \partial\{v > 0\}$ bounded, such that $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_p Q' \cap \partial_N Q$,

$$\begin{aligned} u &\leq v && (u \geq v) && \text{on } \partial_p Q' \setminus \partial_N Q \text{ and} \\ v &> 0 && \text{on } \overline{\{u > 0\}} \cap \partial_p Q' \setminus \partial_N Q \\ (u &> 0 && \text{on } \{v > 0\} \cap \partial_p Q' \setminus \partial_N Q) \end{aligned}$$

implies that $u \leq v$ ($u \geq v$) in Q' .

Proposition 3.2 (Proposition 2.2 in [LVW1]) Let $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$ (or $(0, +\infty) \times \Sigma$), $Q = \Omega \times (0, T)$ and $\partial_N Q = \mathbb{R} \times \partial\Sigma \times (0, T)$ (or $\partial_N Q = (0, +\infty) \times \partial\Sigma \times (0, T)$).

Let u be a bounded classical solution to P in Q with $Q \cap \partial\{u > 0\}$ bounded and $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$. Then u is a viscosity solution to P in Q with $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$.

4 Uniqueness of classical and viscosity solutions

The results in this section say that, under suitable assumptions, a classical solution is the unique viscosity solution to the initial and boundary value problem associated to P and, in particular, it is the unique classical solution.

Theorem 4.1 (Theorem 3.1 in [LVW1]) Let $\Omega = (0, +\infty) \times \Sigma$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\partial_N Q = (0, +\infty) \times \partial\Sigma \times (0, T)$ and $\partial_D Q = \partial_p Q \setminus \partial_N Q$.

Let u be a bounded classical solution to P in Q with $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$, such that $u|_{\partial_D Q}$ has a bounded, nonempty free boundary and $u_{x_1} < 0$ on $\overline{\{u > 0\}} \cap \partial_D Q$.

Assume that $u(0, x', t) > 0$ for $(x', t) \in \overline{\Sigma} \times [0, T]$ with $u(0, x', t) \in C^{2,1}(\overline{\Sigma} \times [0, T])$.

Let $v \in C(\overline{Q})$ be a viscosity solution to P in Q with $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$.

If $v = u$ on $\partial_D Q$ and $\overline{\{v > 0\}} \cap \partial_D Q = \overline{\{u > 0\}} \cap \partial_D Q$, then $v = u$ in \overline{Q} .

For two classical solutions we have the following uniqueness result.

Corollary 4.1 (Corollary 3.1 in [LVW1]) Let Ω , Q , $\partial_N Q$, $\partial_D Q$ and u as in Theorem 4.1. Let v be a bounded classical solution to P in Q with $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$, such that $v = u$ on $\partial_D Q$. Then, $v = u$ in \overline{Q} .

The next theorem proves the uniqueness of viscosity solution under different assumptions from those in the theorem above. Then, uniqueness of classical solutions follows.

Theorem 4.2 (Theorem 3.2 in [LVW1]) The result of Theorem 4.1 holds if we let instead $\partial_N Q = \emptyset$ so that $\partial_D Q = \partial_p Q$. Moreover, the result of Theorem 4.1 also holds if we let $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$ with $\partial_N Q = \mathbb{R} \times \partial\Sigma \times (0, T)$ or $\partial_N Q = \emptyset$, as long as $\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})} < \infty$. In this case we make no assumptions on u on $\{0\} \times \overline{\Sigma} \times [0, T]$.

5 Existence and uniqueness of the limit solution

The results in this section say that, under certain assumptions, a classical solution to the initial and boundary value problem associated to P is the uniform limit of any family of solutions to problem P_ε with corresponding boundary data. This in particular implies that such limit exists and is unique. Moreover, it is independent of the choice of the function β .

In particular, under the assumptions of this section our classical solution is the unique classical solution and also the unique viscosity solution.

First, we give the result in a semi-cylinder.

Theorem 5.1 (*Theorem 6.1 in [LVW1]*) *Let $\Omega = (0, +\infty) \times \Sigma$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\partial_N Q = (0, \infty) \times \partial\Sigma \times (0, T)$ and $\partial_D Q = \partial_p Q \setminus \partial_N Q$.*

Let u be a bounded classical solution to P in Q , with $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$, such that $u|_{\partial_D Q}$ has a bounded, nonempty free boundary and $u_{x_1} < 0$ on $\overline{\{u > 0\}} \cap \partial_D Q$.

Assume that $u(0, x', t) > 0$ for $(x', t) \in \overline{\Sigma} \times [0, T]$ with $u(0, x', t) \in C^{2,1}(\overline{\Sigma} \times [0, T])$.

Let $u^\varepsilon \in C(\overline{Q})$ with $\nabla u^\varepsilon \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$ be a family of bounded nonnegative weak solutions to P_ε in Q , with $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$, such that $u^\varepsilon \rightarrow u$ uniformly on $\partial_D Q$ and $\{u^\varepsilon > 0\} \cap \partial_D Q \rightarrow \{u > 0\} \cap \partial_D Q$. Then $u^\varepsilon \rightarrow u$ uniformly in \overline{Q} .

A similar result holds for a full cylinder as spatial domain, under suitable monotonicity assumptions at $x_1 = -\infty$.

Theorem 5.2 (*Theorem 6.2 in [LVW1]*) *Let $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\partial_N Q = \mathbb{R} \times \partial\Sigma \times (0, T)$ and $\partial_D Q = \partial_p Q \setminus \partial_N Q$.*

Let u be a bounded classical solution to P in Q , with $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$ and $\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})} < \infty$, such that $u|_{\partial_D Q}$ has a bounded, nonempty free boundary.

Assume that $u_{x_1} < 0$ on $\overline{\{u > 0\}} \cap \partial_D Q$ and $u_{x_1}(x, 0) \leq -c_1 e^{c_2 x_1}$ for $x_1 \leq -a$ for some constants $c_1, c_2, a > 0$.

Let $u^\varepsilon \in C(\overline{Q})$ with $\nabla u^\varepsilon \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$ be a family of bounded nonnegative weak solutions to P_ε in Q , with $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \eta} = 0$ on $\partial_N Q$, such that $u^\varepsilon \rightarrow u$ uniformly on $\partial_D Q$, with $\{u^\varepsilon > 0\} \cap \partial_D Q \rightarrow \{u > 0\} \cap \partial_D Q$ and $|u^\varepsilon(x, 0) - u(x, 0)| \leq k_1 e^{-k_2 x_1^2}$ for $x_1 \leq -a$ for some constants $k_1, k_2 > 0$.

Then $u^\varepsilon \rightarrow u$ uniformly in \overline{Q} .

For the proofs of the results in this section, results on existence and regularity of mixed semilinear parabolic problems in non-cylindrical space-time domains were needed. Those results were proven in [LVW3].

6 Extension to the two phase case

The results in [LVW1] were extended to the two phase case. More precisely, in [LVW2] the following two phase free boundary problem is considered: find a function $u(x, t)$, defined in $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N \times (0, T)$, satisfying

$$\begin{aligned} \Delta u + \sum a_i(x, t) u_{x_i} - u_t &= 0 \quad \text{in } \{u > 0\} \cup \{u < 0\}, \\ u &= 0, \quad |\nabla u^+|^2 - |\nabla u^-|^2 = 2M \quad \text{on } \partial\{u > 0\}, \end{aligned}$$

where $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$, M is a positive constant and a_i are bounded. This is a two phase extension of the free boundary problem considered in the previous sections and we will also refer to this free boundary problem as Problem P .

The purpose of [LVW2] is to investigate conditions under which the three concepts of solution agree and produce a unique solution for the two phase problem. The results of [LVW2] extend those in [LVW1] (eliminating the assumption that $u \geq 0$) and can be summarized as saying that –under appropriate conditions– *if a classical solution of problem P exists in the two phase case, then it is at the same time the unique classical solution, the unique limit solution and also the unique viscosity solution.*

As in [LVW1], the proofs of the results in [LVW2] require results on mixed semilinear parabolic problems in non-cylindrical space-time domains. Those results are extensions of the results in [LVW3] and were proven in [LVW4].

References

- [BCN] H. Berestycki, L.A. Caffarelli, L. Nirenberg, *Uniform estimates for regularization of free boundary problems*, “Analysis and Partial Differential Equations”, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **122**, Cora Sadosky Ed., Marcel Dekker, New York, (1990), 567–619.
- [BuL] J.D. Buckmaster, G.S.S. Ludford, *Theory of Laminar Flames*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [CLW1] L.A. Caffarelli, C. Lederman, N. Wolanski, *Uniform estimates and limits for a two phase parabolic singular perturbation problem*, Indiana Univ. Math. J., **46** (2), (1997), 453–490.
- [CLW2] L. A. Caffarelli, C. Lederman, N. Wolanski, *Pointwise and viscosity solutions for the limit of a two phase parabolic singular perturbation problem*, Indiana Univ. Math. J., **46** (3) (1997), 719–740.
- [CV] L. A. Caffarelli, J. L. Vazquez, *A free boundary problem for the heat equation arising in flame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc. **347**, (1995), 411–441.
- [LVW1] C. Lederman, J. L. Vazquez, N. Wolanski, *Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion*, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2), (2001), 655–692.
- [LVW2] C. Lederman, J. L. Vazquez, N. Wolanski, *Uniqueness in a two-phase free-boundary problem*, Advances in Differ. Equat., **6** (12), (2001), 1409-1442.
- [LVW3] C. Lederman, J. L. Vazquez, N. Wolanski, *A mixed semilinear parabolic problem in a noncylindrical space-time domain*, Diff. and Int. Equat., **14** (4), (2001), 385–404.
- [LVW4] C. Lederman, J. L. Vazquez, N. Wolanski, *A mixed semilinear parabolic problem from combustion theory*, Electron. Journ. of Diff. Equat., Conf. 06, (2001), 203–214.
- [LW] C. Lederman, N. Wolanski, *Viscosity solutions and regularity of the free boundary for the limit of an elliptic two phase singular perturbation problem*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Serie IV, **27** (2), (1998), 253-288.
- [V] J. L. Vazquez, *The free boundary problem for the heat equation with fixed gradient condition*, Free Boundary Problems, Theory and Applications, M. Niezgodka, P. Strzelecki eds., Pitman Research Series in Mathematics, **363**, Longman, 1996, 277–302.
- [ZF] Ya.B. Zeldovich, D.A. Frank-Kamenetski, *The theory of thermal propagation of flames*, Zh. Fiz. Khim., **12**, (1938), 100–105 (in Russian); English translation in “Collected Works of Ya.B. Zeldovich”, vol. 1, Princeton Univ. Press, 1992.

CLAUDIA LEDERMAN

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas

Universidad de Buenos Aires

(1428) Buenos Aires - Argentina

e-mail: clederma@dm.uba.ar

JUAN LUIS VAZQUEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

28049 Madrid - Spain

e-mail: juanluis.vazquez@uam.es

NOEMI WOLANSKI

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas

Universidad de Buenos Aires

(1428) Buenos Aires - Argentina

e-mail: wolanski@dm.uba.ar

VI SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

Rosario, 16-18 Diciembre 1998

Primera Parte: MAT - Serie A, # 3 (2001):

- Ma. Cristina Sanziel, “Conditions to obtain a waiting time for a discrete two-phase Stefan problem”, pp. 1-6.
- Ariel L. Lombardi – Domingo A. Tarzia, “On similarity solutions for thawing processes”, pp. 7-12.
- Ricardo Weder, “Direct and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential”, pp. 13-20.
- Domingo A. Tarzia, “Stefan problem for a non-classical heat equation”, pp. 21-26.
- Pedro Morin – Rubén D. Spies, “A quasilinearization approach for parameter identification in nonlinear abstract Cauchy problems”, pp. 27-41.

Segunda Parte: MAT - Serie A, # 4 (2001):

- Omar Gil, “El problema de Hele-Shaw como un problema límite para la ecuación de los medios porosos”, pp. 1-10.
- Juan C. Reginato – Domingo A. Tarzia, “Estimations of nutrient uptakes by roots of crops through a moving boundary model”, pp. 11-16.
- Oscar D. Quiroga – Luis T. Villa – Fernando Suarez, “Problemas de frontera libre en procesos de transferencia de materia y energía con reacción química”, pp. 17-22.
- Edgardo A. Spiazzi – Rodolfo H. Mascheroni, “Modelo de deshidratación osmótica de alimentos vegetales”, pp. 23-32.
- Eduardo A. Santillan Marcus – Domingo A. Tarzia, “Exact solutions for phase change processes in humid porous half spaces”, pp. 33-38.

Tercera Parte: MAT - Serie A, # 5 (2001):

- Adriana C. Briozzo – Domingo A. Tarzia, “On a two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, pp. 1-10.
- Germán Torres – Cristina V. Turner, “Métodos de diferencias finitas para un problema de Bingham unidimensional”, pp. 11-26.
- Analía Gastón – Gustavo Sánchez Sarmiento – Horacio Reggiardo, “Un problemas de frontera libre: Fusión de una vaina de acero dentro de una cuchara de acería”, pp. 27-32.
- Ma. Fernanda Natale – Domingo A. Tarzia, “An exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficient”, pp. 33-36.
- Claudia Lederman – Juan L. Vazquez – Noemí Wolanski, “Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion with transport”, pp. 37-41.

INFORMACION PARA LOS AUTORES

Los trabajos han de estar escritos en español o inglés. Excepcionalmente el Director y el Comité Editorial podrán admitir trabajos escritos en otros idiomas ampliamente utilizados. Deberá presentarse el texto mecanografiado o elaborado mediante un procesador de textos, con caracteres de 12 puntos, en un rectángulo de 16cm×24cm y en una sola cara del papel. Trabajos escritos en LATEX o en MS-WORD serán bienvenidos y en ese caso el autor deberá adjuntar un diskette con los archivos correspondientes, o bien enviarlos por correo electrónico.

En cada trabajo deberá constar, en la primer página, a partir de la quinta línea, el título en letras mayúsculas y sin punto final, el nombre de el o los autores, su identificación institucional y su correspondiente dirección postal y electrónica. Se acompañará un resumen que no exceda las 200 palabras en español y otro en inglés, añadiendo en ambos las palabras claves. También se solicita la inclusión de la correspondiente AMS-Mathematics Subject Classification.

Las tablas y gráficos deberán insertarse en el texto y estar numeradas en forma correlativa.

Las referencias bibliográficas se compondrán sólo de los trabajos mencionados en el texto y se incluirán al final, por orden alfabético de autores y en orden cronológico, si existieran varios trabajos del mismo autor; cada una precedida por el correspondiente número de orden, entre corchetes. Las citas en el texto se efectuarán según los siguientes modelos: [1]; Caffarelli & Vazquez [1]; Caffarelli & Vazquez (1995, [1]). Y en la referencia final:

[1] CAFFARELLI L. A. & VAZQUEZ J.L., *A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), pp. 411-441.

[2] FASANO A. & PRIMICERIO M., *Blow-up and regularization for the Hele-Shaw problem*, in *Variational and free boundary problems*, Friedman A. & Spruck J. (Eds.), IMA Math. Appl. Vol. 53, Springer Verlag, New York (1993), pp. 73-85.

[3] RODRIGUES J. F., *Obstacle problems in mathematical physics*, North-Holland Mathematics Studies N. 134, North-Holland, Amsterdam (1987).

Al final de la última página deberán dejarse al menos 2 líneas en blanco para incluir los datos de recepción.

INTERCAMBIOS

Departamento de Matemática – Biblioteca, Servicio de Canje
Facultad de Ciencias Empresariales -Universidad Austral
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA

NUMEROS APARECIDOS Y POR APARECER

Serie A:

- #1(2000): E.Mascolo – F.Siepe, “Functionals of the Calculus of Variations with non standard growth conditions”.
- #2(2000): D.A.Tarzia, “A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems”.
- #3(2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Primera Parte.
- #4(2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Segunda Parte.
- #5(2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Tercera Parte.
- #6(2002): F.Talamucci, “Some Problems Concerning with Mass and Heat Transfer in a Multi-Component System”.

Serie B:

- #1(2000): D.A.Tarzia, “Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática”.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD AUSTRAL

Paraguay 1950 - S2000FZF ROSARIO - ARGENTINA
TEL: (54) 341-481-4990 FAX: (54) 341-481-050
E-mail: Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar