

MAT

Serie 

Conferencias, Seminarios
y Trabajos de Matemática.

ISSN: 1515-4904

19

VII Italian

Latin American

Conference on

Industrial and

Applied Mathematics

First Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

Departamento
de Matemática,
Rosario,
Argentina
Octubre 2014

UNIVERSIDAD AUSTRAL

FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES



MAT

Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA

ISSN: 1515-4904

Propiedad de ACES

DIRECTOR

D. A. TARZIA Departamento de Matemática – CONICET, FCE-UA,
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA.
dtarzia@austral.edu.ar

COMITE EDITORIAL Y CIENTIFICO

L. A. CAFFARELLI Department of Mathematics, Univ. of Texas at Austin,
RLM 8100 Austin, TEXAS 78712, USA.
caffarel@math.utexas.edu

R. DURAN Departamento de Matemática, FCEyN, Univ. de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria, Pab. 1, 1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.
rduran@dm.uba.ar

A. FASANO Dipartimento di Matematica “U. Dini”, Univ. di Firenze,
Viale Morgagni 67/A, 50134 FIRENZE, ITALIA.
fasano@math.unifi.it

J.L. MENALDI Department of Mathematics, Wayne State University,
Detroit, MI 48202, USA.
jlm@math.wayne.edu

M. PRIMICERIO Dipartimento di Matematica “U. Dini”, Univ. di Firenze,
Viale Morgagni 67/A, 50134 FIRENZE, ITALIA.
primicer@math.unifi.it

C.V. TURNER FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba,
Ciudad Universitaria, 5000 CORDOBA, ARGENTINA.
turner@famaf.unc.edu.ar

R. WEDER Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,
Univ. Nac. Autónoma de México (UNAM)
Apartado Postal 20-726, MEXICO, DF 010000.
weder@servidor.unam.mx

N. WOLANSKI Departamento de Matemática, FCEyN, Univ. de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria, Pab. 1, 1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.
wolanski@dm.uba.ar

SECRETARIA DE REDACCION

A.C. BRIOZZO Departamento de Matemática, FCE-UA,
A.N. CERETANI Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA.

MAT es una publicación del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral (FCE-UA) cuyo objetivo es contribuir a la difusión de conocimientos y resultados matemáticos. Se compone de dos series:

- Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA.

- Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACION MATEMATICA.

La Serie A contiene trabajos originales de investigación y/o recopilación que presenten una exposición interesante y actualizada de algunos aspectos de la Matemática, además de cursos, conferencias, seminarios y congresos realizados en el Departamento de Matemática. El Director, los miembros del Comité Editorial y Científico y/o los árbitros que ellos designen serán los encargados de dictaminar sobre los merecimientos de los artículos que se publiquen. La Serie B se compone de cursos especialmente diseñados para profesores de Matemática de cada uno de los niveles de educación: Primaria, Secundaria, Terciaria y Universitaria.

Los trabajos publicados en MAT-Serie A están indexados en las bases de datos del Mathematical Reviews, MathSciNet y Zentralblatt für Mathematik. Todos los trabajos, en formato pdf y en acceso abierto, pueden ser bajados de:

<http://web.austral.edu.ar/cienciasEmpresariales-investigacion-mat-A.asp>

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 19

VII ITALIAN - LATIN AMERICAN CONFERENCE ON INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS

First Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

INDICE

Graciela M. Croceri - Graciela N. Sottosanto, “Comparación de dos algoritmos de lagrangiano aumentado para el problema de optimización con restricciones de igualdad”, pp. 1-7.

Martha Hilda Timoteo Sánchez - Yolanda Santiago Ayala, “Sobre la existencia y unicidad de la solución de un modelo de propagación del sonido en un fluido compresible”, pp. 9-16.

Carlos Andrés Trujillo-Salazar - Hernán Darío Toro-Zapata, “Análisis teórico de la transmisión y el control del VIH/SIDA en un centro de reclusión”, pp. 17-26.

Santiago C. Rojas Romero, “Sobre el espectro de Fucik para un sistema acoplado”, pp. 27-34.

Manuel Maurette, “A topological approach to the repulsive central motion problem”, pp. 35-42.

Rosario, Octubre 2014

Preface

On December 17-21, 2012, ASAMACI (Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial) co-hosted with AR-SIAM (Argentinean Section of SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, USA), SIMAI (Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale - Italy) and the Department of Mathematics of FCE-Universidad Austral Rosario, the Seventh Italian - Latin American Conference on Industrial and Applied Mathematics (VII ITLA 2012) in the city of Rosario, Argentina.

The International Scientific committee was integrated by Nicola Bellomo (Italy), Mario Primicerio (Italy), Marco Calahorrano (Ecuador), José A. Cuminato (Brazil), Fabián Flores-Bazán (Chile), Obidio Rubio (Peru), Julio Ruiz Claeysen (Brazil), Rubén D. Spies (Argentina) and Domingo Tarzia (Argentina).

The Local Scientific Committee was integrated by Carlos D'Attellis (Univ. Favaloro, UNSAM, Buenos Aires), Javier I. Etcheverry (Tenaris - UBA, Campana - Buenos Aires), Pablo Jacovkis (UBA, Buenos Aires), Cristina Maciel (UNS, Bahía Blanca), Sergio Preidikman (CONICET-UNC, Córdoba), Diana Rubio (UNSAM, Buenos Aires), Rubén D. Spies (IMAL (CONICET-UNL), Santa Fe), Domingo A. Tarzia (CONICET-UA, Rosario), (Chairman) and Cristina V. Turner (CONICET-UNC, Córdoba).

The Local Organizing Committee was integrated by Julieta Bollati, Adriana C. Briozzo, Mariela Cirelli, Ma. Fernanda Natale, Sabrina Roscani, Eduardo A. Santillan Marcus and José Semitiel.

The goals of the meeting were:

- 1) To provide a forum for the discussion and enhancement of Applied Mathematics in the Latin American region;
- 2) To promote the application of Mathematics in Science, Engineering, Computational Science, Industry and Technology;
- 3) To provide media for the exchange of information and ideas between latinamerican and Italian mathematicians;
- 4) To promote interdisciplinary research between different disciplines of Science and Engineering in areas involving Mathematics;
- 5) To encourage and endorse activities for the enhancement and promotion of the education of Applied Mathematics at both undergraduate and graduate levels;
- 6) To promote the interest in Applied Mathematics among all disciplines of Science and Engineering.

All researchers, academics, graduate students, senior undergraduate students, and post-doctoral fellows studying Mathematics, Physics, Chemistry, Economics, Finance and Engineering and other branches of Science were invited to participate in this conference.

The VII ITLA 2012 Conference was sponsored by ANPCyT (National Agency for Promotional of Science and Technology, Argentina), ICIAM (International Council for Industrial and Applied Mathematics), Secretary of Science and Technology (State of Santa Fe, Argentina) and Embassy of Italy at Buenos Aires. This financial support sponsored partially 56 participants.

ITLA is a periodic meeting between Latin American and Italian researchers since 1995, serving as a bridge between European and Latin American scenarios. In the course of successive editions, these meetings have allowed the discussion of new researches in Industrial and Applied Mathematics. Earlier editions of ITLA were held in Porto Alegre - Brazil (I ITLA, January 1995), Rome - Italy (II ITLA, January 1997), Río de Janeiro – Brazil (III ITLA - November 1999), Trujillo -Peru (III ITLA - December 2004), Florence - Italy (V ITLA - July 2007) and Quito - Ecuador (VI ITLA - September

2009). On this occasion this tradition was prolifically continued, being the first meeting held in Argentina. This year's event was very excited to welcome a number of prominent mathematicians from different countries of the world, including Argentina, Brazil, Chile, Colombia, Ecuador, Italy, Peru, Switzerland, United Kingdom and United States of America, and it was a great success with over a hundred researchers, academics, graduate students, senior undergraduate students, and post-doctoral fellows studying Applied Mathematics and other branches of Science in attendance.

The event was structured in eighty presentations: thirty-eight plenary conferences and forty-two contributed presentations, plus three short courses given by Mario Primicerio (Italy), Paolo Marcellini (Italy) and Paolo Podio-Guidugli (Italy).

The main areas addressed by ITLA included Nonlinear Analysis and Applications, Numerical Analysis, Biomathematics, Ordinary Differential Equations and Applications, Partial Differential Equations and Applications, Continuous Mechanics and Applications, Optimization, Optimal Control and Applications, and Inverse Problems and Applications.

The conferences were done by Marco Calahorrano (Ecuador), Gabriel Cárcamo (Chile), José Carcione (Italy), Julio Ruiz Claeysen (Brazil), José A. Cuminato (Brazil), Guillermo Durán (Argentina), Javier Etcheverry (Argentina), Analía Gastón (Argentina), Pablo Jacovkis (Argentina), Rolf Jeltsch (Switzerland), Barbara Lee Keyfitz (USA), Adrián Lew (USA), Pablo Lotito (Argentina), María Cristina Maciel (Argentina), Paolo Marcellini (Italy), Elvira Mascolo (Italy), José Luis Menaldi (USA), Fabio Milner (USA), Jaime Ortega (Chile), Paolo Podio-Guidugli (Italy), Giovanni Porru (Italy), Sergio Preidikman (Argentina), Mario Primicerio (Italy), Héctor Ramirez-Cabrera (Chile), Juan C. Reginato (Argentina), Fabio Rosso (Italy), Diana Rubio (Argentina), Obidio Rubio (Peru), Juan Santos (Argentina), Andrey Sarychev (Italy), Eduardo Serrano (Argentina), Geraldo Nunes Silva (Brazil), Rubén D. Spies (Argentina), Domingo A. Tarzia (Argentina), Cristina V. Turner (Argentina), Stella Vernier Piro (Italy), Vincenzo Vespi (Italy) and Adrián Will (Argentina).

Ultimately, the organizers hoped that the event would inspire to provide the discussion and enhancement of Applied Mathematics and to promote the application of Mathematics in Science, Engineering, Computational Science, Industry and Technology in the Latin American region.

Moreover, during this Conference the first step in order to create the CLAMAI (Latin America Committee for Industrial and Applied Mathematics) and to decide the First Latin America Congress on Industrial and Applied Mathematics were taken.

Domingo A. Tarzia, Ed.

Publications:

From these activities, five communications received during 2013 and accepted on March 2014 are published.

COMPARACIÓN DE DOS ALGORITMOS DE LAGRANGIANO AUMENTADO PARA EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

G. M. Croceri[†] y G.N. Sottosanto[†]

[†]*Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Santa Fe 1400, 8300 Neuquén, Argentina, graciela.croceri@faea.uncoma.edu.ar, graciela.sottosanto@faea.uncoma.edu.ar*

Resumen: En este trabajo se presentan dos algoritmos basados en la minimización secuencial del Lagrangiano Aumentado para resolver el problema de optimización con restricciones de igualdad. Uno de los algoritmos combina una técnica de gradiente conjugado y región de confianza. El segundo utiliza como estrategia de resolución un método de gradiente proyectado, y la convergencia desde cualquier punto inicial, se obtiene mediante un esquema tipo Armijo. Un estimado del multiplicador de Lagrange se actualiza en cada iteración y el parámetro de penalización se modifica para obtener suficiente reducción en la norma de las restricciones. La información de segundo orden, en ambos algoritmos, se actualiza mediante una técnica secante. Los algoritmos fueron implementados en Scilab y se reportan resultados numéricos sobre un conjunto de problemas test de la colección CUTer.

Palabras clave: *Lagrangiano Aumentado, gradiente conjugado, gradiente proyectado, región de confianza, regla de Armijo.*

2000 AMS Subject Classification: 21A54, 55P54

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es hallar la solución $x^* \in R^n$ del problema general de optimización con restricciones de igualdad y cotas sobre las variables

$$\begin{aligned} \underset{s.a.}{\text{mín}} \quad & f(x) \\ & c_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ & l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $f : R^n \rightarrow R$ y $c : R^n \rightarrow R$ son funciones dos veces continuamente diferenciables y donde algunas de las componentes del vector l y u de cotas sobre las variables pueden fijarse en $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente, significando que no existen cotas sobre esas componentes.

Los dos algoritmos que presentamos para resolver (1) están basados en la minimización secuencial del Lagrangiano Aumentado. El método, desarrollado originalmente para resolver el problema de minimización con restricciones de igualdad [11], fue aplicado después a la resolución de problemas de cuadrados mínimos con restricciones de igualdad [6] donde se incorporó una aproximación secante del tipo BFGS [8],[4].

2. LOS ALGORITMOS

El Lagrangiano Aumentado [3] asociado a este problema es ,

$$L_\mu(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x) + \frac{1}{2\mu} \|c(x)\|_2^2, \tag{2}$$

donde λ es el vector de multiplicadores de Lagrange y $\mu > 0$ el parámetro de penalización.

El método es iterativo y para la resolución del problema (1) utiliza dos tipos de iteraciones: externas e internas.

En cada iteración externa se encuentra una solución aproximada x_{k+1} de

$$\underset{x}{\text{mín}} L_\mu(x_k, \lambda_k), \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

donde λ_k es el estimado actual del vector de multiplicadores de Lagrange y $\mu > 0$ es el parámetro de penalización. Ambos parámetros se actualizan al final de cada iteración externa.

En cuanto a la iteración interna, en la que se resuelve el subproblema de minimizar la función Lagrangiano Aumentado, se usaron dos algoritmos que utilizan distintas estrategias, a fin de comparar su performance. El que llamaremos, en lo sucesivo, Algoritmo 1 combina una técnica de gradiente conjugado [14] y región de confianza [5]. El Algoritmo 2 utiliza un método de gradiente proyectado con un esquema del tipo Armijo con el objetivo de lograr convergencia desde cualquier punto inicial.

En el caso del Algoritmo 1, si el problema original posee cotas sobre las variables, se transforma en un problema con restricciones de igualdad agregando variables de holgura. Es decir, para cada i con $i = 1, \dots, n$ se reemplaza $l_i \leq x_i \leq u_i$ por $x_i - u_i + s_i^2 = 0$ y $x_i - l_i - w_i^2 = 0$.

2.1. ALGORITMO 1

El subproblema irrestricto se resuelve usando el método de gradiente conjugado que tiene incorporado una estrategia de región de confianza. El paso se obtiene como solución del problema

$$\min_{\|s\| \leq \delta_k} Q_k(s, \lambda_k, \mu_k), \quad (4)$$

donde Q_k es el modelo cuadrático del Lagrangiano Aumentado alrededor de x_k y $\delta_k > 0$ es el radio de la región de confianza. Si la reducción de la función $L_{\mu}(x_k, \lambda_k)$ en el minimizador del modelo cuadrático es suficiente, se acepta el correspondiente paso de prueba como nuevo iterado, caso contrario, se reduce el radio de la región de confianza de manera estándar [5].

Cuando $\|\nabla L_{\mu_k}(x_{k+1}, \lambda_k)\| \leq \epsilon_k$ para alguna sucesión dada $\{\epsilon_k\}$, $\epsilon \rightarrow 0$, la iteración interna termina, con $x_{k+1} = (x_*)_{k+1}$ y el método regresa a la iteración externa.

Con el método de gradiente conjugado [14] se puede hallar la solución aproximada del subproblema cuadrático a través una técnica *dogleg* de tal manera que la curva solución $s(\delta)$ resulta aproximada por una poligonal. La información de segundo orden se aproxima utilizando estrategias secantes en una forma estructurada.

Aún cuando se involucren matrices arbitrarias, el método resulta bien definido y en caso que la aproximación de la matriz Hessiana sea definida positiva se obtiene convergencia local superlineal en el minimizador local del subproblema irrestricto.

Descripción del Algoritmo 1

Supongamos que están dados $x_k \in R^n$, $\lambda_k \in R^p$, $\|\lambda_k\|_2 \leq M$, $M > 0$, constantes y $0 < \mu_{min} \leq \mu_k$. Dadas, además las tolerancias ϵ_1 y $\epsilon_2 > 0$, los siguientes pasos permiten hallar x_* y su multiplicador asociado λ_* .

Algorithm 2.1 (Algoritmo básico de la iteración externa.)

Paso I. Hallar $(x_*)_{k+1}$, solución aproximada del subproblema de minimización

$$\min_x L_{\mu_k}(x, \lambda_k)$$

usando el algoritmo de gradiente conjugado/región de confianza [14].

Paso II. (Test de convergencia)

- Si $\|\nabla l(x_*)_{k+1}, \lambda_k\|_2 \leq \epsilon_1$ y $\|c((x_*)_{k+1})\|_2 \leq \epsilon_2$ entonces TERMINAR, $(x_*)_{k+1} = x_*$ es la solución aproximada del problema de minimización sin restricciones,
- de lo contrario, actualizar el parámetro de penalización tal que $0 < \mu_{k+1} < \mu_k$.
 - Si $\mu_{k+1} \geq \mu_{min}$ actualizar el estimado del multiplicador e ir al paso I,
 - de lo contrario terminar con la solución aproximada $(x_*)_{k+1} \cong x_*$.

2.2. ALGORITMO 2

Este algoritmo combina un método de gradiente proyectado con una regla tipo Armijo [1], [2].

El algoritmo del gradiente proyectado es una extensión natural del algoritmo de dirección de máximo descenso para el caso de problemas con restricciones de cotas.

En este trabajo seguimos una implementación diseñada por [10] que usa una estrategia BFGS recursiva para actualizar la inversa generalizada de una parte de la matriz Hessiana.

El conjunto factible de este problema es el conjunto

$$\Omega = \{x \in R^n : l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Decimos que la i -ésima restricción es activa en x si $(x)_i = l_i$ ó $(x)_i = u_i$. En cada $x \in \Omega$ los conjuntos de índices $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{I}(x)$ son respectivamente los conjuntos de índices activos e inactivos.

Recordemos que las condiciones de Karush Kuhn y Tucker para el problema (3) establecen que un punto $x_* \in \Omega$ es estacionario para el subproblema si y sólo si

$$x_* = \mathcal{P}(x_* - \alpha \nabla L(x_*))$$

para todo $\alpha \geq 0$, donde \mathcal{P} es la proyección sobre Ω

$$\mathcal{P}(x)_i = \begin{cases} l_i & \text{si } (x)_i \leq l_i \\ (x)_i & \text{si } l_i < (x)_i < u_i \\ u_i & \text{si } (x)_i \geq u_i. \end{cases}$$

El método del gradiente proyectado tiene una propiedad destacada, que consiste en que bajo determinadas condiciones, el conjunto de índices de restricciones activas $\mathcal{A}(x_k)$, a partir de un número determinado k de iteraciones, es el mismo que el que se tiene en la solución $\mathcal{A}(x_*)$. Para asegurar el cumplimiento de esta propiedad, el método tiene que identificar, en cada iteración, el conjunto de restricciones activas.

Dado un iterado actual x_k el nuevo iterado se obtiene como

$$x_+ = \mathcal{P}(x_k - \alpha \nabla L_\mu(x_k)),$$

donde α es un parámetro de longitud de paso correspondiente a una regla tipo Armijo, de manera tal que asegure suficiente decrecimiento en la función objetivo. Para $\alpha > 0$ se define

$$x(\alpha) = \mathcal{P}(x - \alpha \nabla L_\mu(x)).$$

Para el caso de restricciones de cotas sobre las variables, la condición de suficiente decrecimiento se expresa como

$$L_\mu(x(\alpha)) - L_\mu(x) \leq \frac{-\beta}{\alpha} \|x - x(\alpha)\|^2,$$

donde β es un parámetro cuyo valor típico es 10^{-4} .

Como criterio de terminación para nuestro algoritmo elegimos $\|x_k - \mathcal{P}(x_k - \nabla L_\mu(x_k))\| < \epsilon$ para cierta tolerancia ϵ .

En la implementación que usamos en este trabajo, a efectos de mejorar la convergencia del método, en lugar de elegir como dirección de descenso, la opuesta a la del gradiente, se usa un vector d que se actualiza recursivamente premultiplicando por una aproximación secante estructurada de la inversa generalizada de la matriz Hessiana.

Descripción del Algoritmo 2

Supongamos que están dados $x_k \in R^n$, $\lambda_k \in R^p$, $\|\lambda_k\|_2 \leq M$, $M > 0$, constantes y $0 < \mu_{min} \leq \mu_k$. Dadas, además las tolerancias ϵ_1 y $\epsilon_2 > 0$, los siguientes pasos permiten hallar x_* y su multiplicador asociado λ_* .

Algorithm 2.2 (Algoritmo básico de la iteración externa)**Paso I.** Hallar $(x_*)_{k+1}$, solución aproximada del subproblema de minimización

$$\begin{aligned} \min_x \quad & L_\mu(x, \lambda) \\ \text{s.a} \quad & l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

usando el algoritmo de gradiente proyectado con búsqueda lineal tipo Armijo y actualización BFGS de la inversa de la matriz Hessiana [10].

Paso II. (Test de convergencia)

- Si $\|(x_*)_{k+1} - \mathcal{P}((x_*)_{k+1} - \nabla l((x_*)_{k+1}, \lambda_k))\|_2 \leq \epsilon_1$ and $\|c((x_*)_{k+1})\|_2 \leq \epsilon_2$ entonces TERMINAR,
 $(x_*)_{k+1} = x_*$ es la solución aproximada del problema,
- de lo contrario, actualizar el parámetro de penalización tal que $0 < \mu_{k+1} < \mu_k$.
 - Si $\mu_{k+1} \geq \mu_{min}$ actualizar el estimado del multiplicador e ir al paso I,
 - de lo contrario terminar con la solución aproximada $(x_*)_{k+1} \cong x_{x_*}$.

2.3. ACTUALIZACIÓN DEL PARÁMETRO DE PENALIZACIÓN

Un punto determinante del método de Lagrangiano Aumentado es la elección del parámetro de penalización μ_k . Para asegurar convergencia global se debe generar una sucesión no decreciente $\{\mu_k\}$. Aunque los métodos pueden ser formulados con p diferentes parámetros de penalización, uno para cada componente de $c(x)$, en la práctica, esto no presenta ventajas numéricas.

Para ello, empleamos, en el Algoritmo 1, el siguiente esquema: Si $\|c(x_{k+1})\|_2$ no es suficientemente menor que $\|c(x_k)\|_2$ entonces el parámetro de penalización es disminuido por la regla $\mu_{k+1} = \varphi \mu_k$ donde $\varphi \in (0, 1)$. Aquí consideramos que $\|c(x_{k+1})\|_2$ debe ser menor que $0,05\|c(x_k)\|_2$. El comportamiento del parámetro de penalización es independiente del vector de multiplicadores. Nuestro criterio para actualizar el vector de multiplicadores es mantenerlo constante a lo largo de la minimización cuasi Newton y actualizarlo al final del mismo, por medio de alguna fórmula. En este trabajo, elegimos una fórmula de primer orden para actualizar el vector de multiplicadores de Lagrange,

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{1}{\mu_k} c_k.$$

Cuando el problema se resuelve aproximadamente utilizando el algoritmo 2, se mide la condición $\|c(x_k)\|_2 < \epsilon$. Si esta se cumple, el parámetro de penalización no se cambia para la siguiente iteración porque su valor actual está produciendo un nivel aceptable de violación de las restricciones y el multiplicador se actualiza con una fórmula de primer orden. Caso contrario, se aumenta el parámetro de penalización para asegurar que la siguiente iteración pondrá más énfasis en la disminución de las restricciones y el multiplicador no se actualiza [13].

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Los algoritmos fueron codificados en Scilab en entorno LINUX. A fin de evaluar su performance, se resolvieron 100 problemas test con restricciones de igualdad y cotas sobre las variables de la colección CUTer [9] y se realizaron dos tipos de comparaciones. En todas ellas los parámetros utilizados en nuestra implementación numérica son los siguientes: $\epsilon_1 = 10^{-5}$ y $\epsilon_2 = 10^{-5}$ y $\mu_{min} = 10^{-10}$. El multiplicador inicial, λ_0 , y el punto inicial, x_0 de cada problema era el proporcionado por CUTer.

Por un lado se evaluó el desempeño de los dos algoritmos planteados y por otro, ambos se compararon con un nuevo algoritmo basado en la estrategia de región de confianza [12]. En este último, en cada iteración, el paso de prueba se obtiene minimizando una aproximación cuadrática de la función Lagrangiano Aumentado en la región de confianza. La función Lagrangiano Aumentado se utiliza también como función

de mérito para decidir si el paso de prueba es aceptado. Un estimado del multiplicador de Lagrange se actualiza en cada iteración, y el parámetro de penalización se modifica para conseguir una reducción suficiente en la norma de la violación de las restricciones. A este algoritmo lo llamaremos Algoritmo 3.

Utilizamos la técnica de *performance profile* propuesta por Dolan y Moré [7] para mostrar el comportamiento de cada algoritmo en el conjunto de problemas test considerados.

En la figura 1 se muestra el desempeño observado basado en el número de evaluaciones de funciones en las iteraciones externas de los Algoritmos 1 y 2. El Algoritmo 1 en el 77 % de los casos resulta más eficiente que el Algoritmo 2 y la superioridad del primero es clara.

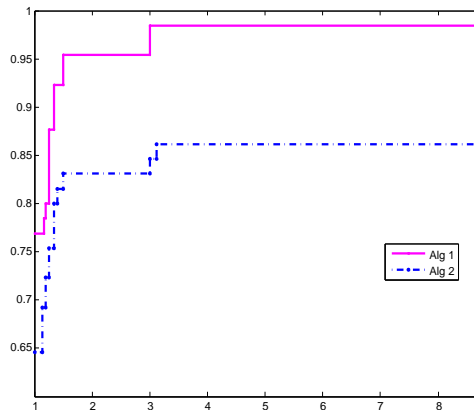


Figura 1: Número de evaluaciones de funciones en las iteraciones externas

En las figuras 2 (a) y (b) se muestran los resultados obtenidos respecto del número de evaluaciones de funciones en las iteraciones internas de los Algoritmos 1 y 2 para diferentes rangos. En el caso (a) se muestra el desempeño en el intervalo $[0, 50]$ y en el (b), $[0, 25]$. Aquí el Algoritmo 2 se impone sobre el 1 en aquellos problemas que requieren menor tiempo de ejecución y ocurre lo contrario con los que requieren mayor tiempo.

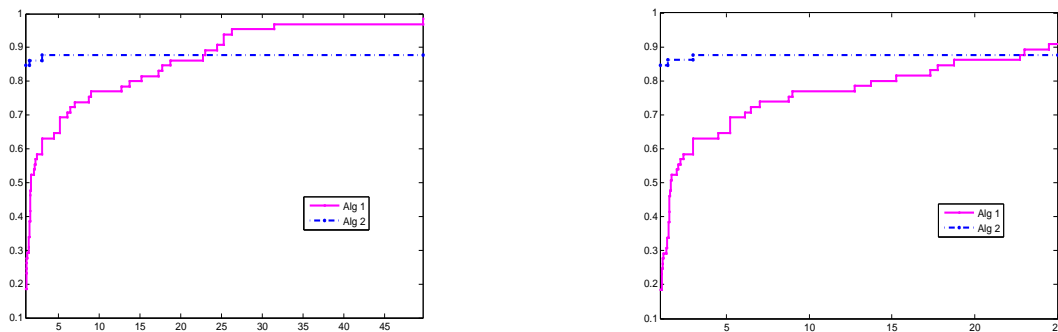


Figura 2: Número de evaluaciones de funciones en las iteraciones internas (a) $[0, 50]$, (b) $[0, 25]$.

En la figura (3) se muestran los resultados relacionados con el número de evaluaciones externas de los Algoritmos 1 y 3. Se ve que el Algoritmo 1 resulta ganador en el 98 % de los casos estudiados y tienen comportamientos similares en $[32, 45]$.

En la figura 4 (a) y (b) se observa la performance para los Algoritmos 1 y 3 respecto del número de iteraciones externas de funciones para distintos rangos, $[0, 100]$ y $[0, 25]$ respectivamente. Es claro que el comportamiento del Algoritmo 2 es, en general, superior al 3.

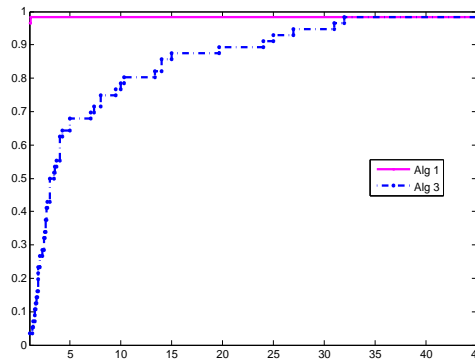


Figura 3: Número de evaluaciones de funciones en las iteraciones externas

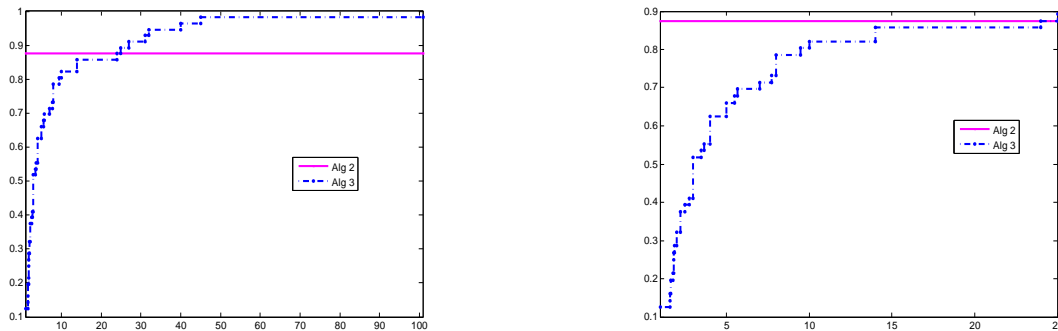


Figura 4: Número de evaluaciones de funciones en las iteraciones externas (a) $[0, 100]$, (b) $[0, 25]$.

4. CONCLUSIONES

Hemos propuesto dos algoritmos de Lagrangiano Aumentado, para resolver el problema general de optimización con restricciones de igualdad y cotas sobre las variables, que combinan diferentes técnicas y estrategias globalizadoras.

Los algoritmos fueron comparados entre sí y con un tercer algoritmo de región de confianza.

Las pruebas mostraron que entre los dos algoritmos de Lagrangiano Aumentado, el que usa una estrategia de región de confianza resultó más eficiente para problemas que requieren más tiempo de ejecución, y en todos los casos, el número de evaluaciones de funciones en las iteraciones externas fue inferior.

Cuando los dos algoritmos de Lagrangiano Aumentado se compararon con el tercer algoritmo de región de confianza, los test mostraron que, en general, resultaron más eficientes para problemas que requieren menos tiempo de ejecución, y frente al algoritmo propuesto por Niu y Yuan [12], este último requiere mayor cantidad de evaluaciones de funciones en las iteraciones externas.

REFERENCIAS

- [1] D.P. BERTSEKAS, *On the Goldstein-Levitin-Polyak Gradient Projection Method*, IEEE Transactions on Automatic Control, 21 (1976), pp.174-184.
- [2] D.P. BERTSEKAS, *Projected Newton methods for optimization problems with simple constraints*, SIAM J. Control Optim, 20 (1982), pp.221-246.

- [3] D.P. BERTSEKAS, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Athenas Scientific, 1996.
- [4] J.E. DENNIS Y R.B. SCHNABEL, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, 1996.
- [5] A.R. CONN, N.I.M. GOULD Y PH.L. TOINT, *Trust-Region Methods*, SIAM, 2000.
- [6] G.M. CROCI, M.C. MACIEL Y G.N. SOTTOSANTO, *Augmented penalty algorithms based on BFGS secant approximations and trust regions*, *Applied Numerical Mathematics*, 57 (2007), pp.320-334.
- [7] E. DOLAN Y J. MORÉ, *Bechmarking optimization software with performance profiles*, *Mathematical Programming*, 91(2002), pp.201-213.
- [8] R. FLETCHER, *Practical Methods of Optimization*, John Wiley, 1987.
- [9] N.I.M. GOULD, D. ORBAN Y PH.L. TOINT, *CUTEr (and SifDec), a constrained and unconstrained testing environment, revisited*, Technical Report TR/PA/01/04 (2001), CERFACS.
- [10] C.T. KELLEY, *Iterative Methods for Optimization*, SIAM, 1999.
- [11] M.C. MACIEL Y G.N. SOTTOSANTO, *An augmented penalization algorithm for the equality constrained minimization problem*, *Seleta do XXIV CNMAC*, 3(2002), pp.171-180.
- [12] L. NIU Y Y. YUAN, *A new trust-region algorithm for nonlinear constrained optimization*, *Journal of Computational Mathematics*, Vol.28, No.1 (2010), pp. 72-86.
- [13] C.J. NOCEDAL Y S. WRIGHT, *Numerical Optimization*, Springer, 2006.
- [14] T. STEihaug, *The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization*, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(1983), pp.626-637.

SOBRE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UN MODELO DE PROPAGACIÓN DEL SONIDO EN UN FLUÍDO COMPRESIBLE

Martha Hilda Timoteo Sánchez^b y Yolanda Santiago Ayala[†]

^b*Departamento Académico de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Calle Germán Amézaga 375, Lima-Perú, mtimoteos@unmsm.edu.pe, http://www.unmsm.edu.pe.*

[†]*Departamento Académico de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Calle Germán Amézaga 375, Lima-Perú, yssantiago@gmail.com, http://www.unmsm.edu.pe.*

Resumen: Estudiamos un modelo que describe la evolución del sonido vía problemas de Transmisión. Asumiendo que el modelo tiene coeficientes constantes a trozos y bajo adecuadas condiciones geométricas en el dominio y de interfaces, probaremos mediante un espacio funcional adecuado la existencia y unicidad de la solución del problema, para lo cual usamos una variante del resultado dado por J. Lions y Duvaut [1] vía la Teoría de Semigrupos.

Palabras clave: *Propagación del sonido, Problema de Transmisión y Teoría de Semigrupos .*

2000 AMS Subject Classification: 35Q99, 35L99

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de transmisión fueron considerados por J.-L. Lions [6] y S. Nicaise [7],[8] para las ecuaciones de onda. La controlabilidad en la frontera para una clase de segundo orden de sistemas hiperbólicos fue estudiado por Lagnese [5]. El modelo que estudiamos incluye un término de tipo memoria. Incluir términos de tipo memoria en las ecuaciones o en la frontera son muy naturales en los problemas que surgen en viscoelasticidad. La condición de frontera con términos de tipo memoria para las ecuaciones de Maxwell fueron introducidos por Fabrizio y Morro [2] y ha sido investigado en [4].

2. PRELIMINARES

Teorema 1 *Sea Ω un conjunto abierto acotado cuya frontera Γ es una variedad de dimensión $(n - 1)$, de clase C^1 , Ω está localmente a un solo lado de Γ . $C^1(\bar{\Omega})$ designa el espacio de las funciones de clase C^1 sobre $\bar{\Omega}$ y $C^1(\bar{\Omega})$ es denso sobre $H^1(\Omega)$, (ver [1]).*

Definición 1 $(C_K^1(\bar{\Omega}))^3$ es el espacio de las funciones vectoriales de clase C^1 sobre $\bar{\Omega}$ y con soporte compacto en $\bar{\Omega}$, (ver [1]).

Teorema 2 *Supongamos que Ω tiene una frontera Γ regular y acotada entonces $(C_K^1(\bar{\Omega}))^3$ es denso sobre $H(Div; \Omega)$, (ver [1]).*

Definición 2 *Sea el espacio $H(Div; \Omega) := \{v \in (L^2(\Omega))^n / Div v \in L^2(\Omega)\}$ normado por*

$$\|v\|_{H(Div; \Omega)} = \left\{ \|v\|_{0, \Omega}^2 + \|Div v\|_{0, \Omega}^2 \right\}^{1/2} \quad (1)$$

Claramente, $H(Div; \Omega)$ es un espacio de Hilbert para la norma (1), (ver [3]).

Teorema 3 *Si Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n con frontera Γ continua, Lipchiziana y acotada entonces $D(\bar{\Omega})^n = H(Div; \Omega)$, (ver [3]).*

Teorema 4 *Sea O una región acotada de \mathbb{R}^3 con frontera regular ∂O y la aplicación*

$$W_0 : [C^1(\bar{O})]^3 \rightarrow C^1(\partial O) / W_0(u) = u \bullet \eta,$$

donde $\eta = \eta(x)$ denota el vector normal unitario en $x \in \partial O$ apuntando al exterior de \bar{O} . Entonces W_0 se extiende por continuidad a la aplicación lineal

$$W : H(\text{Div}, O) \rightarrow H^{-1/2}(\partial O) \quad / \quad W(u) = u \bullet \eta.$$

Prueba. Sea $\varphi \in H^{1/2}(\partial O)$ entonces $\exists \phi \in H^1(O)$ tal que $\phi|_{\partial O} = \varphi$ (por el Teorema del trazo). Para un elemento arbitrario $u = (u_1, u_2, u_3) \in H(\text{Div}, \Omega)$, definimos la función $F_u : H^{1/2}(\partial \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_u(\varphi) = \int_O \{\phi \text{Div } u + u \bullet \text{Grad } \phi\} dx$$

Supongamos que $\psi \in H^1(O)$ tal que $\psi|_{\partial O} = \phi$, claramente $(\phi - \psi) \in H^1(O)$. Debido a la continuidad de la función trazo tenemos

$$\|\phi - \psi\|_{H^1(O)} \leq \|\phi|_{\partial O} - \psi|_{\partial O}\|_{H^{1/2}(\partial O)} = \|\varphi - \varphi\|_{H^{1/2}(\partial O)} = 0 \quad \text{entonces} \quad \phi = \psi \quad (2)$$

De (2), $F_u(\xi)$ no depende de la elección de ϕ . Por otro lado, F_u esta acotado en $H^{1/2}(\partial O)$,

$$|F_u(\varphi)| \leq \int_O |\phi| |\text{Div } u| dx + \int_O |u| |\text{Grad } \phi| dx \leq C \|\phi\|_{H^1(O)} \|\text{Div } u\|_{H(\text{Div}, O)}$$

donde C es una constante positiva. Por lo tanto, $\exists W(u) \in H^{-1/2}(\partial O)$ tal que $F_u(\varphi) = \langle W(u), \varphi \rangle_{\partial O}$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial O}$ denota la dualidad entre $H^{1/2}(\partial O)$ y $H^{-1/2}(\partial O)$. \square

3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^3 con frontera $\partial \Omega$ suave, la cual consiste de dos superficies cerradas disjuntas S_0 y S_1 , es decir $\Omega = D_0 \setminus \bar{D}_1$ donde D_0 y D_1 son dominios abiertos y acotados, $\bar{D}_1 \subset D_0$ con $\partial D_0 = S_0$ y $\partial D_1 = S_1$, como se muestra en la Figura 1. Supongamos que Ω está ocupado por un fluido

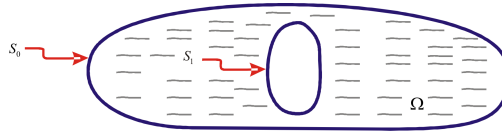


Figura 1: Dominio Ω

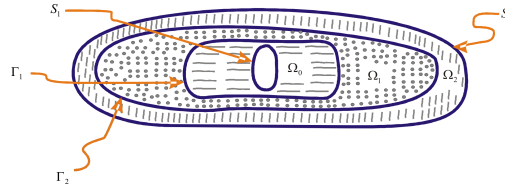
compresible no homogéneo. Un conocido modelo lineal que describe la evolución del sonido en un fluido compresible es

$$\beta(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Grad } p = 0, \quad \gamma(x) \frac{\partial p}{\partial t} + \text{Div } u = 0, \quad (3)$$

donde $p = p(x, t)$ denota la presión acústica, $u = (u_1, u_2, u_3)$ con $u_j = u_j(x, t)$ es la velocidad del cuerpo, $\beta(x) > 0$ es la densidad de equilibrio y $\gamma(x)$ es la compresibilidad. Las condiciones de frontera del problema (3) son

$$\begin{cases} p = 0 \text{ en } S_1 \times (0, +\infty) \\ u \bullet \eta = \alpha(x) p + a(x) \int_0^t p(x, s) e^{-\sigma(x)(t-s)} ds \text{ en } S_0 \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (4)$$

donde $\eta = \eta(x)$ denota al vector normal unitario apuntando al exterior de Ω en $x \in \partial \Omega$.


 Figura 2: $n=3$

3.1. PROBLEMA DE TRANSMISIÓN

Sea Ω y $\partial\Omega$ como en la Figura 1 y supongamos que Ω está construido de la siguiente forma: fijamos un entero $n > 1$ y para cada $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sea $D_1 \subset B_k \subset D_0$, B_k un subconjunto abierto acotado con frontera suave tal que $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$. Denotamos por $\Omega_0 = B_1 \setminus \overline{D_1}$ y $\Omega_k = B_{k+1} \setminus \overline{B_k}$ para $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, $\Omega_{n-1} = D_0 \setminus \overline{B_{n-1}}$. La Figura 2 ilustra esta situación.

$$\Omega_0 = B_1 \setminus \overline{D_1}, \quad \Omega_1 = B_2 \setminus \overline{B_1}, \quad \Omega_2 = B_3 \setminus \overline{B_2}, \quad \Gamma_1 = \partial B_1 \text{ y } \Gamma_2 = \partial B_2.$$

Definimos el problema de Transmisión para cada $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ por

$$\beta^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + \text{Grad } p^{(k)} = 0, \quad \gamma^{(k)} \frac{\partial p^{(k)}}{\partial t} + \text{Div } u^{(k)} = 0 \quad (5)$$

Con condiciones iniciales: $u^{(k)}(x, 0) = f^{(k)}(x)$ y $p^{(k)}(x, 0) = \psi^{(k)}(x)$, $x \in \Omega_k$ y $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Las condiciones de frontera para $\{u, p\}$ en S_0 y S_1 son las mismas como en (4). En las superficies (las interfaces) los elementos $\{u^{(k)}, p^{(k)}\}$ son requeridas para satisfacer

$$\begin{cases} u^{(k)} \cdot \eta = u^{(k-1)} \cdot \eta \\ p^{(k)} = p^{(k-1)} \end{cases} \quad (6)$$

para $(x, t) \in \Gamma_k$ y $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. En (5)-(6), $\beta^{(k)}, \gamma^{(k)}, u^{(k)}, p^{(k)}$ denotan las restricciones de las correspondientes funciones en Ω_k . Consideraremos las siguientes condiciones:

HIPÓTESIS

- Las funciones $\beta(x)$ y $\gamma(x)$ en (3) son funciones constantes a trozos de $\overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, las cuales pierden continuidad solo en Γ_k , $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y sus restricciones a Ω_k satisfacen las condiciones

$$\beta^{(k)} := \beta|_{\Omega_k} > 0, \quad \gamma^{(k)} := \gamma|_{\Omega_k} > 0 \text{ para } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

- Las funciones $\alpha(x)$, $a(x)$ y $\sigma(x)$ son real-valuadas de $S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, pertenecen a $C^1(S_0)$ con $\alpha(x) > 0$, $a(x) \geq 0$ y $\sigma(x) > 0$.

De (4) definimos

$$q(x, t) := \int_0^t p(x, s) e^{-\sigma(x)(t-s)} ds \quad \text{en } S_0 \times (0, +\infty),$$

que es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\sigma q + p \text{ con condición inicial } q(x, 0) = 0. \quad (7)$$

3.2. ESPACIOS DE HILBERT \mathcal{H}_0 Y \mathcal{H}_1

Consideremos los siguientes espacios de Hilbert

$$\mathcal{H}_0 = \{w = (u, p, q) \text{ donde } u \text{ es una función vectorial, } p \text{ y } q \text{ son funciones escalares/} \\ u = (u_1, u_2, u_3) \in [L^2(\Omega_k)]^3, p \in L^2(\Omega_k) \text{ y } q \in L^2(S_0)\}.$$

con producto interno

$$\langle w, \tilde{w} \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega_k} \left\{ \beta^{(k)} u^{(k)} \bullet \tilde{u}^{(k)} + \gamma^{(k)} p^{(k)} \tilde{p}^{(k)} \right\} dx + \int_{S_0} a^{(k)} q \tilde{q} d\Gamma$$

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ w = (u, p, q) \in \mathcal{H}_0 / \text{Div } u \in L^2(\Omega_k) \text{ y } \text{Grad } p \in [L^2(\Omega_k)]^3 \right. \\ \left. \text{para } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \right\}.$$

con producto interno

$$\langle w, \tilde{w} \rangle_{\mathcal{H}_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega_k} \left\{ \beta^{(k)} u^{(k)} \bullet \tilde{u}^{(k)} + \gamma^{(k)} p^{(k)} \tilde{p}^{(k)} + \text{Grad } p^{(k)} \bullet \text{Grad } \tilde{p}^{(k)} \right\} dx + \int_{S_0} a^{(k)} q \tilde{q} d\Gamma$$

Nota 1 Si $(u, p, q) \in \mathcal{H}_1$ entonces $p \in L^2(\Omega_k)$ y $\text{Grad } p \in [L^2(\Omega_k)]^3$. Por lo tanto, $p \in H^1(\Omega_k)$ para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, luego por el Teorema del trazo, p está bien definido en Γ_k , $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ así como también en S_0 y S_1 . Definimos a la función p en la frontera de Ω_k de la siguiente forma:

$$\gamma_0 : H^1(\Omega_k) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_k) \quad \text{tal que} \quad \gamma_0(p) = p|_{\partial\Omega_k}.$$

Si $p \in H^1(\Omega_k)$ entonces

$$\gamma_0(p) = p^{(k)}(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega_k,$$

para $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$.

Si $p \in H^1(\Omega_{n-1})$ entonces

$$\gamma_0(p) = \begin{cases} p^{(n-1)}(x, t), & (x, t) \in \Gamma_{n-1} \\ 0, & (x, t) \in S_1. \end{cases}$$

Por lo tanto, $p \in H^{1/2}(\Gamma_k)$, $p \in H^{1/2}(S_0)$ y $p \in H^{1/2}(S_1)$.

3.3. DEFINICIÓN DEL OPERADOR A

De (3) tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\beta} \text{Grad } p \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \text{Div } u. \quad (8)$$

Luego, de las ecuaciones (7) y (8) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\beta} \text{Grad} & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} \text{Div} & 0 & 0 \\ 0 & I & -\sigma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \\ q \end{bmatrix} \quad (9)$$

El sistema obtenido en (9) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Y_t = AY \\ Y(0) = (u(x, 0), p(x, 0), q(x, 0))^T = (f(x), \Psi(x), 0)^T. \end{cases} \quad (10)$$

El operador $A : D(A) \subseteq \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ queda definido por

$$A(u, p, q) = \left(-\frac{1}{\beta} \text{Grad } p, -\frac{1}{\gamma} \text{Div } u, p - \sigma q \right) \quad (11)$$

con dominio

$$\begin{aligned} D(A) &= \{w = (u, p, q) \in \mathcal{H}_0 / Aw = w_t \in \mathcal{H}_0 \text{ y las condiciones de frontera}\} \\ D(A) &= \left\{ w = (u, p, q) \in \mathcal{H}_1 / u^{(k)} \bullet \eta = u^{(k-1)} \bullet \eta, \quad p^{(k)} = p^{(k-1)} \text{ en } \Gamma_k, \right. \\ &\quad \left. k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \text{ con } p = 0 \text{ en } S_1 \text{ y } u \bullet \eta = \alpha p + a q \text{ en } S_0 \right\} \end{aligned}$$

Mediante el Teorema del Trazo se consigue demostrar que $D(A)$ es un subespacio cerrado en \mathcal{H}_1 . Así mismo, por el Teorema del Trazo, el Teorema 3 y el Teorema 4 se demuestra que $D(A)$ es denso en \mathcal{H}_0 .

3.4. OPERADOR ADJUNTO A^*

Ahora determinaremos el operador adjunto de A

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \left\langle (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}), \left(-\frac{1}{\beta} \text{Grad } p, -\frac{1}{\gamma} \text{Div } u, -\sigma q - p \right) \right\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ \langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega_k} \left\{ -\tilde{u}^{(k)} \bullet \text{Grad } p^{(k)} - \tilde{p}^{(k)} \text{Div } u^{(k)} \right\} dx - \int_{S_0} a \tilde{q} \sigma q d\Gamma + \int_{S_0} a \tilde{q} p d\Gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

Usando la Generalización del Teorema de Green en la ecuación (12) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{\Omega_k} p^{(k)} \text{Div } \tilde{u}^{(k)} dx - \int_{\partial\Omega_k} p^{(k)} \tilde{u}^{(k)} \bullet \eta_1 d\Gamma + \int_{\Omega_k} u^{(k)} \bullet \text{Grad } \tilde{p}^{(k)} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial\Omega_k} \tilde{p}^{(k)} u^{(k)} \bullet \eta_2 d\Gamma \right\} - \int_{S_0} a \tilde{q} \sigma q d\Gamma + \int_{S_0} a \tilde{q} p d\Gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

Supongamos que $\tilde{p}^{(k)} = \tilde{p}^{(k-1)}$ en Γ_k , $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y $\tilde{p} = 0$ en S_1 entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial\Omega_k} \tilde{p}^{(k)} u^{(k)} \bullet \eta_2 d\Gamma = \int_{S_0} \tilde{p} u \bullet \eta_2 d\Gamma. \quad (14)$$

Así mismo, supongamos que $\tilde{u}^{(k)} \bullet \eta_1 = \tilde{u}^{(k-1)} \bullet \eta_1$ en Γ_k , $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial\Omega_k} p^{(k)} \tilde{u}^{(k)} \bullet \eta_1 d\Gamma = \int_{S_0} p \tilde{u} \bullet \eta_1 d\Gamma. \quad (15)$$

Reemplazando (14) y (15) en (13) tenemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{\Omega_k} p^{(k)} \text{Div } \tilde{u}^{(k)} dx + \int_{\Omega_k} u^{(k)} \bullet \text{Grad } \tilde{p}^{(k)} dx \right\} - \int_{S_0} p \tilde{u} \bullet \eta_1 d\Gamma \\ &\quad - \int_{S_0} \tilde{p} u \bullet \eta_2 d\Gamma - \int_{S_0} a \tilde{q} \sigma q d\Gamma + \int_{S_0} a \tilde{q} p d\Gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

Como $w \in D(A)$ entonces $u \bullet \eta_2 = \alpha p + a q$, luego en (16) conseguimos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{\Omega_k} p^{(k)} \text{Div } \tilde{u}^{(k)} dx + \int_{\Omega_k} u^{(k)} \bullet \text{Grad } \tilde{p}^{(k)} dx \right\} - \int_{S_0} p \tilde{u} \bullet \eta_1 d\Gamma \\ &\quad - \int_{S_0} \tilde{p} (\alpha p + a q) d\Gamma - \int_{S_0} a \tilde{q} \sigma q d\Gamma + \int_{S_0} a \tilde{q} p d\Gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Finalmente, supongamos que $\tilde{u} \bullet \eta_1 = -\alpha \tilde{p} + a \tilde{q}$ en S_0 , reemplazando en (17) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{\Omega_k} p^{(k)} \operatorname{Div} \tilde{u}^{(k)} dx + \int_{\Omega_k} u^{(k)} \bullet \operatorname{Grad} \tilde{p}^{(k)} dx \right\} - \int_{S_0} p(-\alpha \tilde{p} + a \tilde{q}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{S_0} \tilde{p}(\alpha p + a q) d\Gamma - \int_{S_0} a \tilde{q} \sigma q d\Gamma + \int_{S_0} a \tilde{q} p d\Gamma. \end{aligned}$$

Eliminando algunos términos tenemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{\Omega_k} p^{(k)} \operatorname{Div} \tilde{u}^{(k)} dx + \int_{\Omega_k} u^{(k)} \bullet \operatorname{Grad} \tilde{p}^{(k)} dx \right\} \\ &\quad + \int_{S_0} a q(-\sigma \tilde{q} - \tilde{p}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

Las condiciones asumidas anteriormente nos permiten definir el operador adjunto $A^* : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ como

$$A^*(\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}) = \left(\frac{1}{\beta} \operatorname{Grad} \tilde{p}, \frac{1}{\gamma} \operatorname{Div} \tilde{u}, -\sigma \tilde{q} - \tilde{p} \right)$$

con dominio

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \left\{ \tilde{w} = (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}) \in \mathcal{H}_1 \mid \tilde{u}^{(k)} \bullet \eta = \tilde{u}^{(k-1)} \bullet \eta \text{ y } \tilde{p}^{(k)} = \tilde{p}^{(k-1)}, \right. \\ &\quad \left. k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \text{ con } \tilde{p} = 0 \text{ en } S_1 \text{ y } \tilde{u} \bullet \eta = -\alpha \tilde{p} + a \tilde{q} \text{ en } S_0 \right\}. \end{aligned}$$

Luego, el lado derecho de la ecuación (18) se puede escribir

$$\langle \tilde{w}, Aw \rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle \left(\frac{1}{\beta} \operatorname{Grad} \tilde{p}, \frac{1}{\gamma} \operatorname{Div} \tilde{u}, -\sigma \tilde{q} - \tilde{p} \right), (u, p, q) \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle A^* \tilde{w}, w \rangle_{\mathcal{H}_0}$$

Finalmente usando el Teorema del Trazo y densidad se demuestra que $D(A^*)$ es denso en \mathcal{H}_0 .

3.5. OPERADOR ADJUNTO DE A^*

Siguiendo un proceso similar a la sección anterior podemos determinar el operador adjunto de A^*

$$\left\langle \tilde{w}, A^* \tilde{w} \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle \left(-\frac{1}{\beta} \operatorname{Grad} \tilde{p}, -\frac{1}{\gamma} \operatorname{Div} \tilde{u}, -\sigma \tilde{q} + \tilde{p} \right), (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}) \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle A^{**} \tilde{w}, \tilde{w} \right\rangle_{\mathcal{H}_0}$$

siempre que $A^{**} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ tal que

$$\begin{aligned} D(A^{**}) &= \left\{ \tilde{w} = (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}) \in \mathcal{H}_1 \mid \tilde{u}^{(k)} \bullet \eta = \tilde{u}^{(k-1)} \bullet \eta \text{ y } \tilde{p}^{(k)} = \tilde{p}^{(k-1)}, k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \right. \\ &\quad \left. \text{con } \tilde{p} = 0 \text{ en } S_1 \text{ y } \tilde{u} \bullet \eta = \alpha \tilde{p} + a \tilde{q} \text{ en } S_0 \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^{**}(\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}) = \left(-\frac{1}{\beta} \operatorname{Grad} \tilde{p}, -\frac{1}{\gamma} \operatorname{Div} \tilde{u}, -\sigma \tilde{q} + \tilde{p} \right). \quad (19)$$

De (11) y (19) tenemos

$$A = A^{**}. \quad (20)$$

Los operadores A y A^* son densamente definidos. El operador A^{**} es cerrado en \mathcal{H}_0 . Por lo tanto de (20), el operador A es cerrado en \mathcal{H}_0 .

Lema 1 *Asumiendo las Hipótesis dadas líneas arribas, entonces, ambos operadores A y A^* son disipativos, esto es,*

$$\langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}_0} \leq 0 \quad \text{para algún } w \in D(A), \quad \langle A^* \tilde{w}, \tilde{w} \rangle_{\mathcal{H}_0} \leq 0 \quad \text{para algún } \tilde{w} \in D(A).$$

Prueba. Definamos el conjunto G y demostraremos que $\overline{G} = D(A)$,

$$G = \left\{ w = (u, p, q) \text{ funciones suaves a trozos} \mid u = (u_1, u_2, u_3) \in (C^1(\Omega_k))^3, p \in C^1(\Omega_k), \right. \\ \left. k \in \{0, 2, \dots, n-1\} \text{ y } q \in C(S_0) \text{ con condiciones en la frontera, } u^{(k)} \bullet \eta = u^{(k-1)} \bullet \eta \right. \\ \left. \text{ y } p^{(k)} = p^{(k-1)} \text{ en } \Gamma_k, p = 0 \text{ en } S_1 \text{ y } u \bullet \eta = \alpha p + aq \text{ en } S_0 \right\}.$$

Sea $(u, p, q) \in D(A)$ entonces $u^{(k)} \in H(\text{div}, \Omega_k)$, $p^{(k)} \in H^1(\Omega_k)$ y $q \in L^2(S_0)$. Del Teorema 2, $\exists u_m^{(k)} \in [C_K^1(\overline{\Omega}_k)]^3$ tal que $u_m^{(k)} \rightarrow u^{(k)}$ en $H(\text{div}, \Omega_k)$.

Por otro lado, del Teorema 1, $\exists p_m^{(k)} \in C^1(\overline{\Omega}_k)$ tal que $p_m^{(k)} \rightarrow p^{(k)}$ en $H^1(\Omega_k)$, y $\exists q_m \in C^1(S_0)$ tal que $q_m \rightarrow q$ en $L^2(S_0)$.

Definamos la siguiente sucesión en $\overline{\Omega}$:

$$u_m = \begin{cases} u_m^{(0)} & \text{en } \overline{\Omega}_0, \\ u_m^{(1)} & \text{en } \overline{\Omega}_1, \\ \vdots & \\ u_m^{(n-1)} & \text{en } \overline{\Omega}_{n-1}. \end{cases}$$

Además de la Definición 1, $u_m^{(k)} \in [C^1(\overline{\Omega}_k)]^3$ y con soporte compacto en $\overline{\Omega}_k$. Así que, $u_m^{(k)} = 0$ en $\partial\Omega_k$. Lo mismo sucede para $u_m^{(k-1)} = 0$ en $\partial\Omega_{k-1}$. Por lo tanto, $u_m^{(k)} \bullet \eta = u_m^{(k-1)} \bullet \eta = 0$ en Γ_k . Así mismo, definimos la sucesión:

$$p_m = \begin{cases} p_m^{(0)} & \text{en } \Omega_0, \\ p_m^{(1)} & \text{en } \Omega_1, \\ \vdots & \\ p_m^{(n-1)} & \text{en } \Omega_{n-1}. \end{cases}$$

con $p_m = 0$ en $\partial\Omega$, $p_m^{(k)} = p_m^{(k-1)}$ en Γ_k para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

De las definiciones anteriores tenemos que $u_m \bullet \eta = \alpha p_m + a q_m$ en S_0 . Luego, $(u_m, p_m, q_m) \in D(A)$. Por lo tanto, $\overline{G} = D(A)$.

Sea $w = (u, p, q) \in G$, tomando el producto interno de Aw y w en \mathcal{H}_0 obtenemos

$$\begin{aligned} \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}_0} &= \left\langle \left(-\frac{1}{\beta} \text{Grad } p, -\frac{1}{\gamma} \text{Div } u, -\sigma q + p \right), (u, p, q) \right\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega_k} \left\{ \text{Grad } p^{(k)} \bullet u^{(k)} + \text{Div } u^{(k)} p^{(k)} \right\} dx - \int_{S_0} a(x) (-\sigma q^2 + pq) d\Gamma \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial\Omega_k} u^{(k)} \bullet \eta p^{(k)} d\Gamma + \int_{S_0} a(x) (\sigma q^2 - pq) d\Gamma. \end{aligned} \quad (21)$$

De las condiciones en la frontera, $u^{(k-1)} \bullet \eta = u^{(k)} \bullet \eta$ y $p^{(k-1)} = p^{(k)}$ en Γ_k , $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ entonces obtenemos

$$\int_{\Gamma_k} u^{(k-1)} \bullet \eta p^{(k-1)} d\Gamma - \int_{\Gamma_k} u^{(k)} \bullet \eta p^{(k-1)} = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (22)$$

Usando (22) en (21) obtenemos

$$\langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}_0} = \int_{S_1} u^{(0)} \bullet \eta p^{(0)} d\Gamma - \int_{S_0} u^{(n-1)} \bullet \eta p^{(n-1)} d\Gamma - \int_{S_0} a(x) (\sigma q^2 - pq) d\Gamma. \quad (23)$$

También,

$$p^{(0)} = p = 0 \text{ en } S_1 \text{ entonces } \int_{S_1} u^{(0)} \bullet \eta p^{(0)} d\Gamma = 0 \quad (24)$$

y

$$u^{(n-1)} \bullet \eta p^{(n-1)} = u \bullet \eta p = (\alpha p + a q)p = (\alpha p^2 + a p q) \text{ en } S_0$$

$$\text{entonces } \int_{S_0} u^{(n-1)} \bullet \eta p^{(n-1)} d\Gamma = \int_{S_0} (\alpha p^2 + a p q) d\Gamma. \quad (25)$$

Reemplazando (24), (25) en (23) tenemos

$$\begin{aligned} \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}_0} &= - \int_{S_0} (\alpha p^2 + a p q) d\Gamma - \int_{S_0} a(x) (\sigma q^2 - pq) d\Gamma \\ &= - \int_{S_0} (\alpha p^2 + a \sigma q^2) d\Gamma \leq 0, \forall w \in G. \end{aligned} \quad (26)$$

Por densidad, tenemos que si $w \in D(A)$ entonces $\exists w_m \in G$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = w$. Dado que $w_m \in G$ entonces de (26) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle Aw_m, w_m \rangle_{\mathcal{H}_0} &\leq 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \langle Aw_m, w_m \rangle_{\mathcal{H}_0} &\leq 0, \\ \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} Aw_m, \lim_{m \rightarrow \infty} w_m \right\rangle_{\mathcal{H}_0} &\leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Como A es cerrado en \mathcal{H}_0 entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} Aw_m = Aw$. Por lo tanto en (27), tenemos

$$\langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}_0} \leq 0. \quad (28)$$

De la ecuación (28), tenemos que A es disipativo. \square

Calculos similares nos permiten probar que A^* es disipativo. En conclusión tenemos que A y A^* son operadores disipativos, y A es un operador cerrado definido densamente, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ (ver [9]). Así, la solución única de (10) es

$$Y(t) := U(t)Y(0).$$

REFERENCIAS

- [1] G. DUVAUT AND J.-L. LIONS, *Les inéquations in Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, (1972).
- [2] M. FABRIZIO AND A. MORRO, *A boundary condition with memory in electromagnetism*, Arch. Rational Mech. Anal., 136 (1996), pp. 359-381.
- [3] GIRAULD, VIVETTE AND RAVIART, PIERRE-ARNAUD, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin and New York, (1979).
- [4] B. V. KAPINOTOV AND G. PERLA MENZALA, *Uniform stabilization for Maxwell equations with boundary conditions with memory*, Asymptotic Analysis 26 (2001), pp. 91-104.
- [5] J. E. LAGNESE, *Boundary controllability in problems of transmission for a class of second order hyperbolic systems*, ESAIM: Control, Optim. and Calculus of Variations, 2 (1997), pp. 343-357.
- [6] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1, Contrôlabilité exacte*, Coll. RMA, 8 (1988), Masson, Paris
- [7] S. NICAISE, *Boundary exact controllability of interface problems with singularities. I: addition of the coefficients of singularities*, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 1512-1532.
- [8] S. NICAISE, *Boundary exact controllability of interface problems with singularities. II: addition of internal control*, SIAM J. Control Optim., 35 (1997), pp. 585-603.
- [9] A. PAZY *Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, (1983).

ANÁLISIS TEÓRICO DE LA TRANSMISIÓN Y EL CONTROL DEL VIH EN UN CENTRO DE RECLUSIÓN

Trujillo-Salazar Carlos Andrés^b y Toro-Zapata Hernán Darío^b

^b*Programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío, Carrera 15 calle 12 Norte, Armenia, Quindío, Colombia, www.uniquindio.edu.co*

Resumen: Se modela la transmisión del VIH en una cárcel para hombres, considerando transmisión de la enfermedad solo por vía sexual, tanto por contacto entre hombres internos, como por contacto de hombres internos con mujeres que acuden a visita conyugal. La población masculina se divide en internos susceptibles de adquirir la infección, internos portadores VIH sin diagnosticar e internos portadores VIH diagnosticados. La población de mujeres que efectúan visita conyugal se divide en mujeres susceptibles de adquirir la infección y mujeres infectadas con VIH. Se plantea un sistema de cinco ecuaciones diferenciales no lineales, que posteriormente se modifica incorporando un control preventivo en todas las tasas de transmisión. El objetivo es optimizar tal control empleando la técnica clásica del Principio del Máximo de Pontryagin. Esta técnica implica el planteamiento de un problema de contorno, que es simulado para obtener conclusiones y establecer medidas que en teoría, ayuden a mantener bajos niveles de internos infectados.

Palabras clave: *VIH, Centro de reclusión, Control óptimo, Problema de contorno*

2000 AMS Subject Classification: 93C15, 92C50, 92B05

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, uno de los retos más grandes para la salud pública a nivel mundial, consiste en la reducción de la transmisión del VIH; esto, debido entre otros factores, a su naturaleza de epidemia y a su impacto en la salud, en lo económico, en lo social y en lo político. En este orden de ideas, se han logrado identificar elementos que hacen a ciertos grupos poblacionales más vulnerables que otros frente a la infección por VIH. Estos factores pueden clasificarse en: epidemiológicos (mayor probabilidad de adquirir el VIH por el hecho de pertenecer a un grupo con una prevalencia más elevada), sociales (estar privado de atención médica y otros derechos), económicos (incapacidad de evitar el riesgo y de tener acceso a medicina y salud en general) y políticos (sus necesidades no son tenidas en cuenta en la formulación de políticas y proyectos). De acuerdo con lo anterior, se pueden distinguir diferentes grupos poblacionales que podrían considerarse como de mayor vulnerabilidad frente al VIH, entre ellos, las personas privadas de libertad en las cárceles. Resulta entonces pertinente estudiar y plantear estrategias de control para el VIH teniendo como escenario un centro de reclusión [8], [9].

La relevancia del estudio de la dinámica de transmisión del VIH en los centros de reclusión colombianos se fundamenta en varios factores, pero se hace especial énfasis en dos de ellos. El primero tiene que ver con el panorama poco alentador que dejó en evidencia la Defensoría del Pueblo colombiana en el año 2010, cuando presentó un informe sobre la ejecución del decreto 1141 de 2009 (reglamentación de la afiliación de la población reclusa al Sistema General de Seguridad Social en Salud), en el cual manifiesta que la prestación de los servicios de salud en términos de acciones preventivas, terapéuticas y rehabilitadoras corresponden a la principal falla del INPEC (Instituto Nacional Penitenciario y Carcelario), organismo encargado de los asuntos carcelarios en Colombia [4]. El segundo factor tiene que ver con las visitas conyugales en las cárceles masculinas, para lo cual el INPEC establece todos los domingos como días permitidos para este tipo de visitas, a excepción del primer domingo de cada mes, el cual se destina para la visita de niños y por lo tanto se impide el acceso a las celdas por parte de los visitantes.

Teniendo en cuenta lo anterior y conociendo la importancia que tiene el modelado matemático en el estudio de epidemias, se realiza un análisis de la dinámica de transmisión del VIH en un centro de reclusión para hombres, utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias. Es importante resaltar, que el modelado matemático ha hecho aportes significativos al campo epidemiológico, al menos desde lo teórico. Para corroborar esta aseveración, puede consultarse un trabajo clásico como [2], o algunos más recientes tales como [1] y [7].

2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Se modela la transmisión del VIH en un centro de reclusión para hombres y se tiene en cuenta el efecto que las visitas conyugales puedan tener en la dinámica de la enfermedad. La población se considera dividida en internos susceptibles de adquirir la infección $v = v(t)$, internos portadores del VIH sin diagnosticar $w = w(t)$, internos portadores del VIH diagnosticados $x = x(t)$. De manera semejante, se asume que la población de mujeres en visita conyugal se divide en mujeres susceptibles de adquirir la infección $y = y(t)$ y mujeres infectadas con VIH, $z = z(t)$.

En el modelo se considera que la enfermedad se transmite solo por vía sexual; así, los internos susceptibles pueden adquirir la infección por contacto con mujeres infectadas con una probabilidad ρ y por contacto con internos portadores sin diagnosticar con una probabilidad β . Del mismo modo, las mujeres susceptibles pueden adquirir el virus por contacto sexual con internos portadores sin diagnosticar con una probabilidad ψ . Se denota con θ la tasa de diagnóstico.

Un supuesto importante es que la tasa de crecimiento de las mujeres en visita es igual a la tasa de ingreso de los internos Δ ; esto indica que cada interno que es recluido "llega" con su compañera, y del mismo modo cuando el interno es liberado o trasladado, ella se va con él a una tasa de liberación o traslado μ . Con estos supuestos, el modelo toma la forma

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \Delta - \beta vw - \rho vz - \mu v \\ \frac{dw}{dt} = \beta vw + \rho vz - \phi w \\ \frac{dx}{dt} = \theta w - \mu x \\ \frac{dy}{dt} = \Delta - \psi wy - \mu y \\ \frac{dz}{dt} = \psi wy - \mu z, \end{cases} \quad (1)$$

con condiciones iniciales $v(0) = v_0$, $w(0) = w_0$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ y $z(0) = z_0$ y donde $\phi = \theta + \mu$. Todos los parámetros del modelo son positivos.

Proposición 2.1 *La región $\Omega = \{(v, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 : 0 \leq v + w + x \leq \frac{\Delta}{\mu}, 0 \leq y + z \leq \frac{\Delta}{\mu}\}$ es una región de invarianza para el sistema (1).*

3. ANÁLISIS DEL MODELO SIN CONTROL

3.1. SOLUCIONES ESTACIONARIAS

Para determinar las soluciones estacionarias, se resuelve el sistema algebraico que resulta de igualar a cero, el lado derecho de cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema (1), con lo cual se obtienen, la solución trivial

$$E_0 = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0, \frac{\Delta}{\mu}, 0 \right) \quad (2)$$

y la solución no trivial $E_1 = (\bar{v}, \bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{\rho\psi\Delta\bar{v} - \mu^2(\phi - \beta\bar{v})}{\psi\mu(\phi - \beta\bar{v})} & \bar{x} &= \frac{\theta(\rho\psi\Delta\bar{v} - \mu^2(\phi - \beta\bar{v}))}{\psi\mu^2(\phi - \beta\bar{v})} \\ \bar{y} &= \frac{\mu(\phi - \beta\bar{v})}{\rho\psi\bar{v}} & \bar{z} &= \frac{\rho\psi\Delta\bar{v} - \mu^2(\phi - \beta\bar{v})}{\rho\psi\mu\bar{v}} \end{aligned}$$

y \bar{v} es la solución de la ecuación cuadrática

$$a_2\bar{v}^2 + a_1\bar{v} + a_0 = 0, \quad (3)$$

donde

$$a_2 = \mu^2\psi\beta, \quad a_1 = -[\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta)], \quad a_0 = \mu^2\phi^2 + \Delta\mu\psi\phi.$$

Proposición 3.1 *Es condición suficiente que $\beta > \psi$ para que las soluciones de la ecuación (3) sean reales y positivas.*

Prueba. Empleando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas en la ecuación (3), se obtienen las soluciones

$$\bar{v} = \frac{\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta) \pm \sqrt{[\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta)]^2 - 4\mu^4\phi^2\psi\beta - 4\mu^3\psi^2\beta\phi\Delta}}{2\mu^2\psi\beta}. \quad (4)$$

El radicando de (4) se puede reexpresar como

$$\mu^4\phi^2(\beta - \psi)^2 + 2\mu^2\phi\psi\Delta[\phi\rho(\beta + \psi) + \mu\beta(\beta - \psi)] + \Delta^2\psi^2(\rho\phi + \mu\beta)^2,$$

el cual es positivo para todos los valores de los parámetros si $\beta > \psi$. Bajo este resultado, la positividad de las soluciones es evidente de (4), ya que

$$\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta) \geq \sqrt{[\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta)]^2 - 4\mu^4\phi^2\psi\beta - 4\mu^3\psi^2\beta\phi\Delta}.$$

□

Observación 3.1 *De acuerdo con la proposición 3.1, es posible que la ecuación (3) tenga soluciones reales positivas, lo que implica la posible existencia de dos puntos de equilibrio no triviales. Sin embargo, el estudio de estabilidad se concentra alrededor del punto de equilibrio trivial E_0 (2), dada su relación con el número básico de reproducción.*

3.2. NÚMERO BÁSICO DE REPRODUCCIÓN

Una forma de estudiar el comportamiento de la enfermedad, es analizando el *número básico de reproducción*, denotado por R_0 y definido según [6], como el número de casos secundarios que son producidos por un individuo contagiado en una población enteramente susceptible. Para determinar el número básico de reproducción se ha utilizado el *método de la matriz de la siguiente generación*, descrito en numerosos trabajos de epidemiología matemática, como por ejemplo [3]. Para ello, se tienen en cuenta las ecuaciones diferenciales correspondientes a las poblaciones infecciosas y se definen los siguientes vectores

$$f = \begin{bmatrix} \beta vw + \rho vz \\ 0 \\ \psi wy \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \phi w \\ -\theta w + \mu x \\ \mu z \end{bmatrix}.$$

Para los cuales se calculan las matrices jacobianas con respecto a las variables w , x y z , dando por resultado

$$Df = \begin{bmatrix} \beta v & 0 & \rho v \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi y & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Dg = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ -\theta & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

De donde se obtienen las matrices F y G , dadas por $F = Df(E_0)$ y $G = (Dg)^{-1}$, es decir,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta\Delta}{\mu} & 0 & \frac{\rho\Delta}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi\Delta}{\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi} & 0 & 0 \\ \frac{\theta}{\mu\phi} & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}.$$

El número básico de reproducción de la enfermedad está dado por el radio espectral de la matriz de la siguiente generación, es decir, el mayor de los valores absolutos de los valores propios de la matriz FG . Esto es

$$\tilde{R}_0 = \frac{\Delta \beta \mu + \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu}}{2 \phi \mu^2}. \quad (5)$$

Proposición 3.2 *El número básico de reproducción de la enfermedad (5) satisface que*

$$\tilde{R}_0 = \frac{\Delta \beta \mu + \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu}}{2 \phi \mu^2} < 1 \quad \text{si y solo si} \quad \frac{\psi \Delta}{\mu \mu} \cdot \frac{\rho \Delta}{\phi \mu} + \frac{\beta \Delta}{\phi \mu} < 1.$$

Prueba.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \beta \mu + \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu}}{2 \phi \mu^2} < 1 &\iff \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu} < \frac{2\mu^2 \phi - \beta \mu \Delta}{\Delta} \\ &\iff \rho \psi \Delta^2 < \mu^3 \phi - \mu^2 \beta \Delta \\ &\iff \frac{\rho \psi \Delta^2}{\mu^3 \phi} + \frac{\beta \Delta}{\mu \phi} < 1 \\ &\iff \frac{\psi \Delta}{\mu \mu} \cdot \frac{\rho \Delta}{\phi \mu} + \frac{\beta \Delta}{\phi \mu} < 1. \end{aligned}$$

□

Definición 3.1 *El número básico de reproducción R_0 está dado por*

$$R_0 = R_m \cdot R_h + R_g = \frac{\psi \Delta}{\mu \mu} \cdot \frac{\rho \Delta}{\phi \mu} + \frac{\beta \Delta}{\phi \mu}, \quad (6)$$

donde R_m representa el aporte de la población de mujeres al R_0 . Así mismo, R_h y R_g corresponden al aporte de la población de hombres al R_0 . Nótese que las tres expresiones presentan la forma característica de la epidemiología, es decir, un cociente entre tasas de entrada y tasas de salida. Los efectos aditivos y multiplicativos en R_0 son resultado de haber considerado múltiples vías de infección.

3.3. ESTABILIDAD LOCAL

Proposición 3.3 *Si $R_0 < 1$, entonces el punto de equilibrio trivial E_0 descrito en (2) es local y asintóticamente estable.*

Prueba. La matriz jacobiana del sistema está dada por

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\beta w - \rho z - \mu & -\beta v & 0 & 0 & -\rho v \\ \beta w + \rho z & \beta v - \phi & 0 & 0 & \rho v \\ 0 & \theta & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\psi y & 0 & -\psi w - \mu & 0 \\ 0 & \psi y & 0 & \psi w & -\mu \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Y al evaluar la matriz jacobiana (7) en el punto de equilibrio (2), se obtiene la matriz

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \frac{\Delta}{\mu} & 0 & 0 & -\rho \frac{\Delta}{\mu} \\ 0 & \beta \frac{\Delta}{\mu} - \phi & 0 & 0 & \rho \frac{\Delta}{\mu} \\ 0 & \theta & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\psi \frac{\Delta}{\mu} & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \psi \frac{\Delta}{\mu} & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico está dado por

$$p(r) = \frac{1}{\mu^2}(\mu + r)^3 \left(r^2 + \left(\phi + \mu - \frac{\beta\Delta}{\mu} \right) r + \left(\mu\phi - \beta\Delta - \frac{\rho\psi\Delta^2}{\mu^2} \right) \right).$$

Este polinomio de grado 5 presenta la raíz $r = -\mu$ de multiplicidad 3 y según el criterio de Routh-Hurwitz, las dos raíces del polinomio de segundo grado tienen parte real negativa si son positivos tanto el coeficiente del término lineal, como el término independiente, es decir, si se satisfacen las siguientes condiciones

$$\phi + \mu - \frac{\beta\Delta}{\mu} > 0 \quad \text{y} \quad \mu\phi - \beta\Delta - \frac{\rho\psi\Delta^2}{\mu^2} > 0.$$

Condiciones que se pueden escribir de manera equivalente como

$$\mu^2 + \mu\phi \left(1 - \frac{\beta\Delta}{\mu\phi} \right) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\psi}{\mu} \frac{\Delta}{\mu} \cdot \frac{\rho}{\phi} \frac{\Delta}{\mu} + \frac{\beta\Delta}{\mu\phi} < 1.$$

La segunda condición es exáctamente $R_0 < 1$ y su satisfacción implica que $\frac{\beta\Delta}{\mu\phi} < 1$, permitiendo que también se cumpla la primera condición. □

3.4. SIMULACIONES

Se realizan las simulaciones del modelo (1) teniendo en cuenta los valores mostrados en la tabla 1. Sin embargo, se consideran diferentes valores para las probabilidades de contagio β , ρ y ψ . Los comportamientos exhibidos en la figuras 1 y 2 son semejantes conforme se van incrementando los valores de los parámetros β y ρ . Se observa que el número de internos susceptibles disminuye a niveles entre el 75 % y el 100 %. La cantidad de internos no diagnosticados presenta un pico característico en este tipo de modelado, pero termina por estabilizarse alrededor de los 300 individuos, lectura preocupante si se tiene en cuenta que en este caso la condición inicial fue de un individuo. La población de mujeres susceptibles describe un comportamiento sin variaciones profundas, ya que a pesar de los picos mostrados, la reducción en el número de individuos no sobrepasa el 25 %. Las lecturas más críticas obedecen al número de internos diagnosticados y de mujeres infectadas, debido a que se inició la simulación con valores nulos y terminan por alcanzar los 375 y 450 individuos, respectivamente.

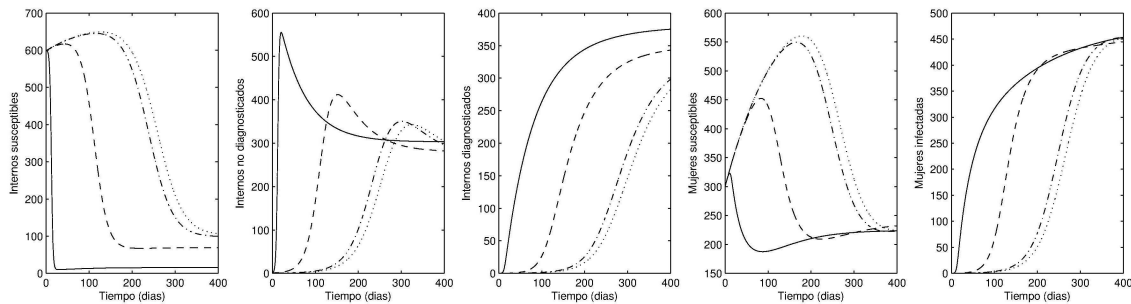
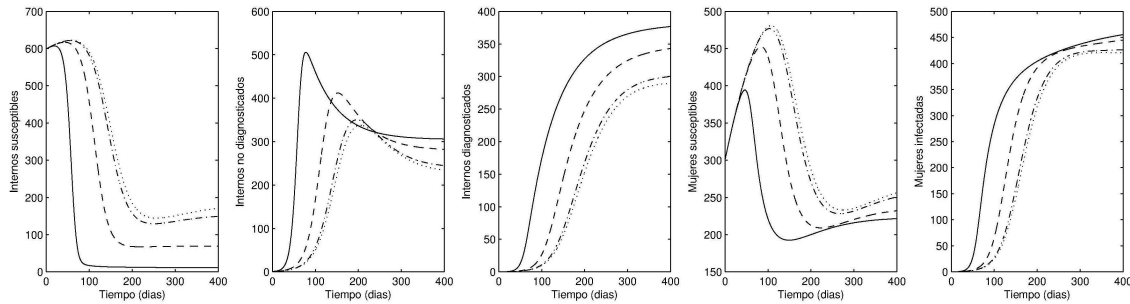
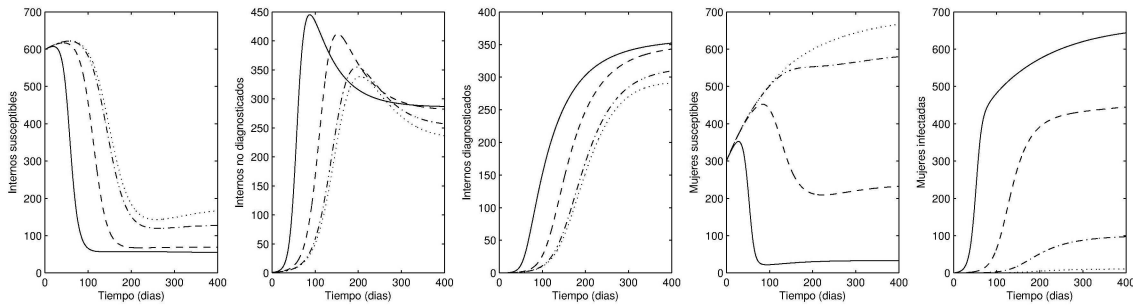


Figura 1: Soluciones del sistema (1) variando β . $\beta = 9 \times 10^{-7}$ (Puntos), $\beta = 9 \times 10^{-6}$ (Guiones y puntos), $\beta = 9 \times 10^{-5}$ (Guiones) y $\beta = 9 \times 10^{-4}$ (Línea continua).

El comportamiento observado en la figura 3 es semejante a lo comentado anteriormente, por lo menos en lo que respecta a las poblaciones de internos susceptibles e internos portadores con y sin diagnóstico. Sin embargo, y como era de esperarse, los cambios significativos se presentan en las poblaciones de mujeres, debido a los diferentes valores considerados para ψ , la tasa de contagio entre mujeres susceptibles e internos infectados sin diagnosticar. Tales modificaciones se traducen en una disminución drástica del número de mujeres susceptibles y un crecimiento representativo del número de mujeres infectadas, a medida que aumenta la magnitud de ψ .

Tabla 1: Condiciones iniciales y valores de los parámetros usados en la simulación para las figuras 1 a 6.

Parámetro	Descripción	Valor
v_0	Valor inicial de los internos susceptibles (IS)	599
w_0	Valor inicial de los internos port. sin diagn. (IPsD)	1
x_0	Valor inicial de los internos port. diagn. (IPD)	0
y_0	Valor inicial de las mujeres en visita suscep. (MvS)	300
z_0	Valor inicial de las mujeres en visita portad. (MvP)	0
Δ	Tasa de ingreso de los internos	5
μ	Tasa de traslado o liberación en el CR	5/700
β	Probabilidad de contagio entre IS e IPsD	9×10^{-5}
ρ	Probabilidad de contagio entre IS y MvP	9×10^{-5}
ψ	Probabilidad de contagio entre MvS e IPsD	5×10^{-5}
θ	Tasa de diagnóstico de la enfermedad	0.009

Figura 2: Soluciones del sistema (1) variando ρ . $\rho = 9 \times 10^{-7}$ (Puntos), $\rho = 9 \times 10^{-6}$ (Guiones y puntos), $\rho = 9 \times 10^{-5}$ (Guiones) y $\rho = 9 \times 10^{-4}$ (Línea continua).Figura 3: Soluciones del sistema (1) variando ψ . $\psi = 5 \times 10^{-7}$ (Puntos), $\psi = 5 \times 10^{-6}$ (Guiones y puntos), $\psi = 5 \times 10^{-5}$ (Guiones) y $\psi = 5 \times 10^{-4}$ (Línea continua).

De acuerdo con las observaciones anteriores, es posible afirmar que si se desea disminuir el número de infectados masculinos, entonces no es suficiente con mantener bajas las probabilidades de contagio β y ρ , de manera independiente, como se realizaron las simulaciones. No obstante, en el caso de las mujeres resulta evidente la eficacia de reducir el valor de ψ , con el ánimo de disminuir el número de mujeres infectadas.

4. ANÁLISIS DEL MODELO CON CONTROL

Se considera nuevamente el modelo inicial (1), pero ahora aplicando control (u) sobre las probabilidades de contagio β , ρ y ψ , con lo que se obtiene el nuevo sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \Delta - \beta(1-u)vw - \rho(1-u)vz - \mu v \\ \frac{dw}{dt} = \beta(1-u)vw + \rho(1-u)vz - \phi w \\ \frac{dx}{dt} = \theta w - \mu x \\ \frac{dy}{dt} = \Delta - \psi(1-u)wy - \mu y \\ \frac{dz}{dt} = \psi(1-u)wy - \mu z. \end{array} \right. \quad (8)$$

En el modelo (8) debe tenerse en cuenta que $u = 0$ significa que no se aplica control y $u = 1$ indica que el control es 100 % efectivo. El control se aplica sobre las probabilidades de contagio β , ρ y ψ , con la intención de reducir tales probabilidades de manera simultánea y con esto, disminuir significativamente el número promedio de todas las poblaciones infectadas. Porque como se observó en las simulaciones anteriores, la reducción de las probabilidades de manera independiente no genera efectos positivos en las tres poblaciones de infectados.

A continuación se define el número básico de reproducción en términos del control, denotado ahora por $R_0(u)$, mediante el cual se establecen dos proposiciones relacionadas con la estabilidad del equilibrio trivial E_0 . La primera corresponde a la desigualdad estricta sobre la unidad. Y la segunda tiene que ver con el mínimo control que debe aplicarse para garantizar la satisfacción de tal desigualdad.

Definición 4.1 El número básico de reproducción $R_0(u)$ está dado por

$$\begin{aligned} R_0(u) &= R_m(u) \cdot R_h(u) + R_g(u) \\ &= \frac{\psi(1-u)\Delta}{\mu} \cdot \frac{\rho(1-u)\Delta}{\phi} + \frac{\beta(1-u)\Delta}{\phi} \cdot \frac{\Delta}{\mu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Proposición 4.1 $R_0(u) < 1$ implica que el equilibrio trivial E_0 es local y asintóticamente estable.

Proposición 4.2 Si $u > u_c$, entonces $R_0(u) < 1$, donde

$$u_c = 1 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\beta\mu^2}{\psi\rho\Delta} \right)^2 + \frac{4\mu^3\phi}{\psi\rho\Delta^2}} - \frac{\beta\mu^2}{\psi\rho\Delta} \right]. \quad (10)$$

De ahora en adelante la expresión (10) se llamará *umbral de control constante* y su importancia radica en la determinación del valor mínimo que debe asumir el control para garantizar que $R_0(u) < 1$ y por lo tanto, implicar que el equilibrio trivial E_0 sea local y asintóticamente estable. Esta idea se ilustra en las figuras 4 y 5, las cuales corresponden a las simulaciones del modelo (8) y que se efectuaron teniendo en cuenta los valores mostrados en la tabla 1. Valores para los cuales se obtiene $u_c = 0,8516$.

En la figura 4 se evidencia que con la aplicación de control en cantidades menores a u_c , no se logra la erradicación de la enfermedad; aparentemente los resultados son buenos con la aplicación del control a un 70 %, pero finalizando el tiempo de simulación se observa un inminente crecimiento de las poblaciones de infectados. Para la figura 5 se ha considerado un mayor tiempo de simulación y también valores del control muy cercanos a u_c , tanto por exceso, como por defecto; en ella se observa que cuando se aplica control en magnitudes menores al umbral u_c , se logra retrasar el brote de la enfermedad y disminuir su intensidad. En cualquier caso, ambas gráficas permiten notar que la enfermedad desaparece cuando el control administrado excede al umbral $u_c = 0,8516$, que en este caso resulta ser muy alto, entendido como de 85 % aproximadamente.

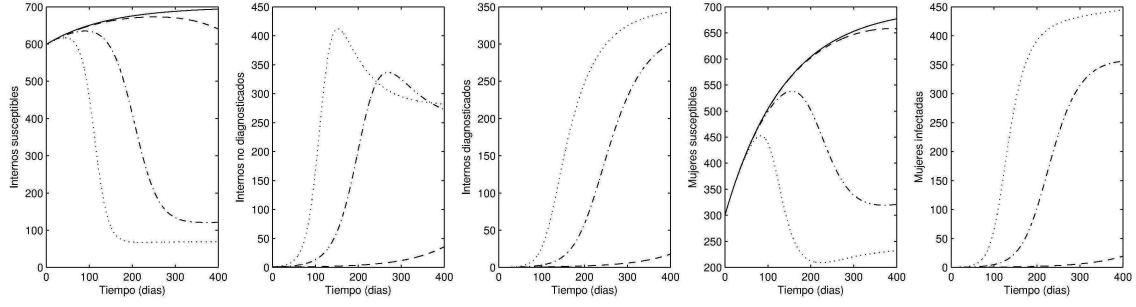


Figura 4: Variación del control constante. $u = 0$ (Puntos), $u = 0,4$ (Guiones y puntos), $u = 0,7$ (Guiones), $u = 0,9$ (Línea continua) y $u_c = 0,8516$.

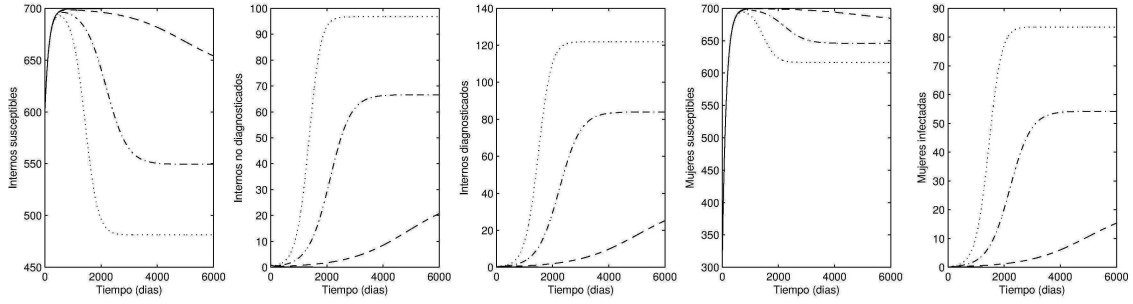


Figura 5: Variación mínima del control constante. $u = 0,80$ (Puntos), $u = 0,82$ (Guiones y puntos), $u = 0,84$ (Guiones), $u = 0,86$ (Línea continua) y $u_c = 0,8516$.

5. PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

La sección anterior puso de manifiesto la necesidad de la aplicación de control de manera constante y en porcentajes superiores al 85 %. Se desea ahora determinar un tipo de control que varíe con el tiempo, pero cuyos resultados, respecto a la disminución del número promedio de infectados, sean óptimos. Para ello se plantea una funcional de costos en términos de w , z , un control u y su respectivo ponderador A . Se denota tal funcional por C y corresponde a

$$C(u) = \int_0^{\tau} \left(w + z + \frac{A}{2} u^2 \right) dt,$$

sujeta al problema de valor inicial conformado por el sistema (8) y las condiciones iniciales $v(0) = v_0$, $w(0) = w_0$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ y $z(0) = z_0$. El objetivo es determinar una función óptima $\tilde{u} \in \Gamma$ tal que $\min\{C(u)\} = C(\tilde{u})$, donde $\Gamma = \{u|u \in L^2([0, \tau])\}$ es el conjunto de controles admisibles. Según el principio de máximo de Pontryagin, minimizar la funcional C es equivalente a minimizar la función auxiliar

$$\begin{aligned} H = & w + z + \frac{A}{2} u^2 + L_1 [\Delta - \beta(1-u)vw - \rho(1-u)vz - \mu v] \\ & + L_2 [\beta(1-u)vw + \rho(1-u)vz - \phi w] + L_3 [\theta w - \mu x] \\ & + L_4 [\Delta - \psi(1-u)wy - \mu y] + L_5 [\psi(1-u)wy - \mu z] \\ & + M_1 u + M_2 (1-u). \end{aligned}$$

Donde M_1 y M_2 son cantidades de penalización no negativas, que satisfacen,

$$M_1 u = 0 \quad y \quad M_2 (1-u) = 0 \quad (11)$$

y las variables L_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, son variables adjuntas que satisfacen el problema de valor final

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL_1}{dt} = (1-u)(L_1-L_2)(\beta w + \rho z) + \mu L_1 \\ \frac{dL_2}{dt} = \beta(1-u)(L_1-L_2)v + \psi(1-u)(L_4-L_5)y + \phi L_2 - \theta L_3 - 1 \\ \frac{dL_3}{dt} = \mu L_3 \\ \frac{dL_4}{dt} = \psi(1-u)(L_4-L_5)w + \mu L_4 \\ \frac{dL_5}{dt} = \rho(1-u)(L_1-L_2)v + \mu L_5 - 1, \end{array} \right. \quad (12)$$

con las condiciones finales $L_i(\tau) = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Para caracterizar el control óptimo basta con resolver para u , la condición de primer orden $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, de manera explícita

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Au + (L_1 - L_2)(\beta w + \rho z)v + \psi(L_4 - L_5)wy + M_1 - M_2 = 0.$$

Con lo que se tiene

$$u = \frac{(L_2 - L_1)(\beta w + \rho z)v + \psi(L_5 - L_4)wy}{A}.$$

Y usando la condición de penalización dada en (11), se deduce que una forma adecuada de caracterizar el control \tilde{u} es

$$\tilde{u} = \max \left(0, \min \left(\frac{(L_2 - L_1)(\beta w + \rho z)v + \psi(L_5 - L_4)wy}{A}, 1 \right) \right). \quad (13)$$

Teoría de control óptimo aplicada a epidemias, como la descrita anteriormente, se puede encontrar, entre otros trabajos, en [5].

El efecto que tiene el control óptimo sobre la dinámica del modelo, se observa en la figura 6, la cual es el resultado de realizar la simulación del problema de contorno formado por (8), (12) y (13), con condiciones iniciales $v(0) = v_0$, $w(0) = w_0$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ y con condiciones finales $L_i(\tau) = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Los valores de los parámetros se conservan con respecto a las simulaciones anteriores. Se observa entonces en la figura 6 los excelentes resultados que arroja la aplicación del control óptimo, traducidos en la disminución de la cantidad de infectados, cuando se reduce el valor del ponderador A . Esto se debe a que A es el denominador de (13) y en términos monetarios, reduce su costo. Nótese además, que en la gráfica del control u (control óptimo), los valores siempre son menores que el valor del control constante u_c . El aumento de la población total de internos de 600 a 695 en los 400 días considerados, tiene que ver con la consideración de la tasa de ingreso de los internos como constante, en la tabla 1 se muestra que $\Delta = 5$.

6. DISCUSIÓN

- Desde el punto de vista epidemiológico, el escenario poblacional más ideal se presenta cuando las poblaciones de infectados son muy bajas, lo que se consigue cuando $R_0 < 1$. Esta desigualdad se tradujo en términos de control como $u > u_c$, donde u_c corresponde a un umbral de control constante. A la luz de los resultados, se advierte sobre la necesidad de la aplicación permanente de un control preventivo con altas tasas de efectividad ($u_c = 0,8516$), pues de lo contrario los brotes de la infección son inevitables.
- La disminución de dos de las tres probabilidades de transmisión β , ρ o ψ , no es una medida suficiente para reducir los niveles de poblaciones infectadas. De ahí la necesidad de administrar control u sobre las tres probabilidades de contagio. Se halló un umbral de control constante u_c y se mostró numéricamente que cuando se aplica control en cantidades que superen este umbral, se obtiene la reducción anhelada. Pero además, se determinó un control óptimo \tilde{u} que también permite alcanzar tal reducción y que presenta dos ventajas respecto de su aplicación: la primera es que no necesita ser constante, dada su variación en el tiempo; y la segunda es que sus valores son menores al umbral de control constante.

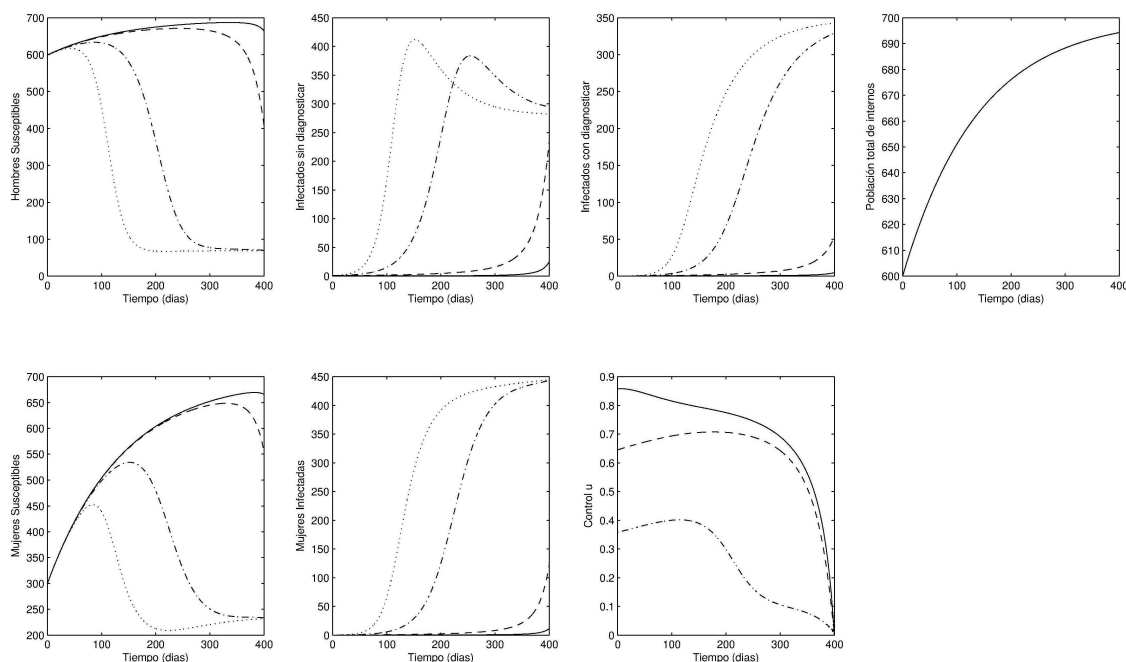


Figura 6: Simulación del modelo con control óptimo. Sin control (Puntos), $A = 2500$ (Guiones y puntos), $A = 1000$ (Guiones) y $A = 100$ (Línea continua).

REFERENCIAS

- [1] R.M. ANDERSON, *The populations dynamics of infectius diseases: Theory and applications*, Champan and Hall, 1982.
- [2] N.T.J. BAILEY, *The mathematical theory of infectius diseases*, Hafner Press, 1957.
- [3] G. CHOWEL, P. DIAZ-DUEÑAS, J.C. MILLER, A. ALCAZAR-VELAZCO, J.M. HYMAN, P.W. FENIMORE, ET AL., *Estimation of the reproduction number of dengue fever from spatial epidemic data*, *Mathematical Biosciences*, 208 (2007), pp. 571-589.
- [4] DEFENSORÍA DEL PUEBLO DE COLOMBIA, *Defensoría delegada para la política criminal y Penitenciaria. Informe sobre ejecución decreto 1141 de 2009*, Santa Fé de Bogotá, 2010.
- [5] D. GREENHALGH, *Some results on optimal control applied to epidemics*, *Mathematical Biosciences*, 88 (1986), pp. 125-158.
- [6] H. HEESTERBEEK, R_0 , Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1992.
- [7] H. HETHCOTE, *The Mathematics of Infectious Diseases*, *SIAM Review*, Vol. 42, No. 4 (2000), pp. 599-653.
- [8] MINISTERIO DE SALUD, *Boletín informativo sobre Colombia ante la UNGASS. Liga Colombiana de Lucha contra el SIDA*, RECOLVIH, 2001.
- [9] MINISTERIO DE SALUD, *Lineamientos para la Política Sexual y Reproductiva*, Documento técnico No. 1, 1998.

SOBRE EL ESPECTRO DE FUCIK PARA UN SISTEMA ACOPLADO

Santiago C. Rojas Romero^b

^b*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú,
scrr.cesar@gmail.com, srojasr@unmsm.edu.pe, www.unmsm.edu.pe*

Resumen: En este trabajo estudiamos el Espectro de Fucik para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases}$$

donde $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$ y $Bu = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann.

Palabras clave: *Sistema acoplado, Espectro de Fucik, Superficies de Fucik.*

2000 AMS Subject Classification: 34A34, 34B07.

1. INTRODUCCIÓN

Diversos trabajos de investigación sobre oscilaciones de puentes colgantes ([6], [9]), movimientos de barcos ([7]) y soluciones estacionarias para la ecuación de competencia entre especies ([2]), muestran en su desarrollo la importancia de conocer el espectro de Fucik para el problema correspondiente.

La noción de espectro de Fucik fue introducida en los trabajos de Fucik [4] para el problema de Laplace escalar. Este espectro es definido como el conjunto Σ de puntos $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases} \quad (1)$$

tiene soluciones no triviales. Actualmente, Σ está completamente descrito e inclusive se conoce explícitamente las curvas que lo forman, ver por ejemplo [3], [5] y [10].

En este trabajo seguimos las ideas de Campos y Dancer [1] para estudiar el espectro de Fucik para el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\}, \end{cases} \quad (2)$$

donde $Bu = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann. Este espectro es definido como el conjunto $\widehat{\Sigma}$ de puntos $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \geq 0$, para los cuales el problema (2) tiene soluciones no triviales.

En el desarrollo del trabajo obtenemos que $\widehat{\Sigma}$ contiene superficies no acotadas en \mathbb{R}^3 . En la sección 2 presentamos la forma explícita de estas superficies para el caso en que las correspondientes soluciones no triviales de (2) no cambian de signo, y en la sección 3 mostramos algunas propiedades de las superficies correspondientes a soluciones no triviales de (2) que sí cambian de signo.

2. PROPIEDADES DEL ESPECTRO DEL SISTEMA ACOPLADO Y DE LAS CORRESPONDIENTES SOLUCIONES NO TRIVIALES

Denotamos $\widehat{\Sigma}_t$ la parte trivial del espectro de Fucik del sistema acoplado (2)

$$\widehat{\Sigma}_t = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 / \lambda^\pm, \mu^- \geq 0 \text{ y (2) tiene soluciones no triviales que no cambian de signo} \}$$

y $\widehat{\Sigma}_{nt}$ la parte no trivial

$$\widehat{\Sigma}_{nt} = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 / \lambda^\pm, \mu^- > 0 \text{ y (2) tiene soluciones no triviales que cambian de signo} \},$$

con lo cual $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}_t \cup \widehat{\Sigma}_{nt}$. Y tenemos las siguientes propiedades

Lema 1 ($\widehat{\Sigma} \neq \emptyset$) $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$, $\forall k \geq 1$, donde λ_k es autovalor de $-u''$ con condiciones de frontera B .

Lema 2 (Simetrías en $\widehat{\Sigma}$) Si $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ con las correspondientes soluciones no triviales (u, v) de (2), entonces

1. $(\lambda^+, \mu^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ con correspondientes soluciones no triviales (v, u) .
2. $(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}, \lambda^+ \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ con correspondientes soluciones no triviales $(-u, -\sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v)$.

Nota 1 Combinando las dos propiedades de simetría, tenemos que si $\lambda^+ = \sqrt{\lambda^- \mu^-}$, entonces para el mismo punto $(\sqrt{\lambda^- \mu^-}, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ hay dos soluciones de (2), digamos (u, v) y $(-v, -\sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}} u)$.

2.1. IDENTIDADES IMPORTANTES

Aquí hacemos una adaptación de los cálculos presentados en [8]. Empezamos multiplicando la primera ecuación de (2) por v , la segunda por u e integrando de 0 a 1, para obtener

$$\int_0^1 u'v' dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)^2 dt + \lambda^- \int_0^1 (v^-)^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)^2 dt + \mu^- \int_0^1 (u^-)^2 dt. \quad (3)$$

Ahora, multiplicando la primera ecuación de (2) por u , la segunda por v e integrando de 0 a 1, tenemos

$$\int_0^1 (u')^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)u dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)u dt \quad \text{y} \quad (4)$$

$$\int_0^1 (v')^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)v dt - \mu^- \int_0^1 (u^-)v dt. \quad (5)$$

Mientras que usando solo la parte positiva y negativa de u y v obtenemos

$$\int_0^1 |(u^+)'|^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^+) dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^+) dt, \quad (6)$$

$$\int_0^1 |(u^-)'|^2 dt = -\lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^-) dt + \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^-) dt, \quad (7)$$

$$\int_0^1 |(v^+)'|^2 dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)(v^+) dt - \mu^- \int_0^1 (u^-)(v^+) dt \quad \text{y} \quad (8)$$

$$\int_0^1 |(v^-)'|^2 dt = -\lambda^+ \int_0^1 (u^+)(v^-) dt + \mu^- \int_0^1 (u^-)(v^-) dt. \quad (9)$$

De otro lado, para el problema tipo Neumann, como $\phi_1 = k \neq 0$, obtenemos

$$\lambda^+ \int_0^1 v^+ dt = \lambda^- \int_0^1 v^- dt \quad \text{y} \quad \lambda^+ \int_0^1 u^+ dt = \mu^- \int_0^1 u^- dt. \quad (10)$$

Y para el problema tipo Dirichlet llegamos a

$$\begin{aligned} (\lambda^+ - \lambda_1) \int_0^1 v^+ \phi_1 dt + (\lambda^+ - \lambda_1) \int_0^1 u^+ \phi_1 dt \\ = (\lambda^- - \lambda_1) \int_0^1 v^- \phi_1 dt + (\mu^- - \lambda_1) \int_0^1 u^- \phi_1 dt \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\lambda^+ + \lambda_1) \int_0^1 v^+ \phi_1 dt - (\lambda^+ + \lambda_1) \int_0^1 u^+ \phi_1 dt \\ = (\lambda^- + \lambda_1) \int_0^1 v^- \phi_1 dt - (\mu^- + \lambda_1) \int_0^1 u^- \phi_1 dt . \end{aligned} \quad (12)$$

2.2.SOLUCIONES QUE CAMBIAN O NO DE SIGNO

Usando las identidades anteriores, llegamos a establecer la naturaleza de las soluciones no triviales de (2) y las condiciones para sus correspondientes coeficientes $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$. En particular, describimos explícitamente $\widehat{\Sigma}_t$.

Proposición 1 Sea (u, v) una solución de (2) con condiciones de frontera tipo Dirichlet y coeficientes λ^\pm y μ^- , entonces

1. Ambas u y v cambian de signo o ninguna de ellas.
2. Si ambas u y v cambian de signo, entonces todos los coeficientes son positivos. Más aún $\lambda^+ > \lambda_1$ y $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_1$.
3. Si u y v no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos no nulos de ϕ_1 y $\lambda^+ = \lambda_1$ o $\sqrt{\lambda^- \mu^-} = \lambda_1$. En particular, si normalizamos las autofunciones imponiendo que los coeficientes sean iguales, tenemos los casos

$$\begin{aligned} u = v = \phi_1 \quad y \quad \lambda^+ = \lambda_1, \\ u = v = -\phi_1 \quad y \quad \lambda^- = \mu^- = \lambda_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Proposición 2 Sea (u, v) una solución de (2) con condiciones de frontera tipo Neumann y coeficientes λ^\pm y μ^- , entonces

1. Ambas u y v cambian de signo o ninguna de ellas.
2. Si ambas u y v cambian de signo, entonces todos los coeficientes son positivos.
3. Si u y v no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos de ϕ_1 (una de ellas puede ser cero) y uno de los coeficientes es $\lambda_1 = 0$. Si ambas u y v no son cero, entonces dos de los coeficientes deben ser $\lambda_1 = 0$. En particular, si normalizamos las autofunciones tenemos los siguientes casos

$$\begin{aligned} u = v = \phi_1 \quad y \quad \lambda^+ = 0, \\ u = v = -\phi_1 \quad y \quad \lambda^- = \mu^- = 0, \\ u = \phi_1 \text{ (resp. } u = -\phi_1), v = 0 \quad y \quad \lambda^+ = 0 \text{ (resp. } \mu^- = 0), \\ u = 0, v = \phi_1 \text{ (resp. } v = -\phi_1) \quad y \quad \lambda^+ = 0 \text{ (resp. } \lambda^- = 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Así, la parte trivial $\widehat{\Sigma}_t$ tiene la siguiente forma:

- Para el caso Dirichlet $\widehat{\Sigma}_t = \{ \lambda^+ = \lambda_1 \} \cup \{ \lambda^-, \mu^- > 0, \lambda^- \mu^- = \lambda_1^2 \}$, donde el plano $\{ \lambda^+ = \lambda_1 \}$ corresponde a la familia de soluciones $u = v = k \phi_1, k > 0$, mientras que la superficie $\{ \lambda^-, \mu^- > 0, \lambda^- \mu^- = \lambda_1^2 \}$ corresponde a la familia $u = \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}} v = -k \phi_1, k > 0$.

- Para el caso Neumann $\widehat{\Sigma}_t = \{ \lambda^+ = 0 \} \cup \{ \lambda^- = 0 \} \cup \{ \mu^- = 0 \}$, donde el plano $\{ \lambda^+ = 0 \}$ corresponde a las soluciones $\{ u = A \phi_1, v = B \phi_1, A, B \geq 0 \}$, el plano $\{ \lambda^- = 0 \}$ corresponde a las soluciones $\{ u = 0, v = -k \phi_1, k > 0 \}$ y el plano $\{ \mu^- = 0 \}$ corresponde a las soluciones $\{ u = -k \phi_1, k > 0, v = 0 \}$.

Los siguientes resultados establecen que $\widehat{\Sigma}_{nt}$ cae completamente en una de las regiones acotadas por $\widehat{\Sigma}_t$ y dan propiedades geométricas de las soluciones de (2).

Proposición 3 Si $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$, entonces $\lambda^+ > \lambda_1$ y $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_1$.

Proposición 4 Si $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ y (u, v) es la correspondiente solución no trivial del problema (2), entonces u y v tienen el mismo número de ceros (simples) y ambas tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1.

3. PROPIEDADES DE $\widehat{\Sigma}_{nt}$

Aquí estudiamos la parte no trivial del espectro de Fucik $\widehat{\Sigma}_{nt}$. Empezamos contruyendo un conjunto relacionado $\widetilde{\Sigma}$ en \mathbb{R}^4 .

Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (u_0, v_0, u'_0, v'_0), \end{cases} \quad (15)$$

con $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \geq 0$. Para el caso del problema con condiciones de frontera Dirichlet, definimos los conjuntos

$$\widetilde{\Sigma}^\pm = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ / \ \text{la solución } (u, v) \text{ del PVI (15)} \right. \\ \left. \text{con } (u_0, v_0, u'_0, v'_0) = (0, 0, \pm 1, s) \text{ satisface } u(1) = v(1) = 0 \right\} \quad (16)$$

y para el problema con condiciones de frontera Neumann,

$$\widetilde{\Sigma}^\pm = \left\{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ / \ \text{la solución } (u, v) \text{ del PVI (15)} \right. \\ \left. \text{con } (u_0, v_0, u'_0, v'_0) = (\pm 1, s, 0, 0) \text{ satisface } u'(1) = v'(1) = 0 \right\}. \quad (17)$$

Luego, denotando por

$$\widehat{\Sigma}^\pm = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 / \exists s \in \mathbb{R} \text{ tal que } (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \widetilde{\Sigma}^\pm \}, \quad (18)$$

tenemos $\widehat{\Sigma}_{nt} = \widehat{\Sigma}^+ \cup \widehat{\Sigma}^-$. Con esto y en vista de la segunda simetría dada en el Lema 2, es suficiente estudiar $\widehat{\Sigma}^+$.

En el siguiente Lema usaremos el Teorema de la función implícita para describir $\widetilde{\Sigma}^+$ en una vecindad de uno de sus puntos.

Lema 3 (Existencia local de las superficies de Fucik) Dado $(\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s}) \in \widetilde{\Sigma}^+$ tal que las correspondientes soluciones no triviales \bar{u} y \bar{v} ambas cambian de signo, entonces localmente $\widetilde{\Sigma}^+$ es de la forma, $(\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-, s(\lambda^-, \mu^-))$, donde para un adecuado $\varepsilon > 0$

$$(\lambda^+, s) : \langle \bar{\lambda}^- - \varepsilon, \bar{\lambda}^- + \varepsilon \rangle \times \langle \bar{\mu}^- - \varepsilon, \bar{\mu}^- + \varepsilon \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (19)$$

es una función C^1 de λ^- y μ^- , más aún

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) = \frac{-\int_0^1 (\bar{v}^-)^2}{\int_0^1 (\bar{u}^+)^2 + (\bar{v}^+)^2} < 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) = \frac{-\int_0^1 (\bar{u}^-)^2}{\int_0^1 (\bar{u}^+)^2 + (\bar{v}^+)^2} < 0. \quad (21)$$

Finalmente, las correspondientes soluciones no triviales tienen el mismo número de ceros (simples) y tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1.

Prueba. Veamos la prueba para el caso Dirichlet.

Denotamos por $(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](x)$ a la solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u, v, u', v')(0) = (0, 0, 1, s) & . \end{cases} \quad (22)$$

Vamos a aplicar el Teorema de la función implícita al sistema

$$(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](1) = (0, 0) . \quad (23)$$

Primero observamos que $(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s](x)$ es una función C^1 de las cinco variables $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \bar{B}$ y $x \in [0, 1]$, donde \bar{B} es una adecuada vecindad del punto $(\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s})$. En verdad, las derivadas pueden ser calculadas directamente de la ecuación diferencial, donde las no linealidades $\lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-$ y $\lambda^+ u^+ - \mu^- u^-$ son funciones C^1 de las variables λ^\pm, μ^- .

Sea $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)[\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s}]$. Como los ceros de \bar{u} y \bar{v} son simples (por la Proposición 4), podemos restringir la vecindad \bar{B} tal que se mantenga esta propiedad para todas las funciones $(u, v)[\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s]$ con $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \bar{B}$ y tal que los ceros de u y v no desaparezcan y ambos u y v tengan el mismo signo en una vecindad de 0 y de su último cero. Observamos además que como \bar{u} y \bar{v} cambian de signo, esta propiedad también se mantiene en \bar{B} .

Ahora, para aplicar el Teorema de la Función Implícita a (23) y resolver localmente con respecto a las variables λ^-, μ^- , probaremos que

$$\det \begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & v_{\lambda^+}(1) \\ u_s(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \neq 0 .$$

Sean $c(x) = \bar{\lambda}^+ \mathcal{X}_{\{\bar{v} > 0\}}(x) + \bar{\lambda}^- \mathcal{X}_{\{\bar{v} < 0\}}(x)$ y $d(x) = \bar{\lambda}^+ \mathcal{X}_{\{\bar{u} > 0\}}(x) + \bar{\mu}^- \mathcal{X}_{\{\bar{u} < 0\}}(x)$, entonces (\bar{u}, \bar{v}) también satisface el PVI

$$\begin{cases} -\bar{u}'' = c(x) \bar{v} & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -\bar{v}'' = d(x) \bar{u} & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}')(0) = (0, 0, 1, \bar{s}) . \end{cases} \quad (24)$$

Definimos $(u_s, v_s)(x) = \frac{\partial}{\partial s}(u, v)[\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s}](x)$ (nótese que la dependencia respecto a la variable s solo está en la condición inicial). Derivando (24) respecto a s obtenemos

$$\begin{cases} -u_s'' = c(x) v_s & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v_s'' = d(x) u_s & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ (u_s, v_s, u_s', v_s')(0) = (0, 0, 0, 1) , \end{cases} \quad (25)$$

y notamos que, integrando dos veces y usando $v_s(0) = 0$ y $v_s'(0) > 0$, para $x \in \langle 0, 1 \rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} u_s(x) &= - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} c(\xi_2) v_s(\xi_2) d\xi_2 < 0 \quad y \\ v_s(x) &= x - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d(\xi_2) u_s(\xi_2) d\xi_2 > 0 . \end{aligned}$$

Y con esto llegamos a

$$\int_0^1 -u_s \bar{v}'' - v_s \bar{u}'' dt + [-u_s' \bar{v} - v_s' \bar{u} + u_s \bar{v}' + v_s \bar{u}']_0^1 = \int_0^1 c(x) v_s \bar{v} + d(x) u_s \bar{u} dt. \quad (26)$$

Ahora, como $(\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s}) \in \tilde{\Sigma}^+$, (\bar{u}, \bar{v}) también es solución del problema de valor frontera, es decir $\bar{u}(0) = \bar{v}(0) = \bar{u}(1) = \bar{v}(1) = 0$ y con ello en la ecuación (26) solo queda

$$(u_s \bar{v}' + v_s \bar{u}')(1) = 0. \quad (27)$$

En forma análoga, definimos

$$(u_{\lambda^+}, v_{\lambda^+})(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda^+} (u, v) [\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s}](x),$$

$$(u_{\lambda^-}, v_{\lambda^-})(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda^-} (u, v) [\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s}](x),$$

$$(u_{\mu^-}, v_{\mu^-})(x) = \frac{\partial}{\partial \mu^-} (u, v) [\bar{\lambda}^+, \bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-, \bar{s}](x),$$

(nótese que la dependencia respecto a las variables λ^+ , λ^- y μ^- está en los coeficientes $c(x)$ y $d(x)$).

Derivando (24) respecto a λ^+ , λ^- y μ^- obtenemos, respectivamente

$$\begin{cases} -u_{\lambda^+}'' = c(x) v_{\lambda^+} + \bar{v}^+ & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ -v_{\lambda^+}'' = d(x) u_{\lambda^+} + \bar{u}^+ & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ (u_{\lambda^+}, v_{\lambda^+}, u_{\lambda^+}', v_{\lambda^+}')(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}, \quad (28)$$

$$\begin{cases} -u_{\lambda^-}'' = c(x) v_{\lambda^-} - \bar{v}^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ -v_{\lambda^-}'' = d(x) u_{\lambda^-} & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ (u_{\lambda^-}, v_{\lambda^-}, u_{\lambda^-}', v_{\lambda^-}')(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}, \quad (29)$$

$$\text{y} \begin{cases} -u_{\mu^-}'' = c(x) v_{\mu^-} & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ -v_{\mu^-}'' = d(x) u_{\mu^-} - \bar{u}^- & \text{en } \langle 0, 1 \rangle \\ (u_{\mu^-}, v_{\mu^-}, u_{\mu^-}', v_{\mu^-}')(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}. \quad (30)$$

Efectuando las mismas operaciones realizadas para obtener la ecuación (27) y usando $w = w^+ - w^-$ y $w^+ \cdot w^- = 0$, llegamos a

$$(u_{\lambda^+} \bar{v}' + v_{\lambda^+} \bar{u}')(1) = \int_0^1 (\bar{u}^+)^2 + (\bar{v}^+)^2, \quad (31)$$

$$(u_{\lambda^-} \bar{v}' + v_{\lambda^-} \bar{u}')(1) = \int_0^1 (\bar{v}^-)^2, \quad (32)$$

$$(u_{\mu^-} \bar{v}' + v_{\mu^-} \bar{u}')(1) = \int_0^1 (\bar{u}^-)^2. \quad (33)$$

Ahora, como el vector $(u_s(1), v_s(1))$ es no nulo y por (27) es ortogonal a $(\bar{v}'(1), \bar{u}'(1))$, mientras que por (31) $(u_{\lambda^+}(1), v_{\lambda^+}(1))$ no es ortogonal a $(\bar{v}'(1), \bar{u}'(1))$, entonces $(u_s(1), v_s(1))$ y $(u_{\lambda^+}(1), v_{\lambda^+}(1))$ no son paralelos. En consecuencia

$$\det \begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & v_{\lambda^+}(1) \\ u_s(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (34)$$

y tenemos lo que necesitamos para aplicar el Teorema de la función implícita al sistema (23) y obtener la función $(\lambda^+, s)(\lambda^-, \mu^-)$.

Ahora, también podemos obtener las derivadas $\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-)$ y $\frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-)$.

En efecto, derivando (23) respecto a λ^- y μ^- , tenemos

$$\begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & u_s(1) \\ v_{\lambda^+}(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{\lambda^-}(1) & u_{\mu^-}(1) \\ v_{\lambda^-}(1) & v_{\mu^-}(1) \end{bmatrix}; \quad (35)$$

y multiplicando ambos términos a la izquierda por $(\bar{v}'(1), \bar{u}'(1))$ tenemos

$$\begin{aligned} & [(u_{\lambda^+} \bar{v}' + v_{\lambda^+} \bar{u}') (1) \quad (u_s \bar{v}' + v_s \bar{u}') (1)] \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) \end{bmatrix} \\ & = - [(u_{\lambda^-} \bar{v}' + v_{\lambda^-} \bar{u}') (1) \quad (u_{\mu^-} \bar{v}' + v_{\mu^-} \bar{u}') (1)]. \end{aligned} \quad (36)$$

Luego, por (27), (31), (32) y (33),

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (\bar{u}^+)^2 + (\bar{v}^+)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) & \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) & \frac{\partial s}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \int_0^1 (\bar{v}^-)^2 & \int_0^1 (\bar{u}^-)^2 \end{bmatrix}$$

y de ahí tenemos que

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) = \frac{- \int_0^1 (\bar{v}^-)^2}{\int_0^1 (\bar{u}^+)^2 + (\bar{v}^+)^2} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\bar{\lambda}^-, \bar{\mu}^-) = \frac{- \int_0^1 (\bar{u}^-)^2}{\int_0^1 (\bar{u}^+)^2 + (\bar{v}^+)^2} < 0.$$

La prueba para el caso Neumann es análoga. □

Este resultado que hemos demostrado nos permite deducir que $\tilde{\Sigma}^+$ puede ser expresado como una función definida en un conjunto abierto conexo Λ , es decir $\tilde{\Sigma}^+ = \{(\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-), s(\lambda^-, \mu^-)\} : \lambda^-, \mu^- \in \Lambda\}$ y con ello que las componentes conexas de $\tilde{\Sigma}$ son superficies.

Proposición 5 *Existe una relación uno a uno entre los autovalores $\{\lambda_k\}_{k \geq 2}$ de $-u''$ y aquellas componentes conexas de $\tilde{\Sigma}^+$ (respectivamente $\tilde{\Sigma}^-$) que corresponden a soluciones no triviales que cambian de signo.*

Corolario 1 *Por cualquier punto $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \hat{\Sigma}$, con $k \geq 2$, pasan exactamente dos superficies en $\hat{\Sigma}_{nt}$, específicamente $\hat{\Sigma}_k^+$ y $\hat{\Sigma}_k^-$. En particular, como ocurre con la autofunción correspondiente a λ_k , las soluciones no triviales correspondientes a un punto en $\hat{\Sigma}_k^\pm$ siempre tienen $(k - 1)$ ceros interiores. Más aún, cualquier punto en $\hat{\Sigma}_{nt}$ pertenece a una de estas superficies.*

Proposición 6 Existe una biyección entre Σ_{escal} y el subconjunto de $\widehat{\Sigma}$ con $\lambda^- = \mu^-$. En particular, si u es solución no trivial del problema escalar (1) correspondiente a un punto $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal}$, entonces el par (u, u) es una solución no trivial del problema (2) correspondiente al punto $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}$ y viceversa.

Finalmente, los siguientes resultados muestran que las superficies $\widehat{\Sigma}_k^+$ correspondientes a soluciones con diferente número de ceros, son disjuntas, y que las superficies de Fucik $\widehat{\Sigma}_k^+$ y $\widehat{\Sigma}_k^-$ pueden o no coincidir.

Proposición 7 Si $h > k \geq 2$, entonces $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap (\widehat{\Sigma}_h^+ \cup \widehat{\Sigma}_h^-) = \emptyset$. Más aún, $(\widehat{\Sigma}_k^+ \cup \widehat{\Sigma}_k^-) \cap \widehat{\Sigma}_t = \emptyset$.

Proposición 8 Las superficies $\widehat{\Sigma}_k^\pm$ verifican:

1. Para el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet:

- i) $\widehat{\Sigma}_k^+ \equiv \widehat{\Sigma}_k^-$ para todo par $k \geq 2$
- ii) $\widehat{\Sigma}_k^+ \not\equiv \widehat{\Sigma}_k^-$ para todo impar $k \geq 3$.

2. Para el problema con condiciones de frontera tipo Neumann:

$$\widehat{\Sigma}_k^+ \equiv \widehat{\Sigma}_k^- \text{ para todo } k \geq 2.$$

REFERENCIAS

- [1] CAMPOS J. Y DANCER E. N. *On the resonance set in a fourth-order equation with jumping nonlinearity*. Differential Integral Equations 14(3) (2001), pp. 257-272.
- [2] DANCER E. N. Y DU Y. H. *Competing species equations with diffusion, large interactions and jumping nonlinearities*. J. Differential Equations 114, n 2, (1994), pp. 434-475.
- [3] DE FIGUEIREDO D. G. Y RUF B. *On the periodic Fucik spectrum and a superlinear Sturm-Liouville equation*. Proc. Roy. Soc. Edimburgh Sect A 123 (1) (1993) pp. 95-107.
- [4] FUCIK S. *Boundary value problem with jumping nonlinearities*. Casopis Pest. Mat 101 (1) (1976), pp. 69-87.
- [5] FUCIK S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1980).
- [6] GLOVER J., LAZER C. Y MCKENNA P. J. *Existence and stability of large scale nonlinear oscillations in suspension bridges*. Z. Angew. Math. Phys. 40, n 2, (1989), pp. 172-200.
- [7] LAZER C. Y MCKENNA P. J. *Nonlinear periodic flexing in a floating beam*. J. Comput. Appl Math. 52, n 1-3, (1994), pp. 287-303.
- [8] MASSA E. *On the Fucik Spectrum and superlinear elliptic equations*. PhD. Thesis, Universit degli Studi di Milano, Italy (2003).
- [9] MCKENNA P. J. Y MOORE K. S. *Mathematics arising from suspension bridge dynamics: recent developments*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein 101 n 4, (1999), pp. 178-195.
- [10] ROJAS S. *Espectro de Fucik para el problema de valor frontera Sturm-Liouville*. Pesquimat, revista de investigación de la Fac. Ciencias Mat. UNMSM Vol IX, no. 2, (2006), pp. 31-49.

A TOPOLOGICAL APPROACH TO THE REPULSIVE CENTRAL MOTION PROBLEM

Manuel Maurette[†]

[†]*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Pabellón 1, Ciudad Universitaria, 1428, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. maurette@dm.uba.ar*

Abstract:

We look for periodic solutions to nonlinear second order system of equations motivated by the Central Motion Problem. We study the repulsive case, the Coulomb problem of a charge being repelled by a source.

Using topological degree methods, we prove that either the problem has a classical solution, or else there exists a family of solutions of perturbed problems that converges uniformly and weakly in H^1 to some limit function u . Furthermore, under appropriate conditions we prove that u is a classical solution. We generalize this results for nonlinearities with a repulsive type singularity.

Keywords: *resonant problems; degree theory; periodic system*

2000 AMS Subject Classification: 34B16, 34C25, 35D99, 347H11

1 INTRODUCTION

Let us firstly recall the T -periodic Perturbed Central Motion Problem in \mathbb{R}^N :

$$\begin{cases} u'' \mp \frac{u}{|u|^3} = p(t) & t \in \mathbb{R} \\ u(t+T) = u(t) & t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

where $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. We shall assume that the perturbation p has null average, that is $\bar{p} := \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0$, and that p is T -periodic, namely $p(t+T) = p(t)$.

The \mp sign leads to two essentially different physical problems; we shall focus on the ‘ $-$ ’ sign, which corresponds to the repulsive case, when the nonlinearity is $g = -\frac{u}{|u|^3}$. This is the case of the electrostatic Coulomb Central Motion Problem with a charge being repelled by the source. The repulsive problem was broadly studied in the 80’ by the Italian school by Solimini [9, 13], Ambrosetti [1] and Coti Zelati [6], among others.

There exists a vast bibliography on this kind of dynamical systems. Lazer and Solimini [9] have considered the scalar case $N = 1$, with $g(u) \rightarrow -\infty$ as $u \rightarrow 0$, and $\int_0^1 g(t) dt = -\infty$. Using a result proved by Lazer in [8], it is shown that a necessary and sufficient condition for the existence of a weak solution when $g < 0$ and $p \in L^1([0, T])$, is that $\bar{p} < 0$.

In [13], Solimini studied the case $g = \nabla G$, where the potential G has at zero a singularity of repulsive type: for example, the electrostatic potential between two charges of the same sign. More precisely, it is assumed that $G \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ satisfies $\lim_{|u| \rightarrow 0} G(u) = +\infty$ and $g = \nabla G$ is *strictly* repulsive at the origin, namely:

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \left\langle g(u), \frac{u}{|u|} \right\rangle < 0.$$

Under the additional hypothesis

$$\exists \delta > 0 \text{ such that, if } \left| \frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|} \right| < \delta, \text{ then } \langle g(u), v \rangle < 0 \quad (2)$$

the existence is shown of a constant $\eta > 0$ such that if $\|p\|_\infty < \eta$ and $\bar{p} = 0$, then the problem has no classical solution. This includes the case of the repulsive central motion, where $G(u) = \frac{1}{|u|}$.

In the same work, the existence of a solution for $\bar{p} \neq 0$ under weaker assumptions is proved. Also, it is remarked that if $\|p\|_\infty$ is large enough, then condition $\bar{p} = 0$ does not imply that the problem is unsolvable.

This is different from what happens in the case $N = 1$, in which u cannot turn around zero; thus, if the repulsive condition $g(u)u < 0$ is assumed for all $u \neq 0$, then the condition $\bar{p} \neq 0$ is necessary.

In a recent paper, Fonda and Toader [7] made an exhaustive analysis on radially symmetric Keplerian-like systems $u'' + h(t, |u|)u = 0$, where $h : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is T -periodic in t . Using a topological degree approach, the existence of classical T -periodic solutions is studied. This work provides also an excellent survey of the known results on the subject. It is focused in the attractive case, in which the main difficulty consists in avoiding collisions. It is also remarked that, for the repulsive case, the difficulty relies in the case $\bar{p} = 0$.

In general the first works in this area worked with the well-known Habets-Sanchez Strong Force condition, which roughly speaking, means that the potential G behaves as $\frac{1}{|u|^\gamma}$ near the origin, with $\gamma \geq 2$; thus, it is not satisfied by the potential we are interested in.

In [14], Zhang employed topological techniques, as we do in this work, in order to study the T -periodic problem and his result says that if $G(u)$ satisfies the previously mentioned Strong Force condition at the singularity, the existence of periodic solutions can be obtained provided that the potential $G(u)$ is smaller than the first eigenvalue of the corresponding Dirichlet problem at infinity. The same kind of assumptions (Strong Force) are made in a work from Coti Zelati [6] for the repulsive case.

The importance of our results is that they can be applied to nonlinearities that do not satisfy the Strong Force Condition, as for example the Central Motion Problem.

In this work, we attacked the singularities by perturbing the problem with continuous approximations of g . To prove the existence of these perturbed problems we use Theorem 1. The result is based on two previous extensions of a well known Theorem by Nirenberg [11] in which g is asked to have uniform limits at infinity different from 0. On the one hand, a result by Ortega and Ward [12], originally in the context of partial differential equations, which allows g to vanish at infinity. On the other hand, a result by Amster and De Nápoli [3], for a ϕ -laplacian operator, in which the asymptotic condition weakened.

A difficult task was to find uniform bounds to these sequences to ensure the existence of a limit function, candidate to be a solution of the original problem. We accomplished this with Theorem 3. This result gave us the existence of a limit function, and a candidate for a solution for the original problem. With stronger conditions, we were able to prove in Theorem 4 that this candidate was in fact a *generalized solution* of the problem.

Also as a part of this last theorem, we got a strong result for the periodic case: If the nonlinearity g was a gradient ($g = \nabla G$), with $\lim_{u \rightarrow 0} G(u) = +\infty$, which implies a stronger kind of repulsiveness, we proved that the limit function was indeed a classical solution of the problem.

Most of the content of this work comes from the author's PhD thesis and for more details the reader should refer to [4].

2 THE CENTRAL MOTION PROBLEM

Let us start making some simple comments on the already described Central Motion Problem (1). We here state a motivation for this problem, the 2-body repulsive periodic problem:

$$\begin{cases} x'' - \frac{y-x}{|x-y|^3} = p_1(t) & t \in \mathbb{R} \\ y'' - \frac{x-y}{|x-y|^3} = p_2(t) & t \in \mathbb{R} \\ x(t+T) = x(t) & t \in \mathbb{R} \\ y(t+T) = y(t) & t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3)$$

with $p_1, p_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, and $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0$.

Here, $u(t) = (x(t), y(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ and the nonlinearity reads

$$g(x, y) = -\frac{1}{|x-y|^3} (x-y, y-x), \quad p(t) = (p_1(t), p_2(t)). \quad (4)$$

This is easily transformed into a central motion problem by the change of variables

$$\begin{cases} w = x - y \\ v = x + y \\ P = p_1 + p_2 \\ Q = p_1 - p_2. \end{cases}$$

Then, we have:

$$\begin{cases} v'' = P(t) \\ w'' - 2\frac{w}{|w|^3} = Q(t). \end{cases}$$

The first equation is easily integrable, and the second one is non other than a variation of problem (1). Topological methods are frequently used to prove existence of solutions of nonlinear systems. Unfortunately, degree theory would not be possible to apply directly without some restrictions, since there are no a-priori bounds for the first equation, namely $v'' = P(t)$ with periodic conditions. In fact, if v is a solution, $v + \text{const}$ is also a solution for every constant. Also, an interesting remark is that, besides the singularity of g at 0, it's asymptotic behavior makes it different from the Nirenberg case [11], as the nonlinearity goes to zero at infinity.

The first problem that arises is that when $|x - y|$ goes to zero, g goes to infinity. So we consider continuous perturbations of the nonlinearity. Letting $\varepsilon > 0$, we take a continuous g_ε . Next, we try to avoid the fact that g_ε is zero in the diagonal subspace $\{x = y\}$ of dimension N . We do so by restraining ourselves to the subspace:

$$V = \{u \in C_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) : \bar{x} + \bar{y} = 0\},$$

with $C_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) := \{v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} : v(t) = v(t + T), \forall t \in \mathbb{R}\}$ are the T -periodic continuous functions.

Working only in this subspace we attack two problems at once: On one hand we avoid possible collisions. On the other hand, viewing the problem as two different problems after changing variables, we would be able to find a-priori bounds for v , in V . That is somehow the idea behind the degree approach we will use. The perturbation g_ε is carefully defined later on in (11).

The second equation, $w'' - 2\frac{w}{|w|^3} = Q(t)$, lead us to problem (1) taking $u = \frac{w}{2^{3/2}}$. The first difficulty arises on the fact that g is singular at 0; a reasonable way to overcome it consists in considering, for $\varepsilon > 0$, the function $g_\varepsilon(u) = -\frac{u}{\varepsilon + |u|^3}$ and then studying the convergence of the solutions u_ε of the perturbed systems

$$\begin{cases} u'' - \frac{u}{\varepsilon + |u|^3} = p(t) & t \in \mathbb{R} \\ u(t + T) = u(t) & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5)$$

The second difficulty relies on the fact that g_ε vanishes at infinity; however, in this case the existence of at least one solution u_ε of (5) for each $\varepsilon > 0$ follows as an immediate consequence of the results obtained for the nonsingular case, studied in [4], which we state here, in a simplified version:

Theorem 1 *Let $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ be T -periodic such that $\bar{p} = 0$, and let $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ be bounded. Then the nonlinear periodic problem has a solution, provided that (P_1) and (P_2) hold, with:*

(P_1) *There exists a family $\mathcal{F} = \{(U_j, w_j)\}_{j=1, \dots, K}$ where $\{U_j\}_{j=1, \dots, K}$ is an open cover of S^{N-1} and $w_j \in S^{N-1}$, such that for some $R_j > 0$ and $j = 1, \dots, K$:*

$$\langle g(ru), w_j \rangle < 0 \quad \forall r > R_j \quad \forall u \in U_j.$$

(P_2) *There exists a constant $R_0 > 0$ such that $\deg(\Phi_r) \neq 0$ for $r \geq R_0$, where $\Phi_r : S^{N-1} \rightarrow S^{N-1}$ is given by $\Phi_r(v) := \frac{g(rv)}{|g(rv)|}$.*

Indeed, as

$$\langle g_\varepsilon(u), u \rangle = \left\langle -\frac{u}{\varepsilon + |u|^3}, u \right\rangle = -\frac{|u|^2}{\varepsilon + |u|^3} < 0,$$

for $u \neq 0$, it follows that the boundness condition and (P_2) are trivially satisfied. Moreover, for every $w \in S^{N-1}$ define $U_w = \{u \in S^{N-1} : \langle u, w \rangle > 0\}$. Then $\{U_w\}_w$ covers S^{N-1} , and clearly $\langle g(ru), w \rangle < 0$ for $u \in U_w$ and $r > 0$.

Continuing with the Central Motion Problem, the following computations provide some information concerning the behavior of the family $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ as $\varepsilon \rightarrow 0$:

Multiplying in L^2 the equation in (5) by u_ε , we have:

$$\langle u_\varepsilon'', u_\varepsilon \rangle - \left\langle \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3}, u_\varepsilon \right\rangle = \langle p(t), u_\varepsilon \rangle.$$

Integrating by parts the first term on the left and rearranging the terms we get:

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon' \rangle = - \left\langle \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3}, u_\varepsilon \right\rangle - \langle p(t), u_\varepsilon \rangle.$$

Noting that $\left\langle -\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3}, u_\varepsilon \right\rangle \leq 0$, we reach to:

$$\|u_\varepsilon'\|_{L^2}^2 \leq - \langle p(t), u_\varepsilon \rangle.$$

Here, note that $\langle p, u_\varepsilon \rangle = 0$, as $\bar{p} = 0$, so last equation can be written:

$$\|u_\varepsilon'\|_{L^2}^2 \leq - \langle p(t), u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon \rangle.$$

Finally, taking absolute value we get the bound:

$$\|u_\varepsilon'\|_{L^2}^2 \leq \|p\|_{L^2} \|u_\varepsilon\|_{L^2}.$$

Wirtinger inequality tells us that the following bound also holds:

$$\|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C \|u_\varepsilon'\|_{L^2}.$$

We then have the following important uniform bounds:

$$\|u_\varepsilon'\|_{L^2} \leq C, \quad \|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C \tag{6}$$

where the constant C does not depend on ε . On the other hand, it is easy to prove that the family $\{\bar{u}_\varepsilon\}_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$ is also bounded. Indeed, integrating the main equation in (5) we obtain

$$\int_0^T \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3} dt = 0,$$

and we deduce that

$$- \int_0^T \frac{\bar{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3} dt = \int_0^T \frac{u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3} dt.$$

Now, taking norm in \mathbb{R}^N :

$$|\bar{u}_\varepsilon| \int_0^T \frac{1}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3} dt \leq \|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^\infty} \int_0^T \frac{1}{\varepsilon + |u_\varepsilon|^3} dt.$$

Thus, $|\bar{u}_\varepsilon| \leq C$ for all $\varepsilon > 0$. Hence, for every sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0$ we may choose a solution $u_n := u_{\varepsilon_n}$ and from the previous bounds there exists a subsequence (still denoted $(u_n)_n$) and a function u such that $u_n \rightarrow u$ uniformly and weakly in H^1 . Moreover, the following proposition holds:

Proposition 1 *If u is obtained as before and $u \not\equiv 0$ over an open interval I , then $u'' - \frac{u}{|u|^3} = p$ in I , in the classical sense.*

Our last problem concerns the study of the set of zeros of the limit function u . It can be seen that in the central motion problem, if $u \not\equiv 0$ then the zero set is empty, i.e. u is a classical solution. This results will be generalized in the next section.

3 A GENERAL REPULSIVE NONLINEARITY

With problem (1) in mind, we state the more general problem for a function $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} u'' + g(u) &= p(t) & t \in \mathbb{R} \\ u(t+T) &= u(t) & t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (7)$$

where $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ is T -periodic, $\bar{p} = 0$, and $g \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$ has a repulsive type singularity at $u = 0$. By this we mean:

Definition 1 *The function $g \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$ is said to be repulsive at the origin if, for some $\kappa > 0$*

$$\langle g(u), u \rangle < 0 \quad \text{for } 0 < |u| < \kappa. \quad (8)$$

If, furthermore

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \left\langle g(u), \frac{u}{|u|} \right\rangle := -c, \quad (9)$$

with c a positive constant, then g shall be called strictly repulsive at the origin.

We shall proceed in two steps. Firstly, given $\varepsilon > 0$ we introduce the approximated problem:

$$\begin{cases} u'' + g_\varepsilon(u) &= p(t) & t \in \mathbb{R} \\ u(t+T) &= u(t) & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (10)$$

where g_ε is a continuous (nonsingular) perturbation of g , and obtain sufficient conditions for the existence of a family of solutions $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$.

We work mainly with approximations such that $g_\varepsilon \rightarrow g$ uniformly over compact subsets of $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. We call these admissible.

Secondly, we study the convergence of particular sequences $(u_{\varepsilon_n})_n$ as $\varepsilon_n \rightarrow 0$, and study some properties of the limit function u . If $u \not\equiv 0$, then it shall be defined as a *generalized solution* of the problem:

Definition 2 *A function $u \in H_{per}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ is said to be a generalized solution of (7) if $u \not\equiv 0$, and for some admissible choice of g_ε there exists a sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0$ and $(u_{\varepsilon_n})_n$ solutions of (10) for ε_n such that $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ uniformly and weakly in H^1 .*

We shall consider the following choice of g_ε :

$$g_\varepsilon(u) = \begin{cases} g(u) & |u| \geq \varepsilon \\ \rho_\varepsilon(|u|)g\left(\varepsilon \frac{u}{|u|}\right) & 0 < |u| < \varepsilon \\ 0 & u = 0, \end{cases} \quad (11)$$

where $\rho_\varepsilon \in C([0, \varepsilon], [0, +\infty))$ is continuous and satisfies $\rho_\varepsilon(0) = 0, \rho_\varepsilon(\varepsilon) = 1$

In particular, for problem (1), taking $\rho_\varepsilon(s) = \frac{s}{\varepsilon}$ the expression simply reduces to $g_\varepsilon(u) = -\frac{u}{(\max\{|u|, \varepsilon\})^3}$.

As we shall see (Proposition 4 below), under the assumption that $G(u) \rightarrow +\infty$ as $u \rightarrow 0$, both generalized and collision solutions are in fact classical. Conversely, taking g_ε as in (11), it is clear that classical solutions are also generalized solutions.

4 THE APPROXIMATION SCHEME

We begin by stating some propositions concerning the properties of those functions defined as the limit of a sequence of perturbed problems. For a proof of them and more details refer to [4]. For convenience, from now on we shall adopt the following notation: $u_n := u_{\varepsilon_n}$, and $g_n := g_{\varepsilon_n}$.

Proposition 2 *Let $(u_n)_n$ and u be defined as before, and assume that $u \neq 0$ over an open interval I . Then u satisfies $u'' + g(u) = p(t) \forall t \in I$ in the classical sense.*

Condition (9) is the same as in Solimini [13] for the case $g = \nabla G$. It is observed that it does not imply the Habets Sanchez strong force condition. In particular, for any value of $\gamma > -1$ the nonlinearity $g(u) = \frac{-u}{|u|^{\gamma+2}}$ is strictly repulsive, with $c = +\infty$.

In such a situation, it can be proved that the boundary of the set of zeros of the limit function u is discrete; more generally:

Proposition 3 *Let $(u_n)_n$ and u be defined as before, and assume that g is strictly repulsive at the origin. Then the boundary of the set defined by $Z = \{t \in [0, T] : u(t) = 0\}$ is finite, provided that $\|p\|_{L^\infty} < c$, with $c \in (0, +\infty]$ as in (9).*

The following result improves Proposition 3 for the variational case studied in [13]. However, we do not make use of the variational structure of the problem: more generally, it may be assumed that $g = \nabla G$ only near the origin.

Proposition 4 *Assume there exists a neighborhood U of the origin and a function $G \in C^1(U \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ such that $g = \nabla G$ on $U \setminus \{0\}$. Further, assume that*

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} G(u) = +\infty.$$

Then every generalized solution of (7) is classical.

It is worth noting that in this context the repulsive condition (8) implies that $G(u)$ increases when u moves on rays that point towards the origin. However, this specific condition was not necessary in the preceding result, which only uses the fact that $G(0) = +\infty$, since it is not required for the proof of Proposition 2.

Proposition 4 can be regarded as an alternative, in the following way: for g satisfying the assumption, if a sequence $(u_n)_n$ of solutions of (10) for $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$ converges uniformly and weakly in H^1 to some function u , then either $u \equiv 0$, or u is a classical solution of the problem.

It is worth seeing that both situations may occur. For instance, we may consider the following nonlinearity: $g(u) = \frac{u}{|u|^{\gamma+2}}$, with $\gamma \geq 0$. If $p \equiv 0$, then there are no generalized solutions, since they should be classical, because of Proposition 2. In some sense, this is expectable since if g_{ε_n} is given as in (11), then $u_\varepsilon \equiv 0$ is the unique solution of the perturbed problem. On the other hand, for $N = 2$ we may consider $p(t) = -\lambda(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ with $\omega = \frac{2\pi}{T}$, and the circular solution given by $u(t) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$, where $\lambda = r\omega^2 + \frac{1}{r^{\gamma+1}}$. After a simple computation, we conclude that the problem has classical solutions for $\lambda \geq (\gamma + 2) \left(\frac{\omega^2}{(\gamma+1)} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}$.

5 MAIN RESULTS

We have now the tools to state our main results. Note that from now onwards, when we refer g to be *bounded away from the origin* it means that $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0))$.

Theorem 2 *Let $g \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$ and assume that (8) holds. Further, assume that g is bounded away from the origin. Then either problem (7) has a classical solution, or else for every sequence $(u_n)_n$ of solutions of (10) with $\varepsilon_n \rightarrow 0$ and g_n as in (11), there exists a subsequence that converges uniformly and weakly in H^1 .*

We here give a scetch of the proof: If the problem has a classical solution, then there is nothing to prove. Next, assume that (10) admits no classical solutions, and let u_n be a T -periodic solution of

$$u_n'' + g_n(u_n) = p(t),$$

by multiplying by $u_n - \bar{u}_n$ and integrating, we reach to the following inequality:

$$\|u_n'\|_{L^2}^2 \leq \|p\|_{L^2} \|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2} + \int_0^T \langle g_n(u_n), u_n - \bar{u}_n \rangle dt. \quad (12)$$

The main idea is to split the integral in two terms:

$$\int_{\{|u_n| > \kappa\}} \langle g_n(u_n), u_n - \bar{u}_n \rangle dt + \int_{\{|u_n| \leq \kappa\}} \langle g_n(u_n), u_n - \bar{u}_n \rangle dt,$$

with κ given by the repulsiveness in (8).

For the first term, we use the definition of g_n , an extension of g . For the second, we use the repulsiveness. Gathering all together:

$$\|u_n'\|_{L^2}^2 \leq C_1 \|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2} + C_2 |\bar{u}_n|.$$

Finally, using Wirtinger's inequality we obtain:

$$\|u_n'\|_{L^2} \leq C |\bar{u}_n|^{\frac{1}{2}}, \quad \|u_n - \bar{u}_n\|_{L^\infty} \leq C |\bar{u}_n|^{\frac{1}{2}}.$$

At this point we can state that $(\bar{u}_n)_n$ is bounded.

In the previous proof, note that the bounds for $\|u_n\|_{H^1}$ do not depend on the choice of ρ_ε . This is the reason our first main result, with ρ arbitrarily chosen, follows as an immediate consequence of the preceding results:

Theorem 3 *Let $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ be T -periodic such that $\bar{p} = 0$, and let $g \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$ be repulsive at the origin. Further, assume that g is bounded outside the origin, and that conditions (P_1) and (P_2) hold. Then either (7) has a classical solution, or else for any choice of g_ε as in (11) there exists a sequence $(u_n)_n$ of solutions of problem (10) with $\varepsilon_n \rightarrow 0$ that converges uniformly and weakly in H^1 .*

Proof.

Given $0 < \varepsilon_n \rightarrow 0$ then either $g_n \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ is bounded for each n . Theorem 1 guarantees the existence of a sequence $(u_n)_n$ of classical solutions of problem (10). Finally, Theorem 2 is applied. \square

The last part of this section is devoted to the second main result, which assumes a different asymptotic condition on g :

Theorem 4 *Let $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ be T -periodic such that $\bar{p} = 0$, and assume that $g \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$ is repulsive at the origin and bounded outside the origin. Further, assume that condition (P_1) holds, that*

$$\|p\|_{L^\infty} + \sup_{|u|=\tilde{r}} \left\langle g(u), \frac{u}{|u|} \right\rangle < 0 \quad (13)$$

for some $\tilde{r} > 0$ and that the following condition holds:

(P_2') *There exists a constant $R_0 > 0$ such that $\deg(g, B_R(0), 0) \neq (-1)^N$ for $R \geq R_0$,*

then either (7) has a classical solution, or a generalized solution u such that $\|u\|_{L^\infty} \geq \tilde{r}$.

Moreover, if g is strictly repulsive at the origin, then the boundary of the set of zeros of u in $[0, T]$ is finite.

Finally, if $g = \nabla G$ with $\lim_{u \rightarrow 0} G(u) = +\infty$, then (7) has a classical solution.

Note that the degree from condition (P'_2) is different as the one from (P_2) . The first is over a function $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ with respect to a set $(B_R(0) \subset \mathbb{R}^N)$ and a point $(0 \in \mathbb{R}^N)$ and the latter is over a function $\Phi : S^{N-1} \rightarrow S^{N-1}$. For a detailed explanation of both definitions and their connection refer to Amster [2] and [4, 5].

The idea of the proof is to adapt the main results from Mawhin's Continuation Theory [10] on an appropriate set $U \in C([0, T], \mathbb{R}^N)$. From Theorem 2, it suffices to show that for each $\varepsilon \leq \tilde{r}$ problem (10) has a solution u_ε such that $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} > \tilde{r}$. To this end, we may follow the general outline of the proof of Theorem 1, but now taking the domain $U = \{u \in C([0, T], \mathbb{R}^N) : \tilde{r} < \|u\|_{L^\infty} < R\}$. Finally it follows that $\deg(g, \{\tilde{r} < |u| < R\}, 0) \neq 0$, and the conclusion of the Theorem follows.

Condition (P'_2) in some sense, says that g is repulsive at ∞ , and that it cannot rotate too fast. We have already used the fact that repulsiveness at the origin implies that the Brouwer degree of g_ε over small balls is $(-1)^N$; on the other hand, repulsiveness at ∞ implies that its degree over large balls is 1. Hence, if the assumptions of Theorem 4 are satisfied and g is strictly repulsive at the origin, then there exist generalized solutions for any p continuous and T -periodic such that $\bar{p} = 0$, provided that N is odd.

ACKNOWLEDGMENTS

The author wants to thank Professor Pablo Amster for his guidance during his PhD, and of course for his involvement in these results. He also thanks the support of the University of Buenos Aires and CONICET for the support under grants UBACyT 20020090100067 and PIP N11220090100637 respectively.

REFERENCES

- [1] V. Ambrosetti, A. Coti Zelati. *Periodic Solutions of Singular Lagrangian Systems*. Birkhäuser, Boston, 1993.
- [2] P. Amster. *Análisis No lineal; Métodos Topológicos*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [3] P. Amster and P. De Nápoli. Landesman-Lazer type conditions for a system of p -Laplacian like operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 326(2):1236–1243, 2007.
- [4] P. Amster and M. Maurette. Periodic solutions of systems with singularities of repulsive type. *Adv. Nonlinear Stud.*, 11(1):201–220, 2011.
- [5] P. Amster and M. Maurette. An elliptic singular system with nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 75(15):5815–5823, 2012.
- [6] V. Coti Zelati. Dynamical systems with effective-like potentials. *Nonlinear Anal.*, 12(2):209–222, 1988.
- [7] A. Fonda and R. Toader. Periodic orbits of radially symmetric Keplerian-like systems: a topological degree approach. *J. Differential Equations*, 244(12):3235–3264, 2008.
- [8] A. C. Lazer. On Schauder's fixed point theorem and forced second-order nonlinear oscillations. *J. Math. Anal. Appl.*, 21:421–425, 1968.
- [9] A. C. Lazer and S. Solimini. On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99(1):109–114, 1987.
- [10] J. Mawhin. *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*, volume 40 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Harvey Mudd College, Claremont, Calif., June 9–15, 1977.
- [11] L. Nirenberg. Generalized degree and nonlinear problems. In *Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971)*, pages 1–9. Academic Press, New York, 1971.
- [12] R. Ortega and J. R. Ward Jr. A semilinear elliptic system with vanishing nonlinearities. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (suppl.):688–693, 2003. Dynamical systems and differential equations (Wilmington, NC, 2002).
- [13] S. Solimini. On forced dynamical systems with a singularity of repulsive type. *Nonlinear Anal.*, 14(6):489–500, 1990.
- [14] M. Zhang. Periodic solutions of damped differential systems with repulsive singular forces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(2):401–407, 1999.

MAT - INDICE GENERAL

Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA (ISSN 1515-4904)

- # 1 (2000): Elvira Mascolo – Francesco Siepe, “Functionals of the Calculus of Variations with non Standard Growth Conditions”.
- # 2 (2000): Domingo A. Tarzia, “A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems”.
- # 3 (2001): Domingo A. Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Primera Parte:
- Ma. Cristina Sanziel, “Conditions to obtain a waiting time for a discrete two-phase Stefan problem”, 1-6.
 - Ariel L. Lombardi – Domingo A. Tarzia, “On similarity solutions for thawing processes”, 7-12.
 - Ricardo Weder, “Direct and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential”, 13-20.
 - Domingo A. Tarzia, “Stefan problem for a non-classical heat equation”, 21-26.
 - Pedro Morin – Rubén D. Spies, “A quasilinearization approach for parameter identification in nonlinear abstract Cauchy problems”, 27-41.
- # 4 (2001): Domingo A. Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Segunda Parte:
- Omar Gil, “El problema de Hele-Shaw como un problema límite para la ecuación de los medios porosos”, 1-10.
 - Juan C. Reginato – Domingo A. Tarzia, “Estimations of nutrient uptakes by roots of crops through a moving boundary model”, 11-16.
 - Oscar D. Quiroga – Luis T. Villa – Fernando Suarez, “Problemas de frontera libre en procesos de transferencia de materia y energía con reacción química”, 17-22.
 - Edgardo A. Spiazzi – Rodolfo H. Mascheroni, “Modelo de deshidratación osmótica de alimentos vegetales”, 23-32.
 - Eduardo A. Santillan Marcus – Domingo A. Tarzia, “Exact solutions for phase change processes in humid porous half spaces”, 33-38.
- # 5 (2001): Domingo A. Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Tercera Parte:
- Adriana C. Briozzo – Domingo A. Tarzia, “On a two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, 1-10.
 - Germán Torres – Cristina V. Turner, “Métodos de diferencias finitas para un problema de Bingham unidimensional”, 11-26.
 - Analía Gastón – Gustavo Sánchez Sarmiento – Horacio Reggiardo, “Un problemas de frontera libre: Fusión de una vaina de acero dentro de una cuchara de acería”, 27-32.
 - Ma. Fernanda Natale – Domingo A. Tarzia, “An exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficient”, 33-36.
 - Claudia Lederman – Juan L. Vazquez – Noemí Wolanski, “Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion with transport”, 37-41.
- # 6 (2002): Federico Talamucci, “Some Problems Concerning with Mass and Heat Transfer in a Multi-Component System”.
- # 7 (2004): Domingo A. Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Primera Parte:
- Adriana B. Verdiell – María C. Maciel – Susana L. Orofino – Tatiana I. Gibelli, “A survey of the spectral gradient method”, 1-14.
 - María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “An integral equation in order to solve a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal conductivity”, 15-24.
 - María C. Sanziel – Domingo A. Tarzia, “Optimization on the heat flux in a mixed elliptic problem with temperature constraints”, 25-30.
 - Claudia M. Gariboldi – Domingo A. Tarzia, “A new proof of the convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems”, 31-42.
- # 8 (2004): Domingo A. Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Segunda Parte:
- Rubén D. Spies, “Differentiability of the solutions of a semilinear abstract Cauchy problem with respect to parameters”, 1-10.
 - Adriana C. Briozzo – María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “An explicit solution for a two-phase Stefan problem with a similarity exponential heat sources”, 11-19.
 - Domingo A. Tarzia, “An explicit solution for a two-phase unidimensional Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face”, 21-27.
- # 9 (2005): Micol Amar – Roberto Gianni, “A Brief Survey on Homogenization with a Physical Application”.

10 (2005): Domingo A. Tarzia – Cristina V. Turner (Eds.), “Segundas Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”:

- Marcos Gaudiano – Cristina Turner, “Difusión de un solvente en un polímero vidrioso con una condición de contorno del tipo creciente en el tiempo”, 1-9.
- Adriana C. Briozzo – María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “A one-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, 11-16.
- Eduardo A. Santillan Marcus - Domingo A. Tarzia, “Un caso de determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material semiinfinito poroso a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad”, 17-22.

11 (2005): Antonio Fasano, “Mathematical Models of Some Diffusive Processes with Free Boundaries”.

12 (2006): Arturo De Pablo, “An Introduction to the Problem of Blow-up for Semilinear and Quasilinear Parabolic Equations”.

13 (2006): Graciela G. Garguichevich – Claudia M. Gariboldi – Pedro R. Marangunic – Diego Pallara, “Direct methods in the calculus of variations”.

14 (2007): María C. Maciel – Domingo A. Tarzia (Eds.), “Terceras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”:

- Tatiana I. Gibelli – María C. Maciel, “Large-scale algorithms for minimizing a linear function with a strictly convex quadratic constraint”, 1-12.
- María C. Maciel – Elvio A. Pilotta – Graciela N. Sottosanto, “Thickness optimization of an elastic beam”, 13-23.
- María F. Natale – Eduardo A. Santillan Marcus – Domingo A. Tarzia, “Determinación de dos coeficientes térmicos a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad”, 25-30.
- Rubén D. Spies – Karina G. Temperini, “Sobre la no convergencia del método de mínimos cuadrados en dimension infinita”, 31-34.
- Juan C. Reginato – Domingo A. Tarzia, “An alternative method to compute Michaelis-Menten parameters from nutrient uptake data”, 35-40.

15 (2008): D.A. Tarzia – R.H. Mascheroni (Eds.), “Workshop on Mathematical Modelling of Energy and Mass Transfer Processes, and Applications”:

- María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “The classical one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term”, 1-16.
- Carmen Cortazar – Manuel Elgueta, “Non-local diffusion”, 17-24.
- Luis T. Villa, “Consideraciones sobre el buen planteo de un modelo de frontera libre-móvil descriptivo de un proceso de freído por inmersión”, 25-36.
- Ricardo Simpson – Isabel Figueroa – Arthur Teixeira, “Simple, practical, and efficient on-line correction of process deviations in batch retort through simulation”, 37-53.

16 (2009): Mahdi Boukrouche, “A brief survey on lubrication problems with nonlinear boundary conditions”.

17 (2010): Carlos Vázquez, “An introduction to Black-Scholes modeling and numerical methods in derivatives pricing”.

18 (2011): Pablo M. Jacovkis, “A glimpse into mathematical modelling”.

19 (2014): D.A. Tarzia (Ed.), “VII Italian – Latin American Conference on Industrial and Applied Mathematics”, Part I:

- Graciela M. Croceri – Graciela N. Sottosanto, “Comparación de dos algoritmos de lagrangiano aumentado para el problema de optimización con restricciones de igualdad”, 1-7.
- Martha Hilda Timoteo Sánchez – Yolanda Santiago Ayala, “Sobre la existencia y unicidad de la solución de un modelo de propagación del sonido en un fluido compresible”, 9-16.
- Carlos Andrés Trujillo-Salazar – Hernán Darío Toro-Zapata, “Análisis teórico de la transmisión y el control del VIH/SIDA en un centro de reclusión”, 7-26.
- Santiago C. Rojas Romero, “Sobre el espectro de Fucik para un sistema acoplado”, 27-34.
- Manuel Maurette, “A topological approach to the repulsive central motion problem”, 35-42.

Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACIÓN MATEMÁTICA (ISSN 1515-4912)

1 (2000): Domingo A. Tarzia, “Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática”.

2 (2003): Domingo A. Tarzia, “Matemática: Operaciones numéricas y geometría del plano”

INFORMACION PARA LOS AUTORES

Los trabajos han de estar escritos en español o inglés. Excepcionalmente el Director y el Comité Editorial podrán admitir trabajos escritos en otros idiomas ampliamente utilizados. Deberá presentarse el texto mecanografiado o elaborado mediante un procesador de textos, con caracteres de 12 puntos, en un rectángulo de 16cm×24cm y en una sola cara del papel. Trabajos escritos en LATEX o en MS-WORD serán bienvenidos y en ese caso el autor deberá adjuntar un diskette con los archivos correspondientes, o bien enviarlos por correo electrónico.

En cada trabajo deberá constar, en la primera página, a partir de la quinta línea, el título en letras mayúsculas y sin punto final, el nombre del o de los autores, su identificación institucional y su correspondiente dirección postal y electrónica. Se acompañará un resumen que no exceda las 200 palabras en español y otro en inglés, añadiendo en ambos las palabras claves. También se solicita la inclusión de la correspondiente AMS-Mathematics Subject Classification. Al final de la última página deberán dejarse al menos dos líneas en blanco para incluir los datos de recepción. Las tablas y gráficos deberán insertarse en el texto y estar numeradas en forma correlativa.

Las referencias bibliográficas se compondrán sólo de los trabajos mencionados en el texto y se incluirán al final, por orden alfabético de autores y en orden cronológico, si existieran varios trabajos del mismo autor; cada una precedida por el correspondiente número de orden, entre corchetes. Las citas en el texto se efectuarán según los siguientes modelos: [1]; Caffarelli & Vazquez [1]; Caffarelli & Vazquez (1995, [1]). Y en la referencia final:

[1] L. A. CAFFARELLI & J.L. VAZQUEZ, *A free-boundary problem for the heat equation arising inflame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), pp. 411-441.

[2] A. FASANO & M. PRIMICERIO, *Blow-up and regularization for the Hele-Shaw problem*, in *Variational and free boundary problems*, Friedman A. & Spruck J. (Eds.), IMA Math. Appl. Vol. 53, Springer Verlag, New York (1993), pp. 73-85.

[3] J.F. RODRIGUES, *Obstacle problems in mathematical physics*, North-Holland Mathematics Studies N. 134, North-Holland, Amsterdam (1987).

INTERCAMBIOS

Departamento de Matemática – Biblioteca, Servicio de Canje
Facultad de Ciencias Empresariales -Universidad Austral
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA

NUMEROS APARECIDOS en Serie A:

- #1 (2000): E. Mascolo – F. Siepe, “Functionals of the Calculus of Variations with non Standard Growth Conditions”.
- #2 (2000): D.A. Tarzia, “A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems”.
- # 3 (2001): D.A. Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Primera Parte.
- #4 (2001): D.A. Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Segunda Parte.
- #5 (2001): D.A. Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Tercera Parte.
- #6 (2002): F. Talamucci, “Some Problems Concerning with Mass and Heat Transfer in a Multi-Component System”.
- #7 (2004): D.A. Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Primera Parte.
- #8 (2004): D.A. Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Segunda Parte.
- #9 (2005): M. Amar – R. Gianni, “A Brief Survey on Homogenization with a Physical Application”.
- #10 (2005): D.A. Tarzia – C.V. Turner (Eds.), “Segundas Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”.
- #11 (2005): A. Fasano, “Mathematical Models of Some Diffusive Processes with Free Boundaries”.
- #12 (2006): A. De Pablo, “An Introduction to the Problem of Blow-up for Semilinear and Quasilinear Parabolic Equations”.
- #13 (2006): G.G. Garguichevich – C.M. Gariboldi – P.R. Marangunic – D. Pallara, “Direct methods in the calculus of variations”.
- #14 (2007): M.C. Maciel – D.A. Tarzia (Eds.), “Terceras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”.
- #15 (2008): D.A. Tarzia – R.H. Mascheroni (Eds.), “Workshop on Mathematical Modelling of Energy and Mass Transfer Processes, and Applications”.
- #16 (2009): M. Boukrouche, “A brief survey on lubrication problems with nonlinear boundary conditions”.
- #17 (2010): C. Vázquez, “An introduction to Black-Scholes modeling and numerical methods in derivatives pricing”.
- #18 (2011): J.M. Jacovkis, “A glimpse into mathematical modelling”.
- #19 (2014): D.A. Tarzia (Ed.), “VII Italian-Latin American Conference on Industrial and Applied Mathematics”, Part I.

NUMEROS APARECIDOS en Serie B:

- #1(2000): D.A. Tarzia, “Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática”.
- #2(2003): D.A. Tarzia, “Matemática: Operaciones numéricas y geometría del plano”.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD AUSTRAL

Paraguay 1950 - S2000FZF ROSARIO - ARGENTINA
TEL: +54 - 341- 522-3000 ; FAX: +54 - 341-522-3001
E-mail: revistamat@austral.edu.ar