MAT

Serie B

Cursos y Seminarios para Educación Matemática

ISSN:1515-4912

1

Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática

D.A.TARZIA

Departamento de Matemática,
Rosario,
Argentina
2000

MAT

Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA
ISSN: 1515-4904

Serie B: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA
ISSN: 1515-4912

ISSN: 1515-4912

MAT

SERIE B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

No. 1

COMO PENSAR, ENTENDER, RAZONAR, CREAR Y DEMOSTRAR EN MATEMÁTICA

Domingo Alberto TARZIA

Departamento de Matemática - CONICET,
Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA.

E-mail: tarzia@uaufce.edu.ar

Rosario, Agosto 2000

RESUMEN.

Se explicitan las metodologías para la resolución de problemas y para la realización de demostraciones en Matemática a través de un aprendizaje con todo el cerebro con la participación activa de los hemisferios cerebrales izquierdo (lógico) y derecho (intuitivo).

NOTA:

El presente texto ha servido de apoyo para la realización de cursos y/o seminarios en diferentes ciudades argentinas, a saber: Bariloche (curso REM-UMA en 1998; circuito E en 1997), Córdoba (1996; conferencia REM-UMA en 1997), Cruz Alta (1995), La Plata (curso REM-UMA en 1999), Posadas (1998), Rafaela (1995), Río Gallegos (1999), Rosario (1995; 1999), Rufino (1995). Por otro lado, durante el desarrollo de los mismos, numerosos ejemplos y problemas complementarios ampliaron y justificaron los métodos y conceptos vertidos aquí.

El autor agradece a H. Alder, E. De Bono, M. De Guzmán, S.G. Krantz, R.B. Nelsen, G. Polya, D. Solow y L.V. Williams quienes a través de sus escritos le han enseñado muchísimas cosas, y muy especialmente a Polya y Solow por la transmisión del pensamiento matemático.

El manuscrito fue recibido y aceptado en febrero de 2000.

INDICE

I. Diversos Conceptos de Interés en la Matemática (Pág. 4 - 5)
II. Introducción al Pensamiento Matemático (Pág. 6 - 7)
III. Cerebro humano (Pág. 8 - 12)
- Partes del Cerebro Humano. Funciones de los Hemisferios Izquierdo y Derecho
- Actividad Eléctrica del Cerebro
- Estilos de Aprendizaje de los Niños en Matemática

IV. Problemas por Resolver y por Demostrar (Pág. 12 - 15)
- Problemas por Resolver
- Problemas por Demostrar
- Razonamiento Heurístico
- Fases en la Resolución de Problemas
- Etapas en la Resolución de Problemas

V. Demostraciones Visuales (Pág. 15 - 20)
- Pruebas sin Palabras
- Errores en las Demostraciones Geométricas
- Laberintos

VI. Problema Fundamental en la Matemática: P Implica Q (Pág. 21 - 22)
VII. Lógica (Pág. 23 - 24)
- Proposición, Cuantificadores, Esquema Proposicional, Contraejemplo
- Tablas de Verdad

VIII. Los Tres Métodos más Importantes para Demostrar (Pág. 25 - 31)
- Teorema de Pepe-Tales
- Procesos de Abstracción, Regresivo y Progresivo
- Método Progresivo-Regresivo
- Método por Contradicción
- Método Contrarrecíproco

IX. Método de Bifurcación (Pág. 31 - 39)
- Bifurcación Simple
- Bifurcación Condicionada

X. Otros Métodos para Hacer Demostraciones ($P \Rightarrow Q$) (Pág. 40 - 44)
- Método por Construcción
- Método por Elección
- Método por Inducción
- Método por Particularización
- Resumen de métodos para realizar demostraciones

XI. Ejercicios y Problemas (Pág. 45-60)
XII. Juegos de Ingenio (Pág. 60 - 73)
Cruzadas, Clasificaciones, Cruzex, Pirámides Numéricas, Batalla Naval, La amenaza, Número Oculto, Números Flechas, Póker Cruzado, Dibujos Lógicos (Pintando con Lógica).

XIII. Referencias (Pág. 73 - 75)

NOTAS (sea creativo, descubra un nuevo método o un nuevo juego) (Pág. 76)

I. DIVERSOS CONCEPTOS DE INTERÉS EN LA MATEMÁTICA.

Del Diccionario Enciclopédico Larousse (1992) se pueden extraer el significado de los siguientes conceptos que son de gran utilidad en la Matemática, a saber:

• **Cifra**: (Ár. sifr, nombre del cero aplicado luego a los demás números) Signo con que se representa a un dígito. Cada uno de los caracteres que sirven para representar los números.
• **Creación**: Acción y efecto de crear.
• **Crear** (lat. creare): Componer artística o intelectualmente.
• **Componer** (lat. componere, arreglar): Formar o constituir un todo juntando o disponiendo elementos diversos.
• **Corolario** (lat. corollarium): Es la proposición que se deduce por sí sola de lo demostrado anteriormente.
• **Deducción** (lat. deductionem): Acción y efecto de deducir. Razonamiento que, partiendo de hipótesis, conduce a la verdad de una proposición usando reglas de inferencia.
• **Deducir** (lat. deducere): Sacar consecuencias de un principio, proposición o supuesto y, en general, llegar a un resultado por el razonamiento: de esto deduzco que...
• **Demostración**: Acción y efecto de demostrar. Razonamiento que deduce la verdad de una proposición partiendo de axiomas que se han enunciado.
• **Demostrar**: Probar de forma inequívoca.
• **Dígito** (lat. digitus): Número dígito. Número que en el sistema de numeración decimal se expresa con una sola cifra.
• **Entender** (lat. intendere): Percibir por medio de la inteligencia el sentido o significado de algo: entender un problema. Percibir las causas o motivos de algo: entender el porque de un hecho.
• **Entendimiento**: Aptitud para comprender.
• **Comprender** (lat. comprehendere): Entender, percibir: comprender un texto.
• **Hipótesis** (gr. hypothesis, suposición): Conjunto de datos a partir del cual se intenta demostrar en forma lógica una nueva proposición.
• **Lema** (lat. lemma): Proposición preliminar cuya demostración facilita la de un teorema subsiguiente.
• **Número** (lat. numerus): Expresión de la cantidad computada con relación a una unidad. Noción fundamental en matemáticas que permite contar, clasificar los objetos o medir magnitudes.
• **Número abstracto**: El que no se refiere a unidad de especie determinada.
• **Número cardinal**: Cada uno de los números naturales en abstracto, como diez, mil.
• **Número compuesto**: El que se expresa con dos o más guarismos o caracteres.
• **Número concreto**: El que expresa cantidad de especie determinada.
• **Número dígito**: El que puede expresarse con un solo guarismo o carácter; en la numeración decimal lo son los comprendidos desde el cero al nueve, ambos inclusive.
• **Número natural**: Cada uno de los elementos de la sucesión 1, 2, 3, 4,...
• **Número ordinal**: El que expresa ideas de orden o sucesión, como segundo, tercero.
• **Pensamiento**: Facultad de pensar: el pensamiento es atributo del hombre. Idea principal, manera de opinar de un individuo o de un determinado ambiente.
• **Pensar**: Formar y ordenar en la conciencia ideas y conceptos. Meditar, reflexionar. Hacer proyectos para poner en práctica alguna cosa.
• **Principio** (lat. principium): Concepto, idea fundamental que sirve de base a un orden determinado de conocimientos o sobre la que se apoya un razonamiento. Proposición que sirve de fundamento a una deducción. Nociones primeras de una ciencia o arte.
• **Probar** (lat. probare): Demostrar, evidenciar la verdad de cierta cosa.

• **Problema** (lat. problemam): Cuestión en que hay algo que averiguar. Proposición dirigida a averiguar un resultado cuando ciertos datos son conocidos.
• **Proposición**: Enunciado susceptible de ser verdadero o falso.
• **Razonamiento**: Acción y efecto de razonar. Serie de conceptos encaminados a demostrar algo.
• **Razonar**: Pensar, ordenando ideas en la mente, para llegar a deducir una consecuencia o conclusión.
• **Teorema** (gr. theorema): Proposición científica que puede demostrarse.
• **Tesis** (gr. thesis): Proposición que se enuncia y se mantiene con argumentos.

En Matemática existen cuatro términos que se encontrarán frecuentemente siempre que se trate con demostraciones. Estos son proposición, lema, teorema y corolario. Una **proposición** o **propiedad** es un enunciado de interés del cual se está tratando de demostrar su veracidad. Algunas proposiciones son consideradas (subjetivamente) extremadamente importantes y se las llama **teoremas**.

La demostración de un teorema puede ser muy larga, por lo que resulta más fácil realizar la demostración por "partes" o por etapas. Por ejemplo, para demostrar "P implica Q", puede ser necesario demostrar primero que "P implica A", luego, que "A implica B" y finalmente, que "B implica Q". Cada una de las proposiciones obtenidas como pasos preliminares o auxiliares podría presentarse por separado, y éstas se llaman **lemas**. En otras palabras, un lema es una proposición preliminar, cuyos resultados se utilizarán en la demostración de un teorema. Una vez que un teorema ha sido probado ciertas proposiciones surgen casi inmediatamente como resultado de la veracidad del teorema. A estas proposiciones se las denomina **corolarios**.

Así como existen ciertos conceptos matemáticos que se aceptan sin una definición formal, también existen ciertas proposiciones que se aceptan sin una demostración formal, son los **axiomas**.

Un **ejemplo** es un caso particular o concreto de una propiedad o proposición verdadera. Es muy útil para el aprendizaje tener presente un ejemplo de cada proposición verdadera. En cambio, un **contraejemplo** es un caso particular o concreto que indica que una determinada propiedad o proposición es falsa. El contraejemplo tiene la fuerza de una demostración aunque sea de una propiedad negativa. Más detalles pueden verse en el párrafo VII referente a lógica-matemática.

En resumen, una proposición es un enunciado del cual se trata de demostrar que es verdadero. Un teorema es una proposición importante. Un lema es una proposición preliminar que va a utilizarse en la demostración de un teorema, y un corolario es una proposición que surge como resultado inmediato de un teorema.

Un aporte importante al crecimiento intelectual y a la iniciación a la creatividad es el poder particionar una demostración larga en la concatenación de lemas cortos de manera que sean unos independientes de los otros, es decir, que los lemas o resultados intermedios, representan implicancias verdaderas que, por reiteración, ayudan a demostrar el resultado o teorema fundamental.

II. INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La finalidad de este curso, basado en parte en ideas desarrolladas en Courant-Robbins (1996), De Bono (1996), De Guzmán (1995), Fernández (1994), Gardiner (1998), Hunt (1997), Krantz (1997), Nelsen (1993), Pokras (1992), Polya (1962, 1994), Solow (1993) y Tarzia (1995/1996) es el análisis de las etapas fundamentales en la resolución de problemas y en las reglas fundamentales que rigen el aprendizaje y razonamiento matemático. Una vez conocidas y asimiladas, la mente podrá enfocarse hacia los aspectos creativos de la Matemática. Estas reglas no son substitutos para la creatividad, y tampoco tienen como finalidad enseñar cómo ser creativo; sin embargo, pueden proporcionar las herramientas necesarias para expresar la propia creatividad. Del mismo modo, estas herramientas permitirán entender y apreciar la creatividad de otros, y por ende, de este modo, se aprenderá un aspecto clave del proceso de razonamiento matemático.

Por otro lado, se analizará el cerebro humano y las funciones de sus hemisferios cerebrales izquierdo y derecho, los cuales justifican los estilos de aprendizajes del ser humano (Alder (1995), Williams (1986)) que lo deja perplejo por tanta maravilla.

El objetivo de la Matemática es descubrir y comunicar ciertas verdades. La Matemática es el lenguaje de los matemáticos, y una demostración es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también "habla" el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de la Matemática es su precisión. Una demostración propiamente presentada no deberá contener ambigüedades para que no haya dudas de que es correcta. Para entender y para hacer una demostración se deberá aprender un idioma y un método nuevo de razonamiento. En este curso, se explicará gran parte de la "gramática" básica necesaria, pero como sucede en cualquier aprendizaje será necesaria mucha práctica para llegar a tener fluidez.

La incapacidad para comunicar demostraciones de una manera comprensible ha sido perjudicial para estudiantes y profesores en todas las ramas de la Matemática. Entender una demostración matemática es una traba para la mayoría de los estudiantes. Muchos de ellos tratan de salvar este obstáculo evadiéndolo, confiando en la indulgencia del profesor para que no incluya demostraciones en los exámenes. Esta confabulación entre estudiante y profesor evita algunas de las consecuencias desagradables, tanto para el alumno como para el profesor, producidas por la falta de dominio del tema por parte del estudiante, pero esto no modifica el hecho de que un elemento clave de la Matemática, probablemente su característica más notable, no ha entrado en el repertorio del estudiante (Solow, 1993).

Es posible enseñar a entender la naturaleza de las demostraciones sistematizándolas. Una de las metas principales del docente es enseñar al estudiante a leer demostraciones como las que se encuentran en los libros de texto. Seguramente, estas demostraciones, no se presentan en forma sistemática. Por lo tanto, se debe enseñar a reconocer los elementos típicos de un argumento matemático en una presentación informal de una demostración. Se debe analizar y entender su estructura, con lo cual se podrá leer y entender las versiones más informales que se encuentran en los libros de texto y finalmente, se estará en condiciones de crear sus propias demostraciones. Se sugiere que todos tendríamos una mejor oportunidad de **enseñar a comprender las demostraciones sistematizándolas** en lugar de presentar los procedimientos tradicionales con la esperanza de que los estudiantes puedan aprender este difícil arte por ósmosis.

Uno podrá concluir que la mayoría de los estudiantes no pueden entender matemática, pero la experiencia indica todo lo contrario, simplemente **hay que saber guiarlos**. Lo que falta es una metodología apropiada para explicar matemática. En estas charlas se desarrollarán métodos para comunicar demostraciones. Se tratará de clasificar las diversas técnicas que se usan en forma repetitiva para prácticamente todas las demostraciones. Una vez que se entiendan estas técnicas, se estará en condiciones de explicar cualquier demostración mediante la aplicación sucesiva de las mismas.

Entonces el objetivo fundamental del curso será clasificar y explicar las diversas técnicas que se utilizan en las demostraciones. En general, esto se logra a través de tres objetivos, a saber:
(i) El **primer objetivo** es enseñar a leer y entender una demostración escrita mediante la identificación de las técnicas que se han utilizado.
(ii) El **segundo objetivo** es enseñar a desarrollar y comunicar sus propias demostraciones de verdades matemáticas conocidas. Para lograrlo se necesita que se aplique una cierta cantidad de ingenio, creatividad, intuición y experiencia. Así como hay maneras diferentes para expresar la misma idea en cualquier idioma, así también hay diferentes demostraciones para la misma verdad matemática. Cuando se trata de hacer una demostración, es importante seleccionar conscientemente la técnica de demostración, en vez de desperdiciar horas tratando de ver que hacer.Tanto mejor será cuanto más consciente se esté del proceso de razonamiento.
(iii) El **objetivo final** es que se utilicen las nuevas habilidades adquiridas para descubrir y comunicar verdades matemáticas anteriormente desconocidas. Esta meta es muy loable aunque no trivial de lograr. El primer paso no trivial, en este sentido, es alcanzar un nivel en el que uno sea capaz de leer y desarrollar demostraciones propias de las verdades ya conocidas (parte (ii)). Los dos primeros objetivos están entrelazados entre sí, en cambio el tercero dista mucho de los anteriores pues es parte de la etapa creativa.

Explicar una demostración en términos de las técnicas que la componen no es difícil. Una vez que se conocen las técnicas para hacer demostraciones, las mentes tenderán a cuestionar los aspectos más importantes de la matemática como por qué una demostración se realiza de una forma particular no de otra y por qué esa parte de la matemática es importante. No se pretende enseñar cómo ser creativo, pero se describirán muchas de las aptitudes básicas cuya adquisición hará posible que su mente se concentre en los aspectos creativos. Entender una demostración matemática resultará más sencillo cuando se conozcan las **diferentes técnicas para hacer demostraciones**. Entre ellas, se destacan los métodos: regresivo, progresivo, progresivo-regresivo, por contradicción, contrarrecíproco, bifurcación, por inducción, por construcción, por selección, por particularización, de unicidad, de la o exclusiva y máx-mín. (Solow 1993, Tarzia 1996).

La Matemática ha ocupado y ocupa un lugar de privilegio en los programas escolares y ha influido explícitamente e implícitamente en la formación e información del estudiante, con distinto énfasis a lo largo del tiempo. Hoy, a estas dimensiones formativa e informativa, más dirigidas hacia el sujeto, se suma lo social, por cuanto la Matemática, desde su lenguaje y desde su método, se ha constituido en un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico en que se vive. Es desde esta potencialidad que la Matemática puede contribuir en forma privilegiada a la consecución de los objetivos que la Ley Federal de Educación puntualiza para la Educación General Básica (EGB) y el Nivel Polimodal, pues colabora con el desarrollo individual y social de los alumnos propiciando en ellos **la búsqueda de la verdad** y en relación con ella, el juicio crítico, el rigor en el método de trabajo, la presentación honesta de los resultados, la simplicidad y exactitud en el lenguaje, la valorización de las ideas ajenas y del trabajo compartido.

III. CEREBRO HUMANO

III.1. PARTES DEL CEREBRO HUMANO

El cerebro consta de tres partes, a saber (ver más detalles en Alder (1995), Fernández (1994) y Reader´s Digest (1992)):

· **cerebro reptil**: obra por instinto, empleando el conocimiento acumulado en el **pasado**. Es el **jefe de máquina**. Conjuntamente con el cerebro medio están vinculados con las emociones y todo lo referente a las actividades biológicas.

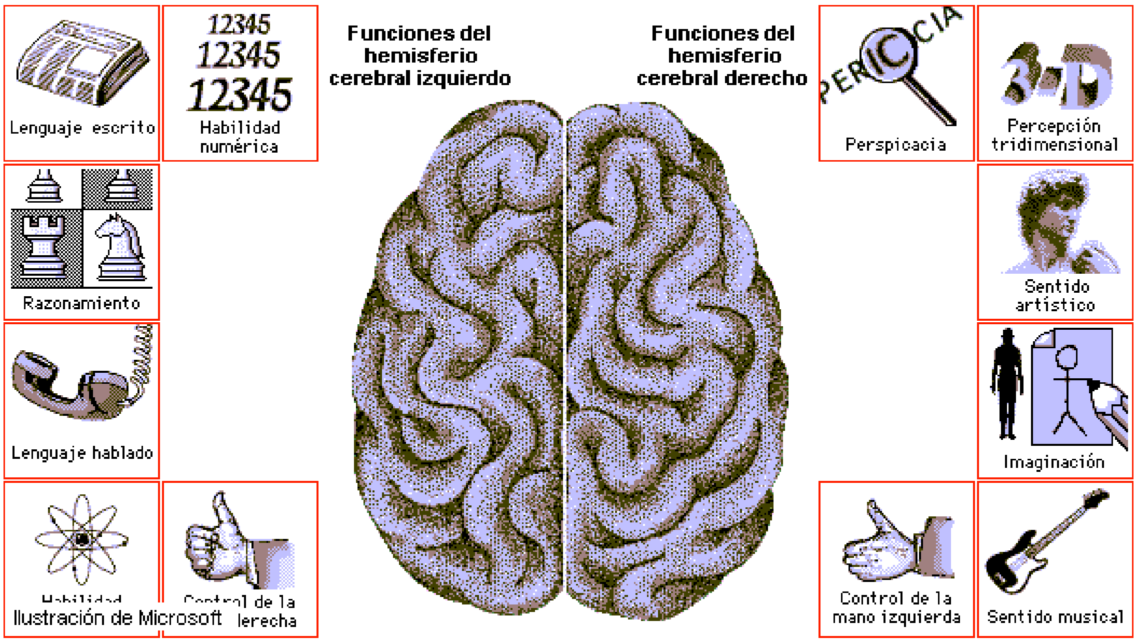
· **cerebro medio**: reacciona ante las situaciones **presentes**.

· **la corteza** o cerebro humano propiamente dicho es muy flexible y adaptable a los cambios y circunstancias. Es capaz de planificar lo venidero, **el futuro**. El **cerebelo** (o cerebro pequeño) es el **piloto automático** del ser humano. La corteza es el capitán y posee dos hemisferios: el hemisferio izquierdo y el hemisferio derecho. Estos tienen particularmente las siguientes funciones:

HEMISFERIO IZQUIERDO	**HEMISFERIO DERECHO**
Verbal: Este lado controla el habla, y es capaz de leer y escribir. Recuerda hechos, cita nombres y sabe cómo escribir. **Analítico:** Este es el lado lógico, analítico. Evalúa el material objetivo de un modo racional. **Literal:** Este lado sólo comprende las palabras en su sentido más literal. **Lineal:** La información se procesa de modo secuencial, un paso cada vez. (Temporal). **Matemático:** Se comprenden los números y los símbolos, lo que permite que se lleven a cabo los cálculos matemáticos avanzados. * Controla el movimiento del lado derecho del cuerpo. * Analiza los elementos de un conjunto. * Es racional. * Es rígido, tendencia hacia lo seguro.	**No Verbal:** Este lado trabaja más las imágenes que las palabras. **Holístico (o no lineal):** Este lado es capaz de procesar muchos tipos de información al mismo tiempo, ve los problemas de manera holística, y es capaz de progresar intuitivamente. Puede evaluar la totalidad del problema de una vez. Recuerda caras, viendo los rasgos "como un todo". **Espacial:** El lado derecho es el que maneja las percepciones del espacio y el emplazamiento. Permite la resolución de rompecabezas e impide que se pierda en una ciudad, e incluso en su propio hogar. **Musical:** El talento musical innato, y la capacidad de responder a la música, es una especialización del cerebro derecho ... aunque gran parte del trabajo duro de la formación musical tiene lugar en el hemisferio izquierdo. **Imaginativo:** Este lado puede fantasear, inventar historias y sabe cómo jugar. Es capaz de formular la pregunta: ¿Qué pasaría si ...? **Espiritual:** Este es el lado de la adoración, la oración y el misticismo. **Soñar:** Los sueños son principalmente una función del cerebro derecho. * Controla el movimiento del lado izquierdo del cuerpo. * Analiza el conjunto como un todo * Es intuitivo. * Es flexible, propenso al riesgo.

De Bono (1996) habla de pensamiento vertical y de pensamiento lateral, y sus diferencias son básicas. No es importante decidir cuál es el más eficaz, ya que ambos son necesarios y se complementan mutuamente. Lo que importa es una perfecta conciencia de sus diferencias para facilitar la aplicación de ambos. Ver en Harshman (1997) la utilización del pensamiento lateral en la búsqueda de soluciones creativas en problemas que no parecen tener solución.

A modo de resumen se presenta:



Funciones de los hemisferios cerebrales izquierdo y derecho (Encarta 1998, Microsoft):
Aunque los hemisferios cerebrales tienen una estructura simétrica, con los dos lóbulos que emergen desde el tronco cerebral y con zonas sensoriales y motoras en ambos, ciertas funciones intelectuales son desempeñadas por un único hemisferio. El hemisferio dominante de una persona, se suele ocupar del lenguaje y de las operaciones lógicas, mientras que el otro hemisferio controla las emociones y las capacidades artísticas y espaciales. En casi todas las personas diestras y en muchas personas zurdas, el hemisferio dominante es el izquierdo.

A continuación, se analiza la actividad eléctrica del cerebro que indica que, a menor frecuencia cerebral, tanto mayor es la relajación, sincronización entre los hemisferios cerebrales y la creatividad, y por lo tanto el aprendizaje. Luego se analizará el estilo de aprendizaje de los niños en matemática (ver trabajo de P. Davidson citado en Williams, 1986) que se encuentra íntimamente ligado a los dos hemisferios cerebrales, y es de gran importancia que los docentes lo tengan en cuenta a los efectos de lograr una mayor efectividad en su proceso de enseñanza-aprendizaje tratando de que sus alumnos realicen actividades especiales para lograr creatividad y una adecuada toma de decisión.

III. 2. ACTIVIDAD ELÉCTRICA DEL CEREBRO

Con el fin de entender las fluctuaciones del cerebro y las experiencias resultantes que las fluctuaciones reflejan, se ha incluido una breve descripción de las diferencias en las cuatro mediciones de onda cerebrales, a saber:

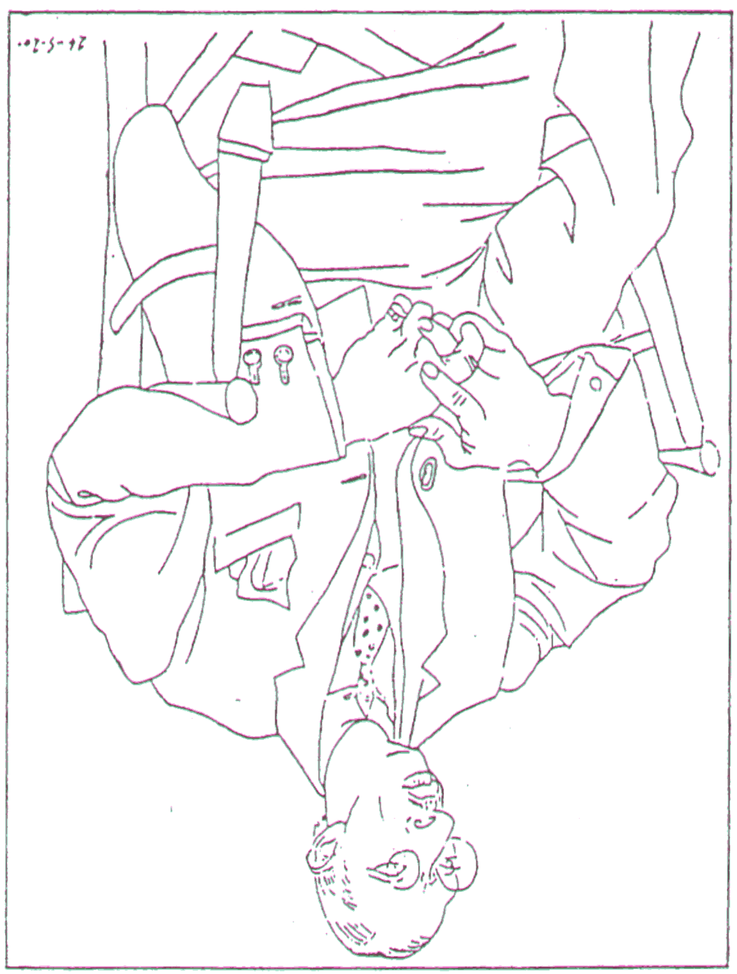
BETA: 14-30 ciclos/segundo - Percepción externa. - Atención y actividad externas. - Estados normales de conciencia.	***ALFA: 7-14 ciclos/segundo*** - Comienza la reacción de relajación. - Mayor creatividad. - Comienza la sincronización entre los hemisferios cerebrales en las frecuencias más bajas.
THETA: 3-7 ciclos/segundo - Sincronización hemisférica - Integración sensorial cerebral elevada. - Experiencia de campo unificado; sensación de “experiencia cumbre”. - Capacidad para el aprendizaje óptico muy alta. - Receptividad a las visiones interiores muy alta. - Capacidad de recuerdo nítido y de generación de ideas intuitivas muy elevada. - Estado intensificado para procesar y almacenar información.	***DELTA: 1-3 ciclos/segundo*** - Estado de sueño profundo. - Como vemos, el objetivo obvio para el aprendizaje rápido es el estado de ondas cerebrales theta. En esta frecuencia no sólo logramos la sincronización de los hemisferios cerebrales sino también mayor agudeza mental, percepción intuitiva y creatividad, además de mayor capacidad de recordar con nitidez. Otros estudios revelan que este estado relajado conduce a un mayor rendimiento en todos los aspectos. En general, la frecuencia de ondas theta es la que ofrece una mayor capacidad tanto en los jóvenes como en los viejos.

III.3. ESTILOS DE APRENDIZAJE DE LOS NIÑOS EN EL ÁREA MATEMÁTICA

ESTILO 1	**ESTILO 2**
Prefieren una “fórmula” de aproximación a las matemáticas en la que sigan una secuencia paso a paso de operaciones, avanzando hacia una solución. Rara vez evalúan, tienden a recordar partes mejor que conjuntos, y sienten una imperiosa necesidad de convencerse a sí mismos a través de las operaciones ... a menudo son muy exactos en desarrollar (la fórmula), pero si bien pueden llegar al resultado correcto, cabe que permanezcan totalmente al margen de la lógica que confiere sentido a lo que están haciendo.	Muestran impaciencia ante los procedimientos paso a paso y es probable que cometan errores mientras los efectúan. Estos niños son válidos para la estimación, pueden dar espontáneamente una respuesta correcta sin saber cómo se ha llegado a ella, y son superiores en el reconocimiento de pautas a gran escala.

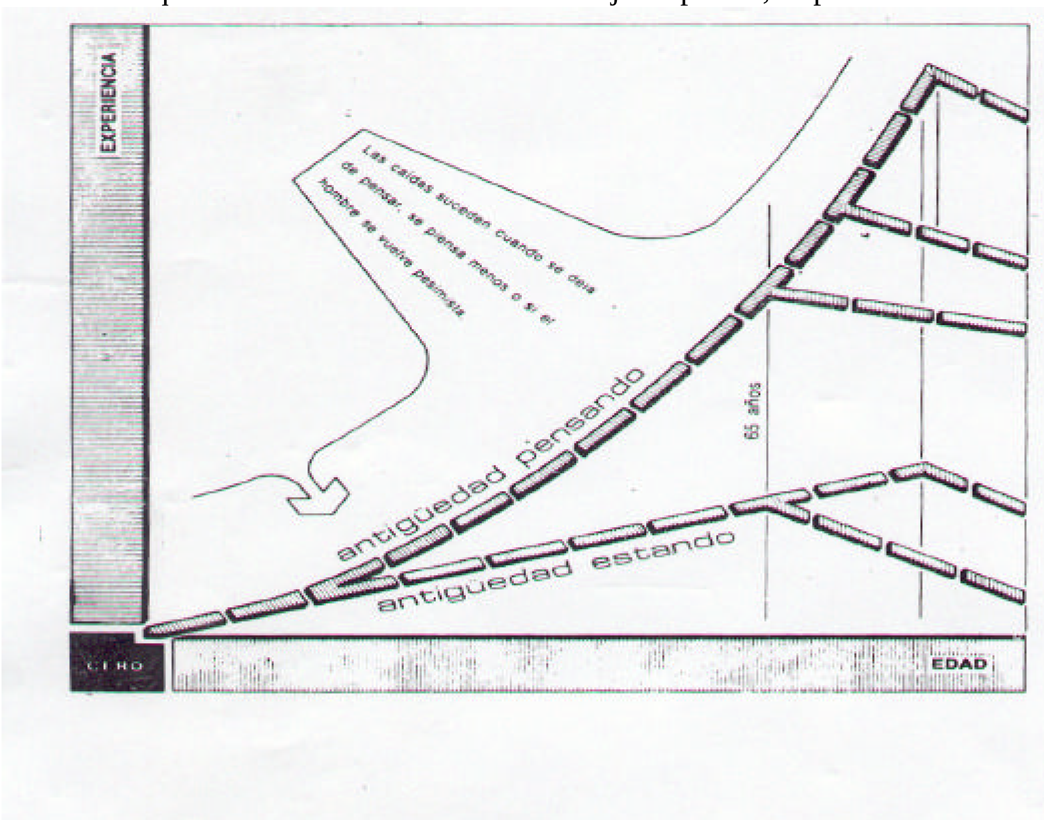
(Preponderancia del hemisferio izquierdo). **(Preponderancia del hemisferio derecho).**

Una manera de incentivar el uso del hemisferio derecho es a través del dibujo (Edwards (1999), Desana (1999)). A título de ejemplo dibuje las siguientes imágenes que se encuentran al revés (rotadas 180 grados) a los efectos de desbloquear al hemisferio izquierdo (al no tener lógica el dibujo) y de manera que trabaje casi exclusivamente con el hemisferio derecho a través de figuras (este es un ejercicio inicial con el objetivo de dibujar imágenes en lugar de caras, animales, etc. el cual se logra con un alto porcentaje de éxito, pruébelo):



Dibujo de Igor Stravinsky (1920) por Picasso.

El pensar adecuadamente, y en especial en forma positiva, es fundamental tal como lo indica Virasoro (1983), en el cual puede apreciarse el siguiente gráfico que expresa el crecimiento de la experiencia (aprendizaje adquirido por la práctica) en función de la edad de una persona; se resalta que las caídas suceden cuando se deja de pensar, se piensa menos o se vuelve pesimista.



Observación 1.

El hemisferio derecho juega un papel preponderante para estudiar mejor en el **método Badra** (ver Badra, 2000) en el cual se reemplaza el **método secuencial memorístico** tradicional por el de **dinámica de anticipación mental**; a través de este método la lectura o aprendizaje debe comenzar de lo general a lo particular, de lo fácil a lo difícil realizando un **mapa de ruta** de todo el contenido del texto.

Observación 2.

La actividad eléctrica del cerebro juega un papel preponderante para estudiar mejor en el **método Silva de control mental** (ver Silva-Miele, 1984) en el cual se debe **posicionar al cerebro en frecuencias alfas** en primera instancia para luego comenzar con el proceso de aprendizaje. Se destaca que cuando la frecuencia del cerebro se encuentra entre 7 a 14 ciclos por segundo (en término medio, 10 ciclos por segundos) comienza la relajación en el ser humano, con la consiguiente óptima sincronización entre los dos hemisferios cerebrales izquierdo y derecho, generando una mayor creatividad.

IV. PROBLEMAS POR RESOLVER Y POR DEMOSTRAR

En Matemática existen dos tipos de problemas fundamentales, a saber: los problemas por resolver y los problemas por demostrar (ver Courant-Robbins (1996), Krantz (1997), Pokras (1992) Polya (1962 ,1994)). A continuación se analizarán las características de cada uno de ellos.

IV.1. PROBLEMAS POR RESOLVER

El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto objeto que resulta ser la incógnita del problema. La incógnita es lo que se busca o lo que se pide. Estos problemas pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos, son problemas serios o simples acertijos. Los principales elementos del problema por resolver son: **la incógnita, los datos y la condición** .

Para encontrar la solución a estos problemas hay que conocer, de modo preciso, sus elementos principales. A continuación se detallan algunas preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos que, para la mayoría de los problemas, resultan ser de gran utilidad (más detalles pueden verse más abajo en las etapas de resolución de problemas):

• ¿Cuál es la incógnita?. ¿Cuáles son los datos?. ¿Cuál es la condición?.
• Distinga las diversas partes de la condición.
• Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.
• Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
• No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra. ¿En qué medida la incógnita queda entonces determinada?. ¿Cómo puede variar?. ¿Puede deducir de los datos algún elemento útil?.
• ¿Podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita?. ¿Podría cambiar la incógnita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí ?.
• ¿Ha empleado todos los datos?. ¿Ha utilizado la condición por completo?.

IV.2. PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

El propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. Los elementos de estos problemas son (si es un problema matemático usual) **la hipótesis y la conclusión o tesis** del teorema que hay que probar.

Para resolverlos deben conocerse exactamente sus partes principales (hipótesis y conclusión). A continuación se detallan preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos que, para la mayoría de los problemas, resultan ser de gran utilidad (más detalles pueden verse en el párrafo VI):

• ¿Cuál es la hipótesis?. ¿Cuál es la conclusión?.
• Distinga las diversas partes de la hipótesis.
• Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.
• Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o similar;
• No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte. ¿Sigue siendo válida la conclusión?.
• ¿Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil?. ¿Podría pensar en otra hipótesis de la cual se pudiera deducir fácilmente la conclusión?. ¿Podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí?.
• ¿Ha empleado la hipótesis completa?.

Observación 3. Por regla general, los problemas por resolver tienen mayor importancia en la matemática elemental mientras que los problemas por demostrar son más importantes en la matemática superior. Hay que tener en cuenta que el pasar del uno al otro implica un pasaje de la **etapa de lo concreto** a la **etapa de lo abstracto** que comienza a partir de los 13 años.

IV.3. RAZONAMIENTO HEURÍSTICO

El **razonamiento heurístico** es un razonamiento que se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible, y cuyo objeto es descubrir la solución del problema propuesto. El razonamiento heurístico es de empleo frecuente y es generalmente manejado por el hemisferio derecho. No se llega a una certeza plena sino después de haber obtenido la solución completa, pero hasta ahí uno se contenta con frecuencia con una hipótesis más o menos plausible. Se puede necesitar lo provisorio antes de lograr lo definitivo. En la construcción de una demostración rigurosa (hemisferio izquierdo del cerebro) el razonamiento heurístico (hemisferio derecho del cerebro) juega el mismo papel que el andamiaje en la construcción de un edificio.

Este tipo de razonamiento es bueno por sí mismo con un alto desempeño de la intuición; lo que es malo es asociarlo y presentarlo como una demostración rigurosa.

IV.4. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

De acuerdo a la experiencia acumulada de investigadores y tecnólogos en el mundo se puede decir que la resolución de problemas tiene **cuatro fases**, a saber (Schoenfeld, 1987):

1) **Saturación**: trabaje sobre su problema hasta que haya realizado **todo** lo que podía hacer. Pruebe con todos los métodos e ideas que se le presenten en su mente.
2) **Incubación**: ponga el problema fuera de su mente consciente y deje que su inconsciente lo tome y trabaje.
3) **Inspiración**: la respuesta al problema le viene o le aparece en un flash (en un momento). Tenga en cuenta que generalmente llega en el momento menos propicio (generalmente a través de un sueño, en estado de somnolencia o haciendo otra actividad que lo motivó). Prepárese a anotar o a ejecutar inmediatamente la idea o solución recibida bajo pena de olvidarla a muy corto plazo.
4) **Verificación**: constate la respuesta para estar seguro de la solución hallada.

Se resalta que para poder pasar a la segunda etapa de la incubación uno realmente debe estar saturado del problema.

IV.5. ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A continuación se indica una metodología a seguir para **resolver un problema** que en la mayoría de las ocasiones cumple un papel preponderante. Se distinguen **cuatro etapas**, según Polya (1994), resaltándose que en las dos primeras etapas tiene mayor preponderancia el hemisferio derecho, y en las dos últimas el hemisferio izquierdo, a saber:
1) **Comprensión del problema**:

- ¿Cuál es la incógnita?. ¿Cuáles son los datos?.
- ¿Cuál es la condición?. ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?. ¿Es insuficiente?. ¿Es redundante?. ¿Es contradictoria?.

2) **Concepción de un plan**:

- ¿Conoce un problema relacionado con éste?. ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?. Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- ¿Se ha encontrado con un problema semejante?. ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo?. ¿Podría utilizar su resultado?. ¿Podría emplear su método?. ¿Le haría falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?.
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?. ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?. Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible?. ¿Un problema más general?. ¿Un problema más particular?. ¿Un problema análogo?. ¿Puede resolver una parte del problema?. Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada?. ¿En qué forma puede variar?. ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos?. ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita?. ¿Puede cambiar la incógnita o los datos o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?. ¿Puede cambiar la incógnita o los datos o ambos si es necesario?.
- ¿Ha empleado todos los datos?; ¿Ha empleado toda la condición?; ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

3) **Ejecución del plan**:

- Al ejecutar su plan, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?. ¿Puede usted demostrarlo?

4) **Verificación de la solución obtenida (visión retrospectiva):**

- ¿Puede verificar el resultado?. ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?. ¿Puede verlo de golpe?. ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?.

V. DEMOSTRACIONES VISUALES

V.1. PRUEBA SIN PALABRAS

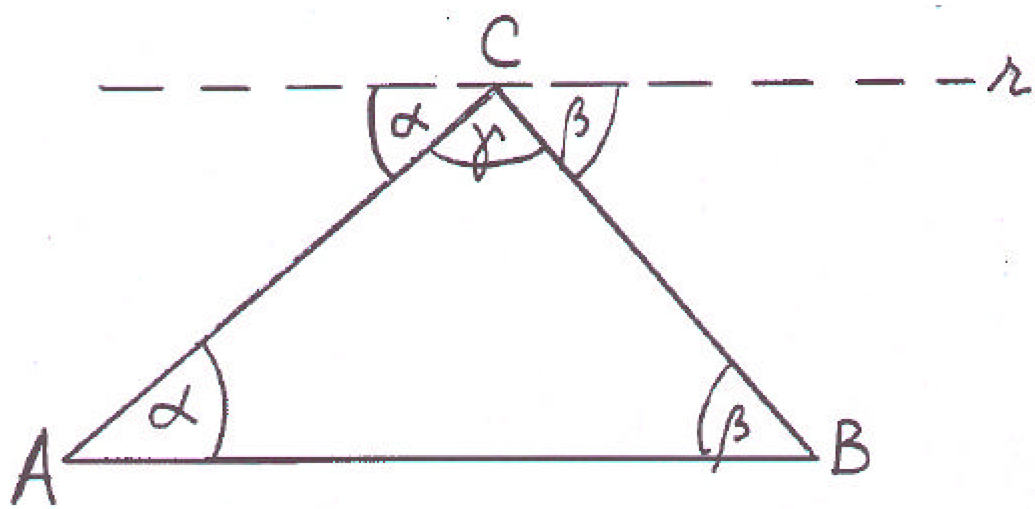
A continuación se presentan demostraciones sin palabras según Nelsen (1993); el objetivo es utilizar el hemisferio derecho para interpretar los dibujos y luego a través de la lógica del hemisferio izquierdo se pueda justificar tanto el gráfico como las conclusiones que surgen del mismo. Hay que tener presente que parte de las informaciones que surgen del gráfico o dibujo no son triviales y por ende deben también ser justificadas. Este es uno de los puntos de vista (por no decir el único o el más importante) para aprender y estudiar matemática: se recuerdan gráficos a través de la visualización del hemisferio derecho y se justifican y se deducen proposiciones a través de la lógica del hemisferio izquierdo; es una manera de estudiar con todo el cerebro según Adler (1995), Hundt (1997) y Williams (1986).

Se presentan tres ejemplos de demostraciones visuales:

1. En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°, es decir

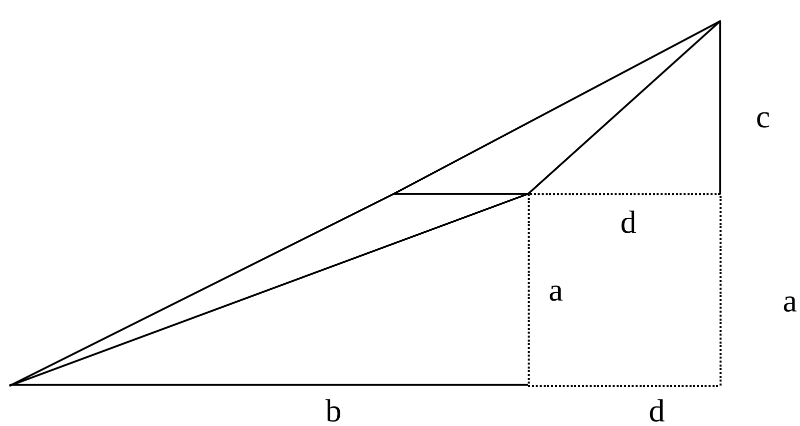
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

siendo α, β y γ los ángulos interiores del triángulo ABC (r || AB):



2. Regla de los Números Medios:

$$a, b, c, d > 0; \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

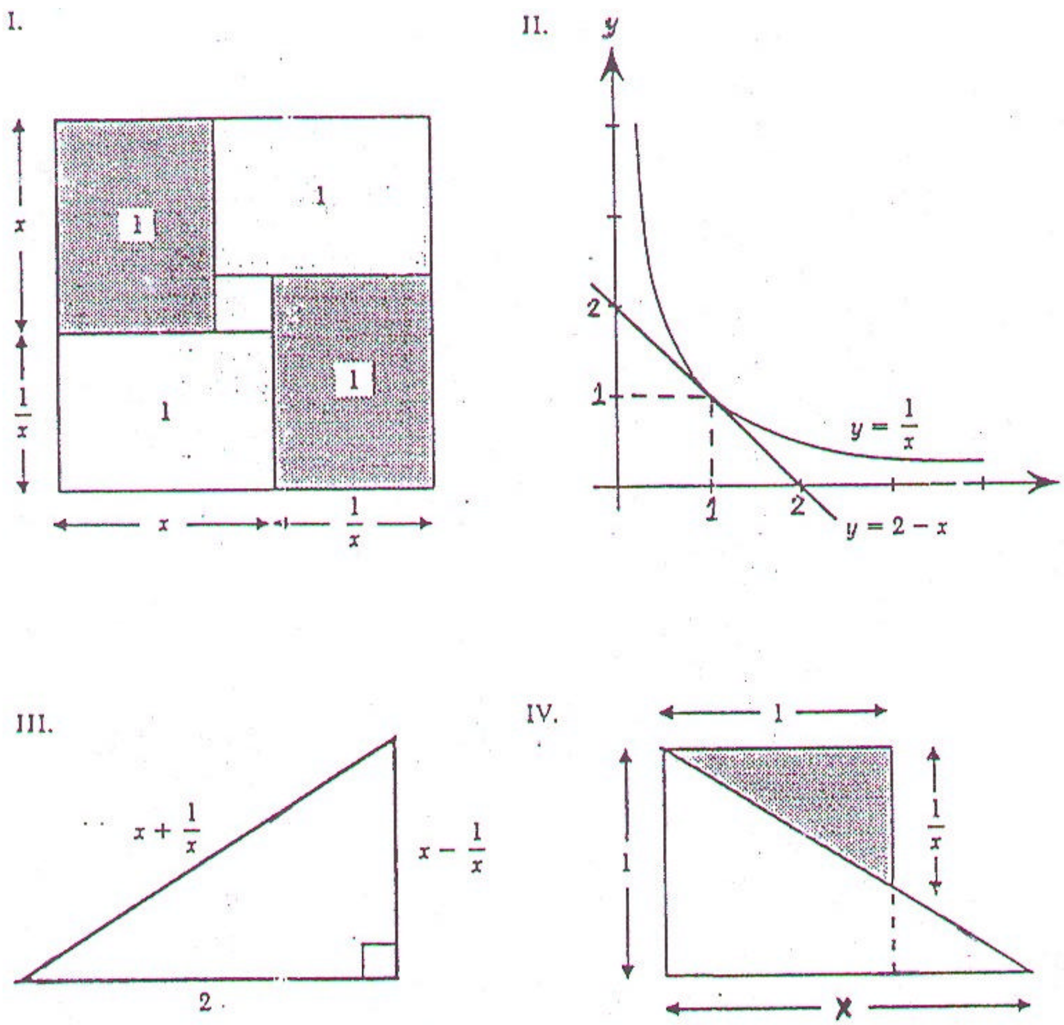


Problema. Demuestre la proposición anterior utilizando el concepto de área de figuras planas. Use como base de las figuras la unidad y encuentre un caso útil para demostración visual (ver problema 67).

3. La suma de un número positivo mayor a 1 y su recíproco es al menos dos, es decir:

$$x + 1/x \ \geq 2 \ , \ \ \forall \ x > 1.$$

De este resultado se indican cuatro demostraciones visuales, a saber:



La hipótesis $x \geq 1$ es fundamental por la forma de la demostración (geométrica) que se realiza. Más aún, demuestre que

$$x > 0 \ \ \Rightarrow \ \ x \ + \ 1/\,x \ \geq \ 2$$

utilizando el álgebra elemental.

V.2. ERRORES EN LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

De Dubnov (1973) se extrae el siguiente:

Problema (i) ¿Un cuadrado Q de lado 21 tiene la misma área de un rectángulo R cuyos lados son 34 y 13?

(ii) El cuadrado Q se divide en cuatro regiones, designadas 1, 2, 3 y 4, según la Figura A. Dichas cuatro partes se reacomodan para formar el rectángulo R según la Figura B. ¿De dónde proviene la unidad de área extra en el rectángulo R?

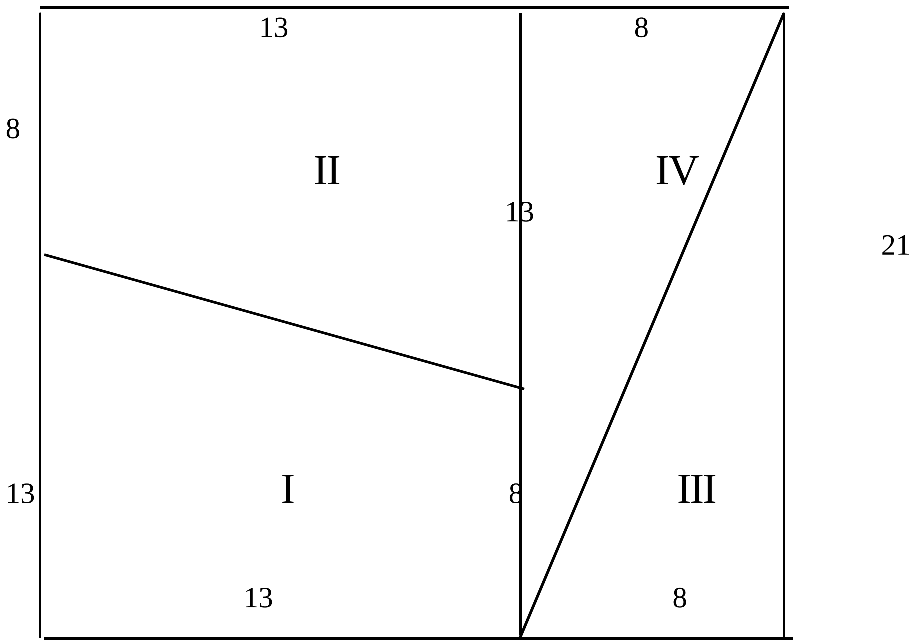


Figura A: Cuadrado Q de lado 21, Área Q = $21 \times 21 = 441$

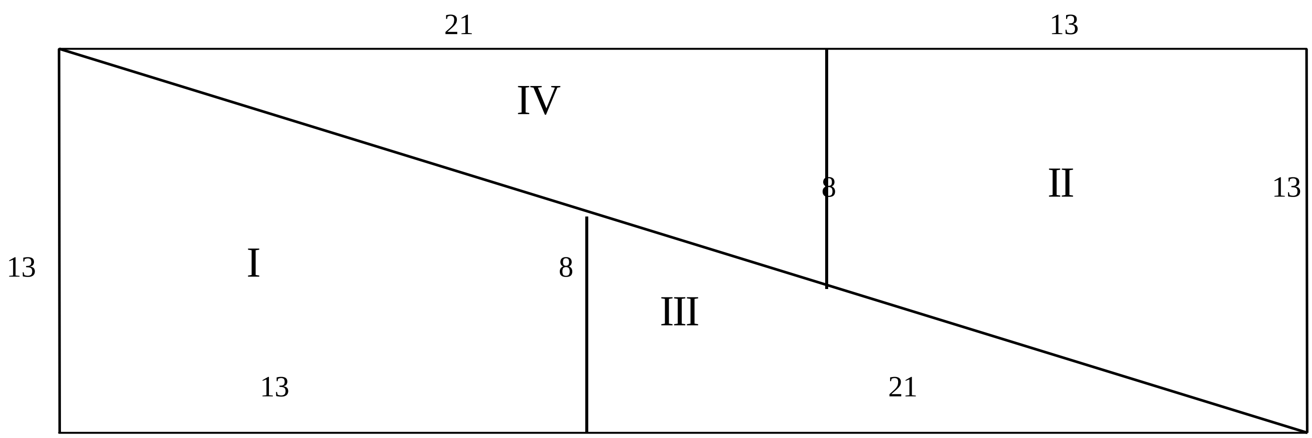


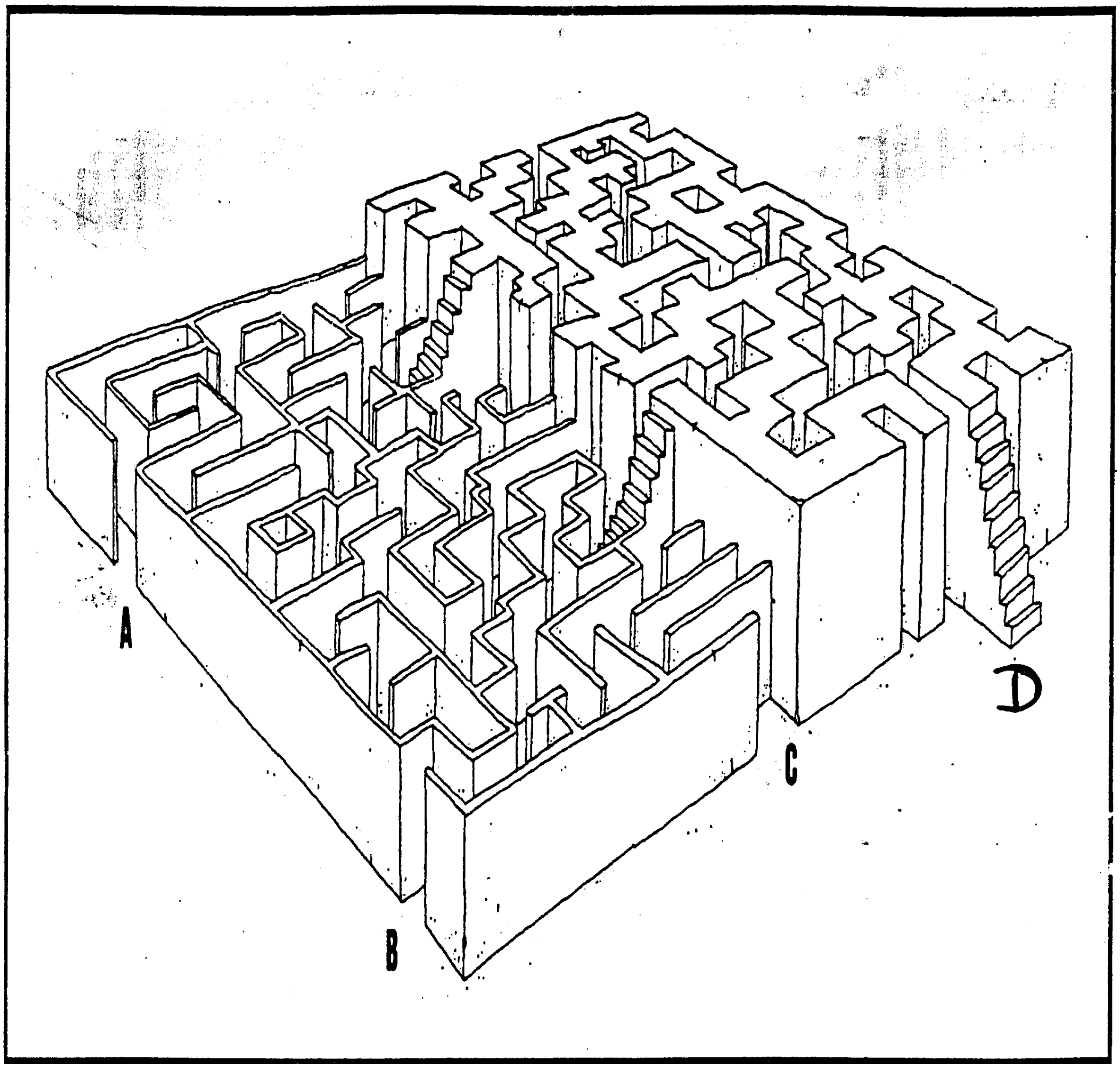
Figura B: Rectángulo R de dimensiones 13×34; Área R = $13 \times 34 = 442$

Observación 4. El ejemplo anterior no indica que no debe utilizarse la geometría sino simplemente lo que se debe tener en cuenta es que el ojo humano no es perfecto. La geometría y el dibujo son fuentes de muchas inspiraciones (hemisferio derecho) en contraste con el álgebra que está relacionada con la lógica (hemisferio izquierdo).

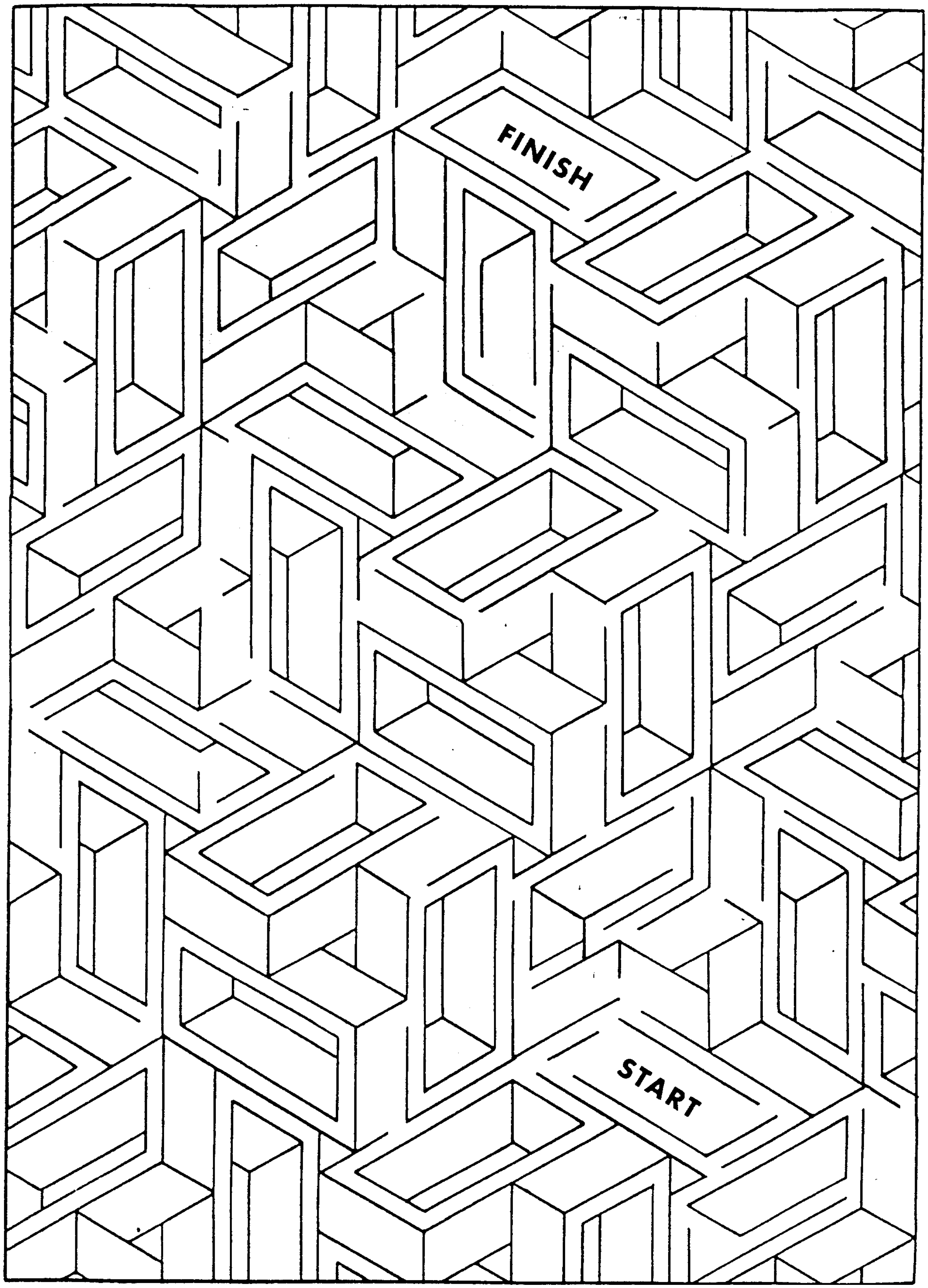
V.3. LABERINTOS

A continuación se presentan dos laberintos siendo el primero tridimensional y el segundo bidimensional según Allen (1996). El objetivo es obtener la solución del problema planteado en la forma más rápida posible.

1) Determine cuáles de las tres entradas A, B y C permiten salir por D pasando por el primer piso.



2) Encuentre al menos un camino que comenzando en START finalice en FINISH.



VI. PROBLEMA FUNDAMENTAL EN LA MATEMÁTICA: P IMPLICA Q

Dadas dos proposiciones P y Q, un problema fundamental en matemática es el de demostrar que si P es verdadera, entonces Q es verdadera. Una demostración es un método formal para realizar esta tarea. En general, la forma particular de P y Q pueden indicar el camino a seguir.

Para poder hacer una demostración, se debe saber exactamente que significa demostrar que "si P es verdadera entonces Q es verdadera". La proposición P se llama **hipótesis** y la proposición Q **tesis**. Para abreviar, la proposición "si P es verdadera entonces Q es verdadera", se reduce a "si P entonces Q", o simplemente "P implica Q" (que se nota matemáticamente de la siguiente manera PÞQ).

Es intuitivo que las condiciones bajo las cuales "P implica Q" es verdadera dependerán de si P y Q son verdaderas o falsas. Por ende se deberán considerar cuatro posibles casos, a saber :
- ✓ P es verdadera y Q es verdadera;
- ✓ P es verdadera y Q es falsa;
- ✓ P es falsa y Q es verdadera;
- ✓ P es falsa y Q es falsa.

Una **tabla de verdad** (ver el párrafo VII sobre lógica) es un método para determinar cuándo una proposición (Por ejemplo: "P implica Q") es verdadera, debiendo examinarse todos los posibles valores de la verdad de las proposiciones individuales P y Q.

Cuando se trata de demostrar que "P implica Q" es verdadera, se puede suponer que la proposición de la izquierda de la palabra "implica" es verdadera. La meta es concluir que el postulado de la derecha es verdadera. Se debe tener en cuenta que una demostración de la proposición "P implica Q" no es un intento de verificar si P y Q son verdaderas, sino demostrar que Q es una **consecuencia lógica** de haber supuesto que P es verdadera. En general, la habilidad para demostrar que Q es verdadera dependerá mucho del hecho de que se haya supuesto que P es verdadera. Para realizar esto se requiere una cierta creatividad la cual en los comienzos, por ejemplo EGB3, no es más que la búsqueda de una simple relación entre dos variables que podemos llamar P (el dato) y Q (la incógnita). Las técnicas para hacer demostraciones, que se presentarán más abajo, están diseñadas para la iniciación y para la guía a lo largo del camino de la demostración.

Por otro lado, existen muchas maneras de decir que "P implica Q", a saber:
- ✓ Cuando P es verdadera, Q debe ser también verdadera;
- ✓ Q se deduce de P;
- ✓ Q es una consecuencia necesaria de P;
- ✓ P es condición suficiente para Q;
- ✓ P sólo si Q.

Otras tres proposiciones relacionadas con "P implica Q" (llamada **Proposición directa**) son las siguientes:

- ✓ "Q implica P" (llamada **Proposición recíproca**);
- ✓ "NO P implica NO Q" (llamada **Proposición inversa**);
- ✓ "NO Q implica NO P" (llamada **Proposición contrarrecíproca**),

donde NO P representa la negación de P.

En lo sucesivo, P y Q serán proposiciones cualesquiera que pueden ser, en si mismas, verdaderas o falsas. Por lo tanto, **el problema de interés será demostrar que "P implica Q"**.

Las proposiciones directa y contrarrecíproca están relacionadas entre sí según la siguiente equivalencia:

Teorema. Si P y Q son dos proposiciones cualesquiera entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{NO } Q \Rightarrow \text{NO } P) .$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Se tiene que (NO Q) es verdadera y se quiere probar que (NO P) es verdadera, es decir que P no es verdadera. Si se supone, por el método por contradicción, que P es verdadera entonces Q es también verdadera, por hipótesis, lo cual resulta ser un absurdo. Por lo tanto, (NO P) es verdadera como se quería demostrar.
($\Leftarrow$) Se prueba de una manera análoga a la anterior. También se puede demostrar la parte ($\Leftarrow$) utilizando la parte ($\Rightarrow$), ya demostrada, teniendo en cuenta la igualdad elemental de lógica dada por NO (NO P) = P.

Observación 5. La equivalencia anterior es muy útil en Matemática (ver más abajo el método contrarrecíproco). Un ejemplo de uso frecuente es el de hallar una proposición equivalente a la definición clásica de función inyectiva que no es muy operativa al momento de realizar demostraciones y/o verificaciones pero si es muy simple desde el punto de vista geométrico. Dados dos conjuntos cualesquiera A y B se define que

$$f: A \to B \text{ es una función inyectiva } \Leftrightarrow \ (x_1 \neq x_2 \text{ en } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ en } B).$$

Por el teorema anterior, la equivalencia buscada es la dada de la siguiente manera:

$$f: A \to B \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \text{ en } B \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ en } A),$$

la cual se utilizará en la práctica para probar que una dada función sea inyectiva por la simple razón que es más fácil trabajar con el "=" que con el "$\neq$"; en cambio desde el punto de vista visual o gráfico es mejor utilizar o interpretar la definición con el "$\neq$" ya que una función es inyectiva cuando toda recta paralela al eje x corta a la gráfica de la función en a lo sumo un punto.

Por otro lado, se puede destacar que una vez que se tenga la definición de un concepto a través de una proposición P_1 y ésta, a su vez, resulta ser equivalente a la proposición P_2 entonces no habría ningún problema en que un autor defina el concepto utilizando la P_1 y en cambio otro autor lo defina usando la P_2.

A continuación se resumirán los conceptos fundamentales de lógica-matemática a los efectos de poder justificar y entender algunos de los métodos para realizar demostraciones en Matemática.

VII. LÓGICA

En este párrafo se presentarán las nociones más importantes en la lógica matemática (Rabuffetti,1989) que se deberán tener muy en cuenta en la resolución de problemas y en la realización de demostraciones.

VII.1. PROPOSICIONES Y CUANTIFICADORES

Definición. Una **proposición** es toda expresión del lenguaje para la que tiene sentido afirmar que es ***Verdadera*** **(V)** o que es ***Falsa*** **(F)**.

Ejemplos.
1) Buenos Aires es la capital de Argentina. (Proposición V)
2) 1 es un número real negativo. (Proposición F).
3) X es un número racional. (No es una proposición).
4) ¿Quién soy yo? (No es una proposición).

En los ejemplos 3) y 4) nada puede decirse sobre la verdad o falsedad de la expresión.

Definición. **P(x)** es un **esquema proposicional** en la **variable x** si y sólo si existe, al menos, una sustitución de x por una constante (o elemento de un conjunto numérico) que la transforma en proposición, es decir $\exists$ x de manera que P:{x } $\rightarrow \{V, F\}$ sea una función.

Ejemplo.
Si **P(x)** es el esquema “x es un número racional” (es el ejemplo 3) anterior) entonces P(1), P(2/3) son verdaderas y $P\left(\sqrt{2}\right)$, $P\left(\sqrt{3}\right)$ son falsas.

A continuación se explicitarán dos cuantificadores que tienen un uso muy importante en matemática.

Cuantificación: Es un método para transformar esquemas proposicionales en proposiciones.
Cuantificador Universal: $\forall$ (para todo, para cada).
Cuantificador Existencial: $\exists$ (existe al menos uno, existe alguno).

Se pueden considerar las siguientes proposiciones. Sea **P(x)** un esquema proposicional con un dominio dado, entonces:

(1) $\forall$ x: P(x) significa Todos los elementos tienen la propiedad P;

(2) $\exists$ x: P(x) significa Algún elemento tiene la propiedad P;

(3) $\forall$ x: NO P(x) significa Ningún elemento tiene la propiedad P;

(4) $\exists$ x: NO P(x) significa Algún elemento no tiene la propiedad P.

(5) $\exists$ x, $\forall$ y: P(x,y) significa Existe un elemento x de manera que para cualquier valor de y (el elemento x es el mismo para todo y) se tiene la propiedad P.

Esta estructura se utiliza para definir el **elemento neutro x** en un conjunto A:

$$\exists\ x \in A,\ \forall y \in A: \quad x + y = y + x = y;$$

(6) $\forall y, \exists\ x: P(x,y)$ significa Para todo elemento y existe un elemento x (el elemento x puede ser distinto para cada y) de manera que se tenga la propiedad P.

Esta estructura se utiliza para definir el **elemento simétrico** (opuesto para la suma, inverso para el producto) en un conjunto A

$$\forall y \in A, \exists\ x \in A: \quad x + y = y + x = 0 \qquad \text{(es decir } \forall y, \exists\ x = -y)$$

De acuerdo con el lenguaje usual se tienen las siguientes equivalencias:

(i) (4) es la negación de (1), es decir:

$$\text{NO } (\forall x: P(x)) \Leftrightarrow \exists\ x: \text{NO } P(x)$$

(ii) (3) es la negación de (2), es decir:

$$\text{NO } (\exists\ x: P(x)) \Leftrightarrow \forall\ x: \text{NO } P(x).$$

Ejemplos.

1) NO ($\forall x : x > 1$) $\Leftrightarrow$ $\exists\ x : x \leq 1.$; 2) NO ($\exists\ x : x \leq 1$) $\Leftrightarrow$ $\forall x : x > 1.$

Observación 6. Como se ha expresado en el párrafo I el **contraejemplo** tiene la fuerza de una demostración. Es decir, que un ejemplo simple tiene la misma potencia, para negar una propiedad, que un Teorema para probarla.

Por ejemplo, para negar que todos los elementos de un conjunto tengan una propiedad, *basta exhibir un elemento del conjunto que no la tenga.*

VII.2. TABLAS DE VERDAD

A continuación se resumen las tablas de verdad de las proposiciones lógicas más importantes que justifican los métodos por contradicción y contrarrecíproco que se verán más adelante

P	**Q**	**NO P**	**NO Q**	**P $\Rightarrow$ Q**	**NO Q $\Rightarrow$ NO P**	**P $\wedge$ Q**	**P $\vee$ Q**	**P Δ Q**
V	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	F

donde:

$\wedge$: conjunción (y) ; **$\vee$: o inclusivo (incluyente);** **Δ : o exclusivo (excluyente).**

VIII. LOS TRES MÉTODOS MAS IMPORTANTES PARA DEMOSTRAR

A continuación se analizará un teorema cuyo conocimiento resulta ser de fundamental importancia en el desarrollo de la vida de un matemático o de un docente de matemática; en otras palabras es preguntarse ¿cómo se crea en Matemática o cómo ser creativo en Matemática?.

Teorema de Pepe (para algunos es conocido como el Teorema de Tales). **Bajo tales condiciones (Hipótesis) se obtienen tales propiedades (Tesis o Conclusión).**

La consecuencia inmediata de este teorema, sin demostración, está dada por la siguiente **pregunta del millón**:

¿Cómo se le ocurrió a Pepe que bajo tales condiciones se obtengan tales propiedades?

o en su defecto

¿Qué hizo Pepe para que, bajo tales condiciones, se obtengan tales propiedades?

Las preguntas anteriores tratan de indagar los orígenes de la creación "de" y "en" Pepe. En la mayoría de los casos, cuando uno vislumbra el resultado final llega a decir algunas de las siguientes expresiones *"¡qué fácil era!"*; *"¡cómo no me di cuenta antes!"* ; *"¡cómo no lo vi antes!"* ; *"¡era trivial!"*. El problema importante reside en tratar de pensar como un creador, haciendo las cosas que hacen los creadores (investigadores). El conocimiento del **método regresivo** (el **método creativo por excelencia**), que se analizará en la próxima sección, y de otros métodos complementarios ayudarán a resolver este conflicto y que, de no resolverlo en forma adecuada, pondrá en riesgo el propio crecimiento personal.

A continuación se analizarán los tres métodos más importantes para realizar demostraciones en Matemática, a saber: métodos progresivo-regresivo (método regresivo, método progresivo), por contradicción y contrarrecíproco. Puede considerarse metafóricamente que el método progresivo-regresivo es el método madre, los otros dos son sus hermanos y los demás métodos, que se analizarán más adelante, sus hijos, algunos de los cuales son mayores y otros menores de edad, pero todos colaboran de una manera u otra a que el pensamiento matemático se haga lo más efectivo y/o creativo posible.

VIII.1. MÉTODO PROGRESIVO-REGRESIVO

Para dar el primer paso en cualquier demostración se necesita indefectiblemente identificar las proposiciones P y Q. En general, todo lo que sigue a la palabra "SI" y antes de la palabra "ENTONCES", constituye la proposición P, es decir todo lo que se supone que es verdadero. Lo que se esta tratando de demostrar es la proposición Q.

Es importante recordar que al demostrar "P implica Q" se puede suponer que P es verdadera y, de alguna forma, se debe usar esta información para lograr la conclusión de que Q es también verdadera. Al tratar de determinar cómo se llega a la conclusión de que Q sea verdadera, se está realizando el **proceso regresivo**. Por otro lado, cuando se haga uso específico de la información contenida en P, se estará realizando el **proceso progresivo**.

El proceso regresivo se inicia realizando la simple pregunta: **"¿Cómo o cuándo se puede concluir que la proposición Q es verdadera?"**.

La manera en la cual se formule esta pregunta es crítica puesto que uno debe ser capaz de contestarla. La pregunta debe formularse de un modo abstracto, conocida como **pregunta de abstracción**. Una pregunta de abstracción formulada adecuadamente no deberá contener ni los símbolos, ni la notación del problema específico bajo consideración; la clave de muchas demostraciones simples es formularla correctamente. El proceso para formular la pregunta de abstracción, contestarla abstractamente y aplicarla a la situación específica se denomina **proceso de abstracción**.

El proceso de abstracción proporciona una nueva proposición Q_1, con la propiedad de que si se pudiese demostrar que Q_1 es verdadera, entonces Q sería también verdadera.

Una vez que se tenga la proposición Q_1, todos los esfuerzos deberán dirigirse ahora a llegar a la conclusión de que Q_1 es verdadera y como consecuencia Q también lo será. En otras palabras, es como empezar de nuevo siendo Q_1 la proposición que juega el papel de Q en el proceso anterior. Por ende, se formula la siguiente nueva pregunta de abstracción: *¿Cómo se podrá demostrar que Q_1 es verdadera?*

Una de las dificultades que puede surgir en el proceso de abstracción es la posibilidad de que haya más de una pregunta de abstracción. La selección de la pregunta correcta es más un arte que una ciencia. En circunstancias afortunadas habrá sólo una. En otros casos, se tendrá que proceder por ensayo y error. Aquí es donde la intuición, ingenio, experiencia, creatividad, diagramas y gráficas pueden jugar un papel importante. Como regla general, se debe permitir que la información contenida en P (la cual se supone que es verdadera), ayude a seleccionar la pregunta adecuada. Independientemente de la pregunta que se seleccione, el siguiente paso será contestarla, primero en lo abstracto y después en la situación especifica.

Una vez más, el proceso de abstracción habrá proporcionado una nueva proposición Q_2, con la propiedad de que si se pudiera demostrar que Q_2 es verdadera, entonces Q_1 será verdadera y por lo tanto Q lo sería también. Ahora todos los esfuerzos deberán dirigirse a la conclusión de que Q_2 es verdadera. Se debe hacer uso en alguna parte de la demostración de la información en P, pero por el momento, se continúa una vez más con el proceso de abstracción aplicándolo al nuevo postulado Q_2 y así sucesivamente. Si en este "regresar" se obtiene P entonces la demostración está concluida. En el caso en que no se consiga llegar a P entonces se comienza con el otro proceso. El proceso progresivo se inicia con la proposición P, que se supone que es verdadera y se obtiene a partir de ella otra proposición P_1, la cual ya se sabe que es verdadera como resultado de que P es verdadera. Se debe enfatizar que las proposiciones derivadas de P no se deben al azar. Por el contrario, deben estar dirigidas hacia la obtención de la última proposición derivada en el proceso regresivo. Esta última proposición debe actuar como una guía en el proceso progresivo.

Es común usar definiciones para contestar ciertas preguntas de abstracción durante el proceso progresivo-regresivo. Mientras más proposiciones equivalentes a la definición se puedan demostrar, más recursos disponibles se tendrán para usar en el proceso progresivo-regresivo. Sin embargo, un gran número de proposiciones equivalentes pueden complicar también el proceso, debido a que se tendría que determinar cual de todas las proposiciones se podría llegar a utilizar.

En la misma forma que se hace uso de una definición durante los procesos progresivo y regresivo, así también puede utilizarse una proposición previamente demostrada.

A continuación se presenta un cuadro sobre el método progresivo-regresivo en su forma más general posible con la intención de poder demostrar que $P \Rightarrow Q$. A través del proceso regresivo se tienen las proposiciones Q_i de manera tal que $Q_i \Rightarrow Q$, $\forall i = 1, ..., n$. Las proposiciones Q_i, para cada $i = 1, ..., n$, surgen de las posibles respuestas a la pregunta de abstracción "cómo puedo obtener Q". Luego, repitiendo el proceso, se obtienen proposiciones Q_{ij} que verifican que $Q_{ij} \Rightarrow Q_i$, $\forall j=1, ..., n_i$, $\forall i=1, ..., n$, y así sucesivamente.

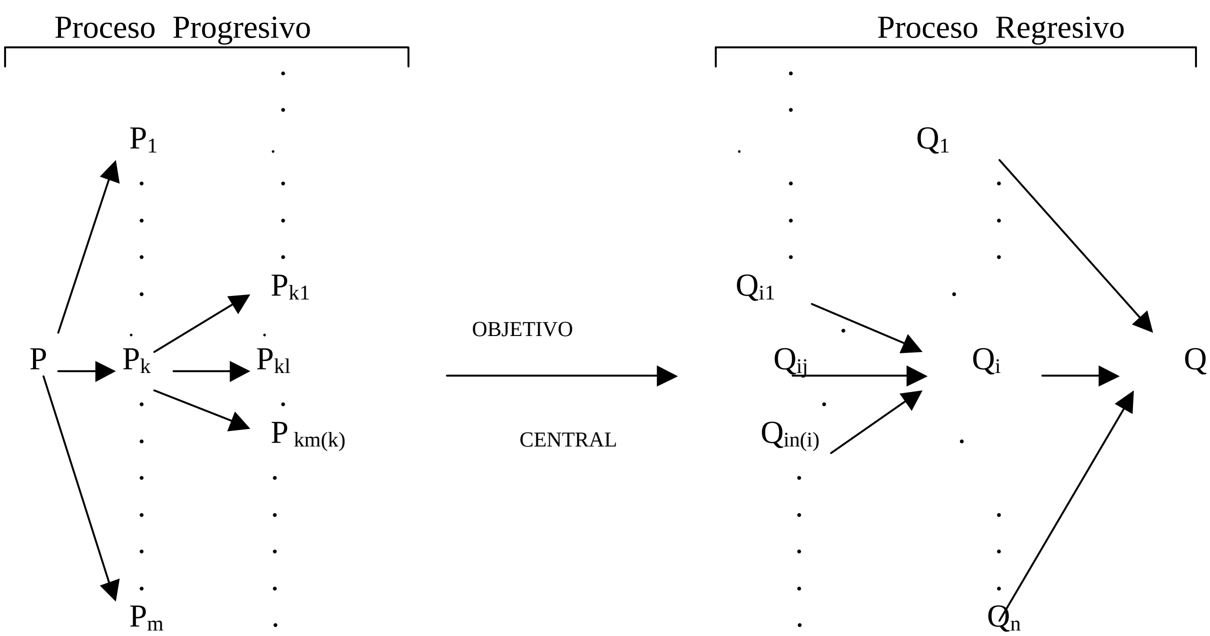
Por otro lado, a través del proceso progresivo, se deducen que $P \Rightarrow P_k$, $\forall k=1, ..., m$ son consecuencias lógicas de P y por ende el proceso se va bifurcando. Luego, nuevamente se deducen que $P_k \Rightarrow P_{kl}$, $\forall l=1, ..., m_k$, $\forall k=1, ..., m$, y así sucesivamente.

Por lo tanto, para que la implicancia $P \Rightarrow Q$ sea verdadera es suficiente demostrar que se tiene la siguiente implicancia:

$$P_{kl} \Rightarrow Q_{ij},$$

para algunos valores de los sub-índices i, j, k y l en sus respectivos dominios de definiciones, es decir que al menos una de las ramas de las bifurcaciones que nacen en P se debe conectar lógicamente con una de las ramas regresivas de Q. Por ende, el objetivo central del método progresivo-regresivo pasa a ser el de demostrar que $P_{kl} \Rightarrow Q_{ij}$ para k, l, i y j fijos pero a ser determinados.

Método Progresivo-Regresivo para el problema $P \Rightarrow Q$



Objetivo: $P_{kl} \Rightarrow Q_{ij}$ es verdadera para algunos i,j,k,l, donde:

- los Q_i ($i = 1,..., n$) surgen de las posibles respuestas a la **pregunta de abstracción**: "¿Cómo puedo obtener Q ?" y así sucesivamente.
- los P_k ($k = 1,..., m$) surgen realizando progresiones y/o **bifurcaciones** a la proposición P.

VIII.2. MÉTODO POR CONTRADICCIÓN

En el **método por contradicción** se comienza suponiendo que P es verdadera, tal como en el método progresivo-regresivo. Sin embargo, para obtener la conclusión deseada de que Q es verdadera, se procede haciéndose una pregunta muy sencilla: **¿Porqué Q no puede ser falso?**. Después de todo, si se debe concluir que Q es verdadero, entonces debe haber alguna razón por la cual Q no puede ser falso. El objetivo del método por contradicción es descubrir esta razón. En otras palabras, la idea de una demostración por contradicción es suponer que P es verdadera y que Q es falsa, y analizar porqué esto no puede suceder.

Otra manera de ver el método por contradicción es recordar que a través de su correspondiente tabla de verdad la proposición "P implica Q" es verdadera en todos los casos excepto cuando P es verdadera y Q es falsa. En una demostración por contradicción se descarta este único caso suponiendo que esto sucede y obteniendo, entonces, una contradicción. En este punto aparecen preguntas muy naturales como:

1. ¿Qué contradicción se debería buscar?;
2. ¿Cómo se usa la suposición de que P es verdadera y que Q es falsa para obtener la contradicción?;
3. ¿Cuándo y porqué se deberá usar este método en lugar del método progresivo-regresivo?

La pregunta 1 es la más difícil de contestar, ya que no existen líneas de acción específicas para hallar una contradicción sobre todo que, en general, uno no tiene ninguna idea adonde encontrar tal contradicción. Cada problema proporciona su propia contradicción y, usualmente, se requiere de creatividad, perspicacia, persistencia y suerte para generar una contradicción.

Respecto a la pregunta 2, uno de los enfoques más comunes para encontrar una contradicción es el de trabajar progresivamente a partir de la suposición de que P y NO Q sean verdaderas.

En el método progresivo-regresivo, sólo se supone que P es verdadera, mientras que en el método por contradicción se supone que tanto P como NO Q son verdaderas. Así, en vez de sólo una, se obtienen dos proposiciones a partir de las cuales se puede trabajar progresivamente. Cabe destacar que no hay manera, a priori, de determinar de antemano dónde va a surgir la contradicción.

Una falencia importante del método por contradicción es la de no poder utilizar el método regresivo al no poseer la implicancia un segundo miembro, debiéndose sólo encontrar una contradicción la cual es, a su vez, desconocida. En otras palabras, en el método por contradicción sólo se puede utilizar el método progresivo.

Para utilizar el método por contradicción conviene tener en cuenta la siguiente **regla general**: *"el método por contradicción se utiliza cuando la proposición (NO Q) da alguna información útil"*. Por lo tanto, uno debe estar ampliamente capacitado para poder obtener la negación de una dada proposición Q a los efectos de poder extraerle informaciones que se puedan usar en el proceso progresivo.

Existe una diferencia sutil, pero significativa, entre una demostración utilizando el **método por construcción** y otra que utiliza el método por contradicción. Si se tiene éxito con el método por construcción, se habrá generado el objeto deseado o por lo menos se habrá indicado cómo se puede producir, tal vez a través de algún algoritmo convergente que brinde la solución aunque no se la conozca explícitamente. Por otro lado, si se estableciera el mismo resultado por contradicción, se sabrá que el objeto existe sin haber tenido que construirlo físicamente. Por esta razón, sucede a menudo que las demostraciones hechas por contradicción son, en general, mucho más cortas y fáciles que aquellas hechas por construcción, debido a que no se tiene que crear el objeto deseado, sólo se tiene que mostrar que su inexistencia es imposible.

VIII.3. MÉTODO CONTRARRECÍPROCO

En el método por contradicción se trabaja progresivamente a partir de dos postulados P y NO Q para lograr algún tipo de contradicción. En general, la dificultad con este método es que no se sabe de antemano qué contradicción podrá obtenerse. En el método contrarrecíproco se tiene la ventaja de que se dirige hacia un tipo específico de contradicción.

El **método contrarrecíproco** es similar, pero no igual, al de contradicción. Sin embargo, la diferencia consiste en que en el método contrarrecíproco no se trabaja progresivamente desde P y NO Q como en el método por contradicción. En vez de eso, se trabaja progresivamente solamente desde NO Q. El objetivo de este método es el de lograr que la contradicción sea que P es falsa (por ende que NO P sea verdadera). En otras palabras, se halló una contradicción que es lo que se quería obtener. Además, se obtuvo la mejor contradicción posible, es decir: ¿Cómo puede ser que P sea falsa y verdadera al mismo tiempo?

Nuevamente, en el método contrarrecíproco se supone que P y NO Q son verdaderas, y se trabaja progresivamente partiendo solamente de la proposición NO Q hasta lograr la contradicción de que P es falsa. Como tal, **el método contrarrecíproco puede verse como una forma pasiva del método por contradicción** en el sentido de que la suposición de que P es verdadera proporciona pasivamente la contradicción. Sin embargo, en el método por contradicción, la suposición de que P es verdadera se utiliza activamente para lograr la contradicción.

La desventaja del método contrarrecíproco con respecto al por contradicción es que se trabaja progresivamente partiendo solamente desde una proposición NO Q en vez de dos. Por otro lado, la ventaja es que se sabe precisamente lo que se está buscando NO P. Como tal, se debe aplicar el proceso de abstracción a la proposición NO P intentando trabajar regresivamente. Al poder aplicar el método regresivo lo transforma en una herramienta muy útil. En muchos casos, sobre todo en principiantes, cuando se intenta aplicar el método por contradicción se llega al absurdo de tener P y NO P verdaderos. Si la hipótesis P no fue utilizada en la demostración entonces lo que sucede es que se pensó usar el método por contradicción pero en realidad se terminó utilizando el método contrarrecíproco.

En otras palabras, se puede decir que para demostrar "P $\Rightarrow$ Q", a través del método contrarrecíproco, se debe demostrar la proposición equivalente **"NO Q $\Rightarrow$ NO P"**.

Problema: Una de las definiciones elementales más difícil de entender es la de función continua en un punto x_o; tenga en cuenta que en dicha definición aparecen dos cuantificadores ("$\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$) y una implicancia (si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$ entonces $|f(x) - f(x_o)| \le \varepsilon$) la cual tiene implícitamente un cuantificador $\forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$. Un interesante problema de lógica es el de expresar matemáticamente que significa que una función no sea continua en el punto x_o. Conviene utilizar las reglas de la lógica-matemática (ver párrafo VII) y también realizar un análisis gráfico de la definición de continuidad para comprobar el resultado analítico. Tenga en cuenta que saber negar una proposición es fundamental para poder realizar una demostración con los métodos por contradicción y contrarrecíproco.

A continuación se presentará un ejemplo de aplicación del método regresivo, considerado primordial en todas las áreas del conocimiento, dado por Polya (1994).

Resolución del problema (7ii):

Se consideran los recipientes A y B que pueden contener 9 y 4 litros respectivamente. Se resalta que dichos recipientes no tienen ninguna marca intermedia siendo el objetivo del problema indicar un procedimiento para obtener 6 litros en el recipiente A. Del planteo del problema se tienen las dos situaciones inicial y final siguientes:

situación inicial P: A está vacío; B está vacío.

situación final a lograr Q: A contiene 6 litros; B está vacío.

Realizando el proceso de abstracción se deduce que una situación Q_1 que implica Q es la dada por:

Q_1: A contiene 9 litros; B contiene 1 litro

pues con A se llenaría B extrayéndole 3 litros con lo cual pasaría a 6 litros que es lo deseado.

Se resalta que hay varias situaciones posibles que impliquen la situación Q, por ejemplo: A con 8 litros y B con 2 litros, etc. El estudio se restringirá al caso Q_1.

Luego se realiza la pregunta de abstracción a Q_1 obteniendo como una posible respuesta:

Q_2: A está vacío; B contiene 1 litro de agua

lo cual es evidente al poder llenar el recipiente A de la fuente de agua.

Nuevamente se realiza la pregunta de abstracción a Q_2 obteniendo como una posible respuesta la trivial dada por:

Q_3: A contiene 1 litro de agua; B está vacío.

Y así sucesivamente, respondiendo a las respectivas preguntas de abstracción se obtienen las siguientes situaciones:

Q_4: A contiene 5 litros de agua; B está vacío

Q_5: A contiene 9 litros de agua; B está vacío

Q_6 : A está vacío; B está vacío

con lo cual se obtuvo la situación inicial P. Por lo tanto, se puede generar el siguiente procedimiento: se llena el recipiente A con 9 litros de agua; desde A se llena al recipiente B con 4 litros el cual es luego vaciado permaneciendo A con 5 litros; desde A se llena nuevamente a B con 4 litros que es luego vaciado quedando ahora A con 1 litro; se pasa el contenido de A a B con lo cual A estará vacío y B tendrá 1 litro; finalmente se llena el recipiente A con 9 litros y entonces se obtienen los 6 litros de agua en A llenando al recipiente B. De esta manera se produjo el proceso progresivo siguiente:

P º Q_6 Þ Q_5 Þ Q_4 Þ Q_3 Þ Q_2 Þ Q_1 Þ Q.

Se resalta que este algoritmo de solución, trivial una vez conocido, se obtuvo realizando el proceso creador dado por el método regresivo con sus respectivas preguntas de abstracción.

Observación 7. Analice qué métodos pueden demostrar las siguientes proposiciones ($n \in N$) (ver definiciones en problema 37):

1. Si n es par entonces n^2 es par;
2. Si n es impar entonces n^2 es impar;
3. Si n^2 es par entonces n es par;
4. Si n^2 es impar entonces n es impar;
5. $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Ayuda. Para intentar poder responder a la veracidad de las proposiciones anteriores es muy importante tener primero en claro cuáles son los significados de:

1. un número natural par o impar;
2. un número racional;
3. la raíz cuadrada de un número natural.

Una vez que se haya logrado clarificar estos conceptos se puede intentar realizar las pruebas con los tres métodos vistos anteriormente. También es importante poder discernir cuáles de dichos métodos permiten lograr el objetivo planteado.

Ejemplo. Se realizará la demostración de la parte 1) de la observación anterior utilizando el método progresivo- regresivo. Se tienen que (n Î N):

P: n es un número par,

Q : n^2 es un número par.

Como se desea demostrar que n^2 es un número natural par entonces aplicando la pregunta de abstracción se tiene que Q_1 puede ser la siguiente proposición:

Q_1: ∃ m Î N / $n^2 = 2m$.

Como no se puede continuar con la parte regresiva se inicia entonces la parte progresiva obteniendo la proposición P_1 dada de la siguiente manera:

P_1: ∃ k Î ô / n = 2k

de la cual surge inmediatamente, teniendo en cuenta que para conectarse con Q_1 se debe calcular n^2, la proposición P_2 dada por:

$$P_2 : n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\,(2k^2).$$

Para finalizar la demostración basta observar que P_2 Þ Q_2 tomando simplemente $m= 2k^2$.

IX. MÉTODO DE BIFURCACIÓN

Una de las mayores dificultades en la resolución de problemas y en la realización de demostraciones en Matemática es la de encarar la resolución del problema o la demostración de una proposición, es decir encontrar una metodología de trabajo o concebir un plan tal que a través de su ejecución se pueda lograr la solución deseada. Dicha dificultad se acrecienta enormemente cuando la solución no es única con lo cual es de fundamental importancia encontrar una metodología que permita encontrarlas a todas.

El objetivo de este párrafo, siguiendo Tarzia (1996), es mostrar la importancia del método de bifurcación para resolver problemas y realizar demostraciones en Matemática. Es un valioso complemento para la aplicación del método progresivo, y por ende del método progresivo-regresivo.

El método de bifurcación consiste en el siguiente **principio**: "*la resolución de un problema puede realizarse a través de la resolución de n* $(n^3 1)$ *problemas más simples que el primero y así sucesivamente*".

El método de bifurcación puede ser interpretado, en algún sentido, como la justificación lógica-matemática del método de tanteo el cual se utiliza cuando no se conoce cómo resolver un problema o cómo demostrar una proposición. La aplicación del método de bifurcación permite detectar si un problema tiene una o varias soluciones y, en consecuencia, da una metodología para hallar todas las soluciones de dicho problema. Dicha metodología incentiva la creatividad en Matemática, que se logra a través de la resolución de problemas que tengan muchas soluciones.

El presente estudio se restringirá a la resolución de problemas, muchos de los cuales son muy simples (para nivel primario), pero que permitirán apreciar la potencialidad del método de bifurcación.

Se presentan siete ejemplos, con diversas dificultades, que serán resueltos a través del método de bifurcación. Se los clasificarán de dos maneras: **forma simple o forma condicionada**. La clasificación se realiza de tal forma que la bifurcación sea independiente (forma simple) o dependiente (forma condicionada) de que una cierta condición o restricción se verifique. En algunos de los casos, la demostración detallada se omitirá por ser trivial o muy larga; en ambos casos se deja al lector completarla.

IX.1. FORMA SIMPLE DEL MÉTODO DE BIFURCACIÓN (BIFURCACIÓN SIMPLE).

A continuación se enunciarán y se resolverán seis problemas, para los cuales (algunos tienen varias soluciones) la aplicación del método de bifurcación será decisivo.

I.1) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación y encuentre todas las soluciones (ver problema 32 ii):

$$\begin{array}{rccccc} & & 6 & ..... & ..... & 1 \\ + & & 7 & 9 & 7 & ..... \\ \hline & 1 & 4 & ..... & 9 & ...... \end{array}$$

Resolución. Se supone que la solución, si existe, viene dada por:

$$\begin{array}{cccccc} & & 6 & a & b & 1 \\ + & & & & & \\ & & 7 & 9 & 7 & g \\ \hline & 1 & 4 & e & 9 & d \end{array}$$

donde los coeficientes a, b, g, e, d son incógnitas que deben determinarse. Entonces de la columna de las decenas se deduce que $b=2$. Debido a que ninguna otra incógnita puede determinarse, entonces se aplica el método de bifurcación. Por ejemplo, para la incógnita g (para cualquier otra se realiza un procedimiento análogo) se tienen cuatro posibilidades:

(i) $g = 4$, que implica $d = 5$, y por ende, se deducen $a = 7$, $e = 6$, obteniéndose la solución

$$\begin{array}{cccccc} & & 6 & 7 & 2 & 1 \\ + & & & & & \\ & & 7 & 9 & 7 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 9 & 5 \end{array}$$

(ii) $g = 5$, que implica $d = 6$, y por ende, los dígitos restantes 4 y 7 no pueden satisfacer la columna de las centenas con lo cual no existe solución.

(iii) $g = 6$, que implica $d = 7$, y por ende, se deduce $a = 5$ y $b = 4$, obteniéndose la solución

$$\begin{array}{cccccc} & & 6 & 5 & 2 & 1 \\ + & & & & & \\ & & 7 & 9 & 7 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 9 & 7 \end{array}$$

(iv) $g = 7$ no es posible, pues no se puede satisfacer la columna de las unidades para valores de d admisibles.

Conclusión: Existen 2 soluciones.

Definición . Un cuadrado se dice **mágico** respecto de la operación suma cuando la suma de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

I.2) Complete el siguiente cuadrado mágico con los números naturales, del 1 al 9, con constante 15. ¿La solución es única? (ver problema 41i)

8	....	....
....	5	....
....	....	....

Resolución. Se supone que la solución, si existe, viene dada por:

8	A_{12}	A_{13}
A_{21}	5	A_{23}
A_{31}	A_{32}	A_{33}

(a) En primer lugar se deduce que $A_{33} = 2$.

(b) Debido a que ninguna otra incógnita puede determinarse, entonces se aplica el método de bifurcación. Por ejemplo, para la incógnita A_{32} (para cualquier otra se realiza un procedimiento análogo) se tienen seis posibilidades, a saber:

(i)	$A_{32} = 1$	Þ	...	No existe solución
(ii)	$A_{32} = 3$	Þ	...	No existe solución
(iii)	$A_{32} = 4$	Þ	...	No existe solución
(iv)	$A_{32} = 6$	Þ	...	No existe solución
(v)	$A_{32} = 7$	Þ	...	$ solución
(vi)	$A_{32} = 9$	Þ	...	$ solución

de las cuales se obtienen las conclusiones indicadas.

Conclusión: Existen 2 soluciones dadas de la siguiente manera:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Observación 8. Si en lugar de elegir el elemento que va en una determinada casilla (A_{23} en nuestro caso) se elige las casillas a las que puede ir el número 9, entonces el problema se bifurca en dos, es decir $A_{23} = 9$, $A_{32} = 9$, y se obtienen las dos soluciones obtenidas precedentemente.

I.3) Reemplace cada letra (A, D, M, N, O, R, S, U) por un número natural, del 1 al 9, de modo que se verifique el resultado dado teniendo en cuenta que a una misma letra le corresponde siempre el mismo número.

$$\begin{array}{rccccccc} & S & U & M & A & N & D & O \\ + & & & S & U & M & A & R \\ \hline & 9 & 8 & 3 & 1 & 5 & 0 & 7 \end{array}$$

Se solicita:
(i) Halle todas las posibles soluciones en el caso en que a letras diferentes correspondan números diferentes.
(ii) ¿Qué sucede si los números correspondientes a letras diferentes pueden repetirse?

Resolución. En primer lugar se resuelve la parte (ii) y luego la solución de la parte (i) se obtiene como caso paticular de la anteriormente hallada.

(ii) Por deducción se obtienen los siguientes resultados:

(a) S = 9 ; (b) U = 7 ; (c) M = 3 ; (d) N = 1 ; (e) A = 4 .

(f) Luego resulta la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{rccc} & & D & O \\ + & & 4 & R \\ \hline & 1 & 0 & 7 \end{array}$$

Aplicando bifurcación para D se tienen dos casos con sus respectivas conclusiones, a saber :

1) D = 5 que presenta dos subcasos, a saber:

1.i) O = 9, R = 8 ($ solución) ; 1.ii) O = 8, R = 9 ($ solución)

2) D = 6 que presenta seis subcasos, a saber:

2.i) O = 1, R = 6 ($ solución) ; 2.ii) O = 2, R = 5 ($ solución) (*)

2.iii) O = 3, R = 4 ($ solución) ; 2.iv) O = 4, R = 3 ($ solución)

2.v) O = 5, R = 2 ($ solución) (*) ; 2.vi) O = 6, R = 1 ($ solución)

Conclusión: Existen 8 soluciones.

(i) Para este problema, utilizando una metodología análoga a la realizada anteriormente, se tienen dos soluciones de las obtenidas en (ii), las cuales están marcadas con (*).

I.4) Reemplace cada letra (H, E, S) por un número entero, del 0 al 9, de modo que se satisfaga la ecuación:

$$(HE)^2 = SHE$$

Resolución.

La ecuación $E^2 \equiv E \pmod{10}$ es la propicia para plantear la bifurcación obteniéndose cuatro casos con sus respectivas conclusiones, a saber:

(i) $E = 0$ $\Rightarrow$ ... No existe solución

(ii) $E = 1$ $\Rightarrow$ ... No existe solución

(iii) $E = 5$ $\Rightarrow$ ... $H = 2$, $S = 6$ ($\exists$ solución)

(iv) $E = 6$ $\Rightarrow$ ... No existe solución

Conclusión: Existe una única solución E=5, H=2, S=6. La verificación es simple: $25^2 = 625$.

I.5) La última línea del cuadro debe llenarse con cuatro de los números que aparecen más arriba. En cada línea se indica cuántos números en común tiene ese grupo con el que falta. La B de "bien" significa que los números aparecen en la misma posición, y la R de "regular", que están en posición cambiada. Con nB y mR se indican, desde la columna de la derecha, que existen n números en posición correcta y m números en posición regular. ¿Cuál es la combinación correcta?

4	1	5	2	-	2B
5	1	3	2	1R	2B
5	1	2	6	2R	1B
1	2	3	4	3R	-
?	?	?	?	-	4B

Resolución. Se supone que la solución, si existe, está dada por : $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$

La primera fila es propicia para aplicar bifurcación obteniéndose seis casos con sus respectivas conclusiones, a saber:

(i) $\alpha = 4$, $\beta = 1$ $\Rightarrow$ ... No existe solución

(ii) $\alpha = 4$, $\gamma = 5$ $\Rightarrow$ ... No existe solución

(iii) $\alpha = 4$, $\delta = 2$ $\Rightarrow$ ... No existe solución

(iv) b = 1, g = 5 Þ ... No existe solución

(v) b = 1, d = 2 Þ ... $ solución

(vi) g = 5, d = 2 Þ ... No existe solución

Conclusión: Existe una única solución 3 1 6 2.

Observación 9. El problema anterior (y también el posterior que es más complicado) es conocido con el nombre de **número oculto** en los juegos de ingenio. Por otro lado, cuando en lugar de números se utilizan colores al juego se lo conoce con el nombre de **mastermind**.

I.6) La última línea del cuadro debe llenarse con cinco de los números que aparecen más arriba. En cada línea se indica cuántos números en común tiene ese grupo con el que falta. La B de "bien" significa que los números aparecen en la misma posición, y la R de "regular", que están en posición cambiada. Con nB y mR se indican, desde la columna de la derecha, que existen n números en posición correcta y m números en posición regular. ¿Cuál es la combinación correcta?

1	2	3	4	5	3R	-
3	6	2	7	1	3R	-
3	2	8	1	9	3R	-
2	1	4	6	8	1R	1B
5	1	9	2	7	3R	-
2	3	5	9	6	2R	-
?	?	?	?	?	-	5B

Resolución. Se supone que la solución si existe, viene dada por : a b g d

La cuarta fila es propicia para aplicar bifurcación obteniéndose cinco casos y sus respectivas conclusiones, a saber:

1) a = 2 Þ ... No existe solución

2) b = 1 Þ ... No existe solución

3) g = 4

Este caso puede aún bifurcarse en cuatro subcasos, a saber:

3.i) el 2 está regular Þ ... No existe solución

3.ii) el 1 está regular Þ ... No existe solución

3.iii) el 6 está regular Þ ... No existe solución

3.iv) el 8 está regular Þ ... No existe solución

4) d = 6 Þ un elemento del conjunto {2,1,4,8} está regular con lo cual se obtienen cuatro subcasos, a saber:

4.i) el 2 está regular Þ ... No existe solución

4.ii) el 1 está regular Þ ... No existe solución

4.iii) el 4 está regular Þ ... No existe solución

4.iv) el 8 está regular Þ ... No existe solución

5) e = 8 Þ un elemento del conjunto {2,1,4,6} está regular con lo cual se obtienen cuatro subcasos, a saber:

5.i) el 2 está regular Þ ... No existe solución

5.ii) el 1 está regular. Þ ... $ solución

5.iii) el 4 está regular Þ ... No existe solución

5.iv) el 6 está regular Þ ... No existe solución

Conclusión: Existe una única solución dada por 7 5 1 3 8

IX.2. FORMA CONDICIONADA DEL MÉTODO DE BIFURCACIÓN (BIFURCACIÓN CONDICIONADA).

El método de bifurcación en su forma condicionada aparece cuando la bifurcación se debe realizar siempre y cuando una cierta condición o restricción se verifique.

A continuación se enunciará y se resolverá un problema para el cual la aplicación del método de bifurcación, en su forma condicionada, es decisivo.

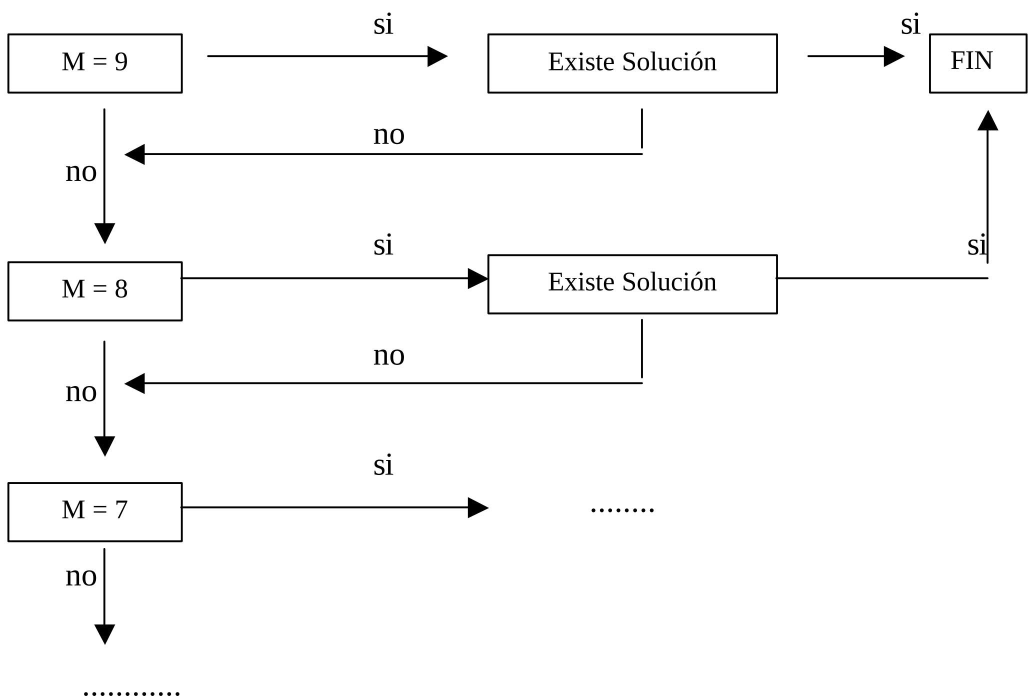
II.7) Cada letra utilizada (A, C, E, I, M, N, T) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera de obtener la mayor MACANA posible, siendo:

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & M & A & T & E \\
+ & M & A & T & I & C & A \\
\hline
 & M & A & C & A & N & A
\end{array}
$$

para los siguientes casos:

(i) a letras diferentes deben corresponder números diferentes;
(ii) a letras diferentes pueden corresponder números iguales.

Resolución. La mayor MACANA implica **bifurcación condicionada** la cual se puede presentar de la siguiente manera:



(ii) Para M = 9 existe una única solución dada por MACANA = 999999.

(i) Se plantea bifurcación para M comenzando desde el dígito mayor 9. En caso de no obtener solución M toma una unidad menos y así sucesivamente hasta obtener la solución del problema. Se consideran los siguientes casos y se deduce:

(a) M = 9 Þ ... No existe solución

(b) M = 8 Þ ... No existe solución

(c) M = 7 Þ ... No existe solución

(d) M = 6 Þ ... No existe solución

(e) M = 5 Þ ... No existe solución

(f) M = 4 Þ ... $ solución MACANA = 478717

Conclusión: Existe una única solución: 478717 para (i) y 999999 para (ii).

X. OTROS METODOS PARA HACER DEMOSTRACIONES

Existen diversas técnicas para realizar demostraciones, ya sea para entender lo que un profesor explica en clase, un autor escribe en su libro o para expresar la propia creatividad. Durante el curso se explicitarán más ejemplos que mostrarán el uso del correspondiente método. Los métodos presentados anteriormente como asimismo los resúmenes de nuevos métodos que se presentarán aquí constituyen un conjunto básico de gran importancia en matemática (Solow 1993). De todos modos existen muchos detalles, variantes y trucos que se obtendrán con la práctica. A continuación, se proporcionará un resumen para saber **cómo y cuándo** se deben usar las diversas técnicas para demostrar la proposición:

" P implica Q ".

Comenzando un repaso del **método progresivo-regresivo** (ya visto anteriormente) se puede suponer que P es verdadera y el trabajo consiste en demostrar que Q es verdadera. A través del proceso progresivo se deducirá a partir de P, una secuencia de proposiciones P_1, P_2, ... las cuales son necesariamente verdaderas como resultado de que se ha supuesto que P es verdadera. Esta secuencia no es aleatoria, sino que está guiada por el proceso regresivo, según el cual, a través de la formulación y respuesta de la **pregunta de abstracción**, se obtiene a partir de Q una adecuada proposición R_1, con la característica de que si R_1 es verdadera, Q también lo será. Este proceso de abstracción puede aplicarse a R_1 obteniendo una nueva proposición R_2 y así sucesivamente. **El objetivo es unir la secuencia progresiva con la secuencia regresiva**, generando una proposición en la secuencia progresiva, la cual es precisamente igual a la última proposición obtenida en la secuencia regresiva. Entonces, se puede hacer la demostración progresivamente siguiendo la secuencia desde P hasta Q. Cuando se esta tratando de obtener esta secuencia de proposiciones, se debe ser cuidadoso con los cuantificadores que aparezcan, pues, entonces, los métodos por construcción, elección, inducción y particularización pueden ser de gran utilidad para realizar la demostración. ƒ

Por ejemplo, cuando el **cuantificador "∃" se origina en el proceso regresivo** en la forma usual:

existe un "objeto" con una "cierta propiedad" tal que "algo sucede",

se debería considerar el uso del **método por construcción** para producir el objeto deseado.

Con el método por construcción, se trabaja progresivamente desde la suposición de que P es verdadera para generar (producir o diseñar) un algoritmo que produzca el objeto deseado. Siempre se debe verificar que el objeto hallado satisface dicha "propiedad" y también que "algo sucede". Por ejemplo, para la ecuación de primer grado $ax+b=0$ ($a\neq 0$), la solución está dada por $x = -b/a$ con lo cual la solución ha sido exhibida o construída.

Por otro lado, cuando el **cuantificador "∀" se origina en el proceso regresivo** en la forma usual :

para todos los "objetos" con una "cierta propiedad", " algo sucede", se debe considerar el uso del **método por elección**. Aquí el objetivo será el de tomar cualquier objeto con "cierta propiedad" y demostrar que "algo sucede". Para hacerlo, se elige o se escoge un objeto, el cual tiene dicha cierta propiedad. Se debe concluir que, para dicho objeto, "algo sucede". Una vez que se ha elegido el objeto, lo mejor es proceder a trabajar progresivamente partiendo del hecho de que el objeto escogido tiene "cierta propiedad" (junto con la información que hay en P, si fuese necesario) y, regresivamente, desde que "algo sucede". ƒ

El **método por inducción** se deberá tomar en cuenta (aún antes que el método por elección) cuando la proposición Q tiene la forma:

Para todo entero n mayor o igual que algún entero inicial, la proposición P(n) es verdadera.

El primer paso del método de inducción consiste en verificar que la proposición es verdadera para el primer valor posible de n, en general es 1. El segundo paso requiere demostrar que si P(n) es verdadera entonces P(n+1) es verdadera.

Se debe recordar y tener presente que el éxito de una demostración por inducción reside en la habilidad para relacionar la proposición P(n+1) con P(n), de modo que se pueda hacer uso de la suposición de que P(n) es verdadera. En otras palabras, para realizar el segundo paso de la demostración por inducción, se debe escribir la proposición P(n), cambiar n en dicha proposición por (n+1) para obtener P(n+1) y, entonces ver si se puede expresar P(n+1) en función de P(n) (en realidad, la clave de la demostración reside en hallar esta expresión). Sólo entonces se podrá usar la suposición de que P(n) es verdadera para llegar a la conclusión deseada de que P(n+1) es también verdadera. ƒ

Por otra parte, cuando el **cuantificador "∀" surge en el proceso progresivo** en la forma usual:

para todos los "objetos" con una "cierta propiedad" " algo sucede"

se usará el **método por particularización** .

Para hacer esto, se identifica estos "objetos" cuando aparezcan en el proceso regresivo, porque entonces, con el método de particularización se puede concluir que "algo sucede" para el "objeto particular bajo consideración". Este hecho deberá ser útil para llegar a la conclusión de que Q es verdadero. Cuando se utilice la particularización, se debe verificar que el objeto específico satisface la "cierta propiedad", porque solamente en ese caso algo sucederá. ƒ

Cuando la proposición original Q contiene la palabra "no", o cuando falle el método progresivo-regresivo, entonces se debe considerar el método contrarrecíproco o el método por contradicción dando preferencia al primero. Para utilizar el **método contrarrecíproco**, se deben escribir inmediatamente las proposiciones NO Q y NO P, usando las técnicas correspondientes para la obtención de la negación de una proposición. Entonces, empezando con la suposición de que NO Q es verdadera, el trabajo consiste en concluir que NO P es verdadera. Esto se realiza mejor aplicando el método progresivo-regresivo, trabajando progresivamente a partir de la proposición NO Q y, regresivamente a partir de la proposición NO P. Una vez más, se deben analizar y observar los cuantificadores que pudieran aparecer en el proceso progresivo o en el regresivo, ya que, entonces, los métodos por construcción, por elección, por inducción y particularización podrán ser también útiles. ƒ

En el caso que fallara el método contrarrecíproco, existe todavía una esperanza con el método por contradicción. En este método, se permite suponer no solamente que P es verdadera sino también que Q es falsa. Esto proporciona dos suposiciones a partir de las cuales se debe deducir una contradicción a algo que se sabe que es verdadero. No es siempre obvio dónde surge tal contradicción, pero ésta se obtendrá trabajando progresivamente las proposiciones P y NO Q.

En general al tratar de demostrar que "P implica Q" la forma que tenga Q debe guiar el razonamiento tanto como sea posible. Específicamente, se debería explorar la proposición Q buscando ciertas palabras claves, ya que éstas indicarán a menudo cómo proceder. Por ejemplo, si se encuentra el cuantificador "existe", considere el método por construcción, en tanto que el cuantificador "para todo" sugiere el método por elección o el método por inducción. Cuando la proposición Q tenga la palabra "no" se podrá usar el método contrarrecíproco o el método por contradicción. Otras palabras claves que se deben buscar son "único", "o", "máximo" y "mínimo" ya que al encontrarlas, se utilizarán los correspondientes métodos de unicidad, o exclusiva y máx/mín (que se encuentran detalladas en el resumen más abajo). Si no se pudiera elegir un método basándose en la forma de Q, entonces se debe proceder con el método progresivo-regresivo.

A partir de ahora ya se está capacitado para "hablar" el lenguaje de la matemática pues se conoce el "vocabulario" y la "gramática" básica. Se han aprendido los tres métodos de demostración más importantes para probar proposiciones, lemas, teoremas y corolarios. Se conocen los diferentes cuantificadores y los métodos correspondientes por construcción, elección, inducción y particularización. Para situaciones especiales se tienen los métodos de unicidad, o exclusiva y máx/mín. Si aún así todas estas técnicas para hacer demostraciones fallaran, quedará la posibilidad de crear una que se adapte al problema en cuestión lo que es en definitiva la ambición de todo matemático. Por ende, tirese a la pileta y tenga en cuenta que el que busca siempre algo encuentra. Mucha suerte y manos a la obra.

A continuación se da un resumen de los diferentes métodos (algunos de los cuales se han explicitado con más detalles) para hacer demostraciones (Solow (1993), Tarzia (1996)), a saber:

MÉTODOS PARA HACER DEMOSTRACIONES ($P \Rightarrow Q$)

Método de Demostración	**Cuándo usarla**	**Qué suponer**	**Qué concluir**	**Cómo hacerlo**
Progresivo-Regresivo	Como un primer intento o cuando Q no tiene una forma reconocible.	P	Q	Trabaje progresivamente partiendo de P y aplique el proceso de abstracción a Q.
Contrarrecíproco	Cuando Q contiene la palabra "no".	NO Q	NO P	Trabaje progresivamente partiendo de NO Q y regresivamente partiendo de NO P.
Contradicción	Cuando Q contiene la palabra "no" o cuando los dos primeros métodos fallen.	P y NO Q	Alguna contra-dicción	Trabaje progresivamente partiendo de P y NO Q para obtener una contradicción.
Construcción	Cuando Q contiene el término "existe".	P	Existe el objeto deseado	Adivine, construya, etc., el objeto que tiene cierta propiedad y muestre que algo sucede.
Elección	Cuando Q contiene el término "para todo", "para cada", etc.	P y elección de un objeto con cierta propiedad	Que algo sucede	Trabaje progresivamente partiendo de P y el hecho de que el objeto tiene la cierta propiedad. Trabaje regresivamente partiendo de lo que sucede.
Particularización	Cuando P contiene el término "para todo", "para cada", etc.	P	Q	Trabaje progresivamente particularizando P a un objeto en especial, es decir, al obtenido en el proceso regresivo.
Inducción	Cuando Q es verdadero para cada entero empezando con alguno en particular, por ejemplo 1.	La proposición es verdadera para n	La proposición es verdadera para n+1. También demuestre que es verdadera para n=1.	(i) Verifique que la proposición es verdadera para 1. (ii) Recurra a la hipótesis de inducción para demostrar que es verdadera para n+1.

Método de Demostración	**Cuándo usarla**	**Qué suponer**	**Qué concluir**	**Cómo hacerlo**
Unicidad 1	Cuando Q contiene la palabra "único".	P y existen dos objetos.	Los dos objetos son iguales	Trabaje progresivamente utilizando P y las propiedades de los dos objetos. También, trabaje progresivamente para mostrar que los objetos son iguales.
Unicidad 2	Cuando Q contiene la palabra "único".	P y existen dos objetos diferentes.	Alguna contradic-ción.	Trabaje progresivamente desde P, utilizando las propiedades de los dos objetos y el hecho de que son diferentes.
O exclusiva (Prueba por eliminación)	Cuando Q tiene la forma "R ó S".	(i) P y NO R (ii) P y NO S	(i) S (ii) R	(i) Trabaje progresivamente partiendo de P y NO R, y regresivamente partiendo de S. (O exclusiva 1). (ii) Trabaje progresivamente de P y NO S, y regresivamente partiendo de R. (O exclusiva 2).
Máx/Mín 1	Cuando Q tiene la forma "máx $S \leq x$" ó "mín $S \geq x$".	P y seleccione un elemento s en S.	$s \leq x$ ó $s \geq x$	Trabaje progresivamente desde P y el hecho de que s está en S. También trabaje regresivamente.
Máx/Mín 2	Cuando Q tiene la forma "máx $S \geq x$" ó "mín $S \leq x$".	P	Construya s en S tal que $s \geq x$ ó $s \leq x$.	Utilice P y el método por construcción para producir la s deseada en S.
Método de Bifurcación (Prueba por casos)	Cuando P tiene la forma "A ó B" (unión no necesariamente disjunta).	Caso 1: A Caso 2: B	Q Q	Trabaje progresivamente partiendo de A y regresivamente partiendo de Q. Trabaje progresivamente partiendo de B y regresivamente partiendo de Q.

XI. EJERCICIOS, PROBLEMAS Y JUEGOS DE INGENIO.

A continuación se describen **problemas por resolver** (utilice la metodología de las cuatro etapas), **problemas por demostrar** (utilice algunos de los métodos descriptos anteriormente, a saber: progresivo-regresivo, por construcción, por elección, por inducción, por particularización, por contradicción, contrarrecíproco, de unicidad, de la o exclusiva, máx-mín, bifurcación) y **juegos de ingenio** (utilice las metodologías de los problemas por resolver, por demostrar, lógica-matemática y mucho ingenio, intuición y creatividad) extraídos y/o basados en Alvarez (1995), Anton (1994), Becker-Pietrocola-Sanchez (1996), De Guzmán-Colera (1993), De Guzmán-Colera-Salvador (1993), Fauring-Gutierrez (1993-1997), Fernández-Gooransarab-Krantz (1997), Hinrichsen-Buschiazzo-Filipputti-Hinrichsen (1994), Santaló (1993, 1995), Seveso-Ferrarini (1994-1998), Soifer (1995), Tarzia (1995, 2000), Tarzia-Gurruchaga (1996).

Se recomienda indicar en cada paso que se realice, el método utilizado como una manera de afianzar los conocimientos previos.

1) (i) Si con NO P se indica la negación de P explicite las siguientes expresiones :
(a) NO (∀x : x>2) ; (b) NO (∃ x : x £ 8) .

(ii) Analice la siguiente proposición:

∀ x : (x² ³ x)

y demuestre que es falsa si el dominio de la proposición es el conjunto de los números reales; en cambio, es verdadera en el conjunto de los números naturales y enteros.

2) Demuestre las siguientes propiedades que relacionan la unión con la intersección de conjuntos a través de la complementación de conjuntos (**Leyes de De Morgan**):

(1) $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$, (2) $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

donde $\overline{A}$ representa el complemento del conjunto A respecto del conjunto universal.

3) Demuestre que:
(i) B - A = Æ Û B Ì A ; (ii) $\overline{A} - \overline{B} = B - A$;
(iii) $(\overline{A}\cap B)\cup A = A\cup B$.

4) ¿Cuántos primos puede tener Juan, de acuerdo al siguiente diálogo, si se sabe que uno solo de los chicos dice la verdad?

- José dice: Juan tiene por lo menos 6 primos;
- Alberto corrige: No, tiene menos de 6;
- Pablo agrega: Tal vez tengas razón, pero lo que yo sé, es que tiene más de 1 primo.

5) **Cinco corredores y dos mentirosos**: Al finalizar una carrera escuchamos estas declaraciones de los participantes:

- Antonio: "Yo no he llegado último";
- Bernardo: "Carlos ha llegado tercero";
- Carlos: "Antonio ha llegado inmediatamente detrás de Ernesto";

- Daniel: "Ernesto ha llegado en segundo lugar";
- Ernesto: "Daniel no ha ganado la carrera".

Por alguna razón extraña, los dos primeros clasificados han mentido y los otros tres no. ¿Cuál ha sido el orden de llegada de los cinco corredores?

6) El **trío municipal**: Los señores Pablo, Fernando y Carlos son los tres candidatos que obtuvieron la mayor cantidad de votos en las últimas elecciones municipales de Villalinda. El resultado fue muy ajustado: el que quedó a la cabeza aventaja al segundo en un voto, éste aventaja al tercero en un voto. Los tres practican deportes diferentes (atletismo, natación y fútbol) y tienen un vino favorito (clarete, tinto y blanco).

Se tienen las siguientes informaciones:
(a) El señor Carlos, gran aficionado al tinto, aventajó a Fernando por un sólo voto;
(b) El aficionado al blanco, que no soporta el fútbol, obtuvo un voto más que el bebedor de clarete;
(c) El señor Pablo adora la natación.

Se necesita saber para cada candidato su clasificación, su deporte y su vino preferido.

7) Se tiene una fuente de agua y se dispone solo de dos recipientes, de a y b litros respectivamente. Indique un procedimiento para que uno de los recipientes contenga c litros de agua en los siguientes casos:
(i) $a=3$, $b=5$, $c=4$; (ii) $a=9$, $b=4$, $c=6$; (iii) $a=7$, $b=11$, $c=6$.

8) **Metegol lógico**: Tres amigos, Juan, Pedro y Carlos, jugaron un torneo triangular de metegol, es decir que cada uno jugó dos partidos (todos contra todos) y hubo tres partidos en total. Se recuerda que una ficha de metegol da siete bolas. Al final del torneo resultó que Juan y Pedro hicieron 5 y 6 goles respectivamente. Entonces:
(i) ¿Cuántos goles hizo Carlos?
(ii) ¿Cuántos goles recibió, en su arco, cada uno de los tres jugadores?
(iii) Si se sabe que Pedro perdió los dos partidos jugados, determine los resultados de los tres partidos.
(iv) Si no se hubiese sabido que Pedro perdió los dos partidos (según (iii)), ¿cuántas soluciones posibles sobre los resultados de los tres partidos se tendría? Además, ¿Pedro hubiese ganado algún partido?

9) Para cada una de las siguientes preguntas de abstracción, indicar al menos tres respuestas:
(a) ¿Cómo se puede demostrar que dos números reales son iguales?;
(b) ¿ Cómo se puede demostrar que dos rectas son paralelas?;
(c) ¿Cómo se puede demostrar que un número real es mayor que otro?

10) (i) Demuestre, mediante los métodos progresivo-regresivo, contradicción y contrarrecíproco, que si X e Y son números reales tales que

$$X^{3}\ 0 , \qquad Y^{3}\ 0 , \qquad X+Y= 0 \text{ , entonces } X=0 \text{ y } Y=0 .$$

(ii) Demuestre las siguientes proposiciones:

(a) $\sum_{i=1}^{x}$ $x_i=0$, x_i ³ 0, ∀i =1,..., n entonces $x_i = 0$, ∀i = 1, ..., n ;

(b) $\int_a^b f(x)dx=0$, $f \in$ C^o ([a,b]) con a<b entonces f=0 en [a,b].

11) Escriba nuevamente los siguientes enunciados utilizando los símbolos apropiados: " (para todo), $(existe) y / (tal que):
(i) Alguna montaña es más alta que cualquier otra montaña;
(ii) La raíz cuadrada del producto de dos números reales no negativos cualesquiera p y q es siempre menor o igual que la suma de estos dos dividido por 2 ;
(iii) Si X e Y son dos números reales tales que X<Y entonces, existe un número racional r tal que X< r<Y.

12) Sabiendo que dos patos mienten y uno dice la verdad, determine quién hizo la fechoría teniendo en cuenta que dijeron lo siguiente:
- Dani: "Yo no fui" ;
- Delicado: "Fue Dani" ;
- Dunc: "Yo no lo hice".

13) Demuestre por los métodos progresivo-regresivo, por contradicción y contrarrecíproco que si d, e y f son enteros para los cuales d|e y e|f entonces d|f.

14) Determine los valores reales de x de manera que: ∃ ! y∈ R / $\frac{2y}{y+1}=x$

15) (i) Demuestre por los métodos contrarrecíproco y por contradicción la siguiente afirmación:

Sean a, b, c ∈ R, con a>b. Entonces: ac≤ bc ⇒ c≤ 0.

Indique además la diferencia entre ambos métodos en este caso particular;

(ii) Demuestre la siguiente afirmación:

Sean a, b, c∈ R, Entonces: ac≤ bc • a> b ⇒ c≤ 0 ;

(iii) Indique además en que difieren las proposiciones dadas en (i) y en (ii).

16) (i) Demuestre que ∀ n ∈ N el resto de dividir n^2 por 4 es 0 ó 1.

(ii) Para que números naturales de la parte (i) el resto es 1.

17) Demuestre que de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deducen las siguientes igualdades:

(i) ad = bc ; (ii) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; (iii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;

(iv) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; (v) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; (vi) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

(vii) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; (viii) $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{d}$; (ix) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

18) Demuestre:
(i) $\forall$ y>0 , $\exists$!x >0 / x^2 = y;
(ii) La función real f: $R^+ \rightarrow R^+$ definida por f(x) = x^2 es una función biyectiva;
(iii) ¿Cómo se generaliza la parte (i) si se toma $y\,^3 0$.

Observación 10. Realice la demostración de la unicidad de la parte (i) utilizando los dos métodos de Unicidad 1 y 2.

Definición.- Sea A un conjunto munido de una ley de composición interna *, es decir una función de A ´ A en A (se trata de una **operación** que asigna a cada par ordenado de elementos de A un único elemento de A). Se dice que la dupla (A,*) es un **grupo** si y sólo si :
(a) La ley es **asociativa**, es decir : (x * y) * z = x * (y * z) , $\forall$ x, y, z $\in$ A ;

(b) La ley * posee un **elemento neutro** en A, es decir : $\exists$ e$\in$A / x * e = e * x =x, $\forall$x$\in$A ;

(c) Todo elemento de A posee un **elemento simétrico** en A, es decir :
$$\forall x\in A , \exists x' \in A \ / \ x * x' = x' * x = e.$$

19) En un grupo (A, *) se tienen las siguientes propiedades:
(i) el elemento neutro es único; (ii) el elemento simétrico es único.

20) Sean S = {x $\in$ R / x^2 - 3x + 2 $\leq$ 0} y T={ x $\in$ R / 1$\leq$ x $\leq$ 2} dos conjuntos de números reales. Entonces S = T .

21) Para cada uno de los siguientes enunciados, indique cuáles métodos, para hacer demostraciones, usaría (elección y/o construcción) y en qué orden. Además, explique cómo se aplicaría la técnica al problema en particular, es decir, qué construiría, qué eligiría, etc.?
(i) Existe un número real M > 0 tal que, para todos los elementos x en el conjunto S de números reales, $|x| \leq$ M ;
(ii) Para todos los números reales M>0, existe un elemento x en el conjunto S de números reales tal que $|x|$ > M ;
(iii) $\forall$ número real ε > 0, $ un número real δ > 0, de manera que para números reales X y Y con $|X-Y| < \delta$, se tiene que $|f(X) - f(Y)| < \varepsilon$, (donde f es una función de una variable).

22) Demuestre que si R es un subconjunto de S y S es un subconjunto de T, entonces R es un subconjunto de T.

23) Para cada una de las siguientes proposiciones, indique qué método utilizaría para hacer demostraciones y en qué orden. Específicamente, establezca qué supondría y qué trataría de concluir. (S y T son conjuntos de números reales y todas las variables se refieren a números reales).
(i) $\forall$ s $\in$ S, ± t$\in$T tal que s>t ;
(ii) No existe un número M > 0 tal que, para todo x en S, $|x|$ < M .

24) Si se va a utilizar el método contrarrecíproco en las siguientes proposiciones, ¿A partir de cuáles trabajaría progresivamente y cuáles proposiciones serían sus conclusiones?.
(i) Si n es un número entero para el cual n^2 es par, entonces n es par;
(ii) Suponga que S es un subconjunto del conjunto T de números reales. Si S es no acotado, entonces T es no acotado;
(iii) Si X y Y son números reales con $X \neq Y$, entonces $f(X) \neq f(Y)$, donde f es una función de una variable.

25) Sea $f: R \to R$ la función real definida por $f(x) = mx + h$, con $m \neq 0$. Demuestre que f es inyectiva, es decir : $x, y \in R,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

26) Si f es una función de una variable la cual, en el punto x, satisface la propiedad de que existen números reales $c > 0$ y $d > 0$ tal que, para todo y con $|x-y| < d$, resulta $|f(x) - f(y)| \leq c\ |x - y|$, entonces f es continua en x.

27) Sea f es una función de una variable que satisface la propiedad

$$\exists\ c \in [0,1]\ /\ |f(x) - f(y)| \leq c\ |x - y|\ ,\ \forall x, y \in [0,1]\ .$$

Demuestre que la solución de la ecuación $f(x) = x$, supuesto que exista, es única.

28) Niegue la definición de función continua en un punto.

29) Convierta los siguientes problemas de máx/mín en proposiciones que posean el cuantificador adecuado (S es un conjunto de números reales y x es un número real dado).

(a) máx { s : s está en S } ≤ x ; (b) máx { s : s está en S } ≥ x .

En lo que resta de este problema a, b, c y u son números reales dados y x es una variable.

(c) mín { $cx : ax \leq b$ y $x \geq 0$ } ≤ u ; (d) máx { $cx : ax \geq b$ y $x \geq 0$ } ≥ u ;
(e) mín { $ax : b \leq x \leq c$ } ≥ u ; (f) máx { $bx : a \leq x \leq c$ } ≤ u .

30) Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera y $f: X \to Y$ una función. A y B son dos subconjuntos cualesquiera del conjunto X. Con f(A) se denota el conjunto $f(A) = \{ f(x) / x \in A \} \subset Y$. Demuestre:

(i) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$; (ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

31) Complete los cuadrados en blanco con los cinco dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 de manera que no se repitan en ninguna de las franjas horizontales, verticales y oblicuas.
(i)

X	X	4	X	X
X	1			X
		5		
X				X
X	X	3	X	X

(ii)

X	X		X	X
X	3		2	X
		4		5
X				X
X	X		X	X

32) En cada uno de los siguientes problemas encuentre todas las soluciones:

(i) Utilizando solamente una vez las cifras 4, 6, 7, 8 y 9, complete la siguiente operación :

	1	5	.....	2
+	.....	.....	3	.....
	6	3	9	.....

(ii) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación :

	6	.....	.....	1
+	7	9	7	.....
1	4	.....	9	......

33) Complete las siguientes operaciones:

(i)

	2	3	...
+	4	...	6
	...	8	9
...	2	8	4

(ii)

	4	7	3
+	...	...	...
	8	2	7
...	5	5	5

(iii)

	1	8	7
+	4	6	...
	...	8	4
	8	...	9

(iv)

	8	...	3	...
-	...	2	...	1
	3	4	6	5

(v)

			1	2	3	9
´					...	...
			...	...	7	...
+	...	...	...	...		
	...	...	...	4	8	

(vi)

```
                 .... ,   1   ....

            ´     .... ,  ....   7
           ---------------------------
                 4    3    3    3

    +   ....   ....  ....   8   ....
    ------------------------------
        ....   ....  ....  ....  ....  ....
```

(vii)

```
    7    5    ...    ....  |  ....  ....
                           -------------
    3    4    9             1   ....   ....

         ...    ....   ....

                0      8
```

34) Cada letra utilizada (A, B) representa a un dígito entre 0 y 9. Calcule el valor de las letras A y B de manera que se verifique

```
        4    B    A

   +    A    B    4

        B    4    A
   ------------------
   1    7    1    0
```

35) (i) Cada letra utilizada (A, P, R, S) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

```
        R    A    S

   +    P    A    R
   ------------------
   A    S    S    A
```

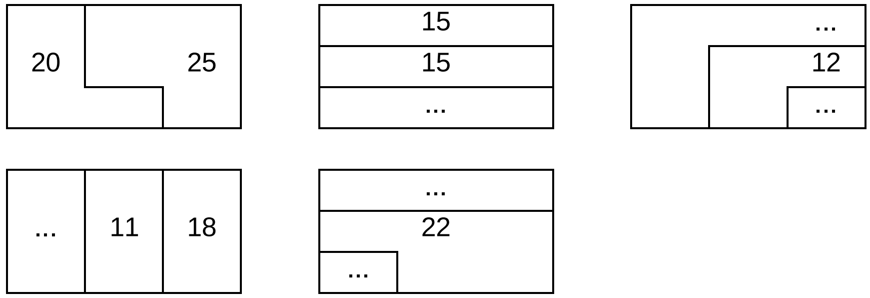
(ii) Cada letra utilizada (A, B) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$AB + BA = 99$$

36) Escriba los números del 1 al 9, en la tabla de 3 filas y 3 columnas siguiente:

....	....	....
....	....	....
....	....	....

de manera que se satisfagan las sumas indicadas:



Definiciones.

(i) Los **números pares** son los siguientes: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., que se pueden expresar, de manera general, por la expresión

$$\text{número par} = 2n, \quad \text{con } n=1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$$

(ii) Los **números impares** son los siguientes: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., que se pueden expresar, de manera general, por la expresión

$$\text{número impar} = 2n+1, \quad \text{con } n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$$

o en forma equivalente, por la expresión

$$\text{número impar} = 2n-1, \quad \text{con } n=1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$$

37) Complete y justifique por "par" o "impar" cada una de las siguientes proposiciones (entendiendo que en el caso de la diferencia hay que restar el número menor del mayor):

(i) La suma de dos números pares es ....
(ii) La suma de dos números impares es ....
(iii) La suma de un número par y otro impar es ....
(iv) La suma de tres números pares es ....
(v) La suma de tres números impares es ....
(vi) La suma de cuatro números impares es ....
(vii) La suma de cuatro números pares es ....
(viii) La diferencia de dos números impares es ....
(ix) La diferencia de dos números pares es ....
(x) El producto de dos números pares es ....
(xi) El producto de un número par y otro impar es ....

38) Indique y justifique si las siguientes proposiciones son siempre ciertas:

(i) La suma de dos números naturales consecutivos no es divisible por 2;
(ii) La suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3;
(iii) La suma de cuatro números naturales consecutivos no es divisible por 4;
(iv) La suma de cinco números naturales consecutivos es divisible por 5;
(v) Si n es un número natural par, entonces $n^2 - 1$ es el producto de dos números naturales impares consecutivos;
(vi) Si n es un número natural impar, entonces $n^2 - 1$ es múltiplo de 4; ¿Será también múltiplo de 8?

Definiciones.

(i) Los **números triangulares** son los dados por la sucesión de números

$$T_n = 1+2+3+......+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, ...$$

es decir : 1, 3, 6, 10, ...

(ii) Los **números cuadrangulares** son los dados por la sucesión de números

$$Q_n = n^2 \quad \text{con } n = 1, 2, 3, ...$$

es decir 1, 4, 9, 16, ...

(iii) Los **números perfectos** son aquellos que son iguales a la suma de todos sus divisores, excepto el número mismo.

(iv) **Dos números son amigos** cuando la suma de los divisores de uno de ellos, exceptuando el número mismo, es igual al otro y recíprocamente.

39) Verifique que :

(i) La sucesión de las diferencias entre números cuadrangulares consecutivos es la sucesión de los números impares;
(ii) Los números 36, 1225 y 41616 son números triangulares y cuadrangulares simultáneamente;
(iii) La suma de 2 números triangulares consecutivos es un número cuadrangular;
(iv) Los números 6, 28, 496 y 8128 son números perfectos;
(v) Los números 220 y 284 son amigos. Idem con 1184 y 1210, y con 2620 y 2924.

Definición. Se llama **terna pitagórica** a una terna de números enteros positivos que cumplen con la condición:

$$Z^2 + X^2 = Y^2$$

Observación 11. Las ternas pitagóricas pueden ser los lados de triángulos rectángulos, siendo X e Y los dos catetos y Z la hipotenusa.

40) (i) Verifique que existen infinitas ternas pitagóricas dadas por:

$$X = 2\,u\,v\,, \quad Y = u^2 - v^2$$

con u y v números naturales cualesquiera con u >v, con Z a determinar .

(iii) Para tener varias ternas pitagóricas, complete la siguiente tabla y compruebe que X, Y, y Z son los lados de un triángulo rectángulo.

u	v	X	Y	Z
2	1	4	3	5
3	1	....	....	....

3	2	....	....	....
4	1	....	....	....
4	2	....	....	....
4	3	....	....	....
5	1	10	24	26

Definición: Se tiene un **cuadradado mágico** respecto de la operación suma (producto) cuando la suma (producto) de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

41) **Cuadrados mágicos respecto de la suma :**
(i) Complete los siguientes cuadrados mágicos con los números del 1 al 9 con constante 15. La solución es única ?
a)

8	....	....
....	5	....
....	....	....

b)

....	....	....
....	....	1
2	....	....

(ii) ¿Es posible construir un cuadrado mágico con los nueve números siguientes: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19?

42) **Cuadrados mágicos respecto del producto :**
(i) Complete el siguiente cuadrado mágico.

3	....	....
....	6	....
....	1	12

43) ¿Cuánto vale la siguiente expresión $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+.....}}}}}$?

44) Compare e indique cual de los siguientes números es el mayor (sin utilizar calculadoras ni tablas de raíces):

(i) $\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt{5}$; (ii) $\sqrt[3]{14}$ y $\sqrt{6}$; (iii) $\sqrt[3]{14}$ y $\sqrt{5}$;
(iv) 0,00001 y $(81)^{\frac{-5}{2}}$; (v) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{3}-1$; (vi) $\sqrt[4]{7}$ y $\sqrt[6]{20}$.

45) Se elige un número de dos cifras AB con $A \neq B$. Se invierten sus cifras BA. Se resta el menor del mayor y se suman las cifras del resultado. Demuestre que siempre se obtiene el mismo resultado final. ¿ Cuál es?

46) ¿Los números capicuas de cuatro cifras son divisibles por 11 ?

47) Demuestre que el producto de un número de una cifra "a" por otro número formado por n cifras "b" tiene el mismo resultado que el producto de un número formado por una cifra "b" por otro número formado por n cifras "a", es decir que: $a \times bbb...b = b \times aaa...a$.

48) Halle dos números de tres dígitos cuyo producto sea 555555.

49) Verifique que :
(i) $p = 3\,n$ con $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = 3\,m$ con $m \in \mathbb{Z}$;
(ii) $p = 3\,n + 1$ con $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow p^2 = 3\,m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$;
(iii) $p = 3\,n + 2$ con $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow p^2 = 3\,m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$;
(iv) El número $\sqrt{3}$ no es racional .

50) (i) Si a y b son dos números racionales distintos con $a<b$, entonces el número real, definido por la expresión

$$x = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) a + \frac{\sqrt{2}}{2} b,$$

verifica las siguientes condiciones:
(a) $a<x<b$; (b) $x \notin \mathbb{Q}$.
(ii) Entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos números irracionales distintos entre sí .

51) Resuelva, en $\mathbb{R}$, analítica y gráficamente la siguiente inecuación (represente gráficamente el conjunto de soluciones en la recta real):

$$2x \leq |\,x + 2\,| .$$

Definición. Dados dos números positivos a y b, se definen la **media aritmética** MA y la **media geométrica** MG de la siguiente manera:

$$\mathrm{MA} = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \mathrm{MG} = \sqrt{ab} \ .$$

52) (i) Demuestre que :
(a) $\mathrm{MG} \leq \mathrm{MA}$; (b) $\mathrm{MG} = \mathrm{MA} \Leftrightarrow a = b$; (c) $x\,(1 - x) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall\, x \in [0,1]$.
(ii) ¿ Cuál es el rectángulo de área máxima que tiene por perímetro p?
(iii) La población de la Argentina está dada en la siguiente tabla:

Año	Población (en millones de habitantes)
1960	20
1970	23
1980	28
1990	33

(a) Calcule las medias aritmética y geométrica de la población de los años 1960 y 1980. Compare los valores hallados con los que nos brinda la tabla para el año 1970.
(b) Idem (a) para los años 1970 y 1990.
(c) Estime el número de habitantes que tendría la Argentina en el año 2000, utilizando solamente los datos de la tabla; compare el resultado hallado con el resultado real.

Observación 12. Los resultados obtenidos con la MA y la MG no son muy diferentes. En general, para problemas referentes al crecimiento o decrecimiento de poblaciones la MG da resultados más aproximados a la realidad. Naturalmente que éstos son valores estimados, es decir, aproximados, pues pueden ocurrir fenómenos (catástrofes, gran inmigración o emigración) que los haga variar.

Definición. Se llama **sucesión geométrica**, a todo conjunto de números dados en un cierto orden, tal que, el cociente entre dos números sucesivos se mantiene constante. Dicha constante r se la denomina **razón**.

Si el primer término es a, entonces la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica es:

(A) $$S_n = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a\,r^{n-1}$$

y está dada por ($r \neq 1$)

(B) $$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

53) Demuestre la validez de la expresión (B) por los dos siguientes métodos:
(i) multiplique (A) por r y réstele (A) ;
(ii) por el principio de inducción completa.

54) Demuestre, por inducción completa, que :

(i) $$\sum_{i=1}^{n} i\,(i!) = 1(1!) + 2(2!) + \ldots\ldots\ldots\ldots + n(n!) = (n+1)! - 1, \forall n \in N$$

donde $n! = 1.2.3.4.......(n-1)n$ es el factorial de n.
(ii) $2^n > n^3$, $\forall\ n \in N$, $n \geq 10$; (iii) $n^3 \geq 2n+1$, $\forall\ n \geq 2$.

55) (i) Un comerciante compra mercaderías que luego vende aplicándoles un porcentaje de ganancia. Si se representan con C, V y g el precio de compra de una mercadería, el precio de venta y el tanto por uno de ganancia respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables;
(ii) Un comerciante vende mercaderías aplicándoles un porcentaje de descuento. Si se representan con V, C y d el precio de venta de una mercadería antes del descuento, el precio de venta después del descuento y el tanto por uno de descuento respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables;

(iii) Si al precio de una mercadería se le aplica un tanto por uno de ganancia g ¿ cuál es el tanto por uno de descuento d a aplicar para obtener el valor original? Explicite la relación entre las variables g y d. ¿ Se obtiene lo mismo si se produce el proceso inverso?
Ayuda: el tanto por uno es el tanto por cien dividido por 100.

56) (i) Un fabricante mayorista vende a un comerciante minorista un determinado producto al valor de $30 la unidad. El fabricante le ofrece colocar una etiqueta de precio a cada producto (para conveniencia del minorista en períodos de estabilidad económica). Se necesita conocer el precio que se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio de venta al público en 20%, en una oferta promocional, y obtener una utilidad del 12% sobre el costo del producto. Calcule además el porcentaje de la ganancia que obtiene el comerciante minorista en los días que no efectúa la promoción.
(ii) Idem para el caso en que el comerciante minorista compre el producto al valor de $ C (C es un valor positivo cualquiera y representa el caso de estudio que debe realizar el minorista para efectuar la promoción de sus numerosos productos que tiene en venta). Es un problema real que se plantea como un problema paramétrico.

57) Sea C Î Ñ$^+$ el costo de una determinada mercadería.
(i)¿ Cuál debe ser el valor de venta para que el comerciante en una futura promoción, con un descuento del 10 % , gane un 20 % sobre el costo?.
(ii) Indique el valor de venta para un costo de $6 y de $9.
(iii) Indique además, el porcentaje de ganancia cuando no se efectúa la promoción.

58) Sea la proposición directa:

"Si ABC es un triángulo equilátero entonces ABC es un triángulo isósceles" .

(i) Indique si puede expresarse en forma equivalente diciendo :
(a) Que un triángulo sea equilátero es condición suficiente (pero no necesaria) para que sea isósceles;
(b) Que un triángulo sea isósceles es condición necesaria (pero no suficiente) para que sea equilátero;
(c) Un triángulo es isósceles si es equilátero;
(d) Un triángulo es equilátero sólo si es isósceles.

La proposición recíproca de la directa dada es:

"Si ABC es un triángulo isósceles entonces ABC es un triángulo equilátero".

La proposición inversa es:

"Si ABC no es un triángulo equilátero entonces ABC no es un triángulo isósceles".

La proposición contrarrecíproca es:

"Si ABC no es un triángulo isósceles entonces ABC no es un triángulo equilátero".

(ii) Indique y justifique cuál de las cuatro proposiciones directa, recíproca, inversa y contrarrecíproca, es verdadera o falsa.

59) Demuestre que si un triángulo rectángulo ABC con catetos a y b, y con hipotenusa c satisface la relación $c = \sqrt{2ab}$, entonces el triángulo ABC es isósceles. La proposición recíproca ¿es verdadera?

60) Dibuje un triángulo rectángulo. En cada uno de sus lados trace un semicírculo cuyo centro sea el punto medio del lado y cuyo radio sea la mitad del lado correspondiente del triángulo: indique, justificando la respuesta, si es verdadero o falso que:

La suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

61) Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$. Se traza la bisectriz del ángulo B que corta al lado AC en D. Sabiendo que $\overline{BC} = \overline{BD}$, calcule la medida del ángulo A.

62) Sea ABC un triángulo con $\angle$ A=50°. Se prolonga el lado BC en ambas direcciones y sobre las prolongaciones se indican los puntos P y Q de manera tal que $\overline{PB} = \overline{BA}$, $\overline{CQ} = \overline{CA}$ y $\overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CQ} = \overline{PQ}$. Calcule la medida del ángulo PAQ.

63) Sea ABC un triángulo que tiene $\angle$ A=36° y $\angle$ B=21°. Sobre el lado AB se marcan los puntos D y E de modo que $\overline{AD} = \overline{DC}$ y $\overline{EB} = \overline{EC}$. Halle la medida del $\angle$ DCE.

64) Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sean los puntos P y Q pertenecientes a BC y AB respectivamente de manera que se tenga $\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$. Halle el valor de $\angle$ B.

65) En un triángulo ABC se definen los puntos D y E que están en los lados BC y AC respectivamente de manera que: $\angle$ BAD=30°, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AE} = \overline{AD}$. Calcule el valor del $\angle$ EDC.

66) El lado de un triángulo equilátero T es 3/7 del lado de un cuadrado C. Encuentre una fracción que indique que parte del perímetro de C es el perímetro de T.

67) Sean a, b, c, d >0. Demuestre la siguiente proposición

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

utilizando el método progresivo-regresivo y el concepto de área construyendo dos rectángulos de base 1 y de altura $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ respectivamente.

68) ¿ Cuál es la proporción entre el área de un cuadrado inscripto en un círculo y el área de un cuadrado inscripto en uno de sus semicírculos?

69) (i) Dado un círculo de radio r calcule el lado del cuadrado inscripto y el lado del cuadrado circunscripto en dicho círculo. Calcule el porcentaje de área que ocupa la región más pequeña respecto de la más grande.
(ii) Dado un cuadrado de lado L calcule el radio del círculo inscripto y del círculo circunscripto en dicho cuadrado. Calcule el porcentaje de área que ocupa la región más pequeña respecto de la más grande.
(iii) Calcule el área de la región comprendida entre cada cuadrado y el círculo en (i), y entre cada círculo y el cuadrado en (ii).

70) ¿ Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 12:35 hs?

71) El dueño de una empresa propone a sus empleados dos opciones:

(a) Aumentar los sueldos el 5 % ; (b)Aumentar los sueldos un monto fijo de $ 100 .

¿A partir de que salario se debe elegir la primera opción?. ¿ y la segunda opción?.

72) Una companía de transporte propone a sus clientes las tres posibilidades siguientes :
(a) P1: Comprar en cada viaje, un boleto donde el precio es proporcional al kilometraje, a razón de $ 0,30 por kilómetro;
(b) P2: Comprar un abono anual de $600, que permite viajar durante todo el año a razón de $ 0,15 por kilómetro;
(c) P3: Comprar un abono anual de $ 1500, que permite recorrer hasta 5000 km; a partir de los 5000 km, todo km suplementario costará $ 0,10 por kilómetro.

Una persona recorre anualmente "x" km con esta companía. Se definen las funcionesf_i:Ñ$^+$®Ñ$^+$ (i =1, 2,3) , correspondiente a la posibilidad Pi, que a "x" asocia el costo en $ de los viajes anuales de esta persona.
(i) Escriba la ley correspondiente para f_1 , f_2 y f_3 .
(ii) Represéntelas gráficamente en un mismo plano cartesiano.
(iii) Utilizando sus representaciones gráficas, determine qué posibilidad es la más conveniente si la persona recorrerá 3000 Km por año, 6500 Km por año, 9000 Km por año.
(iv)¿Cuál es la posibilidad más económica en función del número de kilómetros recorridos en un año?. ¿Cuál es la función que a "x" asocia el gasto mínimo para una persona?.

73) El dueño de un supermercado ofrece las siguientes promociones:
(P1) Los días lunes, para toda compra superior o igual a $ 40, se descuenta un importe fijo de $ 15;
(P2) Los días martes se descuenta el 10% sobre el importe de la compra.

Una persona gasta $ "x" en la compra del supermercado. Se definen las funciones f_i: R^+ ® R^+ (i =1, 2) correspondiente a la promoción P_i que a "x" asocia el gasto en $ de la compra.
(i) Escriba la ley correspondiente para f_1 y f_2.
(ii) Represéntelas gráficamente en un mismo gráfico cartesiano.
(iii) Utilizando sus representaciones gráficas responda qué día le conviene ir al supermercado si la persona piensa gastar $ 140, $ 160 y $ 150.
(iv)¿ Cuál es la posibilidad más económica en función de la compra en el supermercado?. ¿Cuál es la función que a "x" asocia el gasto mínimo para una persona?.

74) Demuestre por contradicción que:
(i) En una fiesta de n personas (n ³2) existen por lo menos dos personas que tienen el mismo número de amigos en la fiesta;
(ii) No existen tres números naturales consecutivos tales que el cubo del mayor sea igual a la suma de los cubos de los otros dos.

75) Demuestre que si C es un entero impar, entonces las soluciones de la ecuación $x^2 + x - C = 0$, no pueden ser números enteros impares.

76) Cada letra tiene asignado un número entre 0 y 9 (una de las diez cifras no se usa). Reemplazando cada letra por su número correspondiente se obtiene una suma correcta. ¿Cuántas soluciones existen?

	M	O	N	O	S
S	I	M	I	O	S
H	O	M	B	R	E

77) **¿ Se casarán los novios?** Cuando su novia le preguntó si se iban a casar, el joven le respondió: "No estaría mintiendo si te dijera que no puedo no decirte que es imposible negarte que si creo que es verdadero que no deja de ser falso que no vayamos a casarnos. ¿ Podría ayudar a la desconcertada y atribulada novia, y decirle si su pretendiente quiere contraer matrimonio o no con ella?. Tenga en cuenta que el novio era un lógico.

XII. JUEGOS DE INGENIO

Teniendo en cuenta las siguientes **revistas de lógica-matemática, juegos de ingenio, pasatiempos y entretenimientos** (en general, de edición mensual), a saber:

· "Batalla Naval", Ediciones de Mente, Buenos Aires (1992/1993).

· "Cruzadas", Zugarto Ediciones, Madrid.

· "Enigmas de oro", Ediciones de Mente, Buenos Aires.

· "Enigmas. Juegos de lógica", Ediciones de Mente, Buenos Aires.

· "Jeux de logique", Keesing France, Levallois-Perret.

· "Laberintos", Ediciones de Mente, Buenos Aires (1996).

· "Les placés de sport cérébral", Keesing France, Levallois-Perret.

· "Lógicamente. Juegos de lógica", Zugarto Ediciones, Madrid.

· "Nombres fleches", Keesing France, Levallois-Perret.

· "Nombres placés", Keesing France, Levallois-Perret.

· "Quijote", Ediciones de Mente, Buenos Aires.

· "Revista La Nación" y “Cara y Cruz”, Diario La Nación, Buenos Aires.

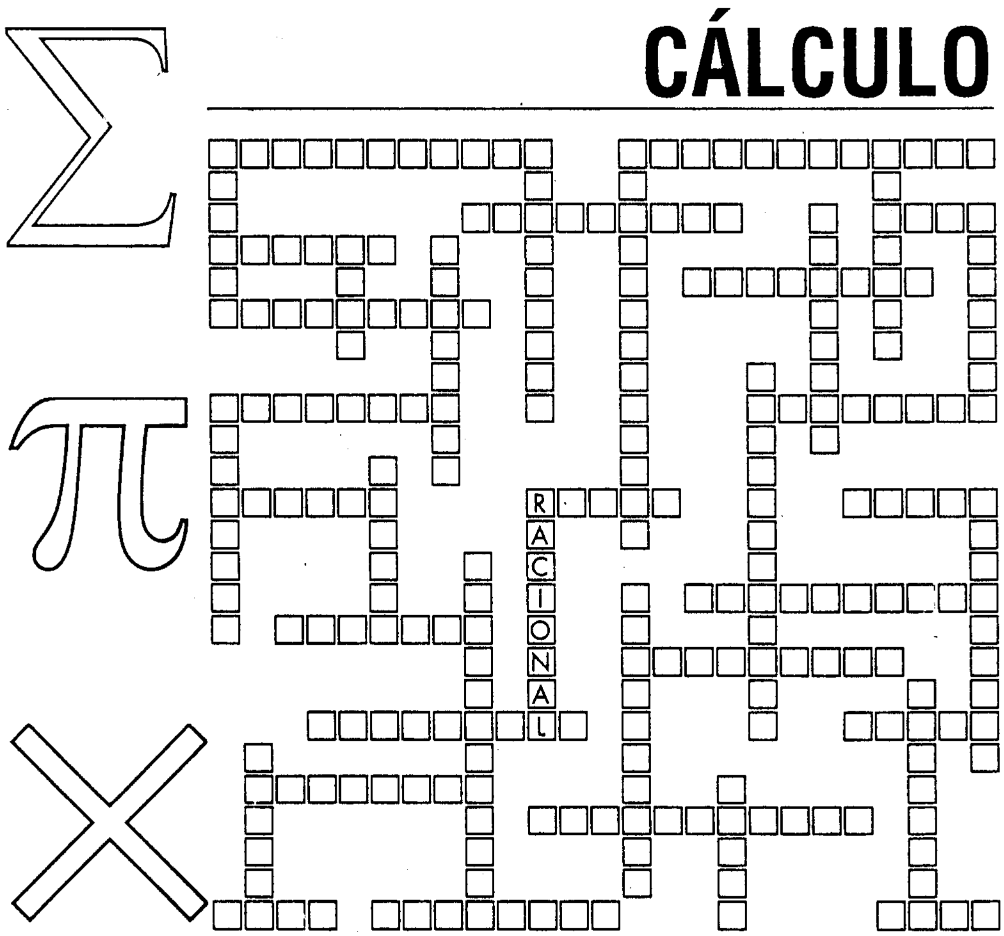
· "Sport cérébral", Paris.

· "Viva" y "Juegos de verano", Diario Clarín, Buenos Aires.

se presentan a continuación diferentes juegos y problemas de lógica-matemática, y juegos de ingenio que son un excelente medio para la utilización y aprendizaje de los métodos teóricos analizados anteriormente, a saber:

· laberintos;
· póker cruzado;
· pirámides numéricas;
· batalla naval;
· número oculto;
· dibujos lógicos (pintando con lógica).
· demostraciones visuales;
· cruzadas;
· clasificaciones;
· la amenaza;
· números flechas;

1. CRUZADAS



4 letras

Raíz
Real
Seno
Suma

5 letras

Grado
Razón
Resta
Valor

6 letras

Coseno
Entero
Límite
Módulo
Número

7 letras

Abscisa
Álgebra
Monomio

8 letras

Integral
Minuendo
Ordenada
Parábola
Potencia
Problema
Producto
~~Racional~~
Tangente
Trinomio

9 letras

Exponente
Expresión
Hipérbola
Logaritmo
Numerador
Operación

10 letras

Cotangente
Multinomio

11 letras

Coeficiente
Permutación

12 letras

Combinatoria
Determinante
Probabilidad

13 letras

Discriminante

MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

9 Letras
Armamento

7 Letras
Invicta
Ligamen
Vegetal

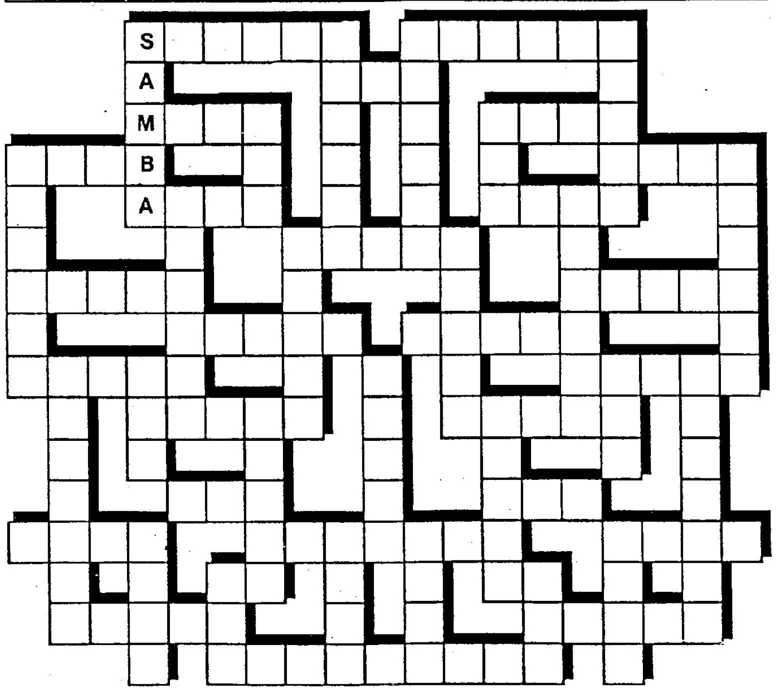
6 Letras
Calima
Masaje
Miopía
Morral
Nocivo
Osario
Sermón
Toisón

5 Letras
Abasi
Alelí
Arena
Ileso
Impar
Lista
Nadir
Oliva
Olivo
Pilas
Primo
Ramal
Rodeo
Rumor
Samba
Sedal
Tahur
Urdir

4 Letras
Amor
Beta
Boda
Cate
Club
Imán
Mico
Nodo
Opus
Seta
Tipo
Visa

3 Letras
Era
Las
Ltd
Mis
Oca
Oms
Oír
Oso
Red

2 Letras
Er
Lo



MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

9 Letras
Entresijo
Falladora

7 Letras
Armazón

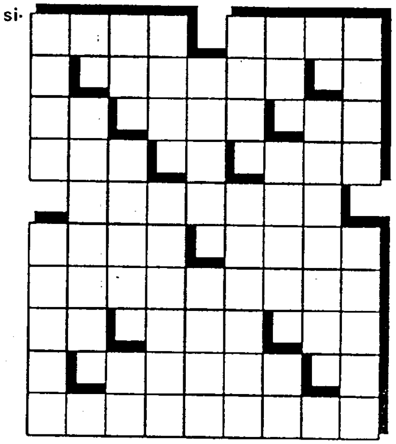
6 Letras
Canora
Italas
Mollar
Zudras

5 Letras
Caras
Ofoue
Ovina
Saldo

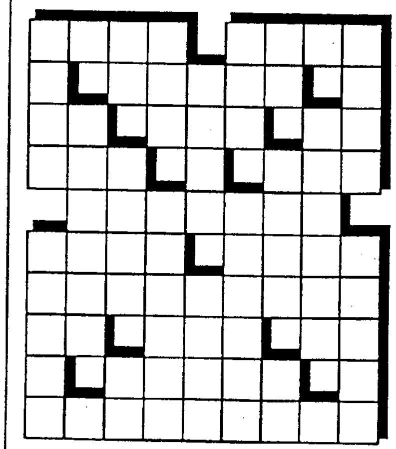
4 Letras
Aare
Adán
Arel
Deca
Dote
Inca
Mono
Niel
Oleo
Unos

3 Letras
Ana
Ave
Ena
Eta
Lar
Mal

2 Letras
Al
Ce
Co
Ct
Da
Os
Si
Ti



MONTAÑAS DE CRUZADAS



Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

9 Letras
Ortología
Santurrón

7 Letras
Irlanda

6 Letras
Anadón
Irisar
Lutero
Norato

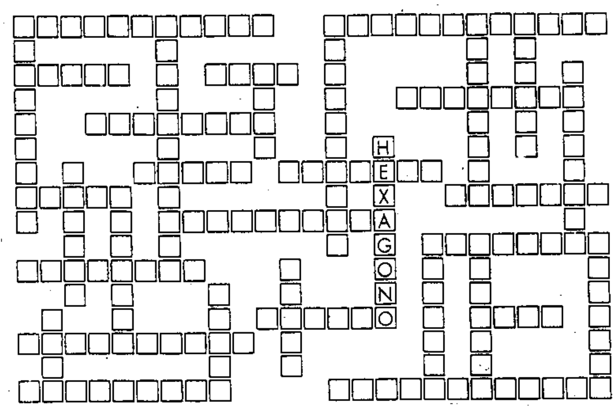
5 Letras
Estro
Ojalá
Onaya
Orate

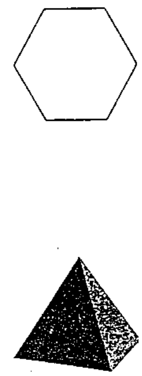
4 Letras
Acta
Adir
Aloe
Ella
Esaú
Faba
Faro
Oido
Orán
Ural

3 Letras
Ají
Alo
Ana
Era
Ico
Oro

2 Letras
Al
Bo
Eg
La
Na
Ot
Ri
Tr

GEOMETRÍA





4 letras

Arco
Bies
Cono
Cubo

5 letras

Agudo
Curva
Globo
Marco
Traza

6 letras

Corona
Radián
Sólido

7 letras

Abierto
Apotema
Bisecar
Regular
Sección
Volumen

8 letras

Bisector
Decágono
Diámetro
~~Hexágono~~
Parábola
Paralelo
Pirámide

9 letras

Cosmorama
Semejante

10 letras

Grafómetro
Lemniscata
Pentagonal

11 letras

Rectangular
Semicírculo

12 letras

Cuadrangular
Perpendículo

2.CLASIFICACIONES

Deduzca los resultados de los seis encuentros de cada uno de los cuadrangulares de fútbol cuyas tablas de posiciones aparecen seguidamente. Recuerde: **G**, partidos ganados; **E**, partidos empatados; **P**, partidos empatados; **F**, goles a favor; y **C**, goles en contra. Cada partido da 2 puntos al ganador, 0 al derrotado y 1 punto a cada uno si es empate. Ayúdese con los pequeños esquemas de la derecha para anotar las soluciones.

1.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	7	1	5
B	1	2	0	2	1	4
C	1	0	2	1	5	2
D	0	1	2	0	3	1

	B	C	D
A			
D			
C			

2.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	3	0	5
B	1	2	0	5	1	4
C	0	2	1	1	3	2
D	0	1	2	0	5	1

	B	C	D
A			
D			
C			

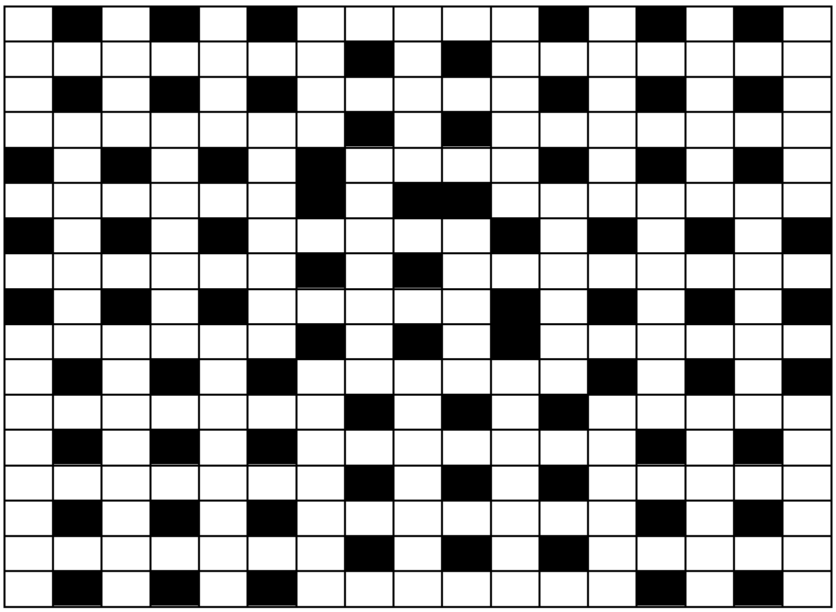
3.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	1	0	4
B	1	2	0	1	0	4
C	1	0	2	1	2	2
D	0	2	1	0	1	2

	B	C	D
A			
D			
C			

3. CRUZEX

Acomode las palabras de la lista en el diagrama, de manera que se crucen correctamente.



4 Letras: Caos, Foca, Galo, Odre, Tren.

5 Letras: Abuso, Ansia, Apodo, Chile, Frisa, Isipo, Olivo, Ovalo, Ubeda.

6 Letras: Atanor, Ballet, Canoas, Carbón, Condón, Cráter, Epocas, Faunos, Impuso, Iterar, Mártir, Osiris, Torsos.

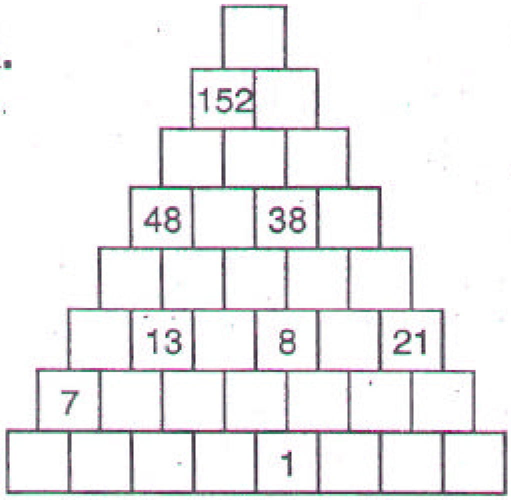
7 Letras: Abrigar, Andorra, Aptitud, Cábalas, Cartago, Coronar, Escapar, Evasivo, Fístula, Ladeada, Narciso, Narigón, Numeral, Obrarán, Obsesos, Océanos, Plátano, Romería, Ruleros, Sonetos.

8 Letras: Centella, Normando, Oníricas, Princesa.

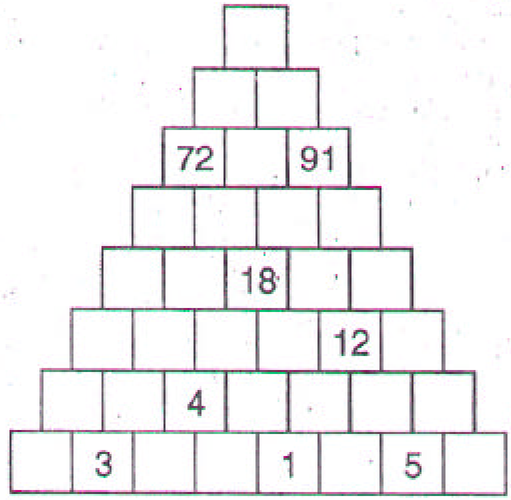
4. PIRÁMIDES NUMÉRICAS

Complete las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga la suma de los dos números de las casillas inferiores. Como los datos se dan, en cada caso, algunos números ya indicados.

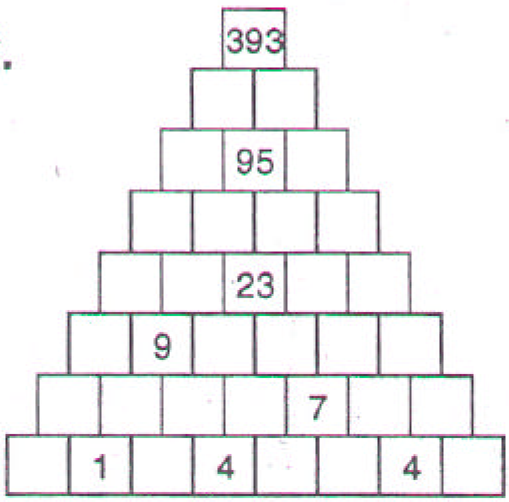
A.


152
48 38
13 8 21
7
1

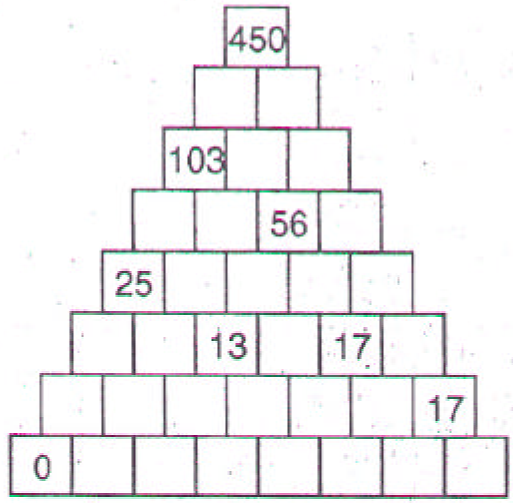
B.


72 91
18
12
4
3 1 5

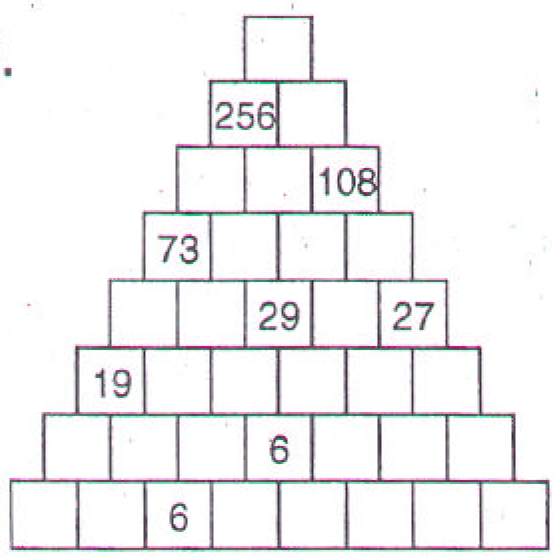
C.


393
95
23
9
7
1 4 4

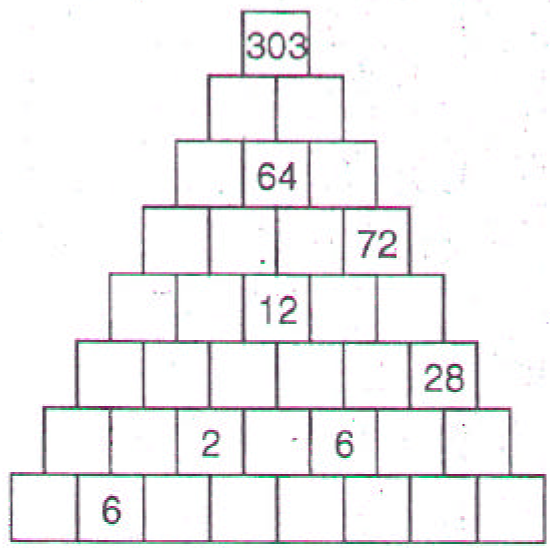
D.


450
103
56
25
13 17
17
0

E.

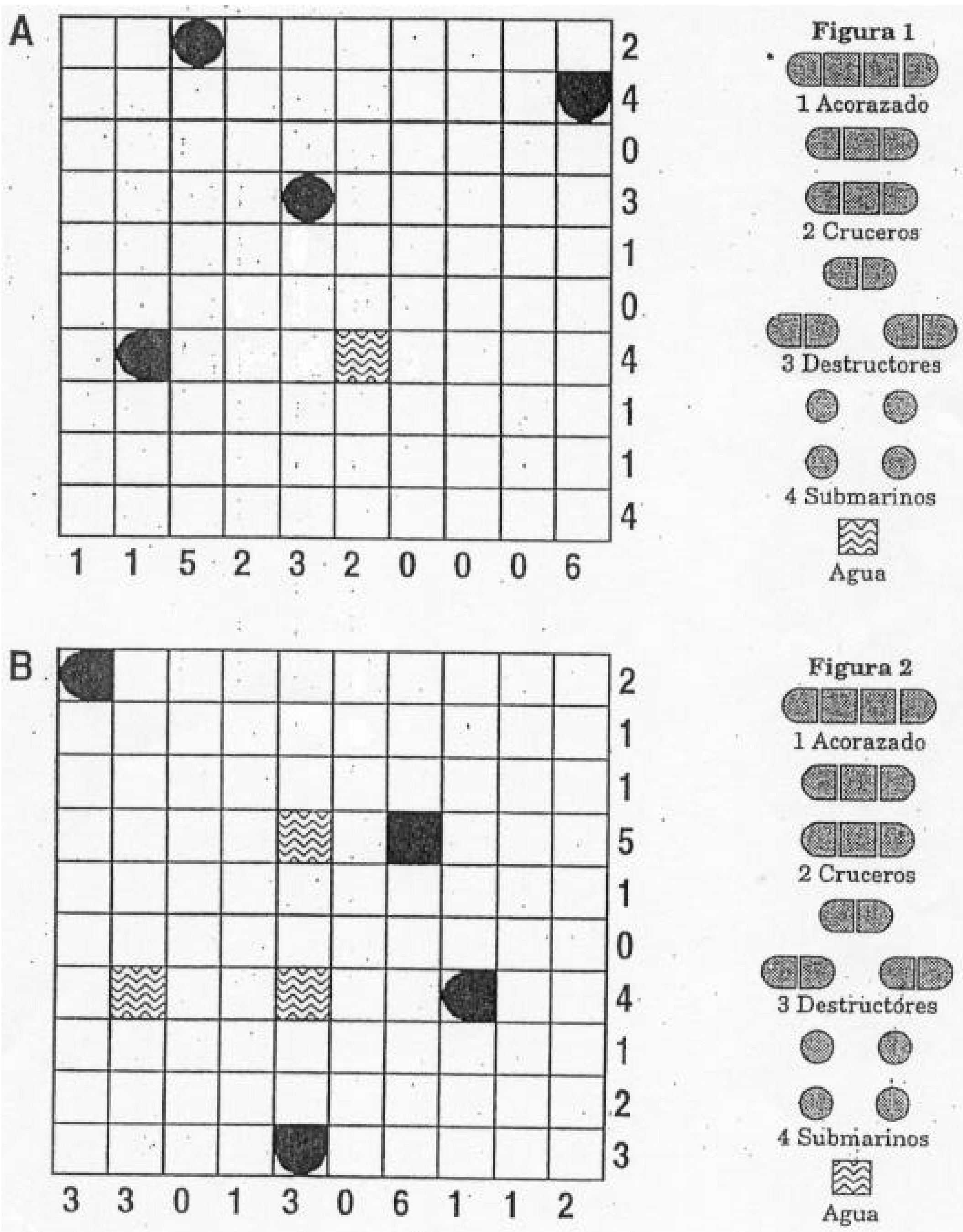

256
108
73
29 27
19
6
6

F.


303
64
72
12
28
2 6
6

5. BATALLA NAVAL

En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota, y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.). Además, al pie de cada columna y al costado derecho de cada fila, se indica con números cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor de cada barco hay agua.



6. LA AMENAZA

En cada tablero, las letras J, K, L, M y N representan un rey, una dama, una torre, un alfil y un caballo de ajedrez, aunque no necesariamente en este orden. Los números indican cuántas de tales piezas amenazan esa casilla. Descubra, para cada tablero, qué pieza es cada letra.

A)

			J				
				O			
		K	L	M			
				1			
				1			
			N				

Rey = Dama = Torre = Alfil = Caballo =

B)

			J				
	K		L	O	M		
			2				
			N	2			

Rey = Dama = Torre = Alfil = Caballo =

7. NÚMERO OCULTO

Cada esquema da pistas con las que se podrá deducir un número compuesto por cuatro cifras distintas (elegidas del 0 al 9), que no empieza con cero. En las columna B (de bien) se indica cuántos dígitos hay allí en común con el número buscado y en la misma posición. En la columna R (de regular) se indica la cantidad de dígitos en común pero en la posición incorrecta.

A)

				B	R
				4	0
4	2	1	8	0	1
7	0	5	1	0	2
6	8	9	0	2	0
7	8	5	9	1	2

B)

				B	R
				4	0
9	2	4	7	1	1
8	4	9	7	0	2
5	1	6	8	2	0
7	1	2	8	3	0

C)

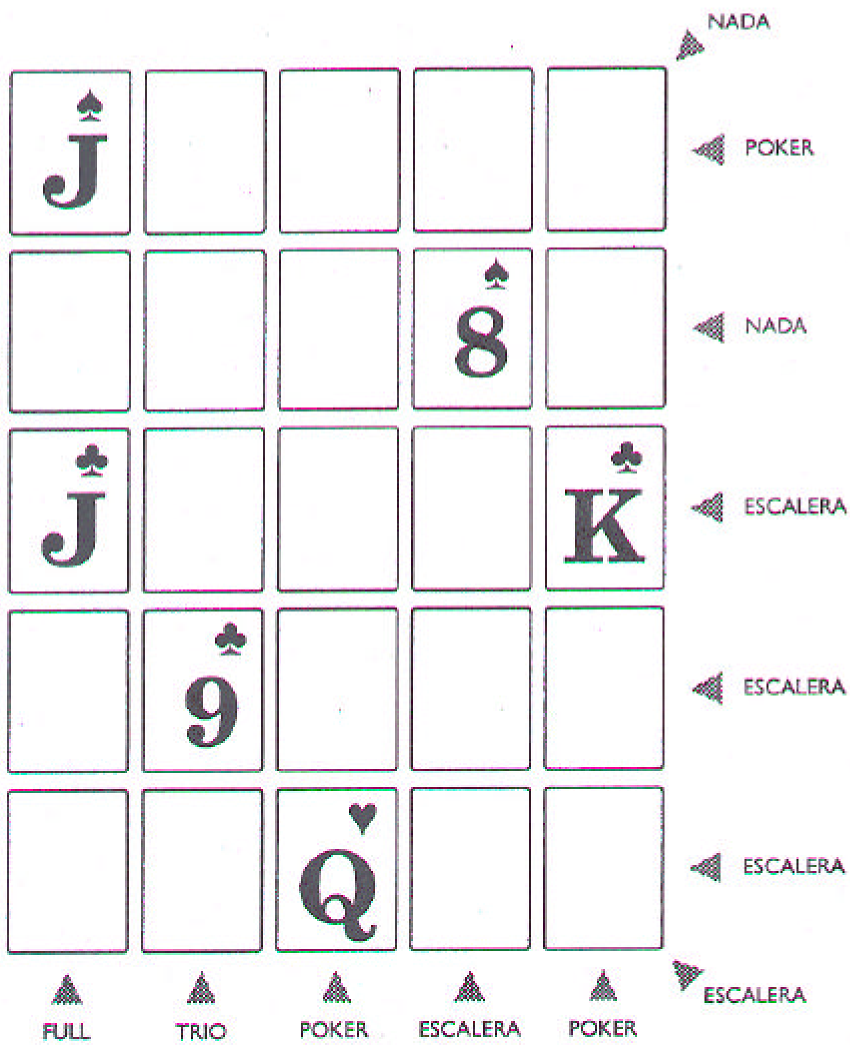
				B	R
				4	0
1	2	7	9	0	2
3	6	1	2	1	0
5	9	4	3	1	1
4	9	6	1	1	1

D)

				B	R
				4	0
2	1	6	8	2	0
6	1	8	7	1	2
4	8	7	6	0	2
7	6	3	4	2	0

8. PÓKER CRUZADO

De un mazo de 28 cartas de póker (con 8, 9, 10, J, Q, K, As) se eligen 25 y se arma un cuadro de 5 x 5 cartas. Quedan 12 "manos" de 5 cartas (5 horizontales, 5 verticales y 2 diagonales). Junto a cada "mano" se indica la combinación que contiene. No es forzoso que las cartas estén ordenadas en cada "mano". Por ejemplo, en la línea que contiene escalera puede estar primero un 9, luego un 8, después una J, etc. Deduzca los valores de todas las cartas. (Sólo se le pide los valores, no los palos). Utilice el cuadro auxiliar para ir señalando las cartas usadas, de manera que no llegue a incluir más de cuatro cartas por cada valor.



COMBINACIONES

PAREJA: Dos cartas de igual valor.
DOBLES PAREJAS: Dos parejas.
TRIO: Tres cartas de igual valor.
FULL: Un trío y una pareja.
POKER: Cuatro cartas de igual valor.
ESCALERA: Cinco cartas de valores consecutivos.
Las escaleras posibles son:
As, 8, 9, 10, J
8, 9, 10, J, Q
9, 10, J, Q, K
10, J, Q, K, As.
NADA: Cuando no se da ninguna de las combinaciones anteriores.

8	9	10	J	Q	K	A
✓	✓		✓	✓	✓	
			✓			

9. NÚMEROS FLECHAS

Cada número inscrito en una casilla con una flecha representa la suma de dígitos de 1 a 9 a ubicar en las casillas vacías en la dirección indicada por la flecha. Reconstruya todo el tablero sabiendo que:

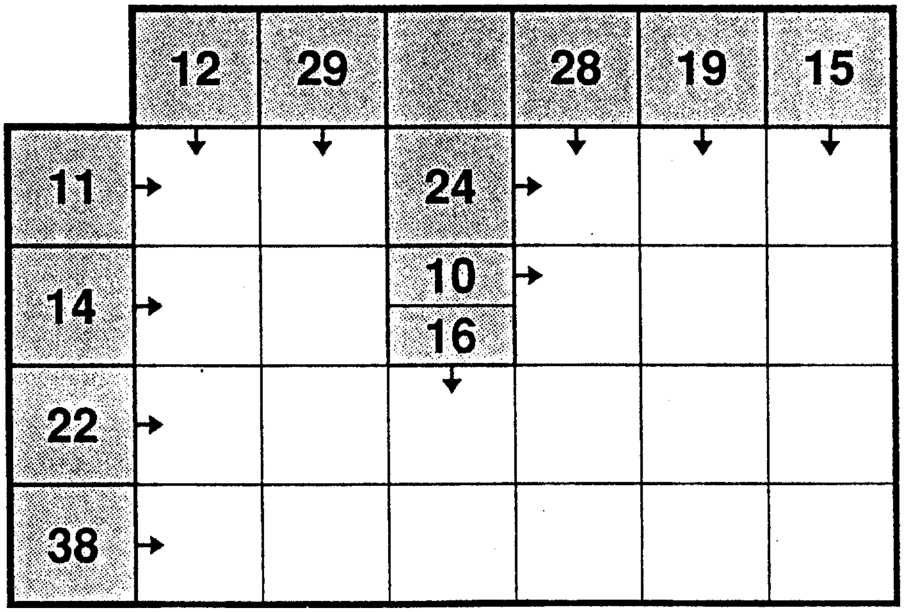
a) la cifra 0 nunca se utiliza;

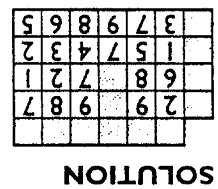
b) para una misma suma, todas las cifras que se utilizan son diferentes (por ejemplo, si la suma es 8 y hay dos casillas vacías en la dirección de la flecha, entonces se debe elegir entre 1+7; 2+6 y 3+5; en ningún caso se debe utilizar 4+4);

c) una misma secuencia de cifras, cualquiera sea el orden, no puede aparecer más de una vez.

Los cálculos son simples pues sólo se suman las cifras de 1 a 9; el resto es cuestión de lógica e ingenio.

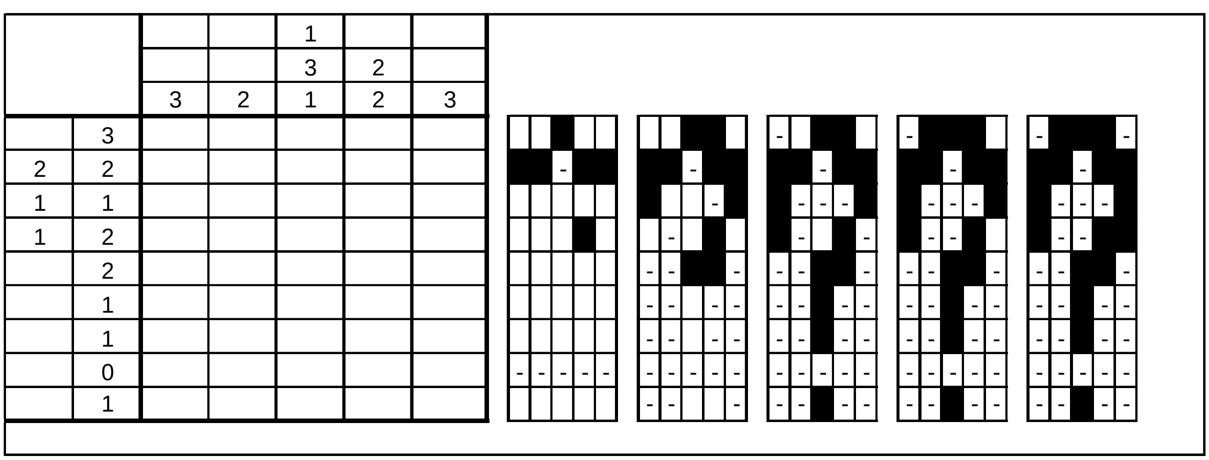
	24 ↓	12 ↓	19 ↓	12 ↓	37 ↓		8 ↓	32 ↓	14 ↓	11 ↓
35 →						11 →				
16 →						25 → / 4 ↓				
20 →				15 → / 6 ↓					29 ↓	30 ↓
11 →			9 → / 8 ↓				17 → / 15 ↓			
	31 ↓	13 → / 18 ↓				29 → / 19 ↓				
7 →				11 → / 12 ↓				14 → / 27 ↓		
26 →					19 → / 17 ↓					
9 →			20 → / 13 ↓				11 → / 16 ↓			
30 →						28 →				
15 →						23 →				





10. DIBUJOS LÓGICOS (PINTANDO CON LÓGICA)

Pinte de negro las casillas, siguiendo los números. En cada columna o fila los números dan, en orden, las cantidades de casillas negras consecutivas. Esas tiras de casillas negras seguidas pueden estar separadas por una o más casillas blancas. A continuación se presenta un ejemplo a través de cinco etapas consecutivas de deducción lógica (se utiliza la notación I-J para indicar la casilla de posición fila I y columna J del mismo modo que en una matriz): en 1-3 va necesariamente negro con lo cual va blanco en la casilla 2-3 y por ende va negro en 2-1, 2-2, 2-4 y 2-5; además, en la cuarta fila se tiene necesariamente negro en la casilla 2-4, y así sucesivamente.



y luego resuelva el siguiente:

					3	11			12	11						13	10			4	4	7			1		
				5	4	1	11	15	2	1	11	10	10	10	16	2	1	11	10	3	2	1	10	8	4	2	2
		2	2																								
	4	4	1																								
		12	3																								
	13	2	2																								
		15	6																								
		15	4																								
		17	4																								
		1	20																								
		1	19																								
	1	14	3																								
4	3	2	2																								
	3	2	2																								
2	1	1	2																								
1	1	1	1																								
1	2	2	2																								
2	2	2	2																								

XIII. REFERENCIAS

1. ALDER H., "*The right brain manager*". Traducción: "*Pensar para la excelencia con el lado derecho de su cerebro*", EDAF, Madrid (1995).

2. ALLEN R., "*Mega mazes*", Mensa Publications, Ebury Press, London (1996).

3. ALVAREZ ALVAREZ A., "*Uso de la calculadora en el aula*", Narcea - MEC, Madrid (1995).

4. ANTON BOZAL J.L. et al., "*Taller de matemáticas*" Narcea - MEC, Madrid (1994).

5. BADRA C., "*Curso: Técnicas de estudio*", Fundación Interamericana de Ciencias de la Educación, Córdoba.

6. BECKER M.E. – PIETROCOLA N. – SANCHEZ C., "*Notas de combinatoria*", Red Olímpica, Buenos Aires (1996).

7. COURANT R. – ROBBINS H., "*What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*", Oxford University Press, Oxford (1946). Revised by I. Stewart (1996).

8. De BONO E., "*Lateral thinking. A textbook of creativity*", Pelican Books, London (1970). Traducción: "*El pensamiento lateral. Manual de creatividad* ", Paidós, Buenos Aires (1996).

9. De GUZMAN M., "*Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*", Pirámide, Madrid (1995)

10. De GUZMÁN M. – COLERA J., "*Matemáticas 1. COU*", Anaya, Madrid (1993).

11. De GUZMÁN M.– COLERA J. – SALVADOR A., "*Matemáticas. Bachillerato 1*", Anaya, Madrid (1993).

12. DESANA R.F., "*XIV Curso sobre dibujo artístico. Como aprender a dibujar activando el hemisferio dercho del cerebro*", Escuela de Posgrado y Educación Continua, FCEIyA, Univ. Nac. de Rosario, Abril-Junio 1999.

13. DICCIONARIO ENCICLOPEDICO LAROUSSE (8 tomos), Planeta Internacional, Barcelona (1992).

14. DUBNOV Y.S., "*Errores de las demostraciones geométricas*", Limusa, México (1973). Es traducción del original ruso.

15. EDWARDS B., "*Drawing on the right side of the brain*", A course in Enchancing Creativity and Artistic Confidence, Penguin Putnam Inc., New York (1989). Expanded and updated version: "*The New drawing on the right side of the brain*", Penguin Putnam Inc., New York (1999).

16. ENCICLOPEDIA ENCARTA, Microsoft Corp. (1997).

17. FAURING P. – GUTIERREZ F., "*Olimpíada Matemática Argentina. Problemas*", Vol. 1 (1993), Vol. 3 (1994), Vol. 4 (1994), Vol. 5 (1994), Vol. 6 (1996), Vol. 7 (1997), Red Olímpica, Buenos Aires.

18. FERNÁNDEZ L. - GOORANSARAB H.- KRANTZ S.G., "*Solutions manual of techniques of problem solving*", American Mathematical Society, Providence (1997).

19. FERNÁNDEZ PÉREZ M., "*Las tareas de la profesión de enseñar*", Siglo 21 Editores, Madrid (1994). (En particular, "Cerebro y aprendizaje", y "Motivación", pág. 257-278).

20. GARDINER A., "*Discovering Mathematics. The art of investigation*", Oxford Univ. Press, Oxford (1998).

21. HARSHMAN E.J., "*Mind-sharpening lateral thinking puzzles*", Sterling Publishing Co. Inc. Traducción: "*Soluciones creativas*", Juegos & Co. SRL, Buenos Aires (1997).

22. HINRICHSEN E. – BUSCHIAZZO N. - FILIPPUTTI S. - HINRICHSEN S.S. de, "*Olimpíada Matemática Argentina. Problemas 2*", Red Olímpica, Buenos Aires (1994).

23. HUNT D.T., "*Desarrolla tu capacidad de aprender*", Ediciones Urano, Barcelona (1997).

24. KRANTZ S.G., "*Techniques of problem solving*", American Mathematical Society, Providence (1997).

25. NELSEN R.B., "*Proofs without words. Exercises in visual thinking*", Mathematical Association of America, Washington (1993).

26. POKRAS S., "*Systematic problem-solving and decisiom- making*", Crisp Publ., Menlo Park (1989). Traducción: "*Cómo resolver problemas y tomar decisiones sistemáticamente*", Grupo Editorial Iberoamérica, México (1992).

27. POLYA G., "*How to solve it. A new aspect of mathematical method*", Princeton University Press (1945). Traducción: "*Cómo plantear y resolver problemas*", Trillas, México (1994).

28. POLYA G., "*Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving*", Vol. I, II, J. Wiley, New York (1962).

29. RABUFFETTI H., "*Temas de álgebra. Lógica*", El Ateneo, Buenos Aires (1989).

30. READER´S DIGEST, "*Los porqués de la mente humana*", México (1992).

31. SANTALÓ L.A., "*Matemática. Iniciación a la creatividad*", Vol. 1 (1993), 2 (1993) y 3 (1995), Kapelusz, Buenos Aires.

32. SEVESO J. – FERRARINI G., "*Olimpíada Matemática Ñandu. Problemas*" Vol. 1 (1994), Vol. 2 (1994), Vol. 3 (1995), Vol. 4 (1996), Vol. 5 (1997), Vol. 6 (1998), Red Olímpica, Buenos Aires.

33. SCHOENFELD A.H., "*A brief and based history of problem solving*", in Teaching and Learning. A Problem-Solving Focus, F.R.Curcio (Ed.), National Council of Teachers of Mathematics, Drive Reston (1987), 27-46.

34. SILVA J.- MIELE P., "*The Silva mind control method. The revolutionary program that´s changed the lives of over half a millon people*", Simon and Schuster, New York (1978). Traducción: "*El método Silva de control mental*", Editorial Diana- Editorial Nuevo Mundo, Buenos Aires (1984).

35. SOIFER A., "*Les mathématiques par la résolution de problemes*", Editions du Choix, Argenteuil (1995).

36. SOLOW D., "*How to read and do proofs*", J. Wiley, New York (1990). Traducción: "*Cómo entender y hacer demostraciones*", Limusa, México (1993).

37. TARZIA D.A., "*Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en matemática*", Parte I (23 páginas), Parte II (15 páginas), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1995). Ver también "*Matemática. Módulo I: cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática*" (62 páginas), cursos 043/96 (Santiago del Estero) y 059/96 (Bariloche) del circuito E, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, Rosario (1997).

38. TARZIA D.A., "*El método de bifurcación y su aplicación en el método progresivo-regresivo. Una metodología que incentiva la creatividad en Matemática*", 8th. Int. Congress on Mathematical Education, ICME-8, Sevilla, 14-21/7/1996.

39. TARZIA D.A., "*Curso de nivelación de Matemática*", McGraw-Hill Interamericana, Santiago de Chile (2000).

40. TARZIA D.A. – GURRUCHAGA N.D., "*Operaciones*", Curso EGB Bloque 2, 2do. Ciclo Área Matemática, Programa Nacional de Capacitación Docente, Red Federal de Formación Docente Continua (Min. Educación Prov. Santa Fe), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1996) (29 páginas). Ver también TARZIA D.A., "*Matemática*", Curso EGB, 3er. Ciclo Área Matemática, Red Federal de Formación Docente Continua (Min. Educación Prov. Córdoba), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1996) (80 páginas).

41. VIRASORO C., "*Pensar para hacer*", A Editores, Buenos Aires (1983).

42. WILLIAMS L.V., "*Teaching for two-sided mind*", Prentice Hall, Englewood Cliffs (1983). Traducción: "*Aprender con todo el cerebro*", Martínez Roca, Barcelona (1986).

NOTAS (sea creativo, descubra un nuevo método o un nuevo juego)

MAT es una publicación del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral (FCE-UA) cuyo objetivo es contribuir a la difusión de conocimientos y resultados matemáticos. Se compone de dos series:

- Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA.
- Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACION MATEMATICA.

La Serie A contiene trabajos originales de investigación y/o recapitulación que presenten una exposición interesante y actualizada de algunos aspectos de la Matemática, además de cursos, conferencias, seminarios y congresos realizados en el Depto. de Matemática. El Director, los miembros del Comité Editorial y Científico y/o los árbitros que ellos designen serán los encargados de dictaminar sobre los merecimientos de los artículos que se publiquen.

La Serie B se compone de cursos especialmente diseñados para profesores de Matemática de cada uno de los niveles de educación: E.G.B., Polimodal, Terciaria y Universitaria.

Además, se publican bajo el título **MAT-** PREPUBLICACIONES DE MATEMATICA, versiones preliminares de trabajos inéditos de investigación de los integrantes del Departamento y colaboradores.

La serie A y las Prepublicaciones podrán ser consultadas en: www.austral.edu.ar/MAT

INFORMACION PARA LOS AUTORES

En cada trabajo deberá constar, en la primer página, a partir de la quinta línea, el título en letras mayúsculas y sin punto final, el nombre de el o los autores, su identificación institucional y su correspondiente dirección postal y electrónica. Se acompañará un resumen que no exceda las 200 palabras en español y otro en inglés, añadiendo en ambos las palabras claves. También se solicita la inclusión de la corresponiente AMS-Mathematics Subject Classification.

Las tablas y gráficos deberán insertarse en el texto y estar numeradas en forma correlativa.

Las referencias bibliográficas se compondrán sólo de los trabajos mencionados en el texto y se incluirán al final, por orden alfabético de autores y en orden cronológico, si existieran varios trabajos del mismo autor; cada una precedida por el correspondiente número de orden, entre corchetes. Las citas en el texto se efectuarán según los siguientes modelos: [1]; Caffarelli & Vazquez [1]; Caffarelli & Vazquez (1995, [1]). Y en la referencia final:

[1] CAFFARELLI L. A. & VAZQUEZ J.L., *A free-boundary problem for the heat equation arising inflame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), pp. 411-441.

[2] FASANO A. & PRIMICERIO M., *Blow-up and regularization for the Hele-Shaw problem*, in *Variational and free boundary problems*, Friedman A. & Spruck J. (Eds.), IMA Math. Appl. Vol. 53, Springer Verlag, New York (1993), pp. 73-85.

[3] RODRIGUES J. F., *Obstacle problems in mathematical physics*, North-Holland Mathematics Studies N. 134, North-Holland, Amsterdam (1987).

Al final de la última página deberán dejarse al menos 2 líneas en blanco para incluir los datos de recepción.

INTERCAMBIOS

Departamento de Matemática – Biblioteca
Facultad de Ciencias Empresariales -Universidad Austral
Servicio de Canje
Paraguay 1950
S2000FZF ROSARIO
ARGENTINA