# 12° TALLER de INVESTIGACIÓN (08/09/2022)

## "Cómo Pensar, Entender, Razonar, Demostrar y Crear en Matemática"

**Profesor: Domingo A. TARZIA**

## TRABAJO PRÁCTICO

### I) Problemas por Resolver

**Ia) Lógica:**

1) i) ¿Determine la cantidad de partidos que se deben realizar en un campeonato, por **eliminación simple**, con 50 equipos para determinar al campeón? ¿Y con n equipos?

ii) Qué puede decirse si el campeonato se realiza a **doble eliminación** (un equipo es eliminado cuando pierde dos partidos)?

2) En el juego de la "**escoba de 15**" se tienen 40 cartas en total que están distribuidas en 4 cartas iguales que tienen valores del 1 al 10 (no interesa el palo de la carta, si es oro, espada, basto o copa). ¿cuántas posibilidades existen para lograr 15 con 3 cartas, con 4 cartas, con 5 cartas y con 6 cartas?

3) Sabiendo que **dos personas mienten y una dice la verdad**, determine quién hizo el concurso (se supone que es único) teniendo en cuenta que dijeron lo siguiente:
A: "Yo no fui";

B: "Fue A";

C: "Yo no lo hice".

4) **Cinco corredores y dos mentirosos**: Al finalizar una carrera escuchamos estas declaraciones de los participantes:

- Antonio: "Yo no he llegado último";
- Bernardo: "Carlos ha llegado tercero";
- Carlos: "Antonio ha llegado inmediatamente detrás de Ernesto";
- Daniel: "Ernesto ha llegado en segundo lugar";
- Ernesto: "Daniel no ha ganado la carrera".

Por alguna razón extraña, los dos primeros clasificados han mentido y los otros tres no. ¿Cuál ha sido el orden de llegada de los cinco corredores?

5) Se tiene una fuente de agua y se dispone solo de dos recipientes, de a y b litros respectivamente. Indique un procedimiento para que uno de los recipientes contenga c litros de agua en los siguientes casos:
(i) $a = 3$ , $b = 5$ , $c = 4$ ;  (ii) $a = 9$ , $b = 4$ , $c = 6$ ;  (iii) $a = 7$ , $b = 11$ , $c = 6$ .

6) **Metegol lógico**: Tres amigos, Juan, Pedro y Carlos, jugaron un torneo triangular de metegol, es decir que cada uno jugó dos partidos (todos contra todos) y hubo tres partidos en total. Se recuerda que una ficha de metegol da siete bolas. Al final del torneo resultó que Juan y Pedro hicieron 5 y 6 goles respectivamente. Entonces:
(i) ¿Cuántos goles hizo Carlos?
(ii) ¿Cuántos goles recibió, en su arco, cada uno de los tres jugadores?
(iii) Si se sabe que Pedro perdió los dos partidos jugados, determine los resultados de los tres partidos.
(iv) Si no se hubiese sabido que Pedro perdió los dos partidos (según (iii)), ¿cuántas soluciones posibles sobre los resultados de los tres partidos se tendría? Además, ¿Pedro hubiese ganado algún partido?

## Ib) Aritmética y Ecuaciones:

1) Compare e indique cuál es el **mayor de los siguientes dos números** (sin utilizar calculadoras ni tablas de raíces):

i) $\sqrt[3]{11}$ ; $\sqrt{5}$ ;

ii) $\sqrt[3]{13}$ ; $\sqrt{7}$ ;

iii) $\sqrt[3]{14}$ ; $\sqrt{6}$ ;

iv) $\sqrt[3]{14}$ ; $\sqrt{5}$ ;

(v) 0,00001 ; $(81)^{-\frac{5}{2}}$

(vi) $\sqrt[4]{7}$ ; $\sqrt[6]{20}$ ;

vii) $22^{33}$ ; $33^{22}$ ;

viii) $222^{333}$ ; $333^{222}$ .

2) En cada uno de los siguientes problemas encuentre todas las soluciones:

(i) Utilizando solamente una vez las cifras 4, 6, 7, 8 y 9, complete la siguiente operación:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | ..... | 2 |
| + | ..... | ..... | 3 | ..... |
| | 6 | 3 | 9 | ..... |

(ii) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 | ..... | ..... | 1 |
| + | | 7 | 9 | 7 | ..... |
| | 1 | 4 | ..... | 9 | ...... |

3) Complete las siguientes operaciones:

(i) Adición:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | ... |
| + | | 4 | ... | 6 |
| | | ... | 8 | 9 |
| ... | 2 | 8 | 4 | |

(ii) Adición:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 7 | 3 |
| + | | ... | ... | ... |
| | | 8 | 2 | 7 |
| | ... | 5 | 5 | 5 |

(iii) Adición:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 8 | 7 |
| + | 4 | 6 | ... |
| | ... | 8 | 4 |
| | 8 | ... | 9 |

(iv) Diferencia:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | ... | 3 | ... |
| -- | ... | 2 | ... | 1 |
| | 3 | 4 | 6 | 5 |

(v) Multiplicación:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 9 |
| x | | | | ... | ... |
| | | ... | ... | 7 | ... |
| + | ... | ... | ... | ... | |
| | ... | ... | ... | 4 | 8 |

(vi) División:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | ... | .... | \| | .... | .... |
| 3 | 4 | 9 | | 1 | .... | .... |
| | ... | .... | .... | | | |
| | | 0 | 8 | | | |

4) ¿Cuánto vale la siguiente expresión $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$ ?

5) Cada letra utilizada (A, B) representa a un dígito entre 0 y 9.  Calcule el valor de las letras A y B de manera que se verifique

$$\begin{array}{rrrr} & 4 & B & A \\ + & A & B & 4 \\ & B & 4 & A \\ \hline 1 & 7 & 1 & 0 \end{array}$$

6) (i) Cada letra utilizada (A, P, R, S) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$\begin{array}{rrrr} & R & A & S \\ + & P & A & R \\ \hline A & S & S & A \end{array}$$

(ii) Cada letra utilizada (A, B) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

AB + BA = 99

**Ic) Funciones lineales:**

1) El dueño de una empresa propone a sus empleados **dos opciones**:

(a) Aumentar los sueldos el 5 %;   (b)Aumentar los sueldos un monto fijo de $ 100.

¿A partir de que salario se debe elegir la primera opción? ¿Y la segunda opción?

**Id) Geometría del Plano y Funciones Cuadráticas:**

1) ¿Que ángulo forman las agujas del reloj a las 12:35 horas?

2) Sea ABC un triángulo que tiene $\measuredangle A = 36° \; y \; \measuredangle B = 21°$ . Sobre el lado AB se marcan los puntos D y E de modo que $\overline{AD} = \overline{DC}$ y $\overline{EB} = \overline{EC}$ . Halle la medida del $\measuredangle DCE$.

3) En un cuadrado ABCD se elige un punto E cualquiera en su interior. Si las distancias del punto E a los puntos A, B y C valen 1, 2 y 3 respectivamente, ¿cuánto vale la distancia del punto E al punto D?

4) Halle el **rectángulo de mayor área inscripto en un triángulo** de base b y altura h, siendo:

i) $b = 4, h = 8$ ;

ii) $b = 6, h = 8$ ;

iii) Intente generalizar los resultados obtenidos en los dos casos particulares anteriores, si la base es $b > 0$ y la altura es $h > 0$.

5) ¿Cuál de los siguientes dos triángulos tiene **mayor área** siendo uno de base 30 y lados 25 y 25, con otro de base 40 y lados 25 y 25?

6) i) Halle el **rectángulo de área máxima con un dado perímetro** $p > 0$:

ii) Qué puede decirse del área óptima anterior respecto del área del círculo de igual perímetro $p > 0$.

7) i) Halle el **rectángulo de perímetro mínimo con una dada área** $A > 0$:

i) Qué puede decirse del perímetro óptimo anterior respecto del perímetro del círculo de igual área $A > 0$.

## II) Problemas por Demostrar

1) Para cada una de las preguntas de abstracción indique al menos tres respuestas:
i) ¿Cómo puedo demostrar que dos números reales sean iguales?;

ii) ) ¿Cómo puedo demostrar que un número positivo $a$ es mayor a otro número positivo $b$?

iii) ¿Cómo puedo demostrar que dos rectas sean paralelas en el plano?;

iv) ¿Cómo puedo demostrar que dos rectas sean perpendiculares en el plano?;

2) Demuestre que si $x, y$ son números reales tales que $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 0$, entonces $x = 0 \ e \ y = 0$.

¿Que método ha utilizado para la demostración?

3) Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos, donde con $\overline{A}$ se representa el complemento del conjunto A respecto del conjunto universal y los símbolos $\cup$ y $\cap$ representan la unión e intersección de conjuntos respectivamente. Sean A y B dos conjuntos. Entonces, se tiene:

i) $\overline{A} - \overline{B} = B - A$ ;

ii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ;

iii) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ ;

iv) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ .

4) ¿Si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados entonces dicho triángulo es rectángulo? Justifique la respuesta.

5) Indique cuál debe ser la relación (si existe) entre el área y la hipotenusa de un triángulo rectángulo para que sea isósceles.

6) Demuestre las siguientes proposiciones:

i) $n$ es par $\Rightarrow n^2$ es par;

ii) $n$ es impar $\Rightarrow n^2$ es impar ;

iii) $n^2$ es par $\Rightarrow n$ es par;

iv) $n^2$ es impar $\Rightarrow n$ es impar ;

v) $\sqrt{2}$ no es un número racional.