UNIVERSIDAD AUSTRAL

Escuela de Educación y Vicerrectorado de Investigación

12° TALLER de INVESTIGACIÓN (08/09/2022)

(Presencial en Pilar y Virtual por Zoom)

“Cómo Pensar, Entender, Razonar, Demostrar y Crear en Matemática”

Profesor: Domingo A. TARZIA

MENÚ

1. Diversos Conceptos Útiles en Matemática;

2. Sujetos Movidos por Aprendizaje o Propio Yo;

2. Fases Resolución Problemas;

4. Estilos Aprendizajes Niños;

5. Cerebro Humano (Funciones Hemisferios);

6. Teorema de Pepe;

7. Modelización y Problemas para Intuir;

8. Perspectiva con Ladrillos;

9. Juego: Escoba de 15;

10. Cómo Resolver Problemas;

11. Pregunta de Abstracción;

12. Problema del Agua y Método Regresivo;

13. Método Progresivo-Regresivo;

14. Tablas de Verdad;

15. Los 3 Métodos más Importantes para Demostrar;

16. Diferentes Métodos para Demostrar;

17. Demostraciones Visuales (sin Palabras);

18. Errores Geométricos;

19. Cuando Triángulo Rectángulo es Isósceles;

20. Problemas de Máxima Área en el Plano;

21. Juegos Lógicos (Laberintos, Cruzadas, póker cruzado, pirámides numéricas, clasificaciones, batalla naval, Amenaza, Número Oculto, Números Flechas; Dibujos Lógicos (Pintando con Lógica));

22. Resolución de Problemas por Resolver y Demostrar

DIVERSOS CONCEPTOS DE INTERÉS EN LA MATEMÁTICA.

- Creación : Acción y efecto de crear.

- Crear (Lat. creare) : Componer artística o intelectualmente.

- Componer (lat. componere, arreglar) : Formar o constituir un todo juntando o disponiendo elementos diversos.

- Corolario (lat. corollarium) : Es la proposición que se deduce por sí sola de lo demostrado anteriormente.

- Deducción (lat. deductionem) : Acción y efecto de deducir. Razonamiento que, partiendo de hipótesis conduce a la verdad de una proposición usando reglas de inferencia.

- Deducir (lat. deducere) : Sacar consecuencias de un principio, proposición o supuesto y, en general, llegar a un resultado por el razonamiento : de esto deduzco que...

- Demostración : Acción y efecto de demostrar. Razonamiento que deduce la verdad de una proposición partiendo de axiomas que se han enunciado.

- Demostrar : Probar de forma inequívoca.

- Entender (lat. intendere) : Percibir por medio de la inteligencia el sentido o significado de algo : entender un problema. Percibir las causas o motivos de algo : entender el porque de un hecho.

- Entendimiento : Aptitud para comprender.

- Comprender (lat. comprehendere) : Entender, percibir: comprender un texto.

- Hipótesis (gr. hypothesis, suposición) : Conjunto de datos a partir del cual se intenta demostrar en forma lógica una nueva proposición.

- Lema (lat. lemma) : Proposición preliminar cuya demostración facilita la de un teorema subsiguiente.

- Pensamiento : Facultad de pensar : el pensamiento es atributo del hombre. Idea principal, manera de opinar de un individuo o de un determinado ambiente.

- Pensar : Formar y ordenar en la conciencia ideas y conceptos: pienso luego existo. Meditar, reflexionar. Hacer proyectos para poner en práctica alguna cosa.

- Principio (lat. principium) : Concepto, idea fundamental que sirve de base a un orden determinado de conocimientos o sobre la que se apoya un razonamiento. Proposición que sirve de fundamento a una deducción. Nociones primeras de una ciencia o arte.

- Probar (lat. probare) : Demostrar, evidenciar la verdad de cierta cosa.

- Problema (lat. problemam) : Cuestión en que hay algo que averiguar. Proposición dirigida a averiguar un resultado cuando ciertos datos son conocidos.

- Proposición : Enunciado susceptible de ser verdadero o falso.

- Razonamiento : Acción y efecto de razonar. Serie de conceptos encaminados a demostrar algo.

- Razonar : Pensar, ordenando ideas en la mente, para llegar a deducir una consecuencia o conclusión.

- Teorema (gr. theorema) : Proposición científica que puede demostrarse.

- Tesis (gr. thesis) : Proposición que se enuncia y se mantiene con argumentos.

(1990) Alonso [105], investigador él mismo de estas cuestiones, resume en diez puntos de gran aplicabilidad didáctica las diferencias existentes entre los sujetos movidos por MA (motivación centrada en el aprendizaje) y los sujetos que actúan por ME (motivación centrada en su propio yo), a la hora de hacer frente a sus tareas escolares:

Aspecto o ámbito de aproximación a las tareas	*Sujetos con motivación del tipo MA*	*Sujetos con motivación del tipo ME*
1. Cuestión inicial.	¿Cómo puedo hacerlo?	¿Puedo hacerlo?
2. Foco de atención.	Proceso de realización.	Resultados de la tarea.
3. Concepción de los posibles errores.	Algo natural que puede ser ocasión para aprender.	Fracaso, algo siempre negativo.
4. Incertidumbre de los resultados.	Un desafío, un reto, una invitación/estímulo.	Una amenaza, peligro sistemático.
5. Tareas preferidas.	Aquellas en las que más pueden aprender.	Aquellas en las que más podrán lucirse.
6. Información que buscan.	Saber lo que saben e ignoran, para mejorar.	Noticias aduladoras sobre sus éxitos.
7. Tipo de normas de medición para su evaluación.	Personales, flexibles, a largo plazo.	Normatividad rígida, estimación inmediata.
8. Fundamento de sus expectativas.	El esfuerzo que están dispuestos a realizar.	Percepción de su competencia actual.
9. Percepción del profesor.	Ayuda, orientador, servicio de asesoramiento.	Juez, sancionador con poder.
10. Por qué las metas son refuerzo.	Por la experiencia (intrínseca) del aumento del propio saber.	Por el reconocimiento esperado de los demás.

FASES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

De acuerdo a la experiencia acumulada de investigadores y tecnólogos en el mundo se puede decir que la resolución de problemas tiene cuatro fases, a saber:

1) Saturación: trabaje sobre su problema hasta que haya realizado todo lo que podía hacer. Pruebe con todos los métodos e ideas que se le presenten en su mente.

2) Incubación: ponga el problema fuera de su mente consciente y deje que su inconsciente lo tome y trabaje.

3) Inspiración: la respuesta al problema le viene o le aparece en un flash (en un momento). Tenga en cuenta que generalmente llega en el momento menos propicio (generalmente a través de un sueño, en estado de somnolencia o haciendo otra actividad que lo motivó). Prepárese a anotar o a ejecutar inmediatamente la idea o solución recibida so pena de olvidarla a muy corto plazo.

4) Verificación: chequee la respuesta para estar seguro de la solución hallada.

ESTILOS DE APRENDIZAJE DE LOS NIÑOS EN EL ÁREA MATEMÁTICA

ESTILO 1	ESTILO 2
Prefieren una “fórmula” de aproximación a las matemáticas en la que sigan una secuencia paso a paso de operaciones, avanzando hacia una solución. Rara vez evalúan, tienden a recordar partes mejor que conjuntos, y sienten una imperiosa necedidad de convencerse a sí mismos a través de las operaciones ... a menudo son muy exactos en desarrollar (la fórmula), pero si bien pueden llegar al resultado correcto, cabe que permanezcan totalmento al margen de la lógica que confiere sentido a lo que están haciendo.	Muestran impaciencia ante los procedimiento paso a paso y es probable que cometan errores mientras los efectúan. Estos niños son válidos para la estimación, pueden dar espontáneamente una respuesta correcta sin saber cómo se ha llegado a ella, y son superiores en el reconocimiento de pautas a gran escala.

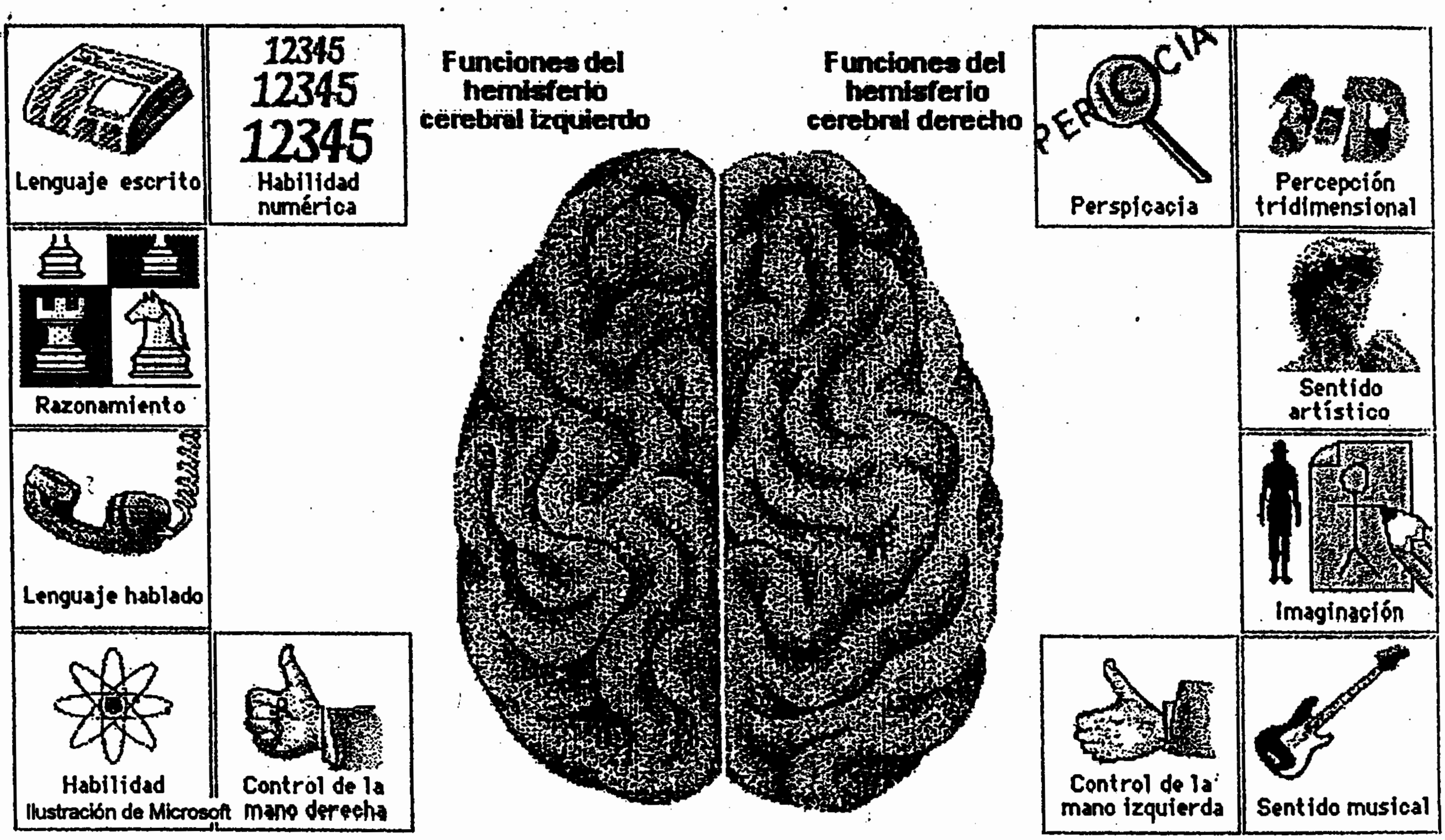
(Utiliza mayormente el hemisferio izquierdo).

(Utiliza mayormente el hemisferio derecho).

El cerebro


IZQUIERDO:
(el "crítico")
analítico
intelecto
mente consciente
obedece a la razón
y al pensamiento lineal
verbal
objetivo
genera discurso, habla
las palabras del texto
percepción inmediata
recorta
figura, detalles
(el árbol)
signos
categoriza, sintetiza
procesamiento secuencial
memoria de superficie
voluntad
intención
funciones lógicas
causa efecto
calcula, compara
resuelve por
lógica
DERECHO:
(el "artista")
intuitivo
mente
mente no consciente
obedece a las emociones
y a los sentimientos
visual
subjetivo
genera imágenes
conceptualización holística
percepción global
resignifica
fondo, totalidades
(el bosque)
diseños
percibe, registra,
procesamiento simultáneo
memoria profunda
fe
deseos
funciones analógicas
retroalimentación
imagina, fantasea
integra por afinidades
analógicas

Funciones de los hemisferios cerebrales izquierdo y derecho



Funciones de los hemisferios cerebrales izquierdo y derecho
Aunque los hemisferios cerebrales tienen una estructura simétrica, con los dos lóbulos que emergen desde el tronco cerebral y con zonas sensoriales y motoras en ambos, ciertas funciones intelectuales son desempeñadas por un único hemisferio. El hemisferio dominante de una persona, se suele ocupar del lenguaje y de las operaciones lógicas, mientras que el otro hemisferio controla las emociones y las capacidades artísticas y espaciales. En casi todas las personas diestras y en muchas personas zurdas, el hemisferio dominante es el izquierdo.

Ilustración de Microsoft

"Funciones de los hemisferios cerebrales izquierdo y derecho", Enciclopedia Microsoft(R) Encarta(R) 98. (c) 1993-1997 Microsoft Corporation.

<u>ACTIVIDAD ELÉCTRICA DEL CEREBRO</u>

BETA: 14-30 ciclos/segundo - Percepción externa. - Atención y actividad externas. - Estados normales de conciencia.	***ALFA: 7-14 ciclos/segundo*** - Comienza la reacción de relajación. - Mayor creatividad. - Comienza la sincronización entre los hemisferios cerebrales en las frecuencias más bajas.
THETA: 3-7 ciclos/segundo - Sincronización hemisférica - Integración sensorial cerebral elevada. - Experiencia de campo unificado; sencación de "experiencia cumbre". - Capacidad para el aprendizaje óptico muy alta. - Receptividad a las visiones interiores muy alta. - Capacidad de recuerdo nítido y de generación de ideas intuitivas muy elevada. - Estado intensificado para procesar y almacenar información.	***DELTA: 1-3 ciclos/segundo*** - Estado de sueño profundo. - Como vemos, el objetivo obvio para el aprendizaje rápido es el estado de ondas cerebrales theta. En esta frecuentcia no sólo logramos la sincronización de los hemisferios cerebrales sino también mayor agudeza mental, percepción intuitiva y creatividad, además de mayor capacidad de recordar con nitidez. Otros estudios revelan que este estado relajado conduce a un mayor rendimiento en todos los aspectos. En general, la frecuencia de ondas theta es la que ofrece una mayor capacidad tanto en los jóvenes como en los viejos.

CREATIVIDAD

TEOREMA DE PEPE:

Bajo tales condiciones (Hipótesis) se obtienen tales propiedades (Tesis, Conclusión).

LA PREGUNTA CREATIVA DEL MILLÓN ES LA SIGUIENTE:

¿Cómo se le ocurrió a Pepe que bajo tales condiciones se obtengan tales propiedades?

* Intuición vs lógica (Hemisferio Derecho vs Izquierdo)

* <u>Modelización</u> (Se desea construir un modelo, lo más simple posible, que prediga la realidad)

Problema Real

↓ ← Hipótesis del Modelo
Leyes del Area

Modelo matemático

↓ el Problema es matemático

↓ ← uso de las leyes de la lógica-matemática

Deducciones matemática

- existencia y unicidad de solución
- propiedades de la solución
- monotonía de datos y parámetros
- comportamientos asintóticos

Dichas deducciones matemáticas son coherentes con la Realidad?

no → El Modelo es Malo

↓ Si

El Modelo es Bueno

PROBLEMAS PARA RESOLVER UTILIZANDO LA INTUICIÓN

1) ¿**Qué conjunto tiene más elementos**: el conjunto de los números naturales o el conjunto de los números pares? ¿Y con los números impares?

2) Supongamos que en el intervalo de números reales [0, 1], de longitud 1, se realice el siguiente procedimiento abstracto (en la práctica es imposible hacerlo, pero si se lo puede realizar pensándolo en forma abstracta).

En el intervalo [0, 1] se ubica a todo número racional en el lado izquierdo y a todo número irracional en el lado derecho, formándose de esta manera dos subconjuntos de intervalos reales: Q de los números racionales e I de los números irracionales.

Por otro lado, el intervalo Q se encuentra a la izquierda y el intervalo I a la derecha, uno a continuación del otro, cuyas longitudes son desconocidas pero su suma debe valer 1.

¿Cuánto vale la longitud del intervalo Q que contiene a los números racionales del intervalo [0, 1]?

Sabor a nada (1963)

Letra: Dino Ramos y Palito Ortega

Música: Palito Ortega

Qué nos sucede vida que últimamente
Ya nos miramos indiferentes?
Y ese amor que hasta ayer nos quemaba
Hoy el hastío ya le dio sabor a nada, dime

Qué, **¿qué nos sucede vida que últimamente**
Ya discutimos por pequeñeces?
Y todo aquello que hasta ayer nos quemaba
Hoy la rutina ya le dio sabor a nada

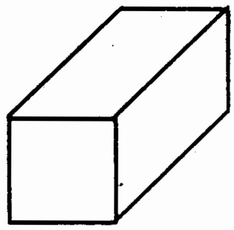
Reflexionemos, vida mía
O nos condenaremos
A vivir eternamente
Fingiendo amor ante la gente
Y a no soportarnos al vivir íntimamente, dime

¿Qué nos sucede vida que últimamente
Ya nos miramos indiferentes?
Y todo aquello que hasta ayer nos quemaba
Hoy el hastío ya le dio sabor a nada
Hoy ya le dio sabor a nada
Hoy ya le dio sabor a nada.

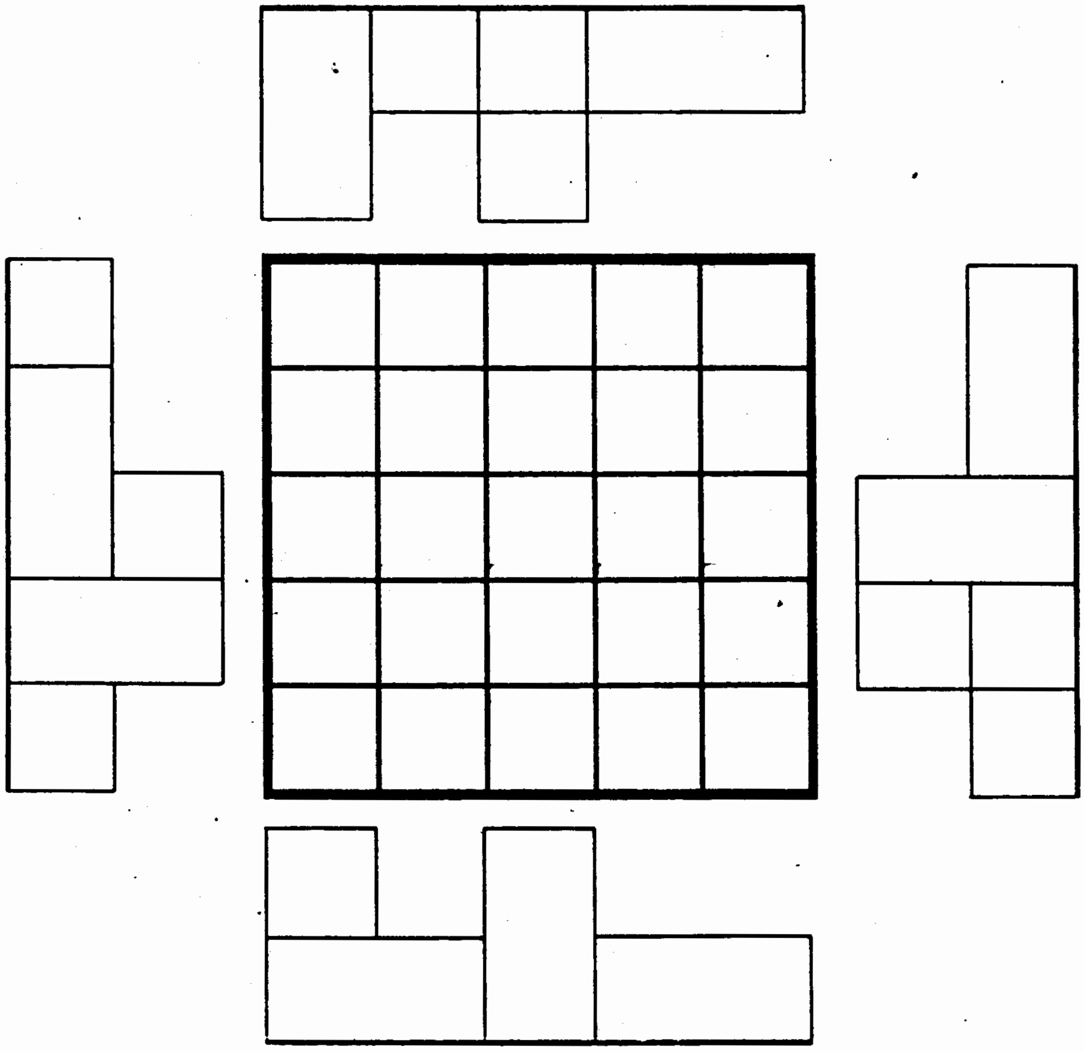
Nota: El gran Frank Sinatra cantó “Sabor a nada” en su show en Buenos Aires en 1981.

Ladrillos *13 pts*

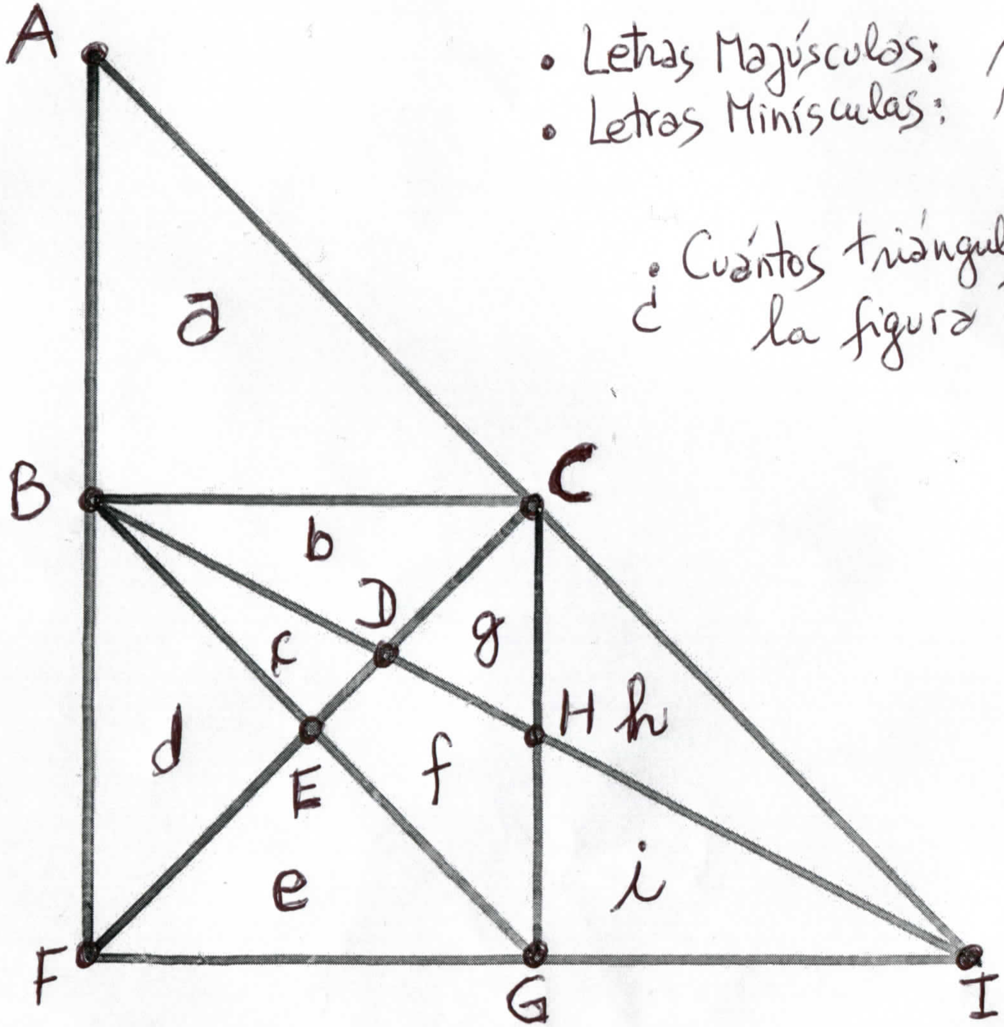
Ponga sobre el tablero seis ladrillos de proporciones 1x1x2. Cada ladrillo se apoyará allí sobre una o sobre dos casillas. Fuera del tablero aparecen las vistas que deberán tenerse desde el Norte, el Este, el Sur y el Oeste.



un ladrillo



TRIANGULITIS I



- Letras Majúsculas: representan Puntos
- Letras Minísculas: representan Regiones

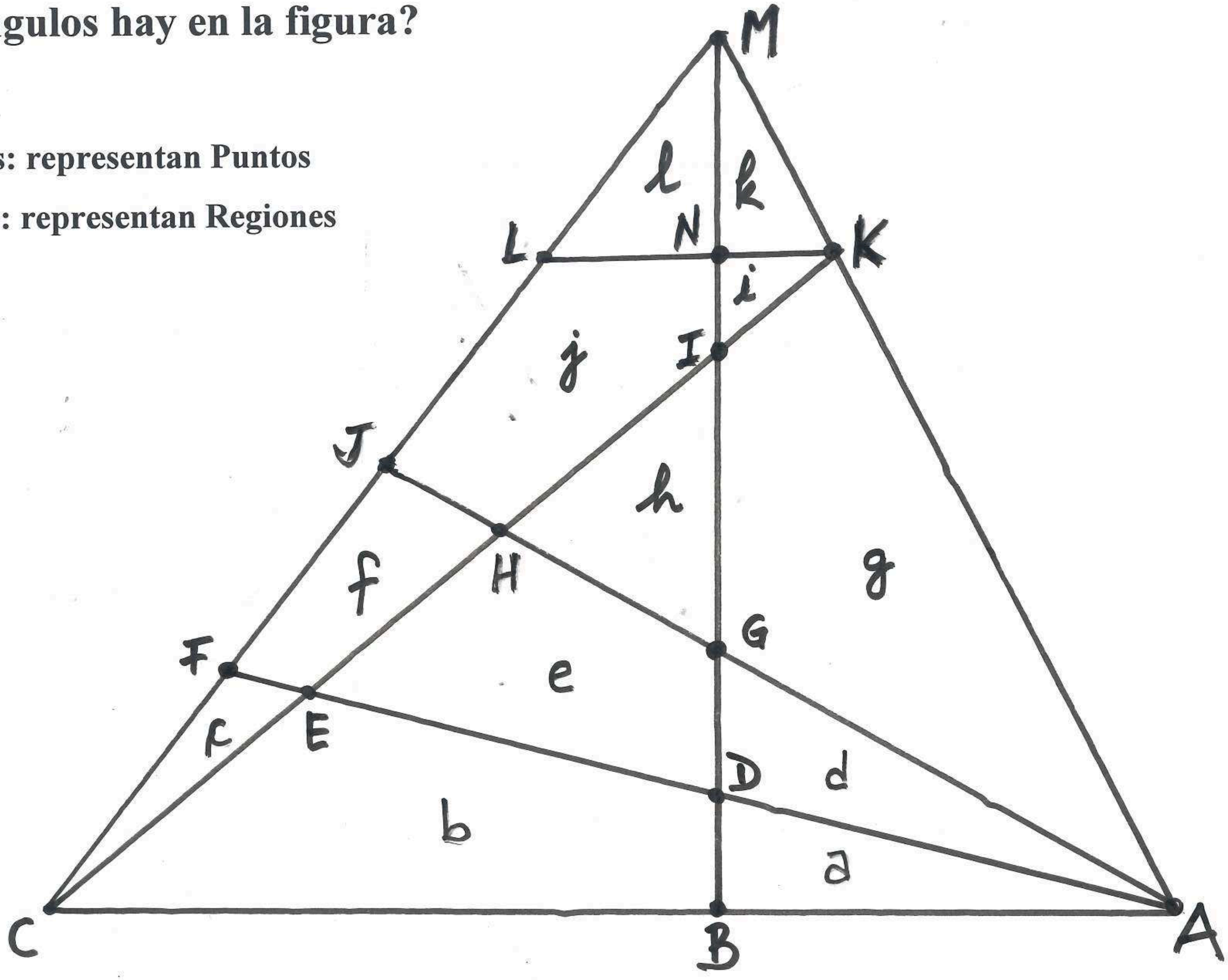
¿Cuántos triángulos existen en la figura?

TRIANGULITIS II

¿Cuántos triángulos hay en la figura?

Letras Mayúsculas: representan Puntos

Letras Minúsculas: representan Regiones



JUEGO: LA ESCOBA DE 15

OBJETIVO: Hallar N cartas cuya suma es 15

Con 2 Cartas		
1ra Carta	**2da Carta**	**SUMA**
10	5	15
9	6	15
8	7	15

Con 3 Cartas			
1ra Carta	**2da Carta**	**3ra Carta**	**SUMA**
10	4	1	15

# Cartas	# Casos
2	3
3	
4	
5	
6	
7	

Para resolver un problema se necesita:

I Comprender el problema

II Concebir un plan

Determinar la relación entre los datos y la incógnita.

De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares.

Obtener finalmente un **plan** de solución.

III Ejecución del plan

IV Examinar la solución obtenida

Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

¿Cómo demostrar que $a=b$? (Pregunta de abstracción)

Utilizando el Método REGRESIVO se pueden obtener las siguientes condiciones suficientes:

$$a-b=0 \longrightarrow a=b$$

$$\frac{a}{b}=1 \longrightarrow a=b$$

$$\exists c \,/\, a=c \wedge b=c \longrightarrow a=b$$

$$a\leq b \wedge b\leq a \longrightarrow a=b$$

$$x\geq 0 \wedge x\leq 0 \longrightarrow x=0$$

$$|x|<\varepsilon, \forall \varepsilon>0 \longrightarrow |x|=0 \longrightarrow x=0$$

$$x^2=0 \longrightarrow x=0$$

PROBLEMA DE LOS RECIPIENTES DE AGUA

Problema:

Se consideran los recipientes A y B que pueden contener 9 y 4 litros respectivamente. Se resalta que dichos recipientes no tienen ninguna marca intermedia siendo el objetivo del problema indicar un procedimiento para obtener 6 litros en el recipiente A.

Del planteo del problema se tienen las siguientes posiciones inicial y final:

Situación Inicial P:

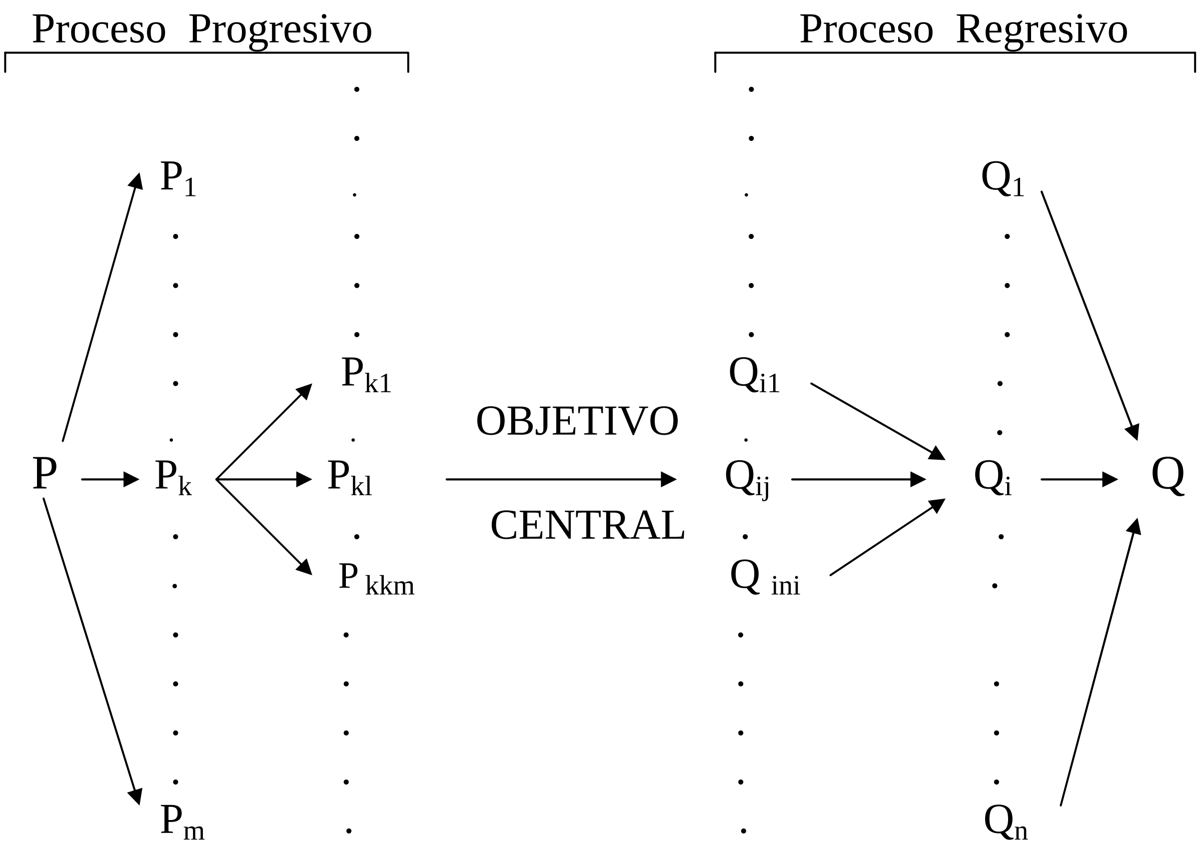
recipiente A está vacío; Recipiente B está vacío.

Situación Final Q:

Recipiente A contiene 6 litros; Recipiente B está vacío.

PROBLEMA: $P \Rightarrow Q$

Método Progresivo-Regresivo



Objetivo: $P_{kl} \Rightarrow Q_{ij}$ es verdadera para algunos i,j,k,l.

Observaciones:

i) Los Q_i (i =1,...,n) surgen de las posibles respuestas a la **pregunta de abstracción**: " Cómo puedo obtener Q".

ii) Los P_k (k =1,...,m) surgen aplicando **bifurcaciones** a la proposición P.

TABLAS DE VERDAD

P	**Q**	**NO P**	**NO Q**	**P → Q**	**NO Q → NO P**	***P* ∧ *Q***	***P* ∨ Q**
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	F

donde los operadores utilizados representan:

NO: Negación; →: Implicancia;

∧: Conjunción (y); ∨: O Inclusivo (o).

Además P y Q representan dos Proposiciones Lógicas que pueden tener el valor de V (Verdadero) o F (Falso).

LOS TRES MÉTODOS MÁS IMPORTANTES PARA DEMOSTRAR PROPOSICIONES EN MATEMÁTICA

$$P \Longrightarrow Q$$

MÉTODO	SUPONGA	CONCLUYA
Progresivo-regresivo	P ....→.... (progresivamente)	←....Q (regresivamente)
Contradicción	P .. (progresivamente) .. → .... NO Q	* (Contradicción)
Contrarrecíproco	P ← no se supone NO Q .... → .. progresivamente	←.... NO P regresivamente

MÉTODOS PARA HACER DEMOSTRACIONES ($P \Rightarrow Q$)

Método de Demos-tración	**Cuándo usarla**	**Qué suponer**	**Qué concluir**	**Cómo hacerlo**
Progresivo Regresivo	Como un primer intento o cuando Q no tiene una forma reconocible.	P	Q	Trabaje progresivamente partiendo de P y aplique el proceso de abstracción a Q.
Contra-recíproco	Cuando Q contiene la palabra "no".	NO Q	NO P	Trabaje progresivamente partiendo de NO Q y regresivamente partiendo de NO P.
Contradic-ción	Cuando Q contiene la palabra "no" o cuando los dos primeros métodos fallen.	P y NO Q	Alguna contra-dicción	Trabaje progresivamente partiendo de P y NO Q para obtener una contradicción.
Construc-ción	Cuando Q contiene el término "existe".	P	Existe el objeto deseado	Adivine, construya, etc., el objeto que tiene cierta propiedad y muestre que algo sucede.

Método de Demostración	Cuándo usarla	Qué suponer	Qué concluir	Cómo hacerlo
Inducción	Cuando Q es verdadero para cada entero empezando con alguno en particular, por ejemplo 1.	La proposición es verdadera para n	La proposición es verdadera para n+1. También demuestre que es verdadera para 1.	(i) Verifique que la proposición es verdadera para 1. (ii) Recurra a la hipótesis de inducción para demostrar que es verdadera para n+1.
Unicidad 1	Cuando Q contiene la palabra "único".	P y existen dos objetos.	Los dos objetos son iguales	Trabaje progresivamente utilizando P y las propiedades de los dos objetos. También, trabaje progresivamente para mostrar que los objetos son iguales.
Unicidad 2	Cuando Q contiene la palabra "único".	P y existen dos objetos diferentes.	Alguna contradicción.	Trabaje progresivamente desde P, utilizando las propiedades de los dos objetos y el hecho de que son diferentes.

Método de Demostración	**Cuándo usarla**	**Qué suponer**	**Qué concluir**	**Cómo hacerlo**
Selección	Cuando Q contiene el término “para todo”, “para cada”, etc.	P y Selección de un objeto con cierta propiedad	Que algo sucede	Trabaje progresivamente partiendo de P y el hecho de que el objeto tiene la cierta propiedad. Trabaje regresivamente partiendo de lo que sucede.
Particularización	Cuando P contiene el término “para todo”, “para cada”, etc.	P	Q	Trabaje progresivamente particularizando P a un objeto en especial, es decir, al obtenido en el proceso regresivo.
Máx/Mín 1	Cuando Q tiene la forma “máx $S \leq x$” ó “mín $S \geq x$”.	P y seleccione un elemento s en S.	$s \leq x$ ó $s \geq x$	Trabaje progresivamente desde P y el hecho de que s está en S. También trabaje regresivamente.
Máx/Mín 2	Cuando Q tiene la forma “máx $S \geq x$” ó “mín $S \leq x$”.	P	Construya s en S tal que $s \geq x$ ó $s \leq x$.	Utilice P y el método por construcción para producir la s deseada en S.

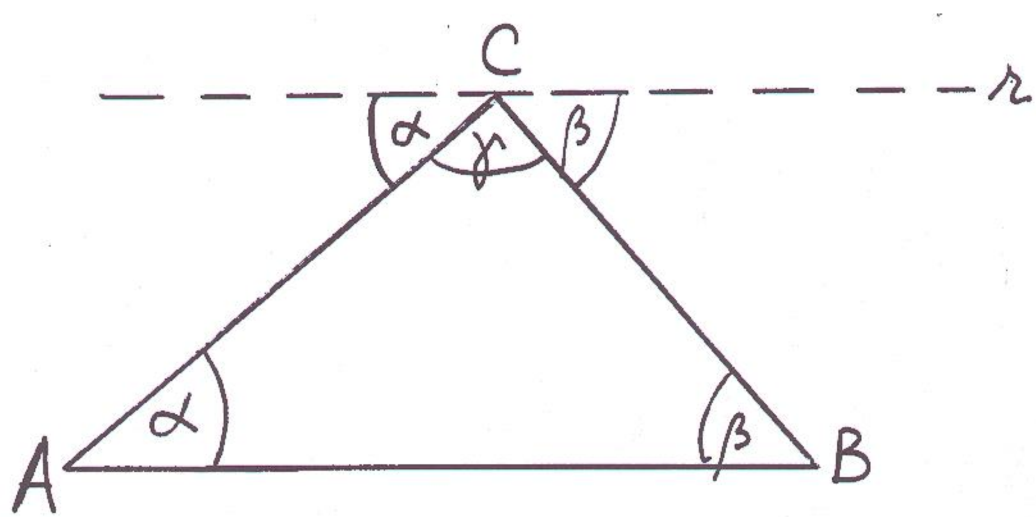
Método de Demostración	**Cuándo usarla**	**Qué suponer**	**Qué concluir**	**Cómo hacerlo**
O exclusiva (Prueba por eliminación)	Cuando Q tiene la forma "R ó S".	(i) P y NO R (ii) P y NO S	(i) S (ii) R	(i) Trabaje progresivamente partiendo de P y NO R, y regresivamente partiendo de S. (O exclusiva 1). (ii) Trabaje progresivamente de P y NO S, y regresivamente partiendo de R. (O exclusiva 2).
Prueba por Casos (Método de Bifurcación)	Cuando P tiene la forma "A ó B" (unión no necesariamente disjunta).	Caso 1: A Caso 2: B	Q Q	Trabaje progresivamente partiendo de A y regresivamente partiendo de Q. Trabaje progresivamente partiendo de B y regresivamente partiendo de Q.

DEMOSTRACIONES VISUALES (PRUEBA SIN PALABRAS)

1. En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°, es decir

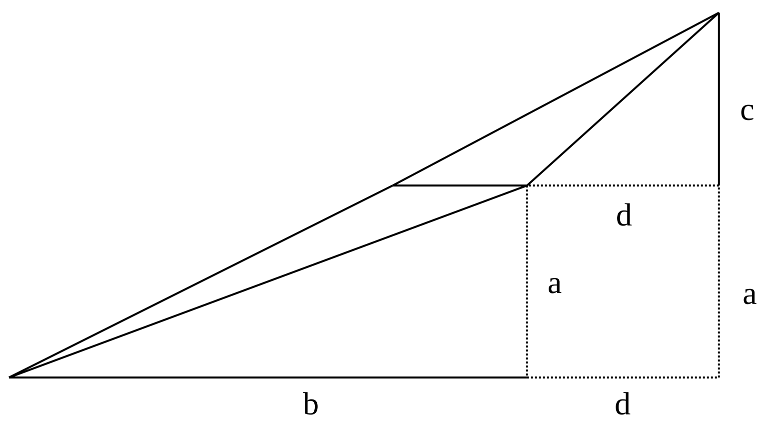
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

siendo α, β y γ los ángulos interiores del triángulo ABC:

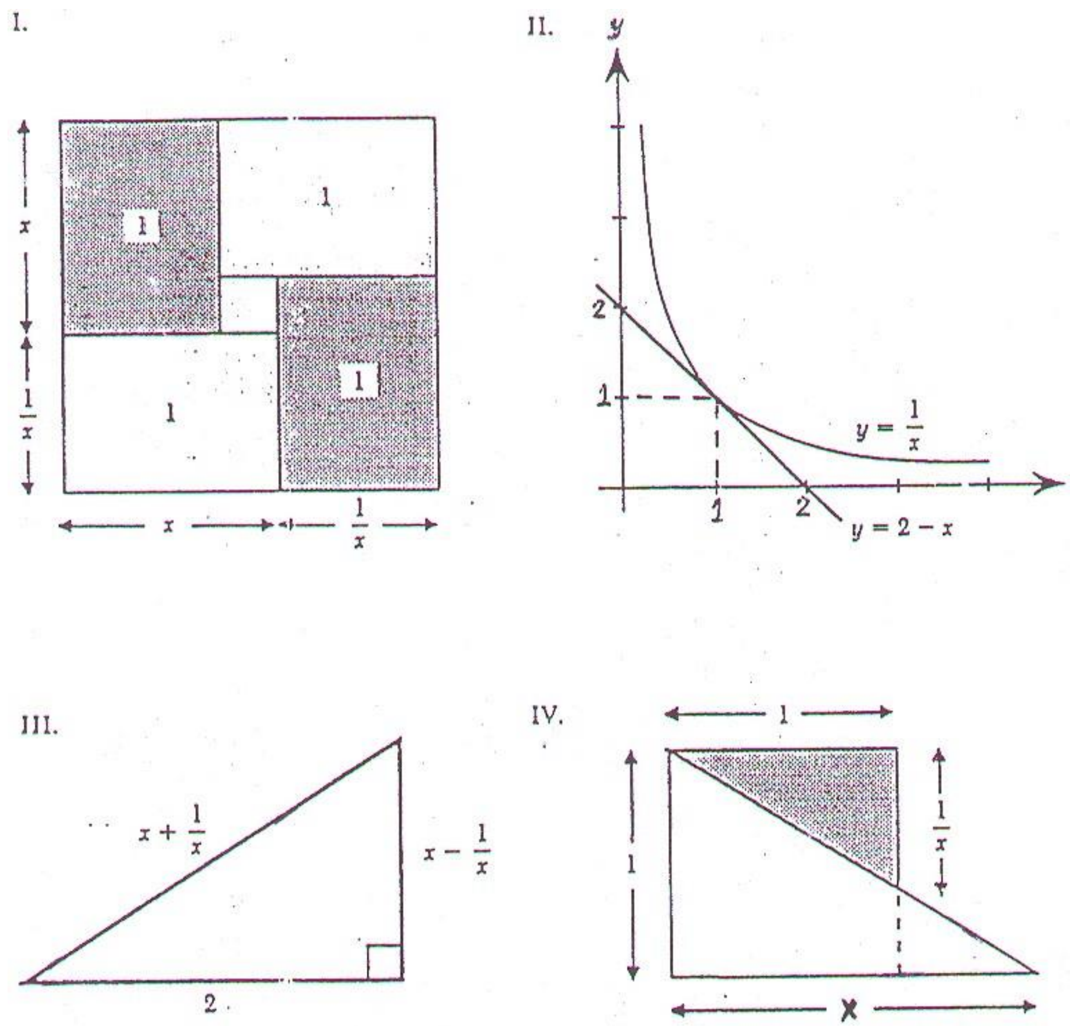


2. Regla de los Números Medios:

$$a,b,c,d>0;\quad \frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$



3. $x + 1/x \geq 2 \ , \ \forall \ x > 1.$



Más aún, demuestre que

$$x > 0 \ \Rightarrow \ x + 1/x \geq 2$$

utilizando el álgebra elemental.

ERRORES EN LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

Problema (i) ¿Un cuadrado Q de lado 21 tiene la misma área de un rectángulo R cuyos lados son 34 y 13?
(ii) El cuadrado Q se divide en cuatro regiones, designadas 1, 2, 3 y 4, según la Figura A. Dichas cuatro partes se reacomodan para formar el rectángulo R según la Figura B. ¿De dónde proviene la unidad de área extra en el rectángulo R?

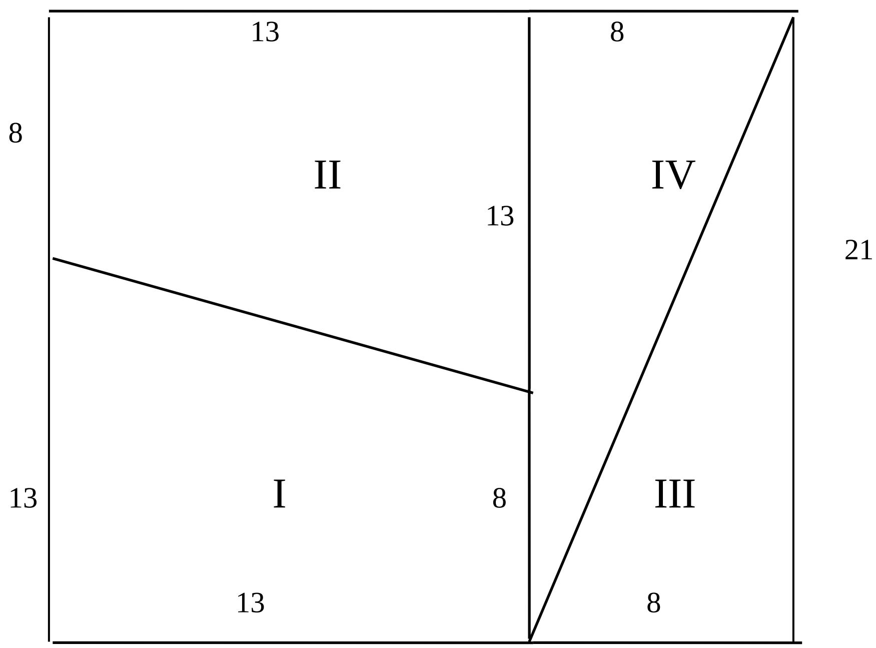


Figura A: Cuadrado Q de lado 21, Área Q = 21 × 21 = 441

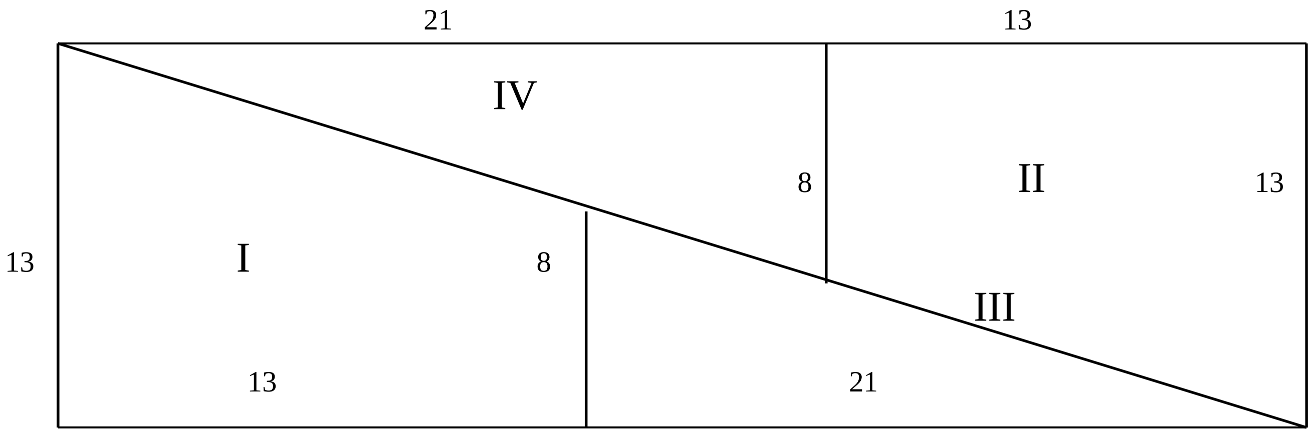


Figura B: Rectángulo R de dimensiones 13 × 34; Área R = 13 × 34 = 442

CUANDO UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ES ISÓSCELES

Indique cuál debe ser la relación (si existe) **entre el área $\boldsymbol{A}$ y la hipotenusa $\boldsymbol{c}$** de un triángulo rectángulo ABC, con catetos a y b, para que sea isósceles.

PROBLEMAS DE MAYOR ÁREA EN EL PLANO

A) Halle el **rectángulo de mayor área inscripto en un triángulo** de base b y altura h, siendo:

i) $b = 4, h = 8$;

ii) $b = 6, h = 8$;

iii) Intente generalizar los resultados obtenidos en los dos casos particulares anteriores, si la base es $b > 0$ y la altura es $h > 0$.

B) ¿Cuál de los siguientes dos triángulos tiene **mayor área** siendo uno de base 30 y lados 25 y 25, con otro de base 40 y lados 25 y 25?

C) i) Halle el **rectángulo de área máxima con un dado perímetro** $p > 0$:

ii) Qué puede decirse del área óptima anterior respecto del área del círculo de igual perímetro $p > 0$.

Ayuda: Utilice función cuadrática en una variable.

JUEGOS DE INGENIO

Se presentan a continuación diferentes juegos y problemas de lógica-matemática, y juegos de ingenio que son un excelente medio para la utilización y aprendizaje de los métodos teóricos analizados anteriormente, a saber:

laberintos;

póker cruzado;

pirámides numéricas;

batalla naval;

número oculto;

dibujos lógicos (pintando con lógica).

demostraciones visuales;

cruzadas;

clasificaciones;

la amenaza;

números flechas;