

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO**

**Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y  
Agrimensura**

**TESIS DOCTORAL**

Estudio de soluciones a problemas de tipo Stefan  
asociados a procesos de difusión anómala y aleaciones  
binarias

Autor: Lucas Venturato

Directora: Sabrina Roscani

Co-director: Domingo Tarzia

2023



**UNR** Universidad  
Nacional de Rosario



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores, por su predisposición, esmero y tiempo dedicado, y por haberme enseñado tanto en este proceso.

Quiero agradecer a mi familia que ha sido un gran apoyo durante todo este tiempo.

Quiero agradecer a cada uno de los docentes que colaboraron en mi formación.

Quiero agradecer a mis compañeros de carrera, que hicieron que esta etapa sea muy placentera.

Y finalmente, quiero agradecer especialmente a Katarzyna Ryszewska quien ha colaborado enormemente con mi introducción y desarrollo de varios de los conceptos aplicados en esta tesis al problema de Stefan fraccionario. Su participación en los trabajos relacionados a dicho tema, su nivel de experticia, y los numerosos intercambios que hemos tenido, han sido fundamentales para mi progreso en este área.



Esta tesis doctoral fue realizada durante el período 2019-2023 con la Beca Interna Doctoral otorgada por el CONICET. Además fue parcialmente financiada por los siguientes proyectos de investigación.

1. Univ. Austral n° 80020210300001UA, “Existencia y unicidad de solución a diversos problemas de Stefan fraccionarios en la variable espacial”. Investigador responsable: Lucas D. Venturato. Período: 2022 (1 año).
2. PICTO Austral 006-INV00030, “Problemas asociados a ecuaciones de difusión fraccionaria con derivadas temporales y/o espaciales de Caputo y Riemann-Liouville. Teoría y aplicaciones”. Director: Sabrina D. Roscani. Período: 2021-2022 (2 años).
3. PICTO Austral 2016 n° 0090, “La ecuación del calor difusión y problemas de frontera libre y control óptimo: Teoría, análisis numérico y aplicaciones”. Director: Domingo A. Tarzia. Período: 2018-2020 (3 años).
4. CONICET-Univ. Austral PIP n° 11220110100275, “Inecuaciones variacionales, control óptimo y problemas de frontera libre: teoría, análisis numérico y aplicaciones”. Director: Domingo A. Tarzia. Período: 2017-2019 (3 años).

Algunos de los resultados de esta tesis fueron publicados anteriormente en las siguientes revistas internacionales con referato:

1. L. D. Venturato, M. B. Cirelli, D. A. Tarzia “Explicit solutions related to the Rubinstein binary-alloy solidification problem with a heat flux or a convective condition at the fixed face”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (2023), pp. 1-19.
2. S. Roscani, K. Ryszewska, L. Venturato “A One-Phase Space-Fractional Stefan Problem With No Liquid Initial Domain”, *SIAM Journal On Mathematical Analysis*, Vol. 54 No. 5 (2022), pp. 5489-5523.

3. S. Roscani, L. Venturato “The similarity method and explicit solutions for the fractional space one-phase Stefan problems”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 8 No. 4 (2022), pp. 495-508.

en los siguientes proceedings:

1. S. D. Roscani, L. D. Venturato, D. A. Tarzia, “Soluciones auto-similares para dos problemas de Stefan fraccionarios en el espacio”, *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 2021, Vol 8, pp. 289-292.

y presentados en los siguientes eventos científicos:

1. S. D. Roscani, K. Ryszewska, L. D. Venturato, “Desarrollo de herramientas clásicas para problemas de Stefan fraccionarios en el espacio con derivada de Caputo”, IX Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Mayo de 2023.
2. S. D. Roscani, K. Ryszewska, L. D. Venturato, “A one-phase space-fractional Stefan problem with no liquid initial domain”, Latin American Conference on Industrial and Applied Mathematics - Escola de Matemática Aplicada of Fundação Getulio Vargas - FGV EMAp, Febrero de 2023.
3. L. D. Venturato, M. B. Cirelli, D. A. Tarzia, “Soluciones explícitas para el problema de solidificación de una aleación binaria propuesto por Rubinstein con una condición convectiva en el borde fijo”, Reunión de Comunicaciones Científicas de la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina virtUMA2021, Septiembre de 2021.
4. S. D. Roscani, L. D. Venturato, D. A. Tarzia, “Soluciones auto-similares para dos problemas de Stefan fraccionarios en el espacio”, VIII Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Mayo de 2021.

Por otro lado, algunos de los resultados se encuentran bajo el proceso de revisión en la revista *Free Boundary Problems*:

- S. Roscani, K. Ryszewska and L. Venturato, “*On a Space Fractional Stefan problem of Dirichlet type with Caputo flux*”, <https://arxiv.org/pdf/2308.03502.pdf>.

# Resumen

En esta tesis se estudian dos clases de problemas de Stefan. En la primera parte se aborda un problema asociado a aleaciones binarias, obteniendo soluciones explícitas de tipo similaridad, para dos condiciones de borde, de Neumann y convectiva. Se obtienen además desigualdades para el coeficiente que caracteriza la frontera libre en cada caso.

En la segunda parte se estudia un problema de Stefan fraccionario en la variable espacial de tipo Dirichlet, asociado a un flujo de Caputo. Este tipo de problemas, está relacionado con procesos de difusión anómala en materiales heterogéneos, y a diferencia del problema presentado en la primera parte, no existe en la literatura resultados previos de existencia, unicidad o regularidad de soluciones así como tampoco las herramientas necesarias para su deducción. Los mismos serán obtenidos en esta segunda parte.

El desarrollo se centra en las teorías de semigrupos y de operadores de evolución. En un primer paso, analizaremos dominios apropiados para la solución buscada. Esto requerirá la introducción de los espacios de Sobolev fraccionarios y los espacios de interpolación. Posteriormente, consideraremos el problema de frontera móvil asociado al problema de Stefan fraccionario, al cual aplicaremos algunas transformaciones para obtener un nuevo problema. Resolveremos el mismo buscando una solución a una ecuación integral asociada, que se denomina "mild solution". Finalmente, utilizaremos la solución al problema de frontera móvil para obtener una solución al problema de Stefan fraccionario, mediante un teorema de punto fijo. Deduciremos la unicidad de solución mediante un resultado de monotonía para la frontera libre y una condición integral equivalente a la condición de Stefan. Para terminar, daremos soluciones autosimilares en términos de funciones especiales denominadas funciones de Mittag-Leffler de tres parámetros.





# Contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>17</b>
2.1. Funciones especiales . . . . .	17
2.2. Operadores fraccionarios y sus propiedades . . . . .	19
2.3. Espacios de Sobolev fraccionarios . . . . .	21
2.4. Teoría de semigrupos . . . . .	26
2.5. Operadores de evolución . . . . .	29
<b>3. Problemas de Stefan asociados a aleaciones binaria</b>	<b>31</b>
3.1. Soluciones autosimilares para el problema de Aleación binaria . . . . .	31
3.2. Solución explícita para el problema de solidificación de una aleación binaria con condición de borde de Neumann . . . . .	33
3.3. Una desigualdad para el coeficiente $\mu$ en la frontera libre . . . . .	38
3.4. Solución explícita para el problema de solidificación de una aleación binaria con condición de borde convectiva . . . . .	42
3.5. Una desigualdad para el coeficiente $\mu$ en la frontera libre . . . . .	44
<b>4. Problemas de Stefan asociados a materiales heterogéneos</b>	<b>45</b>
4.1. Problema con condición de Dirichlet . . . . .	46
4.1.1. Dominio del operador $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$ . . . . .	46
4.1.2. Propiedades del operador $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$ definido en $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ . . . . .	47
4.1.3. Problema de frontera móvil . . . . .	54
4.1.4. Existencia de <i>mild solution</i> . . . . .	56
4.1.5. Regularidad de la <i>mild solution</i> . . . . .	61

---

4.1.6.	Existencia de una solución clásica al problema de frontera móvil . . . . .	77
4.1.7.	Existencia de una solución clásica al Problema de Stefan con condición de Dirichlet . . . . .	79
4.2.	Soluciones autosimilares para los problemas de Stefan fraccionarios en el espacio	92
4.2.1.	Soluciones autosimilares de la ecuación de difusión fraccionaria . . . . .	93
4.2.2.	Solución explícita para el problema de Stefan de una fase en espacio fraccionario con una condición de Dirichlet en la cara fija . . . . .	101
4.2.3.	Solución explícita para el problema de Stefan fraccionario en el espacio con condición de Neumann en el borde fijo . . . . .	104
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>107</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los problemas de Stefan son una clase de problemas que pretenden modelar la transferencia de calor en un material o medio, el cual experimenta un cambio de fase, por ejemplo solidificación o fusión, debido a la aplicación de una fuente de calor en parte de la frontera del mismo. Este cambio de fase se modela mediante una función denominada frontera libre que las separa. En esta tesis consideraremos un problema unidimensional de fusión a una fase. Esto último implica que en la región donde el material se encuentra en estado sólido, su temperatura es constante (coincidiendo con la temperatura de fusión). Para dicho caso, podemos deducir un modelo como sigue:

Sean  $u = u(x, t)$  y  $q = q(x, t)$  la temperatura y el flujo en cada posición  $x$  y tiempo  $t$  de un material unidimensional, representado por el semieje positivo en  $x$ . Supongamos que inicialmente dicho material posee una fase líquida, dada por  $0 < x < b$  y una fase sólida dada por  $x > b$  la cual se encuentra a temperatura constante igual a la temperatura de fusión. Por simplicidad, supondremos que dicha temperatura es igual a cero. Aplicamos una fuente de calor en el extremo izquierdo  $x = 0$ , con lo cual el frente de separación  $x = b$  entre ambas fases avanza hacia la derecha, adoptando un valor  $s(t)$  para cada instante de tiempo  $t$ . La función  $s$  se denomina frontera libre. Supongamos además que en la fase sólida, el material se encuentra a temperatura constante cero en cada tiempo  $t$ , por lo que tenemos un problema a una fase. Definimos la función de entalpía, como  $H = u + \phi$ , con

$$\phi(x, t) := \begin{cases} L & 0 < x < s(t) \\ 0 & x > s(t). \end{cases}$$

donde  $L$  representa el calor latente, es decir, la cantidad de energía requerida para cambiar de

fase sólida a líquida.

Queremos deducir una ecuación gobernante para el problema analizado. Para ello, consideremos la ley de Fourier para modelar la transferencia de calor, que establece la siguiente relación entre las funciones  $u$  y  $q$ ,

$$q(x, t) = \begin{cases} -u_x(x, t) & 0 < x < s(t), \\ 0 & x > s(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Por otro lado, aplicando el primer principio de la termodinámica, tenemos que,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b H(x, t) dx = -(q(b, t) - q(a, t)), \quad (1.2)$$

para cualesquiera  $0 < a < b$ , de donde se deduce que

$$H_t(x, t) = -q_x(x, t),$$

y por definición de  $H$  y  $q$ , resulta

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < s(t).$$

Teniendo en cuenta que tanto la función temperatura como la posición de la frontera libre  $s(t)$  son desconocidas, necesitamos otra condición en el modelo. Si, por simplicidad, procedemos formalmente, podemos derivar tal condición utilizando nuevamente el primer principio de la termodinámica. Sean  $0 < a < s(t) < b$ , entonces de (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_a^{s(t)} H(x, t) dx + \int_{s(t)}^b H(x, t) dx \right) &= -(q(b, t) - q(a, t)) \\ \frac{d}{dt} \left( \int_a^{s(t)} u(x, t) + L dx + \int_{s(t)}^b u(x, t) dx \right) &= u_x(a, t) \\ \frac{d}{dt} \left( \int_a^{s(t)} u(x, t) + L(s(t) - a) \right) &= u_x(a, t) \\ u(s(t), t) \dot{s}(t) + L \dot{s}(t) &= u_x(a, t) \\ L \dot{s}(t) &= u_x(a, t), \end{aligned}$$

por lo que, haciendo  $a \rightarrow s(t)^-$  obtenemos que

$$L \dot{s}(t) = u_x(s(t)^-, t),$$

que se conoce como condición de Stefan.

De lo anterior, si adicionalmente suponemos por simplicidad que  $L = 1$ , consideramos una condición de borde de tipo Dirichlet, y una condición inicial en  $t = 0$  dada por una función dato  $u_0$ , se deduce la siguiente formulación de un problema de Stefan a una fase

$$\begin{aligned}
(i) \quad & u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) & 0 < x < s(t), t > 0, \\
(ii) \quad & u(0, t) = C > 0 & t > 0, \\
(iii) \quad & u(s(t), t) = 0 & t > 0, \\
(iv) \quad & u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < b \\
(v) \quad & \dot{s}(t) = - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} u_x(x, t) & t > 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Siguiendo ideas similares, podemos deducir una formulación para un problema de Stefan a dos fases para la solidificación de un material unidimensional y semi-infinito, con constantes físicas iguales a uno:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & u_t^S(x, t) = u_{xx}^S(x, t) & 0 < x < s(t), t > 0, \\
(ii) \quad & u_t^L(x, t) = u_{xx}^L(x, t) & x > s(t), t > 0, \\
(iii) \quad & u^S(0, t) = C_S > 0 & t > 0, \\
(iv) \quad & u^S(s(t), t) = u^L(s(t), t) = 0 & t > 0, \\
(v) \quad & u^S(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < b \\
(vi) \quad & u^L(x, 0) = u_0(x), & x > b \\
(iii) \quad & u^L(+\infty, t) = C_L > 0 & t > 0, \\
(v) \quad & \dot{s}(t) = u_x^S(s(t), t) - u_x^L(s(t), t) & t > 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

En la literatura se puede encontrar un amplio desarrollo de los problemas de Stefan a una y a dos fases, entre los que cabe mencionar [2, 4, 7, 10, 20, 28] referentes al estudio teórico de los mismos y sus aplicaciones, y [5, 17, 33, 34, 36, 45] donde se obtienen soluciones explícitas.

Los problemas analizados anteriormente, suponen que el material considerado es homogéneo, por lo que su constitución no afecta a la ecuación gobernante ni a la condición de Stefan. Una forma de alejarnos de esta hipótesis, es considerar un material cuya composición de materiales pueda ser considerada por separado, como es el caso del problema que abordaremos en el Capítulo 3, o bien considerar un material “uniformemente heterogéneo”, como es el caso del problema del Capítulo 4.

El primero se conoce como problema de aleación binaria, y corresponde a un problema de transferencia de calor en un material que consta de dos componentes. Esto induce una formulación donde las funciones que representan la temperatura del material y la concentración de uno de los componentes del mismo están relacionadas por ciertas condiciones, y ambas verifican un problema

de Stefan a dos fases. Este tipo de problema fue analizado por Rubinstein en [27], obteniendo que existe una única solución de tipo similaridad cuando la condición en el borde fijo  $x = 0$  está dada por una temperatura constante. Posteriores trabajos sobre la solidificación de una aleación binaria pueden verse en [1, 6, 39, 40, 41] donde se obtienen tanto soluciones exactas, como así también soluciones aproximadas. En el Capítulo 3, se analizará el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll}
i. & \alpha_s T_{s_{xx}} = T_{s_t} & 0 < x < s(t), & t > 0, \\
ii. & \alpha_l T_{l_{xx}} = T_{l_t} & s(t) < x, & t > 0, \\
iii. & d_s C_{s_{xx}} = C_{s_t} & 0 < x < s(t), & t > 0, \\
iv. & d_l C_{l_{xx}} = C_{l_t} & s(t) < x, & t > 0, \\
v. & k_s T_{s_x}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} & (q_0 > 0), & t > 0, \\
vi. & T_s(s(t), t) = T_l(s(t), t) = T_k & & t > 0, \\
vii. & T_l(x, 0) = T_0 & T_A < T_0 < T_B, & x > 0, \\
viii. & T_l(\infty, t) = T_0 & T_A < T_0 < T_B, & t > 0, \\
ix. & C_{s_x}(0, t) = 0 & & t > 0, \\
x. & C_s(s(t), t) = f_s(T_k) & & t > 0, \\
xi. & C_l(x, 0) = C_0 & x > 0, & \\
xii. & C_l(s(t), t) = f_l(T_k) & & t > 0, \\
xiii. & k_s T_{s_x}(s(t), t) - k_l T_{l_x}(s(t), t) = \gamma \rho s'(t) & & t > 0, \\
xiv. & d_l C_{l_x}(s(t), t) - d_s C_{s_x}(s(t), t) = [f_s(T_k) - f_l(T_k)] s'(t) & & t > 0,
\end{array}$$

donde  $T_s, T_l$  representan la temperatura en las fases sólida y líquida respectivamente,  $C_s, C_l$  las concentraciones en cada fase de uno de los dos compuestos que conforman el material (previamente indicado), y los coeficientes involucrados provienen de constantes físicas asociadas al problema. Notemos que, en los problemas de aleación binaria la composición del material no parece afectar al proceso de transferencia de calor, pues está modelado por la ecuación del calor.

Por otro lado, respecto del segundo problema que se desarrolla en el Capítulo 4, cuando consideramos materiales o medios más complicados, surgen nuevas formulaciones donde tanto la ecuación gobernante como la condición de Stefan cambian. En particular, supongamos que queremos modelar un fenómeno de fusión relacionado con un cambio de fase en una barra semi-infinita debido a la transferencia de calor. Consideremos un modelo a una fase, con lo cual la fase sólida está a una temperatura de fusión constante igual a cero. En consecuencia, basta con analizar la fase líquida. Por simplicidad, supongamos también que todos los parámetros físicos

involucrados son constantes e iguales a uno.

Sean  $u = u(x, t)$  y  $q = q(x, t)$  la temperatura y el flujo en cada posición  $x$  y tiempo  $t$ . Como vimos anteriormente, si considerando el primer principio de la termodinámica (1.2) y la ley de Fourier (1.1) para modelar la transferencia de calor, obtenemos la ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

Sin embargo, la ley de Fourier es una relación empírica, y por lo tanto puede ser reemplazada. Si elegimos el flujo propuesto en [42], dado por

$$q_{nl}(x, t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x u_x(p, t)(x-p)^{-\alpha} dp, \quad (1.5)$$

tenemos una expresión la cual establece que el flujo en cada posición  $x$  y tiempo  $t$  es una suma generalizada de los flujos locales en cada posición de la barra entre su extremo izquierdo ( $x = 0$ ) y la posición actual, donde los flujos más cercanos tienen un peso mayor. En consecuencia, estamos considerando un material cuya composición afecta el flujo de temperatura, por ejemplo, un material heterogéneo.

Como veremos luego, la expresión  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x u_x(p, t)(x-p)^{-\alpha} dp$  se conoce como derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  de la función  $u$ , y se denota  $D_x^\alpha u$  (donde el subíndice  $x$  indica que se aplica respecto de dicha variable), por lo que podemos reescribir el flujo en (1.5) de la siguiente manera

$$q_{nl}(x, t) = -D_x^\alpha u(x, t). \quad (1.6)$$

Si aplicamos el primer principio de la termodinámica (1.2) con el nuevo flujo (1.6), obtenemos

$$u_t(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = 0 \quad (1.7)$$

que se conoce como ecuación de difusión fraccionaria en el espacio.

Siguiendo el desarrollo realizado para el problema de Stefan clásico, si denotamos por  $s(t)$  a la frontera libre, deducimos la siguiente condición de Stefan fraccionaria

$$\dot{s}(t) = - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} D_x^\alpha u(x, t).$$

Agregando una condición de borde de tipo Dirichlet, una condición inicial para  $t = 0$ , y teniendo en cuenta que en  $s(t)$  se da la temperatura de cambio de fase, que supondremos igual a

cero, tenemos el siguiente problema

$$\begin{aligned}
(i) \quad & u_t - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u = 0, & \text{en } Q_{s,T} \\
(ii) \quad & u(0, t) = 0, u(t, s(t)) = 0, & t \in (0, T), \\
(iii) \quad & u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & 0 < x < s(0) = b, \\
(iv) \quad & \dot{s}(t) = - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} (D_x^\alpha u)(x, t), & t \in (0, T),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $Q_{s,T} = \{(x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$ .

El problema (1.8) entra en la categoría de Problemas de Stefan fraccionarios en el espacio, cuyo desarrollo es reciente. En particular, en [42] se considera un modelo de infiltración de agua en suelos subterráneos heterogéneos, donde se introduce el flujo  $q = -D_x^\alpha u$ , y la ecuación gobernante para el problema está dada por  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u = 0$ .

Cabe destacar que al reemplazar la ley de Fourier (1.1) en la deducción del problema de Stefan (1.8), son válidas diferentes opciones, dependiendo del tipo de proceso que se pretende modelar. Algunas alternativas se analizan en [22], donde se considera un fenómeno de transporte para dos flujos no locales definidos en términos de derivadas fraccionarias.

Una observación importante acerca de los problemas de Stefan fraccionarios, se verá al estudiar soluciones exactas de (1.8) en el Capítulo 4, donde obtendremos que el comportamiento de la frontera libre es diferente al observado en los problemas de Stefan clásicos. Más precisamente, si en estos últimos, consideramos por ejemplo una condición de borde constante en  $x = 0$ , la frontera libre crece como  $s(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ . Sin embargo, para el problema (1.8) obtendremos que dicho comportamiento es de la forma  $s(t) \sim t^{\frac{1}{1+\alpha}}$ , que corresponde a un proceso de super-difusión, pues  $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\alpha} < 1$ , y coincide con lo obtenido en [43] para el caso estacionario.

Vale destacar que, el problema (1.8) donde la condición  $u(0, t) = 0$  es reemplazada por la condición  $u_x(0, t) = 0$  a sido estudiado en [31]. Es por eso que, para resolver (1.8) se seguirá la misma estrategia, que involucra el abordaje de dicho problema por medio de la teoría de semi-grupos y operadores de evolución. Más aún, a partir del trabajo en [31], y junto a la autora se extendieron los resultados para una condición de tipo Neumann fraccionaria, los cuales han sido publicados en [26] como una continuación del trabajo mencionado, y muchas de las herramientas desarrolladas en el mismo se incluyen aquí. En cuanto al problema (1.8), para obtener un teorema de existencia de solución, adaptaremos parte de los resultados de los trabajos previos nombrados anteriormente. Sin embargo, se presentan algunas dificultades debido a diferencias con los problemas estudiados en [31] y [26], para lo cual será de gran importancia demostrar algunas propiedades novedosas.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo, desarrollaremos los conceptos y resultados necesarios para abordar tanto los problemas de Aleaciones Binarias (Capítulo 3) como los problemas de Stefan fraccionarios en el espacio (Capítulo 4)

### 2.1. Funciones especiales

Comencemos por definir algunas funciones recurrentes en el cálculo fraccionario.

**Definición 1.** Sea  $U = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ . La función  $\Gamma : U \mapsto \mathbb{C}$  definida por  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  se denomina función Gamma.

**Definición 2.** La función  $B : U \times U \mapsto \mathbb{C}$  definida por  $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$  se denomina función Beta.

**Proposición 1.** Sean  $\alpha, \beta \in U$ . Entonces

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (2.1)$$

**Corolario 1.** Sean  $\alpha, \beta \in U$ , entonces

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

**Definición 3.** Sean  $\alpha, \beta > 0$ , y  $l$  tal que  $\alpha(jm + l) \neq -1, -2, -3, \dots$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Definimos las funciones de Mittag-Leffler de uno, dos y tres parámetros respectivamente como

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.2)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.3)$$

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{con } c_0 = 1, \quad c_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.4)$$

**Observación 1.** Las funciones de Mittag-Leffler proporcionan una generalización de la función exponencial. En efecto,

$$E_1(z) = E_{1,1}(z) = E_{1,1,0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

Por otro lado, tenemos las siguientes relaciones entre dichas funciones,

$$E_{\alpha,1,0}(z) = E_{\alpha}(z), \quad E_{\alpha,1,l}(z) = \Gamma(\alpha l + 1)E_{\alpha,\alpha l+1}(z)$$

**Observación 2.** Las funciones de Mittag-Leffler están bien definidas en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Para probarlo, necesitamos el siguiente resultado cuya demostración puede verse en pág. 47 de Erdélyi [11].

**Teorema 1.** Sea  $z \in \mathbb{C}$ . Para  $a, b \in \mathbb{C}$ , se tiene que

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left[ 1 + \frac{1}{2}z^{-1}(a-b)(a+b-1) + O(z^{-2}) \right], \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

Teniendo en cuenta la Observación 1, basta con analizar la función de Mittag-Leffler de tres parámetros. Notemos que

$$c_{n+1} = c_n \frac{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}{\Gamma((n+1)(1+\alpha)+\alpha)} = c_n \frac{\Gamma((n+1)(1+\alpha)+1)}{\Gamma((n+1)(1+\alpha)+\alpha)(n+1)(1+\alpha)}$$

de donde,

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = (n+1)(1+\alpha) \frac{\Gamma((n+1)(1+\alpha)+\alpha)}{\Gamma((n+1)(1+\alpha)+1)}.$$

Entonces, considerando  $z = (n+1)(1+\alpha)$ ,  $a = \alpha$ ,  $b = 1$ , y llamando  $R$  al radio de convergencia de la serie (2.4), por Teorema 1 se tiene que

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| (n+1)(1+\alpha) \frac{\Gamma((n+1)(1+\alpha)+\alpha)}{\Gamma((n+1)(1+\alpha)+1)} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (n+1)^\alpha (1+\alpha)^\alpha \left| 1 + \frac{(\alpha-1)\alpha}{2(n+1)(1+\alpha)} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2(1+\alpha)^2}\right) \right| \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

ya que  $\alpha > 0$ . Por lo tanto, las funciones de Mittag-Leffler de uno, dos y tres parámetros están bien definidas en todo el plano complejo.

**Teorema 2.** [15, Teorema 4] Sean  $\alpha, m, l \in \mathbb{R}$  tales que

$$\alpha > 0, \quad m > 0, \quad \alpha(im + l) \neq -1, -2, -3, \dots \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

y

$$l > m - 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Entonces

$$\left( \partial^\alpha \left[ t^{\alpha(l-m+1)} E_{\alpha, m, l}(at^{\alpha m}) \right] \right) (x) = \frac{\Gamma(\alpha(l-m+1)+1)}{\Gamma(\alpha(l-m)+1)} x^{\alpha(l-m)} + ax^{\alpha l} E_{\alpha, m, l}(ax^{\alpha m}) \quad (a \neq 0)$$

Si además

$$\alpha(l-m) = -j \quad \text{para algún } j = 1, 2, \dots, -\lfloor -\alpha \rfloor$$

entonces

$$\left( \partial^\alpha \left[ t^{\alpha(l-m+1)} E_{\alpha, m, l}(at^{\alpha m}) \right] \right) (x) = ax^{\alpha l} E_{\alpha, m, l}(ax^{\alpha m}) \quad (a \neq 0).$$

## 2.2. Operadores fraccionarios y sus propiedades

Definiremos a continuación los operadores fraccionarios necesarios para los problemas que analizaremos. Estableceremos además propiedades de los mismos.

**Definición 4.** [14] Sea  $L > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re}(\alpha) > 0$ . Para  $f$  suficientemente regular, definimos la integral fraccionaria  $I^\alpha$  como

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-p)^{\alpha-1} f(p) dp, \quad x \in [0, L]. \quad (2.5)$$

**Observación 3.** [14, Lema 2.1]  $I^\alpha$  está bien definido en  $L^p(0, L)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Definición 5.** [14, Ecuaciones (2.1.5) y (2.4.1)] Sea  $0 < \alpha < 1$ . Si  $f$  es suficientemente regular, definimos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial}{\partial x} I^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x-p)^{-\alpha} f(p) dp, \quad (2.6)$$

y la derivada fraccionaria de Caputo como

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial}{\partial x} I^{1-\alpha} [f(x) - f(0)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x-p)^{-\alpha} [f(p) - f(0)] dp. \quad (2.7)$$

**Observación 4.** [14, Lema 2.2 y Teorema 2.1] Las derivadas de Riemann-Liouville y de Caputo están bien definidas en  $AC[0, L]$ . Más aún, si  $f \in AC[0, L]$  entonces  $D^\alpha f$  puede escribirse de forma equivalente como

$$D^\alpha f(x) = I^{1-\alpha} f'(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-p)^{-\alpha} f'(p) dp. \quad (2.8)$$

**Proposición 2.** [14, Propiedad 2.1] Sea  $\beta > -1$ . Entonces,

$$I^\alpha(x^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta},$$

y

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha - \beta \notin \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } \alpha - \beta \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Proposición 3.** [14, Propiedad 2.16] Sea  $\beta > -1$ . Entonces,

$$D^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta \neq 0, \\ 0 & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$$

**Proposición 4.** [30, Proposición 2.26] Sea  $L > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Si  $f, g \in AC[0, L]$  y  $g \in C^{0,\beta}([0, L])$  para  $\beta \in (\alpha, 1)$ , entonces

$$\partial^\alpha(f \cdot g) = g(x)(\partial^\alpha f)(x) + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-p)^{-\alpha-1} (g(x) - g(p)) f(p) dp.$$

**Proposición 5.** [14, Lema 2.21] Sea  $L > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} (D^\alpha I^\alpha f)(x) &= f(x), \quad f \in L^p(0, L), p > \frac{1}{\alpha}, \\ (I^\alpha D^\alpha f)(x) &= f(x) - f(0), \quad f \in AC[0, L]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Proposición 6.** [32, Theorem 2.4] Sea  $L > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces

$$\partial^\alpha I^\alpha f = f, \quad f \in L^1(0, L).$$

Si  $f \in L^1(0, L)$  verifica que  $\partial^\alpha f \in L^1(0, L)$ , entonces

$$(I^\alpha \partial^\alpha f)(x) = f(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{1-\alpha} f(0),$$

donde

$$I^{1-\alpha} f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} I^{1-\alpha} f(x).$$

Si adicionalmente  $f \in L^p(0, L)$  para  $p > \frac{1}{1-\alpha}$ , entonces

$$I^\alpha \partial^\alpha f = f.$$

**Proposición 7.** [14, Capítulo 2] Sea  $f \in AC[0, 1]$ . Entonces,

$$(D_x^\alpha f)(x) = (\partial^\alpha f)(x) - \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0), \quad (2.10)$$

y

$$I^{1-\alpha} f(x) = \int_0^x D^\alpha f(z) dz + f(0) \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (2.11)$$

En particular, si  $f(0) = 0$ ,

$$I^{1-\alpha} f(x) = \int_0^x D^\alpha f(z) dz, \quad (2.12)$$

mientras que si  $I^{1-\alpha} f' \in AC[0, 1]$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha f = \frac{\partial}{\partial x} I^{1-\alpha} f' = \partial^\alpha f'. \quad (2.13)$$

**Proposición 8.** [16, Proposición 6.5] Sea  $L > 0$ ,  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  tales que  $\alpha + \beta \leq 1$  y sea  $f \in AC[0, L]$ . Entonces  $\partial^\beta D^\alpha f = D^{\alpha+\beta} f$ . Adicionalmente,  $\partial^\alpha \partial^{1-\alpha} f = \frac{\partial}{\partial x} f$ .

### 2.3. Espacios de Sobolev fraccionarios

Recordemos la definición de espacios de Sobolev para órdenes enteros. Por simplicidad, y teniendo en cuenta el posterior desarrollo, en lo que sigue consideraremos el intervalo  $(0, 1)$ . Denotemos por  $C_c^m(0, 1)$  el conjunto de funciones de  $C^m(0, 1)$  con soporte compacto.

**Definición 6.** [3] Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Definimos el espacio de Sobolev  $W^{1,p}(0, 1)$  de la siguiente manera:

$$W^{1,p}(0, 1) = \left\{ u \in L^p(0, 1) : \exists g \in L^p(0, 1) \text{ tal que } \int_0^1 u \phi' = - \int_0^1 g \phi, \forall \phi \in C_c^1(0, 1) \right\}.$$

Dado  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 2$  y  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos

$$W^{m,p}(0,1) = \{u \in W^{m-1,p}(0,1) : u' \in W^{m-1,p}(0,1)\}.$$

Denotamos  $H^m(0,1) = W^{m,2}(0,1)$

Se puede probar que para todo  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W^{m,p}(0,1)$  es un espacio de Banach, para  $1 < p < \infty$  es reflexivo, y para  $1 \leq p < \infty$  es separable. Además,  $H^m(0,1)$  es un espacio de Hilbert separable.

Adicionalmente, definimos los siguientes subespacios de  $W^{m,p}(0,1)$ .

**Definición 7.** [3] Sean  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 2$  y  $1 \leq p \leq \infty$ . Definimos  $W_0^{m,p}(0,1)$  como la clausura de  $C_c^m(0,1)$  en  $W^{m,p}(0,1)$ .

A continuación, queremos definir los espacios  $W^{m,p}(0,1)$  para  $m$  no entero. Para ello consideramos la siguiente definición como subespacio de  $L^p(0,1)$ .

**Definición 8.** [8] Sea  $\beta \in (0,1)$  y  $1 \leq p < \infty$ . Definimos el espacio de Sobolev fraccionario  $W^{\beta,p}(0,1)$  como

$$W^{\beta,p}(0,1) = \left\{ u \in L^p(0,1) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{p} + \beta}} \in L^p((0,1) \times (0,1)) \right\}.$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{\beta,p}(0,1)} = \left( \|u\|_{L^p(0,1)}^p + \int_0^1 \int_0^1 \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{1 + \beta p}} dy dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para  $\beta \geq 1$ , con  $m = [\beta]$ , definimos el espacio de Sobolev fraccionario  $W^{\beta,p}(0,1)$  como el espacio de funciones  $u$  en  $W^{m,p}(0,1)$  tales que para  $s = \beta - [\beta]$  resulta  $u^{(m)} \in W^{s,p}(0,1)$ , con la norma

$$\|u\|_{W^{\beta,p}(0,1)} = \left( \|u\|_{W^{m,p}(0,1)}^p + \|u^{(m)}\|_{W^{s,p}(0,1)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Denotamos  $H^\beta(0,1) = W^{\beta,2}(0,1)$

Observemos que para  $\beta \in \mathbb{N}$ , las definiciones 6 y 8 coinciden.

Finalmente, presentamos los siguientes subespacios de  $H^\beta(0,1)$ .

**Definición 9.** Sea  $\gamma > 0$ , y

$${}_0C^\infty[0,1] = \{v \in C^\infty[0,1] : \forall n \in \mathbb{N}_0, v^{(n)}(0) = 0\}, \quad {}^0C^\infty[0,1] = \{v \in C^\infty[0,1] : \forall n \in \mathbb{N}_0, v^{(n)}(1) = 0\},$$

$$C_0^\infty[0,1] = \{v \in C^\infty[0,1] : \forall n \in \mathbb{N}_0, v^{(n)}(0) = 0, v^{(n)}(1) = 0\}.$$

Definimos,

$${}_0H^\gamma(0,1) = \overline{{}_0C^\infty[0,1]}^{H^\gamma(0,1)}, \quad {}^0H^\gamma(0,1) = \overline{{}^0C^\infty[0,1]}^{H^\gamma(0,1)}, \quad H_0^\gamma(0,1) = \overline{C_0^\infty[0,1]}^{H^\gamma(0,1)}.$$

Como veremos más adelante, los espacios de Sobolev fraccionarios  $H^\gamma(0,1)$  pueden verse como espacios intermedios entre  $L^2(0,1)$  y  $H^{\lceil\gamma\rceil}(0,1)$ . En consecuencia, compartirá similitudes con ellos, de acuerdo a “que tan cerca” se encuentre de cada uno. En particular, tenemos la siguiente caracterización para dichos espacios, que determina el comportamiento de la traza en función del orden  $\alpha \in (0,1)$ .

**Proposición 9.** [48, Proposición 1]

$${}_0H^\alpha(0,1) = \begin{cases} H^\alpha(0,1), & \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ \{u \in H^{\frac{1}{2}}(0,1) : \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x} dx < \infty\}, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ \{u \in H^\alpha(0,1) : u(0) = 0\}, & \alpha \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

y

$${}^0H^\alpha(0,1) = \begin{cases} H^\alpha(0,1), & \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ \{u \in H^{\frac{1}{2}}(0,1) : \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{1-x} dx < \infty\}, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ \{u \in H^\alpha(0,1) : u(1) = 0\}, & \alpha \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \|u\|_{{}_0H^\alpha(0,1)} &= \|u\|_{{}^0H^\alpha(0,1)} = \|u\|_{H^\alpha(0,1)}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \|u\|_{{}_0H^{\frac{1}{2}}(0,1)} &= \left( \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(0,1)}^2 + \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x} dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u\|_{{}^0H^{\frac{1}{2}}(0,1)} &= \left( \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(0,1)}^2 + \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{1-x} dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Notemos que, por Definición 6, para  $m \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\frac{d}{dx} : W^{m,p}(0,1) \rightarrow W^{m-1,p}(0,1)$  y  $I^1 : W^{m-1,p}(0,1) \rightarrow W^{m,p}(0,1)$ . Podemos deducir un comportamiento análogo si consideramos los espacios de Sobolev fraccionarios y los operadores fraccionarios (ver [30, Proposición 2.25]). Aquí consideraremos únicamente los espacios  $H^\gamma(0,1)$  y  ${}_0H^\gamma(0,1)$ , por lo que los resultados que necesitaremos son los siguientes.

**Proposición 10.** [18, Remark 12.8] Sea  $\gamma \neq \frac{1}{2}$ . Entonces,

$$\partial_x \in \mathcal{L}(H^\gamma(0,1), H^{\gamma-1}(0,1)). \tag{2.14}$$

**Proposición 11.** [30, Proposición 2.25] Para  $\alpha \in [0,1]$  los operadores  $I^\alpha : L^2(0,1) \rightarrow {}_0H^\alpha(0,1)$  y  $\partial^\alpha : {}_0H^\alpha(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$  son isomorfismos y se verifican las siguientes desigualdades

$$c_\alpha^{-1} \|u\|_{{}_0H^\alpha(0,1)} \leq \|\partial^\alpha u\|_{L^2(0,1)} \leq c_\alpha \|u\|_{{}_0H^\alpha(0,1)}, \quad u \in {}_0H^\alpha(0,1),$$

$$c_\alpha^{-1} \|I^\alpha f\|_{0H^\alpha(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \leq c_\alpha \|I^\alpha f\|_{0H^\alpha(0,1)}, \quad u \in L^2(0,1),$$

donde  $c_\alpha$  denota una constante positiva que depende de  $\alpha$ .

**Corolario 2.** [31, Corolario 1] Para  $\alpha, \beta > 0$  se tiene que  $I^\beta : 0H^\alpha(0,1) \rightarrow 0H^{\alpha+\beta}(0,1)$ . Más aún, existe una constante  $c > 0$  que depende únicamente de  $\alpha$  y  $\beta$  tal que para cada  $f \in 0H^\alpha(0,1)$

$$\|I^\beta f\|_{0H^{\alpha+\beta}(0,1)} \leq c \|f\|_{0H^\alpha(0,1)}.$$

**Proposición 12.** [8, Proposición 2.1] Sean  $0 < s \leq \tilde{s} \leq 1$ . Entonces  $H^{\tilde{s}}(0,1) \hookrightarrow H^s(0,1)$ . En particular, existe  $c > 0$  tal que para toda  $u \in H^{\tilde{s}}(0,1)$ ,

$$\|u\|_{H^s(0,1)} \leq c \|u\|_{H^{\tilde{s}}(0,1)}.$$

A continuación presentamos un caso particular del resultado [18, Teorema 9.8].

**Teorema 3.** Sea  $\beta > \frac{1}{2}$ . Entonces,  $H^\beta(0,1) \subset C^0([0,1])$  con inyección continua.

**Proposición 13.** [16, Proposición 6.10] Sea  $L > 0$ ,  $\alpha, \beta \in (0,1)$  y  $w \in AC[0,L]$ . Entonces

$$\int_0^L \partial^\alpha w(x) \cdot w(x) dx = \frac{\alpha}{4} \int_0^L \int_0^L \frac{|w(x) - w(p)|^2}{|x - p|^{1+\alpha}} dp dx + \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^L [(L-x)^{-\alpha} + x^{-\alpha}] |w(x)|^2 dx.$$

En consecuencia, existe una constante  $c > 0$  que depende de  $\alpha$  y  $L$ , tal que

$$\int_0^L \partial^\alpha w(x) \cdot w(x) dx \geq c \|w\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(0,L)}^2. \quad (2.15)$$

**Observación 5.** [48, Ejemplo 2.1] De la Proposición 11 se deduce que

$$x^\beta \in 0H^\alpha(0,1), \quad \text{si } \beta > \alpha - \frac{1}{2}.$$

De la Observación 5 y la definición de  $0H^\beta(0,1)$  para  $\beta > 1$  se deduce que, dados  $\beta > 0, \gamma > 1$

$$x^\beta \in 0H^\gamma(0,1), \quad \text{si } \beta > \gamma - \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

En el Capítulo 4 utilizaremos el concepto de espacios de interpolación, que como veremos a continuación, proporcionan otra definición equivalente para los espacios de Sobolev fraccionarios. Uno de los mayores motivos para incorporar dicha definición, consiste en que disponemos de estimaciones sobre tales espacios, que nos permitirán deducir resultados de regularidad, como así también aplicar resultados de punto fijo. Comencemos con algunos conceptos previos.

**Definición 10.** El par  $(X, Y)$  de espacios de Banach se dice un par de interpolación si  $X, Y$  están continuamente embebidos en un espacio vectorial Hausdorff  $V$ .



**Observación 6.** Dado  $(X, Y)$  un par de interpolación, se tiene que  $X \cap Y$  es un subespacio lineal de  $V$ , y más aún es un espacio de Banach bajo la norma

$$\|v\|_{X \cap Y} := \max\{\|v\|_X, \|v\|_Y\}.$$

**Definición 11.** Sea  $X$  un espacio de Hilbert, y  $U, V \subseteq X$  subespacios de Banach de  $X$ . Para cada  $x \in U + V$ , definimos la norma

$$\|x\|_{U+V} = \inf\{\|u\|_U + \|v\|_V : x = u + v\}.$$

**Definición 12.** Sea  $(X, Y)$  un par de interpolación. Denotamos por  $\mathcal{F}(X, Y)$  al conjunto de funciones  $f : S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\} \mapsto X + Y$  tales que

$\mathcal{F}$ -(i)  $f$  es acotada y continua en  $S$ ,

$\mathcal{F}$ -(ii)  $f$  es analítica en  $S^\circ$ ,

$\mathcal{F}$ -(iii)  $f(it) \in X$  y  $f(1 + it) \in Y$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

$\mathcal{F}$ -(iv) las funciones  $t \mapsto f(it)$  y  $t \mapsto f(1 + it)$  son acotadas y continuas respecto de los espacios  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Definimos en  $\mathcal{F}(X, Y)$  la siguiente norma

$$\|f\|_{\mathcal{F}(X, Y)} = \max\{\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_X, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_Y\}.$$

**Definición 13.** Sea  $(X, Y)$  un par de interpolación. Definimos el espacio de interpolación  $[X, Y]_\theta$  como

$$[X, Y]_\theta = \{f(\theta) : f \in \mathcal{F}(X, Y)\},$$

con la norma

$$\|\phi\|_\theta = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(X, Y)} : f(\theta) = \phi\}. \quad (2.17)$$

**Definición 14.** Sean  $\gamma > 0$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , y  $m \in \mathbb{N}$  tales que  $\theta m = \gamma$ . Definimos

$$H^\gamma(0, 1) := [L^2(0, 1), H^m(0, 1)]_\theta.$$

**Definición 15.** Para  $\alpha \in [0, 1]$ , definimos los siguientes subespacios de  $H^\alpha(0, 1)$

$${}_0H^\alpha(0, 1) := [L^2(0, 1), {}_0H^1(0, 1)]_\alpha, \quad {}^0H^\alpha(0, 1) := [L^2(0, 1), {}^0H^1(0, 1)]_\alpha,$$

$$H_0^\alpha(0, 1) := [L^2(0, 1), H_0^1(0, 1)]_\alpha$$

y para  $\gamma > 1$ ,

$${}_0H^\gamma(0, 1) := \{f \in H^\gamma(0, 1) : f^{(k)}(0) = 0, k = 0, \dots, [\gamma], f^{([\gamma])} \in {}_0H^{\beta - [\gamma]}(0, 1)\}.$$

$${}^0H^\gamma(0,1) := \{f \in H^\gamma(0,1) : f^{(k)}(1) = 0, k = 0, \dots, \lfloor \gamma \rfloor, f^{(\lfloor \gamma \rfloor)} \in {}^0H^{\beta - \lfloor \gamma \rfloor}(0,1)\}.$$

$$H_0^\gamma(0,1) := \{f \in H^\gamma(0,1) : f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0, k = 0, \dots, \lfloor \gamma \rfloor, f^{(\lfloor \gamma \rfloor)} \in H_0^{\beta - \lfloor \gamma \rfloor}(0,1)\}.$$

**Observación 7.** [38, Remark 4.4.2/2] Las definiciones 8 y 14 son equivalentes. De manera similar, las definiciones 9 y 15 son equivalentes.

Finalizamos esta sección con un resultado de regularidad local para los espacios de Sobolev fraccionarios.

**Lema 1.** [31, Lema 4] Sea  $f \in {}^0H^\alpha(0,1)$  con  $\alpha \in (0,1)$  y  $\partial^\alpha f \in H_{loc}^\beta(0,1)$  con  $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ . Entonces  $f \in H_{loc}^{\beta+\alpha}(0,1)$  y para todo  $0 < \delta < \omega < 1$  existe una constante positiva  $c = c(\delta, \omega, \alpha, \beta)$  tal que

$$\|f\|_{H^{\beta+\alpha}(\delta, \omega)} \leq c(\|f\|_{{}^0H^\alpha(0, \omega)} + \|\partial^\alpha f\|_{H^\beta(\frac{\delta}{2}, \omega)}). \quad (2.18)$$

## 2.4. Teoría de semigrupos

Abordaremos a continuación algunos conceptos de la teoría de semigrupos necesarios para el estudio del operador  $\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha$  en (1.8)–(i) en el Capítulo 4. Comencemos recordando la definición de conjunto y operador resolvente asociado a un operador dado.

**Definición 16.** Sea  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un operador lineal en un espacio de Banach  $X$ . Definimos el conjunto resolvente  $\rho(A)$  y el espectro  $\sigma(A)$  de  $A$  de la siguiente manera

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\lambda I - A)^{-1} \in L(X)\}, \quad \sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Los valores  $\lambda \in \sigma(A)$  tales que  $\lambda I - A$  no es inyectiva se denominan autovalores de  $A$ . El conjunto de todos los autovalores de  $A$ , denotado por  $\sigma_p(A)$ , se denomina espectro puntual.

Dado  $\lambda \in \rho(A)$ , definimos el operador resolvente  $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ .

Proseguimos con la definición de operador sectorial, que será fundamental para definir luego una noción de solución débil del problema (1.8).

**Definición 17.** Sea  $A$  un operador lineal en un espacio de Banach  $X$ . Diremos que  $A$  es sectorial si existen  $M > 0$  y  $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$  tales que

$$1. S_\omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg(\lambda)| < \omega\} \subseteq \rho(A),$$

$$2. \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in S_\omega.$$

Uno de nuestros objetivos será probar que  $\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha$  es un operador sectorial, para luego establecer una relación con el concepto de familia de operadores de evolución. Para ello, debemos introducir primero las siguientes definiciones.

**Definición 18.** Sea  $X$  un espacio de Banach, y  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  una familia de operadores acotados en  $X$ . Diremos que  $T(t)$  es un  $C_0$ -semigrupo de contracciones, si:

1.  $T(0) = I$ ,
2.  $T(t + s) = T(t)T(s)$ , para todo  $t, s \geq 0$ ,
3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)u = u$ , para todo  $u \in X$ ,
4.  $\|T(t)\|_{B(X)} \leq 1$ .

**Observación 8.** Una familia  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  que verifica 1 y 2 se denomina un semigrupo, y si además verifica 3, se denomina un  $C_0$ -semigrupo.

**Definición 19.** Sea  $X$  un espacio de Banach y  $T(t)$  un semigrupo en  $X$ . El operador  $A$  definido por

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ existe en } X \right\},$$

y

$$Au : D(A) \mapsto X, \quad Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t},$$

se denomina generador infinitesimal del semigrupo  $T(t)$ . Diremos además que  $A$  es un generador del semigrupo  $T(t)$ .

Estas definiciones serán relevantes puesto que, por un lado, probaremos que  $\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha$  es un generador de un  $C_0$ -semigrupo de contracciones, y por el otro, probaremos caracterizaciones para  $C_0$ -semigrupos de contracciones que nos permitirán comprobar que  $\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha$  verifica las condiciones en la Definición 17. Para establecer dichas caracterizaciones necesitamos una definición adicional.

**Definición 20.** Un operador lineal  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  se dice disipativo, si para cada  $u \in D(A)$  existe  $u^* \in X^*$  tal que  $\|u^*\| \leq 1$ ,  $\langle u^*, u \rangle = \|u\|$  y  $\Re \langle u^*, Au \rangle \leq 0$ .

**Observación 9.** Un operador  $A$  en un espacio de Banach  $X$  es disipativo, si y sólo si para cada  $u \in D(A)$  y  $t > 0$  se verifica  $\|u - tAu\| \geq \|u\|$ . Si además,  $X$  es un espacio de Hilbert,  $A$  es disipativo si y sólo si para cada  $u \in D(A)$  se verifica  $\Re \langle Au, u \rangle \leq 0$ .

Estamos en condiciones de presentar las caracterizaciones antes mencionadas.

**Teorema 4.** *(Teorema de Lumer-Philips)[44, Theorem 3.4.5] Sea  $X$  un espacio de Banach y  $A$  un operador lineal definido densamente en  $X$ . Entonces  $A$  es un generador de un  $C_0$ -semigrupo de contracciones si y sólo si*

1.  $A$  es disipativo,
2. Existe  $\lambda > 0$  tal que  $R(\lambda I - A) = X$ .

**Teorema 5.** *[23, Teorema 3.1, Capítulo 1] Un operador lineal (no acotado)  $A$  en  $X$  es un generador de un  $C_0$ -semigrupo de contracciones si y sólo si,*

1.  $A$  es cerrado y  $\overline{D(A)} = X$ ,
2.  $\mathbb{R}^+ \subseteq \rho(A)$  y para todo  $\lambda > 0$ ,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Observemos que la condición 2 es más restrictiva que la condición 1 de la Definición 17, por lo que el resultado anterior no nos permitirá probar de forma directa que  $\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha$  es un generador de un  $C_0$ -semigrupo. Es por ello que, haremos uso del siguiente resultado.

**Proposición 14.** *[23, Teorema 3.9, Capítulo 1] Sea  $X$  un espacio de Banach, y  $A$  un operador lineal en  $X$ . Definimos el rango numérico de  $A$  como*

$$S(A) := \{ \langle x^*, Ax \rangle : x \in D(A), \|x\| = 1, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \langle x^*, x \rangle = 1 \}.$$

*Supongamos que  $A$  es cerrado y definido densamente en  $X$ . Denotamos por  $\Sigma := \mathbb{C} \setminus \overline{S(A)}$ . Si  $\lambda \in \Sigma$ , entonces  $\lambda I - A$  es inyectivo y tiene rango cerrado. Más aún, si existe  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$  tal que  $\Sigma_0 \cap \rho(A) \neq \emptyset$ , entonces el espectro de  $A$  está contenido en  $\mathbb{C} \setminus \Sigma_0$  y*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{S(A)})}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_0.$$

En el Capítulo 4 utilizaremos los resultados de esta sección, para probar que  $\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha$  es sectorial. La idea consiste en ver primero que es un generador de un  $C_0$ -semigrupo de contracciones mediante el Teorema 4, y luego combinar el Teorema 5 y la Proposición 14 para ver que  $\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha$  verifica las condiciones de la Definición 17.

## 2.5. Operadores de evolución

Para finalizar el presente capítulo, introduciremos algunos conceptos de la teoría de operadores de evolución para poder definir en el Capítulo 4 una noción de solución débil del Problema 1.8. Comencemos con la siguiente definición.

**Definición 21.** [19, Definición 6.0.1] Sea  $X$  un espacio de Banach, y sea  $T > 0$ . Una familia de operadores lineales acotados  $\{G(t, \sigma) : 0 \leq \sigma \leq t \leq T\}$  se dice que es una familia de operadores de evolución para el problema

$$u'(t) = A(t)u + f(t), 0 < t \leq T, u(0) = u_0, \quad (2.19)$$

donde  $A(\cdot)$  denota una familia de operadores sectoriales con dominios comunes, es decir,  $D(A(t)) \equiv D$  por cada  $t \in [0, T]$ , si

1.  $G(t, \sigma)G(\sigma, r) = G(t, r)$ ,  $G(\sigma, \sigma) = E$ , para  $0 \leq r \leq \sigma \leq t \leq T$ ,
2.  $G(t, \sigma) \in B(X, D)$  para  $0 \leq \sigma \leq t \leq T$ ,
3.  $t \mapsto G(t, \sigma)$  es diferenciable en  $(\sigma, T)$  con valores en  $B(X)$  y

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, \sigma) = A(t)G(t, \sigma) \quad \text{para } 0 \leq \sigma < t \leq T.$$

Para resolver el Problema 1.8, nuestra estrategia será obtener un problema asociado, escrito en la forma (2.19), para aplicar el siguiente resultado.

**Teorema 6.** [19, Capítulo 6] Sea  $D$  un espacio de Banach embebido continuamente en  $X$  y sea  $T > 0$ ,  $a \in (0, 1)$ . Si para  $0 \leq t \leq T$  los operadores  $A(t) : D(A(t)) \rightarrow X$  cumplen que

1. para cada  $t \in [0, T]$   $A(t)$  es sectorial y  $D(A(t)) \equiv D$ ,
2.  $t \mapsto A(t) \in C^{0,a}([0, T]; B(D, X))$ ,

entonces existe una familia de operadores de evolución para  $A(t)$  dada por Definición 21.

Por último, introducimos el concepto de mild solution asociado con el problema (2.19), que en el Capítulo 4 adaptaremos al problema 1.8, y que adoptará el papel de solución débil del mismo.

**Definición 22.** Si existe una familia de operadores de evolución  $\{G(t, \sigma) : 0 \leq \sigma \leq t \leq T\}$  para el problema (2.19), decimos que una función  $u$  que verifica

$$u(t) = G(t, 0)u_0 + \int_0^t G(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (2.20)$$

es una mild solution de (2.19).

Adicionalmente, presentamos algunos resultados de regularidad referentes a la familia de operadores  $G(t, \sigma)$  y la relación entre la mild solution y una solución fuerte al problema (2.19).

**Proposición 15.** [19, Corolario 6.1.6.(i), (iii)] Sea  $A(t)$  tal que satisface las hipótesis del Teorema 6. Si  $u_0 \in X$ , entonces  $G(t, 0)u_0 \in C([0, T]; X) \cap C^1((0, T]; X) \cap C((0, T]; D)$ . Además, si  $u_0 \in D$ , entonces  $G(t, 0)u_0 \in C^1([0, T]; X) \cap C([0, T]; D)$  y  $\frac{\partial}{\partial t} G(t, 0)u_0 = A(t)G(t, 0)u_0$  para todo  $0 \leq t \leq T$ .

**Proposición 16.** [19, Corolario 6.2.4.] Sea  $f \in C((0, T]; X) \cap L^1(0, T; X)$ ,  $u_0 \in \overline{D}$ . Si el problema (2.19) tiene una solución perteneciente a  $C^1((0, T]; X) \cap C((0, T]; D) \cap C([0, T]; X)$  de modo que (2.19) se verifica para cada  $t \in (0, T]$ , entonces  $u$  viene dada por (2.20).

## Capítulo 3

# Problemas de Stefan asociados a aleaciones binaria

### 3.1. Soluciones autosimilares para el problema de Aleación binaria

En este capítulo, estudiaremos un tipo de problema de Stefan asociado a la transferencia de calor durante la solidificación de aleaciones binarias, conocido también como problema de Rubinstein [27]. Más precisamente, consideremos un material semi-infinito, que consta de dos componentes  $A$  y  $B$ , y denotemos por  $C$  la concentración del componente  $B$ , y  $T$  la temperatura del material. Supongamos que la solidificación del material se rige por un diagrama de equilibrio de fase que consta de una curva “liquidus”  $C = f_l(T)$  y una curva “solidus”  $C = f_s(T)$ . Suponemos que  $f_s$  y  $f_l$  son funciones estrictamente crecientes en la variable  $T$  y que verifican las siguientes desigualdades:

$$f_l(T_A) = f_s(T_A) < f_l(T) < f_s(T) < f_l(T_B) = f_s(T_B),$$

donde  $T_A$  y  $T_B$  son las temperaturas de fusión de  $A$  y  $B$  respectivamente. El material está en fase sólida si  $C > f_s(T)$  y en fase líquida si  $C < f_l(T)$ . Cuando  $C$  se encuentra entre  $f_s(T)$  y  $f_l(T)$  el estado del material no está bien definido y se conoce como zona pastosa según la descripción del modelo propuesto en [27, 33, 47, 46] que se puede apreciar en la Figura 3.1.

Supondremos que la aleación está inicialmente en estado líquido a temperatura constante  $T_0$  y concentración constante  $C_0$ . Por otro lado, consideremos que aplicamos un flujo de calor caracterizado por una constante  $q_0$  en  $x = 0$ , lo que provoca un frente de solidificación  $x = s(t)$  que

genera en la aleación una división en dos estados, sólido ( $0 < x < s(t)$ ) y líquido ( $x > s(t)$ ). Nos proponemos hallar la temperatura  $T = T(x, t)$  y la concentración  $C = C(x, t)$ , ambas definidas para  $x > 0$  y  $t > 0$ , la frontera libre  $x = s(t)$ , definida para  $t > 0$ , y la temperatura crítica de solidificación  $T_k$  tales que se cumplen las siguientes condiciones (problema  $(P_1)$ ):

$$\begin{aligned}
i. \quad & \alpha_s T_{sxx} = T_{st} && 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
ii. \quad & \alpha_l T_{lxx} = T_{lt} && s(t) < x, \quad t > 0, \\
iii. \quad & d_s C_{sxx} = C_{st} && 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
iv. \quad & d_l C_{lxx} = C_{lt} && s(t) < x, \quad t > 0, \\
v. \quad & k_s T_{sx}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} && (q_0 > 0), \quad t > 0, \\
vi. \quad & T_s(s(t), t) = T_l(s(t), t) = T_k && t > 0, \\
vii. \quad & T_l(x, 0) = T_0 && T_A < T_0 < T_B, \quad x > 0, \\
viii. \quad & T_l(\infty, t) = T_0 && T_A < T_0 < T_B, \quad t > 0, \\
ix. \quad & C_{sx}(0, t) = 0 && t > 0, \\
x. \quad & C_s(s(t), t) = f_s(T_k) && t > 0, \\
xi. \quad & C_l(x, 0) = C_0 && x > 0, \\
xii. \quad & C_l(s(t), t) = f_l(T_k) && t > 0, \\
xiii. \quad & k_s T_{sx}(s(t), t) - k_l T_{lx}(s(t), t) = \gamma \rho s'(t) && t > 0, \\
xiv. \quad & d_l C_{lx}(s(t), t) - d_s C_{sx}(s(t), t) = [f_s(T_k) - f_l(T_k)] s'(t) && t > 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $\rho, k, \alpha, d, \gamma$  representan la densidad de masa, la conductividad térmica, la difusividad térmica, el coeficiente de difusión y el calor latente de fusión, donde  $s$  y  $l$  hacen referencia a la fase sólida y la fase líquida respectivamente.

También consideraremos el problema  $(P_2)$  que se obtiene al reemplazar en el problema  $(P_1)$  la condición (3.1)-(v) por la siguiente

$$v'. \quad k_s T_{sx}(0, t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}} (T_s(0, t) - T_1), \quad (h_0 > 0), \quad t > 0.$$

En cuanto al problema con condición en el borde fijo  $x = 0$  de tipo Dirichlet, el mismo fue resuelto en [27, 33, 46].

En lo que sigue, nos enfocaremos en hallar soluciones autosimilares a los problemas  $(P_1)$  y  $(P_2)$ , como así también en encontrar condiciones necesarias y/o suficientes de los datos (condiciones iniciales, de contorno y coeficientes térmicos de la aleación binaria) para obtener un proceso de cambio de fase instantáneo.



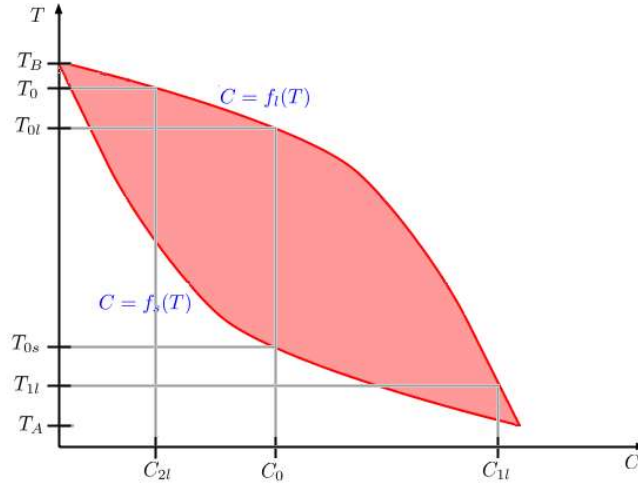


Figura 3.1: Concentración vs. Temperatura (diagrama de equilibrio de fase con curvas líquidas y sólidas)

### 3.2. Solución explícita para el problema de solidificación de una aleación binaria con condición de borde de Neumann

Cosideremos el problema  $(P_1)$  dado por (3.1)(i)-(xiv). Para obtener soluciones exactas de dicho problema, recordemos primero que las soluciones autosimilares para la ecuación del calor  $\alpha u_{xx} = u_t$  tienen la forma  $u(x, t) = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$  donde

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

y  $A, B$  son números reales arbitrarios. Por otro lado, necesitaremos el siguiente resultado.

**Proposición 17.** Sean

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x), \\ Q(x) &= \sqrt{\pi} x e^{x^2} \operatorname{erfc}(x), \quad F_1(x) = \operatorname{erfc}(x) e^{x^2}, \quad x > 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= T_0 + \frac{\gamma \rho \alpha_l}{k_l} Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} x\right) - \frac{q_0}{k_l} \sqrt{\alpha_l \pi} e^{-x^2} F_1\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} x\right), \quad x > 0, \\ M(x) &= \left[ Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} x\right) \right]^{-1}, \quad x > 0, \quad \phi(x) = \frac{f_s(x) - f_l(x)}{C_0 - f_l(x)}, \quad x \in (T_A, T_{0l}) \cup (T_{0l}, T_B). \end{aligned}$$

Entonces,

(a)  $\operatorname{erf}(x)$  es una función estrictamente creciente, con  $\operatorname{erf}(0^+) = 0$  y  $\operatorname{erf}(+\infty) = 1$ .

(b)  $Q$  es una función estrictamente creciente, con  $Q(0^+) = 0$  y  $Q(+\infty) = 1$ .

(c)  $F_1$  es una función estrictamente decreciente, con  $F_1(0^+) = 1$  y  $F_1(+\infty) = 0$ .

(d)  $F$  es una función estrictamente creciente, con  $F(0^+) = T_0 - \frac{\sqrt{\pi\alpha_l}q_0}{k_l}$  y  $F(+\infty) = T_0 + \frac{\gamma\rho\alpha_l}{k_l}$ .

(e)  $\phi$  es una función estrictamente creciente en  $[T_{0s}, T_{0l})$ , con  $\phi(T_{0s}) = 1$  y  $\phi(T_{0l}^-) = \lim_{x \rightarrow T_{0l}^-} \phi(x) = +\infty$ .

*Demostración.* (a), (b), y (c) se deducen directamente de la definición de la función  $\operatorname{erf}$ , [35, Apéndice] y [47, Lema 2].

(d) Puesto que  $Q$  es estrictamente creciente y  $F_1$  es estrictamente decreciente,  $F$  es estrictamente creciente. Además,

$$F(0) = T_0 + \frac{\gamma\rho\alpha_l}{k_l}Q(0) - \frac{q_0}{k_l}\sqrt{\alpha_l\pi}e^{-0^2}F_1(0) = T_0 - \frac{q_0}{k_l}\sqrt{\alpha_l\pi},$$

y

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} T_0 + \frac{\gamma\rho\alpha_l}{k_l}Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}x\right) - \frac{q_0}{k_l}\sqrt{\alpha_l\pi}e^{-x^2}F_1\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}x\right) \\ &= T_0 + \frac{\gamma\rho\alpha_l}{k_l}, \end{aligned}$$

(e) Notemos que,

$$\phi(x) = \frac{f_s(x) - C_0}{C_0 - f_l(x)} + 1,$$

y  $f_s(x) \geq C_0$  para todo  $x \geq T_{0s}$ ,  $f_l(x) < C_0$  para todo  $x < T_{0l}$ . Teniendo en cuenta que  $f_s$  y  $f_l$  son funciones estrictamente crecientes, resulta que  $\phi$  es estrictamente creciente en  $[T_{0s}, T_{0l})$ . Por otro lado,

$$\phi(T_{0s}) = \frac{f_s(T_{0s}) - f_l(T_{0s})}{C_0 - f_l(T_{0s})} = 1,$$

y como  $f_s(x) > f_l(x)$  para todo  $x \in (T_A, T_B)$ , deducimos que  $f_s(T_{0l}) > f_l(T_{0l})$ , de donde

$$\phi(T_{0l}^-) = \lim_{x \rightarrow T_{0l}^-} \frac{f_s(x) - f_l(x)}{C_0 - f_l(x)} = +\infty. \quad \square$$

Estamos en condiciones de obtener las soluciones autosimilares al problema ( $P_1$ ).

**Teorema 7.** Si  $q_0$  verifica la siguiente desigualdad

$$\frac{(T_0 - T_{0l})k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}} < q_0 < \frac{(T_0 - T_{0s})k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}} \quad (3.3)$$

con  $T_{0l} = f_l^{-1}(C_0)$  y  $T_{0s} = f_s^{-1}(C_0)$ , donde  $f_l^{-1}(C) = T$  es la inversa de  $f_l$  y  $f_s^{-1}(C) = T$  es la inversa de  $f_s$ , entonces existe una única solución autosimilar al problema  $(P_1)$  dada por:

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_s t}, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

$$T_s(x, t) = \left( T_k - \frac{q_0}{k_s} \sqrt{\pi\alpha_s} \operatorname{erf}(\lambda) \right) + \frac{q_0}{k_s} \sqrt{\pi\alpha_s} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$T_l(x, t) = T_0 + \frac{T_k - T_0}{\operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda \right)} + \frac{T_0 - T_k}{\operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda \right)} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}} \right), \quad s(t) < x, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$C_s(x, t) = f_s(T_k), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.7)$$

$$C_l(x, t) = C_0 + \frac{f_l(T_k) - C_0}{\operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda \right)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}} \right), \quad s(t) < x, \quad t > 0, \quad (3.8)$$

donde  $T_k$  y  $\lambda$  (coeficiente que caracteriza la frontera libre  $x = s(t)$ ) satisface la siguiente ecuación:

$$T_k = F(\lambda), \quad M(\lambda) = \phi(T_k), \quad \lambda > 0, \quad T_A < T_k < T_B. \quad (3.9)$$

*Demostración.* Por lo visto anteriormente, debemos considerar una solución de la forma

$$\begin{aligned} T_s(x, t) &= A_s^T + B_s^T \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right), & T_l(x, t) &= A_l^T + B_l^T \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}} \right), \\ C_s(x, t) &= A_s^C + B_s^C \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right), & C_l(x, t) &= A_l^C + B_l^C \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $A_s^T, B_s^T, A_l^T, B_l^T, A_s^C, B_s^C, A_l^C, B_l^C$ , son constantes a determinar. Comencemos considerando (3.1)-vi. Tenemos que

$$T_s(s(t), t) = A_s^T + B_s^T \operatorname{erf} \left( \frac{s(t)}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right) = T_k,$$

donde  $T_k$  es otra constante a determinar. Para que dicha igualdad sea válida, deber ser  $s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_s t}$  para algún  $\lambda > 0$ . Nuevamente por (3.1)-vi, vemos que

$$T_s(s(t), t) = A_s^T + B_s^T \operatorname{erf}(\lambda) = T_k, \quad (3.11)$$

$$T_l(s(t), t) = A_l^T + B_l^T \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda \right) = T_k. \quad (3.12)$$

Por otro lado, de (3.1)-v obtenemos que

$$k_s T_{s_x}(0, t) = \frac{k_s B_s^T}{\sqrt{\pi\alpha_s t}} = \frac{q_0}{\sqrt{t}},$$

de donde

$$B_s^T = \frac{q_0}{k_s} \sqrt{\pi \alpha_s}. \quad (3.13)$$

Luego, reemplazando (3.13) en (3.11), tenemos que

$$A_s^T = T_k - \frac{q_0}{k_s} \sqrt{\pi \alpha_s} \operatorname{erf}(\lambda).$$

Adicionalmente, de (3.1)-vii, se sigue que

$$T_l(x, 0) = A_l^T + B_l^T = T_0. \quad (3.14)$$

Restando (3.12) y (3.14), deducimos que

$$B_l^T \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) = T_0 - T_k,$$

o equivalentemente,

$$B_l^T = \frac{T_0 - T_k}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}. \quad (3.15)$$

Reemplazando (3.15) en (3.14), concluimos que

$$A_l^T = T_0 - \frac{T_0 - T_k}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}.$$

En consecuencia, obtenemos (3.5) y (3.6). Análogamente, considerando las condiciones *ix-xii* de (3.1), vemos que

$$C_{s_x}(0, t) = \frac{B_s^C}{\sqrt{\pi \alpha_s t}} = 0,$$

de donde  $B_s^C = 0$ , y

$$C_s(s(t), t) = A_s^C + B_s^C \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_s}} \lambda\right) = A_s^C = f_s(T_k).$$

Luego,  $C_s \equiv f_s(T_k)$ . Por otro lado,

$$C_l(x, 0) = A_l^C + B_l^C = C_0,$$

y

$$C_l(s(t), t) = A_l^C + B_l^C \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} \lambda\right) = f_l(T_k),$$

por lo que,

$$A_l^C = C_0 - \frac{C_0 - f_l(T_k)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} \lambda\right)}, \quad B_l^C = \frac{C_0 - f_l(T_k)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} \lambda\right)}.$$

En consecuencia, obtenemos (3.8), pues

$$\begin{aligned} C_l(x, t) &= C_0 - \frac{C_0 - f_l(T_k)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\lambda\right)} + \frac{C_0 - f_l(T_k)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\lambda\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{d_l t}}\right) \\ &= C_0 + \frac{f_l(T_k) - C_0}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\lambda\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{d_l t}}\right), \end{aligned}$$

De (3.1)-xiii, resulta

$$q_0 e^{-\lambda^2} + k_l \frac{T_k - T_0}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\lambda\right)} \frac{e^{-\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\lambda\right)^2}}{\sqrt{\alpha_l \pi}} = \gamma \rho \lambda \sqrt{\alpha_s}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T_k &= T_0 + (\gamma \rho \lambda \sqrt{\alpha_s} - q_0 e^{-\lambda^2}) \frac{\sqrt{\alpha_l \pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\lambda\right)}{k_l e^{-\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\lambda\right)^2}} \\ &= T_0 + \frac{\gamma \rho \alpha_l}{k_l} Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\lambda\right) - q_0 e^{-\lambda^2} \frac{\sqrt{\alpha_l \pi}}{k_l} F_1\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\lambda\right) \\ &= F(\lambda), \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde  $Q$ ,  $F_1$  y  $F$  vienen dadas por (3.2).

De (3.1)-xiv, obtenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} \lambda e^{\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\lambda\right)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\lambda\right)} = \frac{f_s(T_k) - f_l(T_k)}{C_0 - f_l(T_k)}, \tag{3.17}$$

es decir,

$$M(\lambda) = \phi(T_k).$$

Por Proposición 17,  $Q$  y  $F$  son estrictamente crecientes. Entonces,  $M$  es estrictamente decreciente,

y

$$M(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{Q(x)} = +\infty, \quad M(+\infty) = \frac{1}{Q(+\infty)} = 1, \tag{3.18}$$

$$F(0^+) = T_0 - \frac{\sqrt{\pi \alpha_l} q_0}{k_l}, \quad F(+\infty) = T_0 + \frac{\gamma \rho \alpha_l}{k_l}. \tag{3.19}$$

Por otro lado, de (3.16) y (3.17), deducimos que

$$M(\lambda) = \phi(F(\lambda)). \tag{3.20}$$

En consecuencia, de (3.18), (3.19) y Proposición 17-(b), podemos asegurar que existe una única solución  $\lambda$  a (3.20), si  $T_{0s} \leq F(0) < F(+\infty) < T_{0l}$ , o equivalentemente (3.3).  $\square$

**Corolario 3.** *Sea  $C_{1l} = f_l(T_1)$  y  $C_{2l} = f_l(T_0)$ . Entonces,  $C_0 \in [C_{1l}, C_{2l}]$ .*

*Demostración.* Por definición,  $C_0 = f_l(T_{0l})$ , y por hipótesis,  $f_l(T_l) \geq C_l$ . Luego

$$C_{2l} = f_l(T_0) = f_l(T_l(x, 0)) \geq C_l(x, 0) = C_0. \quad (3.21)$$

Por otro lado, existen  $x_0$  y  $t_0$ , con  $0 < x_0 < s(t_0)$ , tales que

$$T_{0s} = f_s^{-1}(C_0) = T_s(x_0, t_0),$$

y como  $f_l(T) < f_s(T)$ , se sigue que  $T_{0s} = f_s^{-1}(C_0) < f_l^{-1}(C_0) = T_{0l}$ .

Entonces, por (3.26), se sigue que  $T_1 \leq T_s(x_0, t_0) = T_{0s} \leq T_{0l}$ , de donde, puesto que  $f_l$  es creciente, deducimos que

$$C_{1l} = f_l(T_1) \leq f_l(T_{0l}) = C_0. \quad (3.22)$$

Por (3.21) y (3.22) concluimos que  $C_0 \in [C_{1l}, C_{2l}]$ .  $\square$

**Observación 10.** *Siguiendo los pasos en [46, Sección 4] podemos concluir la existencia de una zona pastosa para el problema  $(P_1)$  si se verifica la siguiente condición*

$$\frac{T_0 - T_k}{C_0 - f_l(T_k)} < (f_l^{-1})'(f_l(T_k)) \frac{\alpha_l}{d_l} \frac{Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}{Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} \lambda\right)}. \quad (3.23)$$

Por Proposición (17)-(b), se sigue que

$$\frac{\alpha_l}{d_l} \frac{Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}{Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} \lambda\right)} > \frac{\alpha_l}{d_l} Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right). \quad (3.24)$$

Entonces (3.23) se verifica si  $d_l$  es suficientemente pequeño.

### 3.3. Una desigualdad para el coeficiente $\mu$ en la frontera libre

Retomando la solución obtenida en Teorema 7, vemos que la temperatura en  $x = 0$  viene dada por

$$\tilde{T}_1 = T_s(0, t) = T_k - \frac{q_0}{k_s} \sqrt{\alpha_s} \pi \operatorname{erf}(\lambda), \quad (3.25)$$

que es una constante independiente de  $t$ . Además,

$$\tilde{T}_1 \leq T_s(x, t) < T_k, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0. \quad (3.26)$$

En efecto, puesto que  $\operatorname{erf}(x)$  es una función creciente, y para  $x \in (0, s(t))$ ,  $0 < \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right) < \operatorname{erf}(\lambda)$ , resulta que

$$\tilde{T}_1 = T_s(0, t) < T_s(x, t) < T_s(s(t), t) = T_k, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0.$$

En consecuencia, podemos considerar el problema  $(P_R)$  dado por (3.1)(i)-(iv), ( $\tilde{v}$ ), (vi)-(xiv), donde

$$\tilde{v}. \quad \tilde{T}_s(0, t) = T_1, \quad t > 0, \quad (3.27)$$

para  $T_1 < \tilde{T}_k = \tilde{T}_s(\tilde{s}(t), t)$ . La solución a dicho problema, conocida como solución de Rubinstein y obtenida en [27], esta dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_s(x, t) &= \mathcal{A}_s^T + \mathcal{B}_s^T \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right), & \tilde{T}_l(x, t) &= \mathcal{A}_l^T + \mathcal{B}_l^T \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}}\right), & (3.28) \\ \tilde{C}_s(x, t) &= \mathcal{A}_s^C + \mathcal{B}_s^C \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{d_s t}}\right), & \tilde{C}_l(x, t) &= \mathcal{A}_l^C + \mathcal{B}_l^C \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{d_l t}}\right), \\ & & \tilde{s}(t) &= 2\mu\sqrt{\alpha_s t} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s^T(\mu) &= T_1, & \mathcal{B}_s^T(\mu) &= \frac{\tilde{T}_k - T_1}{\operatorname{erf}(\mu)}, \\ \mathcal{A}_l^T(\mu) &= T_0 + \frac{\tilde{T}_k - T_0}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\mu\right)}, & \mathcal{B}_l^T(\mu) &= \frac{T_0 - \tilde{T}_k}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\mu\right)}, \\ \mathcal{A}_s^C(\mu) &= f_s(\tilde{T}_k), & \mathcal{B}_s^C(\mu) &= 0, \\ \mathcal{A}_l^C(\mu) &= C_0 + \frac{f_l(\tilde{T}_k) - C_0}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\mu\right)}, & \mathcal{B}_l^C(\mu) &= \frac{C_0 - f_l(\tilde{T}_k)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\mu\right)}, \end{aligned}$$

y  $\tilde{T}_k, \mu$  satisfacen:

$$\tilde{T}_k = G(\mu), \quad M(\mu) = \phi(\tilde{T}_k), \quad \mu > 0, \quad T_A < \tilde{T}_k < T_B, \quad (3.29)$$

con  $G$  definida como:

$$G(x) = \frac{\gamma\rho\alpha_s\alpha_l Q_1(x)Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}x\right) + T_1 k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}x\right) + T_0 k_l \alpha_s Q_1(x)}{k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}x\right) + k_l \alpha_s Q_1(x)}, \quad x > 0,$$

$$Q_1(x) = \sqrt{\pi} x e^{x^2} \operatorname{erf}(x). \quad (3.30)$$

A partir de lo anterior, podemos establecer en el siguiente resultado una relación entre las soluciones obtenidas para los problemas  $(P_1)$  y  $(P_R)$ .

**Teorema 8.** *Si en la solución del problema de Rubinstein dada por (3.28)-(3.29) consideramos  $T_1 = \tilde{T}_1$ , donde  $\tilde{T}_1$  está dado por (3.25), y suponemos que vale (3.3), entonces los problemas  $(P_1)$  y  $(P_R)$  son equivalentes, es decir*

$$\mu = \lambda, \quad \tilde{T}_k = T_k, \quad (3.31)$$

$$T_s(x, t) = \tilde{T}_s(x, t), \quad T_l(x, t) = \tilde{T}_l(x, t), \quad C_s(x, t) = \tilde{C}_s(x, t), \quad C_l(x, t) = \tilde{C}_l(x, t). \quad (3.32)$$

*Demostración.* Notemos que, de (3.9) se sigue que  $M(\lambda) = \phi(T_k)$ . Teniendo en cuenta que  $T_1 = \tilde{T}_1$  está dado por (3.25), obtenemos que

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{\gamma \rho \alpha_s \alpha_l Q_1(\lambda) Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + \tilde{T}_1 k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + T_0 k_l \alpha_s Q_1(\lambda)}{k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + k_l \alpha_s Q_1(\lambda)} \\ &= \frac{\gamma \rho \alpha_s \alpha_l Q_1(\lambda) Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + T_k k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) - q_0 \sqrt{\alpha_s \pi} \operatorname{erf}(\lambda) \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + T_0 k_l \alpha_s Q_1(\lambda)}{k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + k_l \alpha_s Q_1(\lambda)} \\ &= \frac{\alpha_s k_l Q_1(\lambda) \left( T_0 + \frac{\gamma \rho \alpha_l}{k_l} Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) - \frac{q_0 \alpha_l}{\sqrt{\alpha_s k_l}} \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda} Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) \right) + T_k k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}{k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + k_l \alpha_s Q_1(\lambda)} \\ &= \frac{\alpha_s k_l Q_1(\lambda) \left( T_0 + \frac{\gamma \rho \alpha_l}{k_l} Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) - \frac{q_0}{k_l} \sqrt{\alpha_l \pi} e^{-\lambda^2} F_1\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) \right) + T_k k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}{k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + k_l \alpha_s Q_1(\lambda)} \\ &= \frac{\alpha_s k_l Q_1(\lambda) F(\lambda) + T_k k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}{k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + k_l \alpha_s Q_1(\lambda)} \\ &= \frac{\alpha_s k_l Q_1(\lambda) T_k + T_k k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right)}{k_s \alpha_l Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda\right) + k_l \alpha_s Q_1(\lambda)} \\ &= T_k. \end{aligned} \quad (3.33)$$



Entonces,

$$\begin{cases} M(\lambda) = \phi(T_k), \\ G(\lambda) = T_k, \end{cases}$$

y por unicidad del par  $\tilde{T}_k, \mu$  en (3.29), deducimos que  $\lambda = \mu$ , y  $T_k = \tilde{T}_k$ .

Por otro lado, puesto que  $\lambda = \mu$ , se sigue (3.32), ya que

$$\begin{aligned} A_s^T(x) &= \mathcal{A}_s^T(x), \quad \forall x > 0, & A_l^T(x) &= \mathcal{A}_l^T(x), \quad \forall x > 0, \\ A_s^C(x) &= \mathcal{A}_s^C(x), \quad \forall x > 0, & A_l^C(x) &= \mathcal{A}_l^C(x), \quad \forall x > 0, \\ B_s^T(x) &= \mathcal{B}_s^T(x), \quad \forall x > 0, & B_l^T(x) &= \mathcal{B}_l^T(x), \quad \forall x > 0, \\ B_s^C(x) &= \mathcal{B}_s^C(x), \quad \forall x > 0, & B_l^C(x) &= \mathcal{B}_l^C(x), \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

□

**Corolario 4.** *Bajo las hipótesis del Teorema 8, el coeficiente  $\mu$  de la frontera libre  $\tilde{s}(t)$  y la temperatura inicial  $\tilde{T}_k$  de solidificación correspondientes a la solución de Rubinstein, satisfacen las siguientes desigualdades*

$$\frac{\sqrt{\alpha_l} \tilde{T}_k - T_1 k_s}{\sqrt{\alpha_s} T_0 - T_{0s} k_l} < \operatorname{erf}(\mu) < \frac{\sqrt{\alpha_l} \tilde{T}_k - T_1 k_s}{\sqrt{\alpha_s} T_0 - T_{0l} k_l}. \quad (3.34)$$

*Demostración.* Por Teorema 8, los problemas  $(P_1)$  and  $(P_R)$  son equivalentes. Luego,  $T_k = \tilde{T}_k$ , de donde por (3.25) deducimos que

$$q_0 = \frac{k_s(\tilde{T}_k - T_1)}{\sqrt{\alpha_s \pi} \operatorname{erf}(\mu)}.$$

Nuevamente, por la equivalencia de los problemas  $(P_1)$  y  $(P_R)$ , tenemos que  $q_0$  debe satisfacer la condición (3.3), es decir

$$\frac{(T_0 - T_{0l})k_l}{\sqrt{\pi \alpha_l}} < \frac{k_s(T_k - T_1)}{\sqrt{\alpha_s \pi} \operatorname{erf}(\mu)} < \frac{(T_0 - T_{0s})k_l}{\sqrt{\pi \alpha_l}},$$

o equivalentemente (3.34). □

**Observación 11.** *Puesto que  $0 \leq \operatorname{erf}(x) < 1$ , las desigualdades (3.34) tienen sentido físico para la solución del problema  $(P_R)$  si*

$$\frac{\sqrt{\alpha_l} \tilde{T}_k - T_1 k_s}{\sqrt{\alpha_s} T_0 - T_{0l} k_l} < 1.$$

**Observación 12.** *Si  $C(x, t)$  es constante y consideramos únicamente el problema de temperatura, recuperamos los resultados obtenidos en [35], siendo la condición (3.3) para dicho caso la dada en [35, Lemma 1] para un problema de Stefan a dos fases con condición de Neumann en  $x = 0$ .*

### 3.4. Solución explícita para el problema de solidificación de una aleación binaria con condición de borde convectiva

Repitiendo el desarrollo de la sección 3.2, obtenemos resultados análogos para el siguiente problema de aleación binaria con condición convectiva (Problema ( $P_2$ )):

$$\begin{aligned}
 i. \quad & \alpha_s T_{sxx} = T_{st} && 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
 ii. \quad & \alpha_l T_{lxx} = T_{lt} && s(t) < x, \quad t > 0, \\
 iii. \quad & d_s C_{sxx} = C_{st} && 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
 iv. \quad & d_l C_{lxx} = C_{lt} && s(t) < x, \quad t > 0, \\
 v. \quad & k_s T_{sx}(0, t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}} \left( T_s(0, t) - T_\infty \right) && (h_0 > 0), \quad t > 0, \\
 vi. \quad & T_s(s(t), t) = T_l(s(t), t) = T_k && t > 0, \\
 vii. \quad & T_l(x, 0) = T_0 && T_A < T_0 < T_B, \quad x > 0, \\
 viii. \quad & T_l(\infty, t) = T_0 && T_A < T_0 < T_B, \quad t > 0, \\
 ix. \quad & C_{sx}(0, t) = 0 && t > 0, \\
 x. \quad & C_s(s(t), t) = f_s(T_k) && t > 0, \\
 xi. \quad & C_l(x, 0) = C_0 && x > 0, \\
 xii. \quad & C_l(s(t), t) = f_l(T_k) && t > 0, \\
 xiii. \quad & k_s T_{sx}(s(t), t) - k_l T_{lx}(s(t), t) = \gamma \rho s'(t) && t > 0, \\
 xiv. \quad & d_l C_{lx}(s(t), t) - d_s C_{sx}(s(t), t) = \left[ f_s(T_k) - f_l(T_k) \right] s'(t) && t > 0.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

**Teorema 9.** Si el coeficiente  $h_0$  que caracteriza la condición convectiva (3.35)-(v), verifica las siguientes desigualdades

$$\frac{(T_0 - T_{0l})k_l}{(T_{0l} - T_\infty)\sqrt{\pi\alpha_l}} < h_0 < \frac{(T_0 - T_{0s})k_l}{(T_{0s} - T_\infty)\sqrt{\pi\alpha_l}}, \tag{3.36}$$

donde  $T_{0l} = f_l^{-1}(C_0)$  y  $T_{0s} = f_s^{-1}(C_0)$ , con  $f_l^{-1}(C) = T$  la inversa de  $f_l$  y  $f_s^{-1}(C) = T$  la inversa de  $f_s$ , entonces el problema (3.35) tiene una única solución autosimilar dada por:

$$\widehat{s}(t) = 2\delta\sqrt{\alpha_s t}, \quad t > 0, \tag{3.37}$$

$$\widehat{T}_s(x, t) = \widehat{T}_k + \frac{h_0\sqrt{\pi\alpha_s}(\widehat{T}_k - T_\infty)}{k_s + h_0\sqrt{\pi\alpha_s}\text{erf}(\delta)} \left( \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right) - \text{erf}(\delta) \right), \quad 0 < x < \widehat{s}(t), \quad t > 0, \tag{3.38}$$

$$\widehat{T}_l(x, t) = T_0 + \frac{\widehat{T}_k - T_0}{\text{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}\delta\right)} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}}\right), \quad \widehat{s}(t) < x, \quad t > 0, \tag{3.39}$$

$$\widehat{C}_s(x, t) = f_s(\widehat{T}_k), \quad 0 < x < \widehat{s}(t), \quad t > 0, \quad (3.40)$$

$$\widehat{C}_l(x, t) = C_0 + \frac{f_l(\widehat{T}_k) - C_0}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}}\delta\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{d_l t}}\right), \quad \widehat{s}(t) < x, \quad t > 0, \quad (3.41)$$

donde  $\widehat{T}_k$  y  $\delta$  (coeficiente que caracteriza la frontera libre  $x = \widehat{s}(t)$ ) satisface:

$$\widehat{T}_k = W(\delta), \quad M(\delta) = \phi(\widehat{T}_k), \quad \delta > 0, \quad T_A < \widehat{T}_k < T_B, \quad (3.42)$$

y  $W$  está dada por:

$$W(x) = T_\infty + \frac{T_0 - T_\infty}{F_2(x) + 1} + \frac{\gamma\rho\sqrt{\pi\alpha_s\alpha_l}}{H(x)}$$

$$F_2(x) = \frac{h_0k_s\sqrt{\pi\alpha_l}e^{-x^2}F_1\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}x\right)}{k_l(k_s + h_0\sqrt{\pi\alpha_s}\operatorname{erf}(x))},$$

$$H(x) = \frac{h_0k_s\sqrt{\pi\alpha_l}}{xe^{x^2}(k_s + h_0\sqrt{\pi\alpha_s}\operatorname{erf}(x))} + \frac{k_l\sqrt{\pi\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}x\right)}.$$

De forma similar a Teorema 7, la demostración se basa en propiedades de las funciones involucradas, es decir,  $F_2$ ,  $H$  y  $W$ .

**Proposición 18.** *Las funciones  $F_2$ ,  $H$  y  $W$  verifican las siguientes propiedades,*

- (a)  $F_2$  es una función estrictamente decreciente, con  $F_2(0^+) = \frac{h_0}{k_l}\sqrt{\alpha_l\pi}$  y  $F_2(+\infty) = 0$ .
- (b)  $H$  es una función estrictamente decreciente, con  $H(0^+) = +\infty$  y  $H(+\infty) = \frac{\sqrt{\pi\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}}k_l$ .
- (c)  $W$  es una función estrictamente creciente, con  $W(0^+) = T_\infty + \frac{T_0 - T_\infty}{1 + \frac{h_0\sqrt{\pi\alpha_l}}{k_l}}$  y  $W(+\infty) = T_0 + \frac{\gamma\rho\alpha_l}{k_l}$ .

*Demostración.* Los apartados (a) y (b) se deducen de la Proposición 17, y (c) de los apartados anteriores. □

**Observación 13.** *Siguiendo lo realizado en la Observación 10 podemos obtener desigualdades análogas a (3.23) y (3.24) para asegurar la existencia de una zona pastosa en el problema  $(P_2)$  cuando  $d_l$  es suficientemente pequeño.*

### 3.5. Una desigualdad para el coeficiente $\mu$ en la frontera libre

Retomando las ideas de la sección 3.3, podemos obtener resultados similares al comparar los problemas  $(P_2)$  y  $(P_R)$ . En el presente caso, considerando la solución de  $(P_2)$  dada en el Teorema 9, obtenemos que la temperatura en  $x = 0$  está dada por

$$\widehat{T}_1 = \widehat{T}_s(0, t) = \widehat{T}_k - \frac{h_0 \sqrt{\pi \alpha_s} \operatorname{erf}(\delta) (\widehat{T}_k - T_\infty)}{k_s + h_0 \sqrt{\pi \alpha_s} \operatorname{erf}(\delta)}. \quad (3.43)$$

Teniendo en cuenta que  $\widehat{T}_1 < \widehat{T}_k$ , podemos considerar el problema de Rubinstein  $(P_R)$  dado por (3.35)(i)-(iv), ( $\tilde{v}$ ), (vi)-(xiv), donde

$$\tilde{v}. \quad \widehat{T}_s(0, t) = T_1, \quad t > 0. \quad (3.44)$$

cuya única solución viene dada por (3.28)-(3.29). En consecuencia, tenemos la siguiente relación entre los problemas  $(P_2)$  y  $(P_R)$ .

**Teorema 10.** *Si  $T_1 = \widehat{T}_1$ , y suponemos que vale (3.36) y (3.43), entonces los problemas  $(P_2)$  y  $(P_R)$  son equivalentes, es decir*

$$\mu = \delta, \quad \widehat{T}_k = \tilde{T}_k, \quad (3.45)$$

$$\widehat{T}_s(x, t) = \tilde{T}_s(x, t), \quad \widehat{T}_l(x, t) = \tilde{T}_l(x, t), \quad \widehat{C}_s(x, t) = \tilde{C}_s(x, t), \quad \widehat{C}_l(x, t) = \tilde{C}_l(x, t). \quad (3.46)$$

**Corolario 5.** *Bajo las hipótesis del Teorema 10, el coeficiente  $\mu$  de la frontera libre  $\tilde{s}(t)$  y la temperatura inicial  $\tilde{T}_k$  de solidificación, correspondientes a la solución del problema  $(P_R)$  satisfacen las siguientes desigualdades*

$$\frac{\sqrt{\alpha_l} k_s}{\sqrt{\alpha_s} k_l} \frac{\tilde{T}_k - T_1}{T_0 - T_{0s}} \frac{T_{0s} - T_\infty}{T_1 - T_\infty} < \operatorname{erf}(\mu) < \frac{\sqrt{\alpha_l} k_s}{\sqrt{\alpha_s} k_l} \frac{\tilde{T}_k - T_1}{T_0 - T_{0l}} \frac{T_{0l} - T_\infty}{T_1 - T_\infty}. \quad (3.47)$$

**Observación 14.** *Si queremos obtener una desigualdad para el coeficiente  $\mu$  de la solución de Rubinstein debemos eliminar la dependencia respecto de  $T_\infty$ . Tomando el máximo de  $\frac{T_{0s} - T_\infty}{T_1 - T_\infty}$  respecto a  $T_\infty$  del lado izquierdo, y el mínimo de  $\frac{T_{0l} - T_\infty}{T_1 - T_\infty}$  respecto a  $T_\infty$  en el lado derecho de (3.47), obtenemos*

$$\frac{\sqrt{\alpha_l} k_s}{\sqrt{\alpha_s} k_l} \frac{\tilde{T}_k - T_1}{T_0 - T_{0s}} < \operatorname{erf}(\mu) < \frac{\sqrt{\alpha_l} k_s}{\sqrt{\alpha_s} k_l} \frac{\tilde{T}_k - T_1}{T_0 - T_{0l}}. \quad (3.48)$$

que coincide con (3.34) obtenido en la Observación 11.

**Observación 15.** *Si  $C(x, t)$  es constante y consideramos únicamente el problema de temperatura, recuperamos los resultados obtenidos en [37], siendo la condición (3.36) para dicho caso la dada en [37, Theorem 1] para un problema de Stefan a dos fases con condición convectiva en  $x = 0$ .*

## Capítulo 4

# Problemas de Stefan asociados a materiales heterogéneos

En el presente capítulo, estudiaremos la existencia y unicidad al problema de Stefan fraccionario descrito en (1.8), es decir, encontrar un par de funciones  $(u, s)$  donde  $u: Q_{s,T} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $s: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , que sean solución del siguiente problema

$$\begin{aligned} (i) \quad & u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) & 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ (ii) \quad & u(0, t) = 0 & 0 < t < T, \\ (iii) \quad & u(s(t), t) = 0 & 0 < t < T, \\ (iv) \quad & u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < b \\ (v) \quad & \dot{s}(t) = - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} D_x^\alpha u(x, t) & 0 < t < T. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como se comentó en diferentes secciones del capítulo 2, la estrategia para resolver dicho problema combina nociones de espacios de Sobolev fraccionarios, teoría de semigrupos y operadores de evolución. Presentamos a continuación un resumen del procedimiento que seguiremos para obtener un resultado de existencia y unicidad de solución del problema 4.1.

Comenzaremos por definir un dominio apropiado para  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  de forma tal que resulte ser un operador sectorial. Por otro lado, consideraremos el problema de frontera móvil asociado a (4.1), y transformaremos el dominio mediante un cambio de coordenadas para pasar al dominio  $[0, 1] \times [0, T]$  que no depende de  $s(t)$ . Luego, por medio de la teoría de operadores de evolución, definiremos una noción de solución débil, a la que llamaremos *mild solution*. Probaremos que existe tal solución en un conjunto de funciones dado, y posteriormente estableceremos resultados de regularidad para la misma, obteniendo que es solución del problema de frontera móvil trans-

formado. Finalmente, a partir de dicha solución, hallaremos una solución para (4.1) mediante un teorema de punto fijo y una condición integral equivalente a la condición (4.1)-(v).

Como se mencionó en la introducción, el problema (4.1) donde la condición de Dirichlet se reemplaza por una condición de Neumann de la forma  $u_x(0^+, t) = 0$  fue estudiado en [31], mientras que para una condición de tipo Neumann fraccionaria de la forma  $-D_x^\alpha u(0^+, t) = h(t)$  se ha desarrollado en [26]. Para ambos casos, gran parte de los resultados obtenidos se basa en la definición de un dominio apropiado para el operador  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$ . Si bien se utiliza el mismo en los dos problemas, para el correspondiente a una condición de Neumann fraccionaria se adopta una estrategia adicional, que consiste en representar a la solución buscada como suma de dos funciones, denominadas parte singular y parte regular, esta última relacionada con el problema con condición de Neumann clásica. Sin embargo, para el problema (4.1), debemos definir un dominio diferente para el operador  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$ . Siguiendo entonces las ideas de los trabajos [26] y [31] se presenta a continuación el estudio detallado del problema (4.1).

## 4.1. Problema con condición de Dirichlet

### 4.1.1. Dominio del operador $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$

En esta sección determinaremos un dominio apropiado para el operador  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  acorde a las condiciones de borde en (4.1). Para ello, consideremos la ecuación de difusión fraccionaria con una fuente arbitraria, es decir,

$$u_t(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = f,$$

en el sentido de  $L^2(0, 1)$  en la variable  $x$ , por lo que tiene sentido pedir  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t) \in L^2(0, 1)$ . Recordemos que, por Proposición 7, resulta  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u = \partial^\alpha u_x$ . Luego, teniendo en cuenta la Proposición 11 debemos pedir que  $u_x \in {}_0H^\alpha(0, 1)$ , y por Corolario 2 parece adecuado considerar que  $u \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ . Por otro lado, notemos que si partimos de la condición  $u \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ , por Proposición 10 solo podemos asegurar que  $u_x \in H^\alpha(0, 1)$ . Es por esto que, el dominio natural más general para  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  es

$$\{v \in H^{1+\alpha}(0, 1) : v_x \in {}_0H^\alpha(0, 1)\}.$$

Consideramos además la condición  $u(1, t) = 0$ , que surge de la condición  $u(s(t), t) = 0$  al realizar un cambio de variable en problemas de Stefan fraccionario de la forma (4.79) con diferentes

condiciones de borde en  $x = 0$ . Dicha transformación es la que permite pasar de la región  $Q_{s,T}$  a  $[0, 1] \times [0, T]$ , que no depende de  $s$ .

Obtenemos entonces el siguiente dominio

$$\mathcal{D}_\alpha := \{u \in H^{1+\alpha}(0, 1) : u_x \in {}_0H^\alpha(0, 1), u(1) = 0\},$$

el cual fue considerado en [26] y [31]. Sin embargo, como veremos más adelante, el dominio  $\mathcal{D}_\alpha$  no permite aplicar la teoría de semigrupos en nuestro caso, por lo que es necesario considerar uno diferente. Definimos el siguiente, propuesto en [30]

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha := \{u = w - w(1)x^\alpha : w \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)\},$$

dotado con la siguiente norma

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} = \begin{cases} \|w\|_{H^{1+\alpha}(0,1)}, & \alpha \neq \frac{1}{2} \\ \left( \|w\|_{H^{\frac{3}{2}}(0,1)}^2 + \int_0^1 \frac{|w_x(x)|^2}{x} dx \right)^{\frac{1}{2}}, & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notemos que  $x^\alpha \notin {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ , por lo que  $u \notin {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$  y por lo tanto  $u \notin \mathcal{D}_\alpha$ . Por otra parte,  $u(0) = u(1) = 0$ , que serán las condiciones de borde en el problema que consideraremos más adelante en la región  $[0, 1] \times [0, T]$ .

#### 4.1.2. Propiedades del operador $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$ definido en $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$

En esta sección establecemos resultados que nos permitirán concluir que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  es un operador sectorial densamente definido. El primer paso consiste en probar que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha : \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \rightarrow L^2(0, 1)$  genera un  $C_0$ -semigrupo de contracciones por medio del Teorema 4. Más aún, probaremos condiciones más generales que las enunciadas en dicho resultado.

**Lema 2.** *Sea  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha : \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \rightarrow L^2(0, 1)$ . Entonces, para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  perteneciente al conjunto  $\vartheta_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leq \frac{\pi(\alpha+1)}{2}\} \cup \{0\}$  resulta que  $R(\lambda E - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha) = L^2(0, 1)$ , donde  $E$  es el operador identidad.*

*Demostración.* Consideremos  $g \in L^2(0, 1)$  y  $\lambda \in \vartheta_\alpha$ . Queremos ver que existe  $u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  tal que

$$\lambda u - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u = g. \tag{4.2}$$

Dado que buscamos  $u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , consideremos  $u = w - w(1)x^\alpha$  con  $w \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ . Luego,  $D_x^\alpha u = D_x^\alpha w - w(1)\Gamma(\alpha + 1)$  y  $D_x^\alpha w \in {}_0H^1(0, 1)$ , de donde  $(D_x^\alpha u)(0) = -w(1)\Gamma(\alpha + 1)$ . Por lo tanto,

nos proponemos resolver la ecuación (4.2) con condiciones iniciales  $u(0) = 0$  y  $(D_x^\alpha u)(0) = a$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

Integrando a ambos lados de (4.2) y despejando, obtenemos que

$$D_x^\alpha u = (D_x^\alpha u)(0) + \lambda Iu - Ig = a + \lambda Iu - Ig. \quad (4.3)$$

Aplicando  $I^\alpha$ , y usando la condición  $u(0) = 0$  obtenemos que

$$u = aI^\alpha 1 + \lambda I^{\alpha+1}u - I^{\alpha+1}g. \quad (4.4)$$

Notemos que por Proposición 2, Proposición 5 y Proposición 11, la ecuación (4.2) es equivalente a (4.4) si  $u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ .

Aplicamos  $\lambda I^{\alpha+1}$  a (4.4) para obtener

$$\lambda I^{\alpha+1}u = \lambda a I^{2\alpha+1}1 + \lambda^2 I^{2(\alpha+1)}u - \lambda I^{2(\alpha+1)}g. \quad (4.5)$$

Reemplazando  $\lambda I^{\alpha+1}u$  en (4.4) por lo obtenido en (4.5) y despejando resulta

$$u = aI^\alpha 1 + \lambda a I^{2\alpha+1}1 + \lambda^2 I^{2(\alpha+1)}u - \lambda I^{2(\alpha+1)}g - I^{\alpha+1}g.$$

Repitiendo dicho procedimiento  $n$  veces, obtenemos que

$$u = a \sum_{k=0}^n \lambda^k I^{\alpha+k(\alpha+1)}1 - \sum_{k=0}^n \lambda^k I^{(k+1)(\alpha+1)}g + \lambda^{n+1} I^{(n+1)(\alpha+1)}u. \quad (4.6)$$

Observemos que la última expresión tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . En efecto, puesto que  ${}_0H^{1+\alpha}(0,1) \subseteq L^\infty(0,1)$  y teniendo en cuenta que la función  $\Gamma$  se encuentra en el denominador, obtenemos que

$$\left| \lambda^n (I^{n(\alpha+1)}u)(x) \right| \leq \|u\|_{L^\infty(0,1)} \frac{|\lambda|^n x^{(\alpha+1)n}}{\Gamma((\alpha+1)n+1)} \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(0,1)} |\lambda|^n}{\Gamma((\alpha+1)n+1)} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  uniformemente respecto de  $x \in [0,1]$ . Por otro lado, notemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I^{\alpha+k(\alpha+1)}1 = x^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda x^{\alpha+1}),$$

donde  $E_{a,b}(\cdot)$  denota la función de Mittag-Leffler de dos parámetros dada en Definición 3. Adicionalmente, se puede ver que la segunda serie en (4.6) es uniformemente convergente y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I^{(k+1)(\alpha+1)}g = (g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x),$$

donde  $*$  denota la convolución en el eje real positivo, es decir.  $(f * g)(x) := \int_0^x f(p)g(x-p)dp$ .



De lo anterior, si hacemos  $n \rightarrow \infty$  en (4.6) obtenemos que

$$u = a \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I^{\alpha+k(\alpha+1)} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I^{(k+1)(\alpha+1)} g = ax^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda x^{\alpha+1}) - (g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x). \quad (4.7)$$

Teniendo en cuenta el procedimiento realizado anteriormente, es claro que la función  $u$  dada por (4.7) es solución de (4.2) con condiciones de borde  $u(0) = 0$  y  $(D_x^\alpha u)(0) = a$ . Finalmente, puesto buscamos una función en  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , debemos elegir  $a$  de modo que  $u(1) = 0$ . Para ello, observemos que si tomamos  $x = 1$  en (4.7), entonces

$$u(1) = aE_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda) - (g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(1),$$

de donde, debe ser

$$a = E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda)^{-1} (g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(1).$$

Notemos que  $a$  está bien definido, ya que para  $\nu = \mu = \alpha + 1$  en [25, Theorem 4.2.1], resulta que  $E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda) \neq 0$  para  $\lambda \in \vartheta_\alpha$ . En consecuencia, tenemos una solución a (4.2) dada por

$$u(x) = \frac{(g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(1)}{E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda)} x^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda x^{\alpha+1}) - (g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x).$$

Definiendo  $w$  por

$$w(x) = \frac{(g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(1)}{E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda)} x^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{(\alpha+1)n}}{\Gamma((\alpha+1)n + \alpha + 1)} - (g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x),$$

tenemos que

$$u(x) = w(x) - w(1)x^\alpha.$$

Para finalizar, nos falta ver que  $u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , para lo cual basta con probar que  $w \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ . Reescribimos  $w$  de la siguiente manera

$$w(x) = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{(2\alpha+1)n}}{\Gamma((\alpha+1)n + \alpha + 1)} - (g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x). \quad (4.8)$$

Notemos que, por (2.16),  $x^\beta \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$  para  $\beta \geq 2\alpha + 1 > (1 + \alpha) - \frac{1}{2}$ . Luego, la serie en (4.8) es una función en  ${}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ , De forma similar, reescribiendo  $x^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda x^{\alpha+1})$  como serie vemos que dicha función está en  ${}_0H^\alpha(0, 1)$ , por lo que la convolución  $(g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x)$  está en  ${}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ . En efecto,  $g \in L^2(0, 1) \subseteq L^\infty(0, 1)$  por lo que

$$|(g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{(\alpha+1)(n+1)}}{\Gamma((\alpha+1)(n+1) + 1)},$$

y  $x^{(\alpha+1)(n+1)} \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Queda demostrado el resultado.  $\square$

**Observación 16.** En particular, para  $\lambda > 0$  se tiene que  $R(\lambda E - A) = L^2(0, 1)$ , por lo que se verifica la condición 2 de Teorema 4.

**Observación 17.** El Lema 2 no es válido si cambiamos el dominio  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  por  $\mathcal{D}_\alpha$ . En efecto, como mencionamos anteriormente, nuestro objetivo es resolver un problema en la región  $[0, 1] \times [0, T]$ , con condiciones de la forma  $u(0) = 0$  y  $u(1) = 0$ . Por otro lado, de (2.13) en Proposición 7, (4.2) es equivalente a

$$\lambda u - \partial^\alpha u_x = g,$$

de donde, aplicando  $I^\alpha$ , y considerando la Proposición 6, resulta

$$\lambda I^\alpha u - u_x = I^\alpha g.$$

Integrando entre 0 y  $x$  a ambos lados, y teniendo en cuenta que  $u(0) = 0$ , obtenemos que

$$u = \lambda I^{1+\alpha} u - I^{1+\alpha} g.$$

Repetiendo ahora con  $I^{1+\alpha}$ , y aplicando argumentos similares a los de Lema 2, deducimos que

$$u(x) = -(g * y^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\lambda y^{\alpha+1}))(x).$$

Nos falta ver que  $u(1) = 0$ , pero lo anterior debe valer para toda  $g \in L^2(0, 1)$ , lo cual no es posible, ya que podemos elegir una tal  $g$  de forma tal que  $u(1) \neq 0$ . Por lo tanto, para cualquier valor de  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la ecuación (4.2) no tiene solución para toda función  $g \in L^2(0, 1)$  si consideramos el dominio  $\mathcal{D}_\alpha$  y las condiciones de borde  $u(0) = u(1) = 0$ .

**Lema 3.** Para  $u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  resulta

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u, u \right) \geq c_\alpha \|u\|_{H^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,1)}^2 \tag{4.9}$$

y

$$\left| \left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u, u \right) \right| \leq b_\alpha \|u\|_{H^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,1)}^2, \tag{4.10}$$

donde  $c_\alpha, b_\alpha$  son constantes positivas que dependen únicamente de  $\alpha$ .

*Demostración.* Comencemos con (4.9). Sea  $u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ . Como  $u(0) = u(1) = 0$ , realizando integración por partes

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u, u \right) = - \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \right) (x) \cdot u(x) dx = \int_0^1 D_x^\alpha u(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x) dx.$$

Notemos que  $\tilde{D}_\alpha \subseteq AC[0, 1]$  por lo que podemos aplicar la Proposición 8 para obtener que

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u, u \right) = \int_0^1 D_x^\alpha u(x) \cdot \partial^{1-\alpha} D_x^\alpha u(x) dx.$$

Por definición de  $\tilde{D}_\alpha$  sabemos que  $D_x^\alpha u \in AC[0, 1]$ , por lo que podemos aplicar la desigualdad (2.15) con  $w = D_x^\alpha u$  para obtener

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u, u \right) &\geq c_\alpha \|D_x^\alpha u\|_{H^{\frac{1-\alpha}{2}}(0,1)}^2 \geq c_\alpha \left\| \partial^{\frac{1-\alpha}{2}} D_x^\alpha u \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= c_\alpha \left\| D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} u \right\|_{L^2(0,1)}^2 = c_\alpha \left\| \partial^{\frac{1+\alpha}{2}} u \right\|_{L^2(0,1)}^2 \geq c_\alpha \|u\|_{H^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,1)}^2. \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la Proposición 8, mientras que la segunda igualdad y la última desigualdad se deducen de la Proposición 7 y el hecho de que  $u$  se anula en cero, y de la Proposición 11 respectivamente. Queda por mostrar (4.10). Usando la Proposición 8, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u = \partial^{\frac{1+\alpha}{2}} \partial^{\frac{1-\alpha}{2}} D_x^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} I_-^{\frac{1-\alpha}{2}} D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} u.$$

Luego, aplicando integración por partes, teniendo en cuenta que  $u(0) = u(1) = 0$ , y el teorema de Fubini, vemos que

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \cdot u dx = - \int_0^1 I_-^{\frac{1-\alpha}{2}} D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} u \cdot u_x dx = - \int_0^1 D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} u \cdot I_-^{\frac{1-\alpha}{2}} u_x dx,$$

donde para  $\beta \in (0, 1)$ ,  $(I_-^\beta u)(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^1 (p-x)^{\beta-1} u(p) dp$ . De manera similar denotamos  $\partial_-^\beta u = -\frac{d}{dx} I_-^{1-\beta} u$ ,  $D_-^\beta u = -\frac{d}{dx} I_-^{1-\beta} [u(x) - u(1)]$ .

Finalmente, aplicando de nuevo la Proposición 11, deducimos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \cdot u dx \right| &\leq \left\| D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} u \right\|_{L^2(0,1)} \left\| D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} u \right\|_{L^2(0,1)} \\ &= \left\| \partial^{\frac{1+\alpha}{2}} u \right\|_{L^2(0,1)} \left\| \partial_-^{\frac{1+\alpha}{2}} u \right\|_{L^2(0,1)} \leq b_\alpha \|u\|_{H^{\frac{1+\alpha}{2}}}^2. \end{aligned}$$

□

**Observación 18.** Siendo  $u$  a valores reales, y de acuerdo a la Definición 20 resulta que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  es disipativo.

**Teorema 11.** El operador  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha : \tilde{D}_\alpha \subseteq L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  genera un  $C_0$ -semigrupo de contracciones.

*Demostración.* Puesto que  $C_0^\infty(0,1) \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  está densamente definido en  $L^2(0,1)$ . Además, por Observaciones 16 y 18, y Teorema 4, se deduce que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  genera un  $C_0$ -semigrupo de contracciones. □

**Teorema 12.** *El operador  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha : \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \subseteq L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$  es un operador sectorial densamente definido.*

*Demostración.* Adaptaremos la demostración presentada en [30, Teorema 3.5] para el operador  $\mathcal{D}_\alpha$ , aplicando la Proposición 14. Para ello, notemos que, por definición de rango numérico, resulta

$$S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right) = \left\{ \left( u, -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \right) : u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha, \|u\|_{L^2(0,1)} = 1 \right\}. \quad (4.11)$$

En efecto, considerando  $X = L^2(0,1)$ ,  $X^* = L^2(0,1)$ , y  $u, v \in L^2(0,1)$  con

$$u \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha, \|u\| = 1, v \in L^2(0,1), \|v\| = 1, (v, u) = 1,$$

resulta que  $|(v, u)| = \|u\| \cdot \|v\|$ , de donde  $v = cu$  con  $c = \frac{(u,v)}{\|v\|^2} = 1$ , y por lo tanto  $u = v$ , de donde se obtiene (4.11). Por otro lado, notemos que por (4.9), resulta  $0 \notin S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)$ .

Sea  $z = \left( u, -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \right)$ . Por (4.9) y (4.10), deducimos que

$$|\tan(\arg(z))| = \left| \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right| = \frac{|\operatorname{Im}(z)|}{|\operatorname{Re}(z)|} \leq \frac{|z|}{|\operatorname{Re}(z)|} \leq \frac{b_\alpha \|u\|_{H^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,1)}^2}{c_\alpha \|u\|_{H^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,1)}^2} = \frac{b_\alpha}{c_\alpha},$$

de donde,

$$S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| \leq \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right) \right\}.$$

Teniendo en cuenta que  $0 \leq \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right) < \frac{\pi}{2}$ , consideremos  $\nu$  tal que  $\arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right) < \nu < \frac{\pi}{2}$  y  $\Sigma_\nu := \{\lambda : \lambda \neq 0, |\arg(\lambda)| > \nu\}$ . Entonces,  $\Sigma_\nu \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)}$ . Probaremos que existe una constante  $c_\nu$  tal que

$$d\left(\lambda, S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)\right) \geq c_\nu |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \Sigma_\nu. \quad (4.12)$$

Separamos en dos casos.

Si  $\lambda \in \Sigma_\nu$  es tal que  $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right)$ , entonces  $d\left(\lambda, S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)\right) \geq d(\lambda, 0) = |\lambda|$  (pues dado  $\lambda_1 \in S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)$ , el ángulo formado por  $\lambda_1, (0,0), \lambda$  es mayor a  $\frac{\pi}{2}$ , por lo que la distancia  $d(\lambda_1, \lambda)$  es mayor que la distancia  $d(\lambda, 0)$ ), y por lo tanto vale (4.12) para  $c_\nu = 1$ .

Consideremos ahora  $\nu < \arg(\lambda) \leq \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right)$ . Entonces (ver Figura 4.1)

$$\frac{d\left(\lambda, S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)\right)}{|\lambda|} \geq \sin\left(\arg(\lambda) - \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right)\right) \geq \sin\left(\nu - \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right)\right).$$

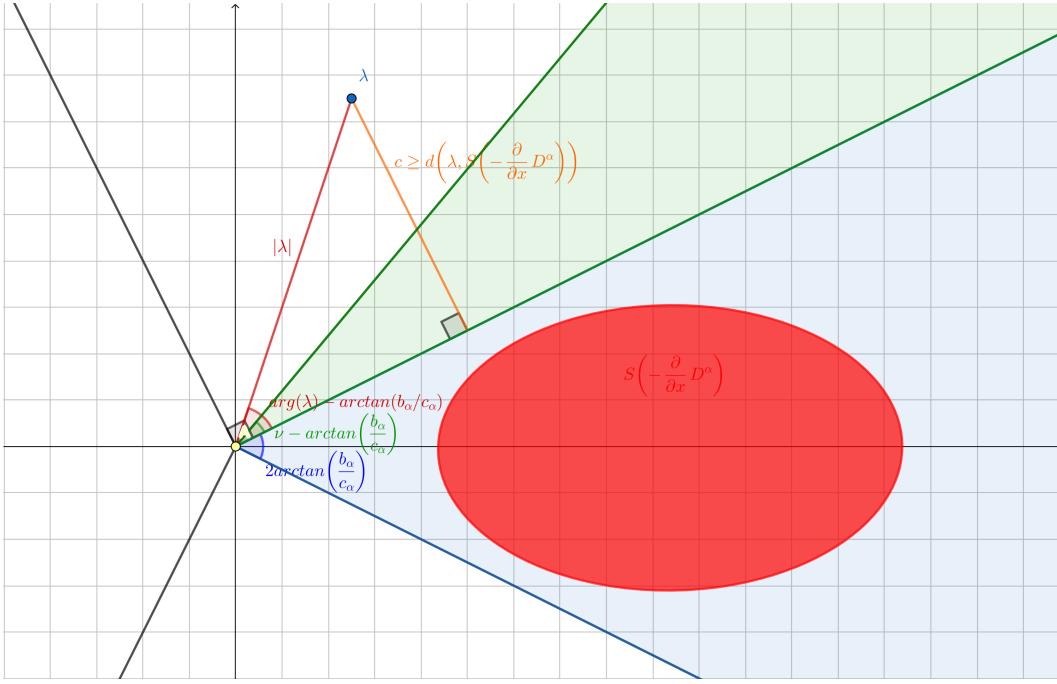


Figura 4.1:

Análogamente, si  $-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right) < \arg(\lambda) \leq -\nu$

$$\frac{d\left(\lambda, S\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)\right)}{|\lambda|} \geq \left| \sin\left(\arg(\lambda) + \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right)\right) \right| \geq \left| \sin\left(-\nu + \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right)\right) \right|,$$

por lo que vale (4.12) para  $c_\nu = \left| \sin\left(-\nu + \arctan\left(\frac{b_\alpha}{c_\alpha}\right)\right) \right|$ . Por lo tanto, queda probado (4.12) para todo  $\lambda \in \Sigma_\nu$ .

Por otro lado, por Teorema 11,  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  genera un  $C_0$ -semigrupo de contracciones, de donde, por Teorema 5,  $(0, +\infty) \subseteq \rho\left(\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)$ , o equivalentemente,  $(-\infty, 0) \subseteq \rho\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)$ , y en consecuencia

$$\Sigma_\nu \cap \rho\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right) \neq \emptyset$$

Luego, podemos aplicar la Proposición 14 a  $-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  para obtener que el espectro de dicho operador está contenido en  $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\nu$ , de donde  $\Sigma_\nu \subseteq \rho\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)$  y

$$\left\| \left( \lambda I - \left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha \right) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{d\left(\lambda, S\left(\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)\right)} \leq \frac{1}{c_\nu |\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_\nu.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que  $\lambda \in \rho\left(-\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)$  si y sólo si  $-\lambda \in \rho\left(\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right)$ , y  $|\arg(\lambda)| > \nu$  si y sólo si  $|\arg(-\lambda)| < \pi - \nu$ , resulta que

$$S_{\pi-\nu} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg(\lambda)| < \pi - \nu \right\} \subseteq \rho\left(\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha\right),$$

siendo  $\frac{\pi}{2} < \pi - \nu < \pi$ , y

$$\left\| \left( \lambda I - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha \right)^{-1} \right\| \leq \frac{c_\nu^{-1}}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in S_{\pi-\nu}.$$

Por lo tanto,  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$  es sectorial. □

Recordando nuevamente lo comentado en el Capítulo 2, y teniendo en cuenta el resultado anterior, nuestra idea es aplicar el Teorema 6 a una familia de operadores  $A(t)$  relacionada con un problema en la región  $[0, 1] \times [0, T]$  que se obtendra a partir del problema (4.1), para luego definir lo que consideraremos una *mild solution*.

### 4.1.3. Problema de frontera móvil

Comencemos considerando el problema de frontera móvil asociado al Problema 4.1, es decir,

$$\begin{aligned} (i) \quad & u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) \quad 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ (ii) \quad & u(0, t) = 0 \quad 0 < t < T, \\ (iii) \quad & u(s(t), t) = 0 \quad 0 < t < T, \\ (iv) \quad & u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 < x < b \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde  $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $u_0 \in {}_0H^{1+\alpha}(0, b)$  son funciones conocidas, tal que  $u_0(0) = u_0(b) = 0$ . Supongamos además que

$$s \in C^{0,1}[0, T], s(0) = b, \text{ y existe } M > 0 \text{ tal que } 0 \leq \dot{s}(t) \leq M \text{ a.e. } t \in [0, T]. \tag{4.14}$$

**Observación 19.** *Sea  $s$  una función que satisface (4.14). Entonces,*

$$b \leq s(t) \leq b + MT, \quad \forall t \in [0, T].$$

Para analizar (4.13) desde la teoría de operadores de evolución, realizamos primero un cambio de coordenadas para transformarlo en un problema con dominio fijo. Más precisamente, sea  $p = \frac{x}{s(t)}$ , y definimos

$$v(p, t) := u(s(t)p, t) = u(x, t). \tag{4.15}$$

Podemos reescribir (4.13) en términos de  $v$ . Para ello observamos que  $\frac{\partial}{\partial p} = s(t) \frac{\partial}{\partial x}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} v_p(p, t) &= \frac{\partial}{\partial p} v(p, t) = \frac{\partial}{\partial p} u(s(t)p, t) = s(t) \frac{\partial}{\partial x} u(s(t)p, t) = s(t) u_x(x, t), \\ v_t(p, t) &= \frac{\partial}{\partial t} u(s(t)p, t) = u_t(x, t) + p \dot{s}(t) u_x(x, t). \end{aligned}$$

Luego,

$$u_t(x, t) = v_t(p, t) - p \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} v_p(p, t). \quad (4.16)$$

Además

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha v_p)(p, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial p} \int_0^p (p-r)^{-\alpha} v_p(r, t) dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} s(t) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\frac{x}{s(t)}} \left( \frac{x}{s(t)} - r \right)^{-\alpha} s(t) u_x(s(t)r, t) dr, \end{aligned}$$

de donde, realizando el cambio de variable  $r = \frac{z}{s(t)}$  obtenemos

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha v_p)(p, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} s(t) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \left( \frac{x}{s(t)} - \frac{z}{s(t)} \right)^{-\alpha} s(t) u_x(s(t)r, t) \frac{1}{s(t)} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} s(t) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{(x-z)^{-\alpha}}{s(t)^{-\alpha}} u_x(z, t) dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} s(t)^{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x-z)^{-\alpha} u_x(z, t) dz \\ &= s(t)^{1+\alpha} (\partial^\alpha u_x)(x, t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \right) (x, t) = (\partial^\alpha u_x)(x, t) = \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} (\partial^\alpha v_p)(p, t) = \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \left( \frac{\partial}{\partial p} D_p^\alpha v \right) (p, t). \quad (4.17)$$

Denotando  $v_0(p) = u_0(pb)$  y renombrando  $p$  por  $x$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (i) \quad & v_t - x \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} v_x - \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ (ii) \quad & v(0, t) = 0, v(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ (iii) \quad & v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

que es el problema en la región  $[0, 1] \times [0, T]$  ya mencionado. Queremos ver a (4.18) como un problema de evolución. Para ello, definimos  $A(t) : D(A(t)) \subseteq L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ , para  $t \in (0, T)$ , como

$$A(t)u = \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u,$$

y  $f(x, t) := x \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} v_x$ . Entonces, (4.18) puede reescribirse como el siguiente problema:

$$\begin{aligned} (i) \quad & v_t = A(t)v + f, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ (ii) \quad & v(0, t) = 0, v(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ (iii) \quad & v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Luego, definiendo  $D(A(t)) := \tilde{D}_\alpha$ , el problema (4.19) es equivalente a hallar  $v \in \tilde{D}_\alpha$  que verifique

$$\begin{aligned} (i) \quad & v_t = A(t)v + f, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ (ii) \quad & v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

**Observación 20.** Para el caso en que el operador  $A$  no depende de  $t$ , tenemos el problema que consiste en hallar  $v \in D$ , tal que

$$(i) \quad v_t = Av + f, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T,$$

$$(ii) \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1.$$

para el cual está demostrada la existencia y unicidad de solución mediante el Teorema de Hille-Yosida [3].

#### 4.1.4. Existencia de *mild solution*

Nos proponemos ahora definir el concepto de *mild solution* para el problema (4.20). Observemos que, por Teorema 12 y (4.14),  $A(t)$  verifica la hipótesis 1 del Teorema 6 para todo  $0 \leq t \leq T$ .

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha x^\alpha = 0$ , para  $u = w - w(1)x^\alpha \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  resulta

$$\begin{aligned} \|(A(t) - A(\tau))u\|_{L^2(0,1)} &= \frac{|s^{1+\alpha}(\tau) - s^{1+\alpha}(t)|}{s^{1+\alpha}(t)s^{1+\alpha}(\tau)} \left\| \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \right\|_{L^2(0,1)} = \frac{|s^{1+\alpha}(\tau) - s^{1+\alpha}(t)|}{s^{1+\alpha}(t)s^{1+\alpha}(\tau)} \left\| \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha w \right\|_{L^2(0,1)} \\ &= \frac{|s^{1+\alpha}(\tau) - s^{1+\alpha}(t)|}{s^{1+\alpha}(t)s^{1+\alpha}(\tau)} \|\partial^\alpha w_x\|_{L^2(0,1)} \leq c_\alpha \frac{2(b+MT)^{1+\alpha}}{b^{2(1+\alpha)}} \|w_x\|_{H^\alpha(0,1)} \\ &\leq c_\alpha \frac{2(b+MT)^{1+\alpha}}{b^{2(1+\alpha)}} \|w\|_{H^{1+\alpha}(0,1)} = c_\alpha \frac{2(b+MT)^{1+\alpha}}{b^{2(1+\alpha)}} \|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde hemos aplicado (2.13), Proposición 11 y Corolario 2. En consecuencia, para cada  $t \in [0, T]$ ,  $A(t) \in B(\tilde{\mathcal{D}}_\alpha, L^2(0, 1))$ .

Adicionalmente, por (4.14) tenemos que  $s \in C^{0,1}[0, T] \subseteq C^{0,a}[0, T]$ , para  $0 < a < 1$ , y en consecuencia, dado  $t, \tau \in [0, T]$ ,  $t \neq \tau$ , y trabajando de forma similar a (4.21), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\|(A(t) - A(\tau))u\|_{L^2(0,1)}}{|t - \tau|^a} &= \frac{|s^{1+\alpha}(\tau) - s^{1+\alpha}(t)|}{|t - \tau|^a s^{1+\alpha}(t)s^{1+\alpha}(\tau)} \|\partial^\alpha w_x\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{|s^{1+\alpha}(\tau) - s^{1+\alpha}(t)|}{b^{2(1+\alpha)}|t - \tau|^a} \|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \\ &= \frac{(1+\alpha)s^\alpha(\xi)\dot{s}(\xi)|t - \tau|}{b^{2(1+\alpha)}|t - \tau|^a} \|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq \frac{(1+\alpha)(b+MT)^\alpha M|t - \tau|^{1-a}}{b^{2(1+\alpha)}} \|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \\ &\leq \frac{(1+\alpha)(b+MT)^\alpha MT^{1-a}}{b^{2(1+\alpha)}} \|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} = C \|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}, \end{aligned}$$

de donde

$$\|A(t) - A(\tau)\|_{B(\mathcal{D}_\alpha, L^2(0,1))} = \sup_{u \neq 0} \left\{ \frac{\|(A(t) - A(\tau))u\|_{L^2(0,1)}}{\|u\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}} \right\} \leq C|t - \tau|^a$$

Por lo tanto,  $t \mapsto A(t) \in C^{0,a}([0, T]; B(\mathcal{D}_\alpha, L^2(0, 1)))$ , y podemos aplicar el Teorema 6. Luego,  $A(t) : \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \rightarrow L^2(0, 1)$  genera una familia de operadores de evolución  $\{G(t, \sigma) : 0 \leq \sigma \leq t \leq T\}$ . En consecuencia, siguiendo la Definición 22 proponemos la siguiente para el problema (4.20).



**Definición 23.** Sea  $\{G(t, \sigma) : 0 \leq \sigma \leq t \leq T\}$  una familia de operadores de evolución para el problema (4.20). Una función  $u$  que verifica

$$u(x, t) = G(t, 0)u_0 + \int_0^t G(t, \sigma)x \frac{\dot{s}(\sigma)}{s(\sigma)} u_x(x, \sigma) d\sigma \quad (4.22)$$

se denomina *mild solution* de (4.20).

Notemos que, en (4.20) es necesario separar a  $f$  de la familia de operadores  $A(t)$ . En efecto, puesto que  $\dot{s}(t)$  no necesariamente está en  $C^{0,1}([0, T])$ , no podemos aplicar el Teorema 6 a la familia de operadores  $\tilde{A}(t) := x \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha$ .

Si la función  $f$  en (4.20) no depende de  $u$ , entonces (4.22) es una *mild solution* en el sentido de la Definición 22. Sin embargo, no debemos obviar el hecho de que la función  $u$  está a ambos lados de la igualdad, por lo que recurriremos a un teorema de punto fijo para probar que existe una única *mild solution* de (4.20) en un espacio de funciones adecuado. Para ello, necesitamos las siguientes estimaciones en términos de los espacios de interpolación.

**Proposición 19.** [19, Corolario 6.1.8] Sea  $\{G(t, \sigma) : 0 \leq \sigma \leq t \leq T\}$  una familia de operadores de evolución generados por  $A(t) : D \rightarrow X$ . Entonces, para cada  $g \in L^2(0, 1)$  existe una constante positiva  $c = c(\theta, \delta, T)$  tal que

$$\|G(t, \sigma)g\|_X \leq c \|g\|_X. \quad (4.23)$$

Si  $g \in D$ , entonces existe una constante positiva  $c = c(\theta, \delta, T)$  tal que

$$\|A(t)G(t, \sigma)g\|_X \leq c \|g\|_D. \quad (4.24)$$

Si  $g \in [X, D]_\delta$ , entonces para cualquier  $0 \leq \sigma < t \leq T$  existe una constante positiva  $c = c(\theta, \delta, T)$  que es una función continua creciente de  $T$  tal que, para cada  $0 < \delta < 1$

$$\|G(t, \sigma)g\|_D \leq \frac{c}{(t - \sigma)^{1-\delta}} \|g\|_{[X, D]_\delta}. \quad (4.25)$$

Además, para cualquier  $0 \leq \delta < \theta < 1$ , tenemos

$$\|G(t, \sigma)g\|_{[X, D]_\theta} \leq \frac{c}{(t - \sigma)^{\theta-\delta}} \|g\|_{[X, D]_\delta} \quad (4.26)$$

y para  $\theta \in [0, 1)$ ,  $\delta \in (0, 1]$ ,  $\theta < \delta$

$$\|A(t)G(t, \sigma)g\|_{[X, D]_\theta} \leq \frac{c}{(t - \sigma)^{1+\theta-\delta}} \|g\|_{[X, D]_\delta}. \quad (4.27)$$

Por otro lado, para cada  $0 \leq \theta < \delta < 1$  y  $0 \leq \sigma < t \leq T$

$$\|G(t, \sigma)g - G(r, \sigma)g\|_{[X, D]_\theta} \leq \frac{c}{(t - r)^{\theta-\delta}} \|g\|_{[X, D]_\delta}. \quad (4.28)$$

Finalmente, para cada  $0 \leq \sigma < r < t \leq T$

$$\|A(t)G(t, \sigma)g - A(r)G(r, \sigma)g\|_X \leq c \left( \frac{(t-r)^a}{(r-\sigma)^{1-\delta}} + \frac{1}{(r-\sigma)^{1-\delta}} - \frac{1}{(t-\sigma)^{1-\delta}} \right) \|g\|_{[X, D]_\delta}, \quad (4.29)$$

donde  $a \in (0, 1)$  proviene del Teorema 6. La constante  $c > 0$  depende solo de  $\alpha, \theta, \delta, T$ , y las constantes  $b, M$  provienen de (4.14). Además,  $T \mapsto c(\alpha, \theta, \delta, b, M, T)$  es una función creciente.

Adicionalmente, utilizaremos las siguientes desigualdades.

**Lema 4.** Para todo  $v \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , existen constantes  $c = c(\alpha, b, M, T)$  y  $C = C(\alpha, b, M, T)$  tales que

$$c\|v\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq \|A(t)v\|_{L^2(0,1)} \leq C\|v\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Demostración.* La prueba es análoga a la de [26, Lemma 2], considerando (4.14) y usando que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha x^\alpha = 0$ .

En efecto, si  $v = w - w(1)x^\alpha$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v = \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha w$  y por lo tanto  $A(t)v = A(t)w$ . Luego, por Proposición (7) tenemos que  $\|A(t)w\|_{L^2(0,1)} = \frac{\|\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha w\|_{L^2(0,1)}}{s(t)^{1+\alpha}} = \frac{\|\partial^\alpha w_x\|_{L^2(0,1)}}{s(t)^{1+\alpha}}$ . Entonces de (4.14), la Proposición 11 y el Corolario 2 (teniendo en cuenta que  $I^1(w_x) = w$  puesto que  $w(0) = 0$ ), deducimos que

$$\|A(t)w\|_{L^2(0,1)} \geq c \|\partial^\alpha w_x\|_{L^2(0,1)} \geq c \|w_x\|_{H^\alpha(0,1)} \geq c \|w\|_{H^{1+\alpha}(0,1)} = c \|w\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que

$$\|w_x\|_{H^\alpha(0,1)} \leq \|w\|_{L^2(0,1)} + \|w_x\|_{H^\alpha(0,1)} = \|w\|_{H^{1+\alpha}(0,1)},$$

resulta que

$$\|A(t)w\|_{L^2(0,1)} \leq C \|\partial^\alpha w_x\|_{L^2(0,1)} \leq C \|w_x\|_{H^\alpha(0,1)} \leq C \|w\|_{H^{1+\alpha}(0,1)} = C \|w\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}.$$

□

**Lema 5.** Para cada  $v \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ ,  $f(x, t) = x \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} v_x \in L^\infty((0, T); {}_0H^\alpha(0, 1))$ , y existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; {}_0H^\alpha(0, 1))} \leq c\|v\|_{C([0, T], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)}.$$

*Demostración.* Como  $v \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , existe  $w \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$  tal que  $v(x) = w - w(1)x^\alpha$ . Entonces,  $xv_x = xw_x - \alpha w(1)x^\alpha$  y  $w(0) = 0$ , por lo que  $I^1 w_x = w$ . Luego, por Corolario 2 y Teorema 3, se sigue que

$$\begin{aligned} \|xv_x\|_{H^\alpha(0,1)} &\leq \|xw_x\|_{H^\alpha(0,1)} + \alpha|w(1)|\|x^\alpha\|_{H^\alpha(0,1)} \leq c\|w_x\|_{H^\alpha(0,1)} + \alpha|w(1)|\|x^\alpha\|_{H^\alpha(0,1)} \\ &\leq c(\|w\|_{H^{1+\alpha}(0,1)} + \|w\|_{C[0,1]}) \leq c(\|v\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} + \|w\|_{H^{1+\alpha}(0,1)}) \leq c\|v\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}. \end{aligned}$$

Luego, aplicando (4.14)

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;_0H^\alpha(0,1))} \leq c \sup_{t \in [0,T]} \|xv_x\|_{_0H^\alpha(0,1)} \leq c \sup_{t \in [0,T]} \|v\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} = c\|v\|_{C([0,T],\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)}.$$

□

**Observación 21.** Por definición,  $H_0^{(1+\alpha)\theta}(0,1) = [L^2(0,1), H_0^{1+\alpha}(0,1)]_\theta$ . Por otro lado, puesto que  $H^{1+\alpha}(0,1) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  resulta que  $H_0^{1+\alpha}(0,1) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ . Luego, para todo  $\theta \in (0,1)$ ,  $H_0^{(1+\alpha)\theta}(0,1) \hookrightarrow [L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\theta$ . Además, para todo  $\delta < \frac{1}{2(1+\alpha)}$  tenemos que  $H^{(1+\alpha)\delta}(0,1) = H_0^{(1+\alpha)\delta}(0,1)$ . Entonces, para cada  $(1+\alpha)\delta \in (0, \frac{1}{2})$  se tiene que  $H^{(1+\alpha)\delta}(0,1) \hookrightarrow [L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\delta$  y

$$\|u\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\delta} \leq c\|u\|_{H^{(1+\alpha)\delta}(0,1)}. \quad (4.30)$$

Estamos en condiciones de probar la existencia y unicidad de *mild solution* para el problema (4.20).

**Teorema 13.** Sea  $v_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ . Entonces, existe una única solución para (4.22) perteneciente a  $C([0,T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ .

*Demostración.* Definimos un operador  $P$  de la siguiente manera

$$(Pv)(x,t) = G(t,0)v_0 + \int_0^t G(t,\sigma)x \frac{\dot{s}(\sigma)}{s(\sigma)} v_x(x,\sigma) d\sigma = G(t,0)v_0 + \int_0^t G(t,\sigma)f(x,\sigma) d\sigma.$$

Queremos aplicar el teorema del punto fijo de Banach a dicho operador. Para ello, notemos que por Proposición 15 obtenemos que  $G(t,0)v_0 \in C([0,T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Por otro lado, para  $v \in C([0,T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ , y para cada  $0 < \theta < \frac{\min\{\alpha, 1/2\}}{1+\alpha}$ , por (4.25), (4.30) y Lema 5, se sigue que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t G(t,\sigma)f(\cdot,\sigma) d\sigma \right\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} &\leq \int_0^t c(t-\sigma)^{\theta-1} \|f(\cdot,\sigma)\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\theta} d\sigma \\ &\leq \int_0^t c(t-\sigma)^{\theta-1} \|f(\cdot,\sigma)\|_{_0H^{(1+\alpha)\theta}(0,1)} d\sigma \\ &\leq c \left\| x \frac{\dot{s}(\cdot)}{s(\cdot)} v_x \right\|_{L^\infty((0,T),_0H^\alpha(0,1))} t^\theta. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Entonces  $\int_0^t G(t,\sigma)f(\cdot,\sigma) d\sigma$  es continua en  $t = 0$  en la norma  $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}$ . Por Lema 4, solo necesitamos probar que  $A(t) \int_0^t G(t,\sigma)f(\cdot,\sigma) d\sigma \in C((0,T), L^2(0,1))$  para obtener además que  $\int_0^t G(t,\sigma)f(\cdot,\sigma) d\sigma \in C((0,T), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Sean  $0 < \tau \leq t \leq T$  y  $0 < \theta < \frac{\min\{\alpha, 1/2\}}{1+\alpha}$ . Entonces, aplicando

primero (4.27) y (4.29), y luego Observación 21 y Lema 5, se sigue que

$$\begin{aligned}
 & \left\| A(t) \int_0^t G(t, \sigma) f(\cdot, \sigma) d\sigma - A(\tau) \int_0^\tau G(\tau, \sigma) f(\cdot, \sigma) d\sigma \right\|_{L^2(0,1)} \\
 & \leq \int_0^\tau \|A(t)G(t, \sigma)f(\cdot, \sigma) - A(\tau)G(\tau, \sigma)f(\cdot, \sigma)\|_{L^2(0,1)} d\sigma + \int_\tau^t \|A(t)G(t, \sigma)f(\cdot, \sigma)\|_{L^2(0,1)} d\sigma \\
 & \leq \int_0^\tau \left( \frac{(t-\tau)^a}{(\tau-\sigma)^{1-\theta}} + \frac{1}{(\tau-\sigma)^{1-\theta}} - \frac{1}{(t-\sigma)^{1-\theta}} \right) \|f(\cdot, \sigma)\|_{[L^2(0,1); \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\theta} d\sigma \\
 & \quad + c \int_\tau^t (t-\sigma)^{\theta-1} \|f(\cdot, \sigma)\|_{[L^2(0,1); \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\theta} d\sigma \\
 & \leq c \|f\|_{L^\infty((0,T),_0H^\alpha(0,1))} \left( \tau^\theta (t-\tau)^a + \tau^\theta - t^\theta + (t-\tau)^\theta \right)
 \end{aligned}$$

y el último término tiende a cero cuando  $\tau \rightarrow t$ . Por lo tanto  $\int_0^t G(t, \sigma) f(\cdot, \sigma) d\sigma \in C([0, T], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ , y concluimos que  $Pv \in C([0, T], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ .

Ahora, probaremos que  $P$  es una contracción en  $C([0, T_1], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$  para  $T_1$  suficientemente pequeño. Sean  $v^1, v^2 \in C([0, T_1], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Por definición de  $P$ , tenemos

$$(Pv^1 - Pv^2)(x, t) = \int_0^t G(t, \sigma) x \frac{\dot{s}(\sigma)}{s(\sigma)} (v_x^1 - v_x^2)(x, \sigma) d\sigma. \quad (4.32)$$

Análogamente a (4.31),

$$\left\| \int_0^t G(t, \sigma) x \frac{\dot{s}(\sigma)}{s(\sigma)} (v_x^1 - v_x^2)(x, \sigma) d\sigma \right\|_{C([0, T_1], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)} \leq \sup_{t \in [0, T_1]} \int_0^t c (t-\sigma)^{\theta-1} \|x(v_x^1 - v_x^2)(x, \sigma)\|_{_0H^\alpha(0,1)} d\sigma$$

y por lo tanto, por Lema 5,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_0^t G(t, \sigma) x \frac{\dot{s}(\sigma)}{s(\sigma)} (v_x^1 - v_x^2)(x, \sigma) d\sigma \right\|_{C([0, T_1], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)} & \leq \sup_{t \in [0, T_1]} c \|v^1 - v^2\|_{C([0, T_1], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)} \int_0^t (t-\sigma)^{\theta-1} d\sigma \\
 & = \frac{cT_1^\theta}{\theta} \|v^1 - v^2\|_{C([0, T_1], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Concluimos que  $P$  es una contracción en  $C([0, T_1], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$  siempre que  $T_1 < (\frac{\theta}{c})^{\frac{1}{\theta}}$ . Podemos extender la solución a todo el intervalo  $[0, T]$  aplicando un argumento estándar. □

Finalmente, como consecuencia de los resultados anteriores, obtenemos la continuidad de  $v$ .

**Corolario 6.** *Supongamos que  $v_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ . Entonces, la solución de (4.22) obtenida en el Teorema 13 satisface que*

$$v \in C([0, 1] \times [0, T]). \quad (4.33)$$

*Demostración.* Por Teorema 13,  $v \in C([0, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Entonces,  $v(x, t) = w(x, t) - w(1, t)x^\alpha$ , donde  $w(\cdot, t) \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$  para todo  $t \in [0, T]$ . Teniendo en cuenta que  ${}_0H^{1+\alpha}(0, 1) \hookrightarrow C([0, 1])$ , y  $x^\alpha$  es continua en  $[0, 1]$ , concluimos que  $v(\cdot, t) \in C([0, 1])$  para todo  $t \in [0, T]$  de donde  $v \in C([0, T], C([0, 1]))$ , y por lo tanto  $v \in C([0, 1] \times [0, T])$ .  $\square$

#### 4.1.5. Regularidad de la *mild solution*

Teniendo una *mild solution*, nos proponemos mejorar la regularidad de la misma. Para ello, seguimos las ideas presentadas en [31] que también se aplicaron en [26, Sección 3.3]. La principal diferencia aquí, es que trabajamos con el espacio de interpolación  $[L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\theta$ , que no tiene una caracterización en términos de los espacios de Sobolev fraccionarios, como en [26, ecuación (3.17)]. Es por ello que necesitamos el siguiente resultado.

**Teorema 14.** *Sea  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces, para todo  $0 < \varepsilon < \omega < 1$ , para todo  $0 < \delta < 1 + \alpha$  y  $u \in [L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\delta}{1+\alpha}}$ , se sigue que  $\tilde{u} \in H^\delta(\varepsilon, \omega)$  y existe una constante positivo  $c = c(\varepsilon, \omega, \alpha, \delta)$  tal que*

$$\|\tilde{u}\|_{H^\delta(\varepsilon, \omega)} \leq c \|u\|_{[L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\delta}{1+\alpha}}}, \quad (4.34)$$

donde  $\tilde{u}$  es la restricción de  $u$  al intervalo  $(\varepsilon, \omega)$ .

Para demostrar este resultado, necesitaremos una equivalencia de normas en  $L^2(0, 1)$ . Recordemos primero que, puesto que  $H_0^{1+\alpha}(0, 1)$  es un subespacio cerrado de  $L^2(0, 1)$ , entonces por [29, Teorema 12.4],  $\forall u \in L^2(0, 1)$ , existen únicos  $u_p \in H_0^{1+\alpha}(0, 1)$ ,  $u_o \in (H_0^{1+\alpha}(0, 1))^\perp$  tales que  $u = u_p + u_o$ . Luego, tenemos la siguiente equivalencia de normas.

**Lema 6.** *Sea  $u \in L^2(0, 1)$ . Consideremos su única descomposición ortogonal en  $L^2(0, 1)$  respecto de  $H_0^{1+\alpha}(0, 1)$ , es decir,  $u = u_p + u_o$  donde  $u_p \in H_0^{1+\alpha}(0, 1)$ ,  $u_o \in (H_0^{1+\alpha}(0, 1))^\perp$ . Sean las normas sobre  $L^2(0, 1)$  dadas por  $\|u\|_1 = \|u_o\|_{L^2(0, 1)} + \|u_p\|_{H^{1+\alpha}(0, 1)}$  y  $\|u\|_2 = \|u\|_{L^2(0, 1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha}$ . Entonces las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  son equivalentes en  $L^2(0, 1)$ .*

*Demostración.* Sea  $u \in L^2(0, 1)$ . Como  $H_0^{1+\alpha}(0, 1) \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0, 1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha} &= \inf\{\|u_1\|_{L^2(0, 1)} + \|u_2\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} : u = u_1 + u_2, u_1 \in L^2(0, 1), u_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha\} \\ &\leq \|u_o\|_{L^2(0, 1)} + \|u_p\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} = \|u_o\|_{L^2(0, 1)} + \|u_p\|_{H^{1+\alpha}(0, 1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\forall u \in L^2(0, 1)$ ,  $\|u\|_2 \leq \|u\|_1$ , y por [3, Corolario 2.8] concluimos que existe  $c > 0$  tal que

$$\|u\|_1 \leq c \|u\|_2, \quad \forall u \in L^2(0, 1). \quad (4.35)$$

□

**Demostración del teorema 14.** Usaremos la definición de la norma en los espacios de interpolación  $[X, Y]_\theta$  dada por (2.17). Para ello, comencemos considerando  $g \in \mathcal{F}(L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ , donde  $\mathcal{F}(X, Y)$  es la familia de interpolación en  $X$  e  $Y$  dada en la Definición 12. Definimos la siguiente función

$$G : \mathcal{F}(L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha) \mapsto \mathcal{F}(L^2(\varepsilon, \omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)),$$

con

$$(Gg)(z) = \tilde{g}(z) \text{ tal que } \tilde{g}(z)(x) = g(z)|_{(\varepsilon, \omega)}(x).$$

Probaremos primero que  $G$  está bien definida, es decir, que  $G(g) = \tilde{g}$  verifica las condiciones en Definición 12.

$\mathcal{F}$ -(i) Sean  $z, z_0 \in S$  y consideremos la representación ortogonal de  $g$ . Entonces,

$$\tilde{g}(z) - \tilde{g}(z_0) = [g_o(z)|_{(\varepsilon, \omega)} - g_o(z_0)|_{(\varepsilon, \omega)}] + [g_p(z)|_{(\varepsilon, \omega)} - g_p(z_0)|_{(\varepsilon, \omega)}]. \quad (4.36)$$

Luego,

$$\|\tilde{g}(z) - \tilde{g}(z_0)\|_{L^2(\varepsilon, \omega) + H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \leq \|g_o(z) - g_o(z_0)\|_{L^2(0, 1)} + \|g_p(z) - g_p(z_0)\|_{H^{1+\alpha}(0, 1)}. \quad (4.37)$$

Por Lema 6, existe  $c > 0$ , que no depende de  $z$  ni de  $z_0$ , tal que

$$\|g_o(z) - g_o(z_0)\|_{L^2(0, 1)} + \|g_p(z) - g_p(z_0)\|_{H^{1+\alpha}(0, 1)} \leq c\|g(z) - g(z_0)\|_{L^2(0, 1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha}. \quad (4.38)$$

De (4.37) y (4.38), deducimos que

$$\|\tilde{g}(z) - \tilde{g}(z_0)\|_{L^2(\varepsilon, \omega) + H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \leq c\|g(z) - g(z_0)\|_{L^2(0, 1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha}.$$

Dado que  $g$  es continua en  $S$ , concluimos que  $\tilde{g}$  es continua en  $S$ .

Análogamente, podemos deducir que

$$\|\tilde{g}(z)\|_{L^2(\varepsilon, \omega) + H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \leq \|g(z)\|_{L^2(0, 1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \quad (4.39)$$

lo que implica que  $\tilde{g}$  está acotada en  $S$ , ya que  $g$  está acotada en  $S$ .

$\mathcal{F}$ -(ii) Sea  $z_0 \in S^\circ$ . Sabemos que  $g$  es analítica en  $S^\circ$ . Entonces, existe  $g'(z_0)$  tal que

$$\left\| \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} - g'(z_0) \right\|_{L^2(0,1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0.$$

Un candidato para  $\tilde{g}'(z_0)$  es

$$j(z_0) = g'(z_0)|_{(\varepsilon, \omega)}.$$

En efecto, por Lema 6 existe  $c > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\tilde{g}(z_0 + h) - \tilde{g}(z_0)}{h} - j(z_0) \right\|_{L^2(\varepsilon, \omega) + H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} &\leq \left\| \frac{g_o(z_0 + h)|_{(\varepsilon, \omega)} - g_o(z_0)|_{(\varepsilon, \omega)}}{h} - g'_o(z_0)|_{(\varepsilon, \omega)} \right\|_{L^2(\varepsilon, \omega)} \\ &\quad + \left\| \frac{g_p(z_0 + h)|_{(\varepsilon, \omega)} - g_p(z_0)|_{(\varepsilon, \omega)}}{h} - g'_p(z_0)|_{(\varepsilon, \omega)} \right\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \\ &\leq c \left\| \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} - g'(z_0) \right\|_{L^2(0,1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \end{aligned} \quad (4.40)$$

y la última expresión tiende a cero cuando  $z \rightarrow z_0$ . Por lo tanto,  $\tilde{g}$  es analítica en  $S^\circ$ .

$\mathcal{F}$ -(iii) Para todo  $g \in \mathcal{F}(L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$  y  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$\tilde{g}(it)(x) = g(it)|_{(\varepsilon, \omega)}(x) \in L^2(\varepsilon, \omega)$$

y

$$\tilde{g}(1 + it)(x) = g(1 + it)|_{(\varepsilon, \omega)}(x).$$

Dado que  $g(1 + it) \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , existe una única función  $w_{g,t} \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$  tal que

$$g(1 + it) = w_{g,t} - w_{g,t}(1)x^\alpha.$$

Teniendo en cuenta que,  $x^\alpha \in H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)$  deducimos que  $g(1 + it) \in H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)$ .

$\mathcal{F}$ -(iv) Probaremos únicamente que  $t \mapsto \tilde{g}(1 + it)$  es acotada y continua con respecto a  $H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)$ , puesto que la otra condición es análoga. Por hipótesis  $g(1 + it) \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , por lo que  $g(1 + it) = w_{g,t} - w_{g,t}(1)x^\alpha$ , para  $w_{g,t} \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(1 + it) - \tilde{g}(1 + it_0)\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} &= \|g(1 + it)|_{(\varepsilon, \omega)} - g(1 + it_0)|_{(\varepsilon, \omega)}\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \\ &\leq \|w_{g,t}|_{(\varepsilon, \omega)} - w_{g,t_0}|_{(\varepsilon, \omega)}\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \\ &\quad + \|(w_{g,t_0}(1) - w_{g,t}(1))x^\alpha\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \\ &\leq \|w_{g,t} - w_{g,t_0}\|_{H^{1+\alpha}(0,1)} + c|w_{g,t_0}(1) - w_{g,t}(1)| \\ &= \|g(1 + it) - g(1 + it_0)\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} + c|w_{g,t_0}(1) - w_{g,t}(1)|. \end{aligned}$$

Luego, como  $t \mapsto g(1 + it)$  es continua con respecto a  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , deducimos que

$$\|g(1 + it) - g(1 + it_0)\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0,$$

o equivalentemente

$$\|w_{g,t} - w_{g,t_0}\|_{H^{1+\alpha}(0,1)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0.$$

Como  $H^{1+\alpha}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ , existe  $c > 0$  tal que

$$|w_{g,t}(1) - w_{g,t_0}(1)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |w_{g,t}(x) - w_{g,t_0}(x)| \leq c \|w_{g,t} - w_{g,t_0}\|_{H^{1+\alpha}(0,1)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0.$$

Por lo tanto, concluimos que  $t \mapsto \tilde{g}(1 + it)$  es continua con respecto a  $H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)$ . Por otro lado,

$$\|\tilde{g}(1 + it)\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \leq c \|\tilde{g}(1 + it)\|_{L^2(\varepsilon, \omega) + H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)} \leq c \|g(1 + it)\|_{L^2(0,1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq c \|g(1 + it)\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}.$$

Entonces, dado que  $t \mapsto g(1 + it)$  está acotada con respecto a  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , deducimos que  $t \mapsto \tilde{g}(1 + it)$  está acotada con respecto a  $H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)$ .

Podemos concluir ahora que  $\tilde{g} \in \mathcal{F}(L^2(\varepsilon, \omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega))$  y por lo tanto,  $G$  está bien definido.

Probaremos ahora que  $G$  es sobreyectiva. Sea  $h \in \mathcal{F}(L^2(\varepsilon, \omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega))$ . Definimos  $g : S \mapsto L^2(0,1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  por  $g(z) = \eta \rho h(z)|_{(0,1)}$ , donde  $\eta$  es una función fija tal que  $\eta \in C_0^\infty(0,1)$ ,  $\eta(x) = 1$ ,  $\forall x \in (\varepsilon, \omega)$ , y  $\rho$  es el operador de extensión definido en [18, Teorema 8.1]. Notemos que por [18, Teorema 9.1],  $\rho \in \mathcal{L}(H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega), H^{1+\alpha}(\mathbb{R}))$ . Para simplificar, denotamos  $\eta \rho h(z)|_{(0,1)} = \eta \rho h(z)$ .

Por definición de  $g$ , obtenemos inmediatamente que  $(Gg)(z) = g(z)|_{(\varepsilon, \omega)} = \eta \rho h(z)|_{(\varepsilon, \omega)} = h(z)$ ,  $\forall z \in S$ . Por lo tanto, necesitamos probar que  $g \in \mathcal{F}(L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ .

$\mathcal{F}$ -(i) Sea  $z \in S$ . Observemos que, para cada descomposición  $h(z) = u_{1,z} + u_{2,z}$  con  $u_{1,z} \in L^2(\varepsilon, \omega)$ ,  $u_{2,z} \in H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)$ , la siguiente descomposición en  $L^2(0,1) + \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  para  $g(z)$  vale para todo  $z \in S$

$$g(z) = \eta \rho u_{1,z}(z) + \eta \rho u_{2,z}(z).$$

Además, dado que  $\rho \in \mathcal{L}(L^2(\varepsilon, \omega), L^2(\mathbb{R}))$

$$\|\eta \rho u_{1,z}\|_{L^2(0,1)} \leq c \|u_{1,z}\|_{L^2(\varepsilon, \omega)}, \quad \text{y} \quad \|\eta \rho u_{2,z}\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq c \|u_{2,z}\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon, \omega)}. \quad (4.41)$$



Luego, existe  $c > 0$  tal que

$$\|\eta\rho u_{1,z}\|_{L^2(0,1)} + \|\eta\rho u_{2,z}\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq c(\|u_{1,z}\|_{L^2(\varepsilon,\omega)} + \|u_{2,z}\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)}) \quad (4.42)$$

para toda descomposición  $h(z) = u_{1,z} + u_{2,z}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|g(z)\|_{L^2(0,1)+\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} &= \inf\{\|w_{1,z}\|_{L^2(0,1)} + \|w_{2,z}\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} : g(z) = w_{1,z} + w_{2,z}, w_{1,z} \in L^2(0,1), w_{2,z} \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha\} \\ &\leq \inf\{\|\eta\rho u_{1,z}\|_{L^2(0,1)} + \|\eta\rho u_{2,z}\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} : h(z) = u_{1,z} + u_{2,z}, u_{1,z} \in L^2(\varepsilon,\omega), \\ &\quad u_{2,z} \in H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)\} \\ &\leq c \inf\{\|u_{1,z}\|_{L^2(\varepsilon,\omega)} + \|u_{2,z}\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)} : h(z) = u_{1,z} + u_{2,z}, u_{1,z} \in L^2(\varepsilon,\omega), \\ &\quad u_{2,z} \in H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)\} \\ &= c\|h(z)\|_{L^2(\varepsilon,\omega)+H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)}, \end{aligned}$$

y puesto que  $h \in \mathcal{F}(L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega))$  concluimos que  $g$  es acotada en  $S$ .

De manera similar, para  $z, z_0 \in S$ , deducimos que

$$\|g(z) - g(z_0)\|_{L^2(0,1)+\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq c\|h(z) - h(z_0)\|_{L^2(\varepsilon,\omega)+H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)}, \quad (4.43)$$

donde la última expresión tiende a 0 cuando  $z \rightarrow z_0$ . Por lo tanto,  $g$  es continua en  $S$ .

$\mathcal{F}$ -(ii) Un candidato para  $g'(z_0)$  es  $j(z_0) = \eta\rho(h'(z_0))$ . En efecto, de (4.42),

$$\left\| \frac{g(z_0 + \xi) - g(z_0)}{\xi} - j(z_0) \right\|_{L^2(0,1)+\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq c \left\| \frac{h(z_0 + \xi) - h(z_0)}{\xi} - h'(z_0) \right\|_{L^2(\varepsilon,\omega)+H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)} \quad (4.44)$$

y la última expresión tiende a 0 cuando  $\xi \rightarrow 0$ . Por lo tanto,  $g$  es analítica en  $S^\circ$ .

$\mathcal{F}$ -(iii) Está claro que  $g(it) \in L^2(0,1)$  y  $g(1+it) \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ .

$\mathcal{F}$ -(iv) Siguiendo la correspondiente demostración para  $\tilde{g}$ , se puede probar que  $t \mapsto g(it)$  y  $t \mapsto g(1+it)$  son continuas y acotadas con respecto a  $L^2(0,1)$  y  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  respectivamente.

Concluimos que  $g \in \mathcal{F}(L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$  y por lo tanto  $G$  es sobreyectiva. Por otro lado, para todo  $t \in \mathbb{R}$  es fácil ver que

$$\|(Gg)(it)\|_{L^2(\varepsilon,\omega)} \leq \|g(it)\|_{L^2(0,1)}$$

y

$$\|(Gg)(1+it)\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)} \leq c\|g(1+it)\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha},$$

de donde, existe  $c > 0$  tal que

$$\max\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} \|Gg(it)\|_{L^2(\varepsilon,\omega)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|Gg(1+it)\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)}\right\} \leq c \max\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(it)\|_{L^2(0,1)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(1+it)\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}\right\},$$

o equivalentemente

$$\|Gg\|_{\mathcal{F}(L^2(\varepsilon,\omega),H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega))} \leq c\|g\|_{\mathcal{F}(L^2(0,1),\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)}. \quad (4.45)$$

Finalmente, pasamos a los espacios de interpolación. Por definición,

$$H^\delta(\varepsilon,\omega) = [L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)]_{\frac{\delta}{1+\alpha}} = \left\{ f\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) : f \in \mathcal{F}(L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)) \right\},$$

$$[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\delta}{1+\alpha}} = \left\{ g\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) : g \in \mathcal{F}(L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha) \right\}.$$

Sea  $u \in [L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\delta}{1+\alpha}}$ . Entonces, existe  $g \in \mathcal{F}(L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$  tal que  $g\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) = u$ .

Definiendo  $\tilde{u} = u|_{(\varepsilon,\omega)}$ , resulta que  $\tilde{u} = u|_{(\varepsilon,\omega)} = g\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right)|_{(\varepsilon,\omega)} = (Gg)\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) =: \tilde{g}\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right)$ , y por definición de  $G$  se deduce que  $\tilde{g} \in \mathcal{F}(L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega))$ . En consecuencia,  $\tilde{u} = \tilde{g}\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) \in [L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)]_{\frac{\delta}{1+\alpha}}$ , y usando (4.45) se tiene que,

$$\begin{aligned} \|u\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\delta}{1+\alpha}}} &= \inf \left\{ \|g\|_{\mathcal{F}(L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)} : g\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) = u \right\} \\ &\geq c \inf \left\{ \|Gg\|_{\mathcal{F}(L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega))} : (Gg)\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) = \tilde{u} \right\} \\ &= c \inf \left\{ \|\tilde{g}\|_{\mathcal{F}(L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega))} : \tilde{g}\left(\frac{\delta}{1+\alpha}\right) = \tilde{u} \right\} \\ &= c\|\tilde{u}\|_{[L^2(\varepsilon,\omega), H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)]_{\frac{\delta}{1+\alpha}}} \\ &= c\|\tilde{u}\|_{H^\delta(\varepsilon,\omega)}. \end{aligned}$$

□

A partir de los resultados anteriores, podemos probar que la *mild solution* verifica la ecuación gobernante del Problema (4.20) y adicionalmente que tiene cierta regularidad.

**Lema 7.** *La mild solution  $v$  obtenida en el Teorema 13 verifica que  $v_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$  y*

$$v_t = \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v + x \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} v_x, \quad \text{en } L^2(0, 1) \text{ para todo } t \in (0, T).$$

*Demostración.* Por definición de *mild solution*,

$$v(x, t) = G(t, 0)v_0(x) + \int_0^t G(t, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma. \quad (4.46)$$

Además,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(x, t+r) - v(x, t)}{r} = \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0)v_0 + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left[ \int_0^{t+r} G(t+r, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma - \int_0^t G(t+r, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma \right].$$

Más aún, de las propiedades de los operadores de evolución, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t, 0)v_0 = A(t)G(t, 0)v_0 \in L^2(0, 1)$$

Por otro lado, si suponemos que  $r > 0$  (la prueba es análoga para  $r < 0$ ), tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[ \int_0^{t+r} G(t+r, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma - \int_0^t G(t, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{r} \int_0^t (G(t+r, \sigma) - G(t, \sigma))f(x, \sigma)d\sigma + \frac{1}{r} \int_t^{t+r} G(t+r, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Analizamos  $I_1$ . Por definición de familia de operadores de evolución, dados  $0 \leq \sigma < t \leq T$  se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (G(t+r, \sigma) - G(t, \sigma))f(x, \sigma) = A(t)G(t, \sigma)f(x, \sigma).$$

Por otro lado, de Lema 5 se tiene que

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; H^\alpha(0, 1))} \leq c\|v\|_{C([0, T], \tilde{D}_\alpha)}.$$

Aplicando Proposición 12, Lema 5, (4.27) y (4.30) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{r} [G(t+r, \sigma) - G(t, \sigma)]f(\cdot, \sigma) \right\|_{L^2(0, 1)} = \left\| \frac{1}{r} \int_t^{t+r} \frac{\partial}{\partial p} G(p, \sigma)f(\cdot, \sigma)dp \right\|_{L^2(0, 1)} \\ &= \left\| \frac{1}{r} \int_t^{t+r} A(p)G(p, \sigma)f(\cdot, \sigma)dp \right\|_{L^2(0, 1)} \leq \frac{c}{r} \int_t^{t+r} (p - \sigma)^{\delta-1} dp \|f\|_{[L^2(0, 1), \tilde{D}_\alpha]_\delta} \\ &\leq \frac{c}{r} \int_t^{t+r} (p - \sigma)^{\delta-1} dp \|f\|_{H^{(1+\alpha)\delta}(0, 1)} \leq \frac{c}{r} \int_t^{t+r} (p - \sigma)^{\delta-1} dp \|f\|_{H^\alpha(0, 1)} \\ &\leq c(t - \sigma)^{\delta-1} \|f\|_{L^\infty(0, T; H^\alpha(0, 1))} \leq c(t - \sigma)^{\delta-1} \|v\|_{C([0, T], \tilde{D}_\alpha)}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Luego, por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, deducimos que

$$\frac{1}{r} \int_0^t (G(t+r, \sigma) - G(t, \sigma))f(x, \sigma)d\sigma \rightarrow \int_0^t A(t)G(t, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma.$$

Analizamos a continuación  $I_2$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \int_t^{t+r} G(t+r, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma = \frac{1}{r} \int_t^{t+r} G(t, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma \\ &+ \frac{1}{r} \int_t^{t+r} (G(t+r, \sigma) - G(t, \sigma))f(x, \sigma)d\sigma = I_{2,1} + I_{2,2}. \end{aligned}$$

Por Teorema de diferenciación de Lebesgue en espacios de Banach ([12, Proposición 2.1.22]) obtenemos que  $I_{2,1}$  converge a  $f(x, t)$  en  $L^2(0, 1)$  para todo  $t \in (0, T)$ . Respecto a  $I_{2,2}$ , si denotamos por  $E$  al operador identidad, resulta

$$I_{2,2} = \frac{1}{r} \int_t^{t+r} (G(t+r, t) - E)G(t, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma = \frac{(G(t+r, t) - E)}{r} \int_t^{t+r} G(t, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma.$$

En consecuencia, nuevamente por Teorema de diferenciación de Lebesgue en espacios de Banach y la continuidad de  $G(t, \cdot)$  en  $L^2(0, 1)$  deducimos que  $I_{2,2}$  converge a cero en  $L^2(0, 1)$  para todo  $t \in (0, T)$ .

De lo anterior, concluimos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left[ \int_0^{t+r} G(t+r, \sigma) f(x, \sigma) d\sigma - \int_0^t G(t+r, \sigma) f(x, \sigma) d\sigma \right] = A(t) \int_0^t G(t, \sigma) f(x, \sigma) d\sigma + f(x, t).$$

Entonces, de (4.46) se sigue que

$$v_t(x, t) = A(t)v(x, t) + f(x, t),$$

y por definición de  $f(x, t)$  y  $A(t)$  se tiene que

$$v_t(x, t) = \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v(x, t) + \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} x v_x(x, t),$$

en  $L^2(0, 1)$ , para todo  $t \in (0, T)$ . La regularidad de  $v_t$  se sigue de (4.14). En efecto, por (4.24), Lema 5 y (4.47)

$$\begin{aligned} \|v_t\|_{L^2(0,1)} &\leq \|A(t)G(t,0)v_0\|_{L^2(0,1)} + c \int_0^t (t-\sigma)^{\delta-1} \|v\|_{C([0,T],\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)} d\sigma + \|f\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|v_0\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} + \frac{c}{\delta} t^\delta \|v\|_{C([0,T],\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)} + \|v\|_{H^\alpha(0,1)} \\ &\leq \|v_0\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} + \frac{c}{\delta} t^\delta \|v\|_{C([0,T],\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)} + \|v\|_{C([0,T],\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)}, \end{aligned}$$

de donde,  $v_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ .

□

En adelante nos centraremos en el caso  $\alpha > \frac{1}{2}$ , ya que para valores menores de  $\alpha$ , las demostraciones de los siguientes resultados son demasiado técnicas, perdiendo así las ideas centrales involucradas en las mismas (ver [31, Lemma 3] y [26, Lema 3.10]).

Para obtener una mayor regularidad de la *mild solution*, necesitaremos el siguiente lema auxiliar.

**Lema 8.** *Supongamos que  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$  y  $u_\sigma \in {}_0H^\alpha(0, 1)$ . Denotamos por  $u$  la solución de la ecuación*

$$\begin{cases} u_t = A(t)u & \text{para } 0 < x < 1, 0 \leq \sigma < t < T, \\ u(x, \sigma) = u_\sigma(x) & \text{para } 0 < x < 1, \end{cases} \quad (4.48)$$

dada por el operador de evolución generado por la familia  $A(t)$ . Entonces, para todo  $0 < \gamma < \alpha$ , y para todo  $0 < \varepsilon < \omega < 1$  existe una constante positiva  $c = c(\alpha, b, M, T, \varepsilon, \omega, \gamma)$ , donde  $b, M$  provienen de (4.14), tal que para cada  $t \in (\sigma, T]$  se cumple

$$\|A(t)u(\cdot, t)\|_{H^\gamma(\varepsilon, \omega)} \leq c(t-\sigma)^{-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{H^\alpha(0,1)}. \quad (4.49)$$

*Demostración.* La prueba sigue las ideas de [31, Lemma 2] pero dado que no disponemos de una caracterización de los espacios de interpolación  $[L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\delta$  similar a la de [26, Eq. (3.17)], debemos aplicar el Teorema 14 en reiteradas ocasiones.

Primero, observemos que  $u_\sigma \in H^{(1+\alpha)\delta}(0, 1)$ , para todo  $\delta < \frac{1}{2(1+\alpha)}$ , puesto que  $\alpha > \frac{1}{2}$  y  $u_\sigma \in {}_0H^\alpha(0, 1)$ . Por otro lado, aplicando Proposición 16 a (4.48), se sigue que existe una única solución  $u \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1)) \cap C((\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha) \cap C^1((\sigma, T]; L^2(0, 1))$  tal que  $u(\cdot, t) = G(t, \sigma)u_\sigma$ , y de (4.25) resulta que

$$\|u(\cdot, t)\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq c(t - \sigma)^{\delta-1} \|u_\sigma\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_\delta}.$$

Recordamos que la constante de interpolación  $c$  depende tanto de los parámetros de interpolación como de  $\alpha, T$  y  $b, M$ , es decir  $c = c(\alpha, b, M, T, \delta)$ . Sin embargo, por simplicidad, omitiremos esta dependencia en la notación durante la demostración. De igual manera para los parámetros  $\varepsilon$  y  $\omega$ .

Comencemos fijando  $0 < \varepsilon < \omega < 1$  y definamos  $\omega_* = \frac{1+\omega}{2}$ . Consideremos una sucesión  $\{\varphi^k\} \subseteq C_0^\infty(0, 1)$  tal que

$$\{\varphi^k\} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_\alpha, \quad \varphi^k \rightarrow u_\sigma \text{ en } {}_0H^\alpha(0, \omega_*) \text{ y } \varphi^k \rightarrow u_\sigma \text{ en } H^{\bar{\gamma}}(0, 1) \text{ para cada } \bar{\gamma} < \frac{1}{2}. \quad (4.50)$$

Se puede ver que dicha sucesión existe (Ver [30, Lemma 4.4]).

Definimos ahora para cada  $\varphi^k$  el siguiente problema aproximado

$$\begin{cases} u_t^k = A(t)u^k & \text{para } 0 < x < 1, \quad 0 \leq \sigma < t < T, \\ u^k(x, \sigma) = \varphi^k(x) & \text{para } 0 < x < 1, \end{cases} \quad (4.51)$$

Por [19, Corolario 6.2.4] existe una única solución  $u_k$  al problema (4.51) tal que  $u^k \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1)) \cap C((\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha) \cap C^1((\sigma, T]; L^2(0, 1))$ , y  $u^k(\cdot, t) = G(t, \sigma)\varphi^k$ . Por lo tanto, por Proposición 15, se sigue que  $u^k \in C([\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha) \cap C^1([\sigma, T]; L^2(0, 1))$

Consideremos ahora  $u, u^k$  soluciones de (4.48) y (4.51) respectivamente. Luego, por (4.27) y (4.30) se sigue que, para todo  $0 < \bar{\gamma} < \bar{\gamma}_1 < \frac{1}{2}$ ,

$$\|A(t)(u - u^k)\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\bar{\gamma}}{1+\alpha}}} \leq c(t - \sigma)^{-1 - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_1}{1+\alpha}} \|u_\sigma - \varphi^k\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\bar{\gamma}_1}{1+\alpha}}} \leq c(t - \sigma)^{-1 - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_1}{1+\alpha}} \|u_\sigma - \varphi^k\|_{H^{\bar{\gamma}_1}(0,1)}$$

y el último término tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, para casi todo  $t \in (\sigma, T]$

$$A(t)u^k(\cdot, t) \rightarrow A(t)u(\cdot, t), \quad \text{in } [L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\bar{\gamma}}{1+\alpha}} \quad \forall \bar{\gamma} < \frac{1}{2}.$$

Entonces, teniendo en cuenta (4.14), para cada  $0 \leq \bar{\gamma} < \frac{1}{2}$  y casi todo  $t \in (\sigma, T]$

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t) \quad \text{in } [L^2(0, 1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\bar{\gamma}}{1+\alpha}}. \quad (4.52)$$

Aplicando (4.27) primero, y luego (4.30) y (4.50), para  $k$  suficientemente grande y para cada  $0 \leq \bar{\gamma} < \bar{\gamma}_1 < \frac{1}{2}$  tenemos

$$\|A(t)u^k(\cdot, t)\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\bar{\gamma}}{1+\alpha}}} \leq c(t-\sigma)^{-1-\frac{\bar{\gamma}-\bar{\gamma}_1}{1+\alpha}} \|\varphi^k\|_{H^{\bar{\gamma}_1}(0,1)} \leq c(t-\sigma)^{-1-\frac{\bar{\gamma}-\bar{\gamma}_1}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{H^{\bar{\gamma}_1}(0,1)}. \quad (4.53)$$

Para obtener una estimación local independiente de  $A(t)u^k(\cdot, t)$  en un espacio más regular, introducimos una función de corte  $\eta$ , que sea suave y no negativa, y tal que  $\eta \equiv 0$  en  $[0, \frac{\varepsilon}{2}] \cup [\omega_*, 1]$ , y  $\eta \equiv 1$  en  $[\varepsilon, \omega]$ . Con dicha función en mente, aplicamos  $\partial^\alpha$  a (4.51) y multiplicamos la identidad resultante por  $\eta$ . Luego, aplicando Proposición 4 llegamos a

$$\begin{aligned} \eta \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k &= -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-p)^{-\alpha-1} (\eta(x) - \eta(p)) \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(p) dp + \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k \cdot \eta \right) \\ &= -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-p)^{-\alpha-1} (\eta(x) - \eta(p)) \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(p) dp + \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k) - \partial^\alpha (\eta' D_x^\alpha u^k). \end{aligned}$$

Como  $u^k(0, t) = 0$  para todo  $t \in (0, T]$ , de (2.10) tenemos que

$$\partial^\alpha \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(x, t) = \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial x} (\eta \partial^\alpha u^k(x, t)).$$

Teniendo en cuenta la identidad (2.13) obtenemos que  $\{u^k\}$  satisface

$$\begin{cases} (\partial^\alpha u^k \cdot \eta)_t - A(t)(\partial^\alpha u^k \cdot \eta) = F^k & \text{para } 0 < x < 1, \quad 0 \leq \sigma < t < T, \\ (\partial^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, \sigma) = \partial^\alpha \varphi^k \cdot \eta & \text{para } 0 < x < 1, \end{cases} \quad (4.54)$$

dónde

$$F^k := \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \left[ \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-p)^{-\alpha-1} (\eta(x) - \eta(p)) \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(p, t) dp - \partial^\alpha (\eta' D_x^\alpha u^k) \right].$$

Nuestro objetivo ahora es aplicar la Proposición 16 al problema (4.54). Necesitamos demostrar que:

- (I)  $F^k \in C((\sigma, T]; L^2(0, 1)) \cap L^1(\sigma, T; L^2(0, 1))$ ,
- (II)  $\partial^\alpha \varphi^k \cdot \eta \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ ,
- (III)  $\partial^\alpha u^k \cdot \eta \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1)) \cap C((\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha) \cap C^1((\sigma, T]; L^2(0, 1))$ .

En primer lugar, notamos que para cada  $x, p \in [0, 1]$ ,  $x \neq p$  tenemos

$$\left| \frac{\eta(x) - \eta(p)}{x - p} \right| \leq \|\eta\|_{W^{1,\infty}(0,1)}, \quad (4.55)$$

de donde,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \int_0^x (x-p)^{-\alpha-1} (\eta(x) - \eta(p)) A(t) u^k(p, t) dp \right| \leq \|\eta\|_{W^{1,\infty}(0,1)} I^{1-\alpha} \left| A(t) u^k(x, t) \right|.$$

Como  $I^{1-\alpha}$  está acotado en  $L^2(0, 1)$  obtenemos

$$\left\| \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-p)^{-\alpha-1} (\eta(x) - \eta(p)) A(t) u^k(p, t) dp \right\|_{L^2(0,1)} \leq c \left\| A(t) u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)}. \quad (4.56)$$

Por la Proposición 11 y (4.14), podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \left\| \partial^\alpha (\eta' D_x^\alpha u^k) \right\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{c}{s^{1+\alpha}(t)} \left\| (\eta' D_x^\alpha u^k) \right\|_{0H^\alpha(0,1)} \leq \frac{c}{s^{1+\alpha}(t)} \left\| (\eta' D_x^\alpha u^k) \right\|_{0H^1(0,1)} \\ &\leq \frac{c}{s^{1+\alpha}(t)} \left\| (\eta'' D_x^\alpha u^k) \right\|_{L^2(0,1)} + \frac{c}{s^{1+\alpha}(t)} \left\| (\eta' \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k) \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq c \left\| D_x^\alpha u^k \right\|_{L^2(0,1)} + c \left\| A(t) u^k \right\|_{L^2(0,1)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Adicionalmente, teniendo en cuenta que  $u^k = w^k - w^k(1, t)x^\alpha$ , con  $w^k(\cdot, t) \in {}_0H^{1+\alpha}(0, 1)$ , aplicando la Proposición 11 y Teorema 3 deducimos que

$$\begin{aligned} \left\| D_x^\alpha u^k \right\|_{L^2(0,1)} &= \left\| \partial^\alpha u^k \right\|_{L^2(0,1)} \leq \left\| \partial^\alpha w^k \right\|_{L^2(0,1)} + |w^k(1, t)| \left\| \partial^\alpha x^\alpha \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq c \left\| w^k \right\|_{0H^\alpha(0,1)} + c \left\| w^k \right\|_{C([0,1])} \leq c \left\| w^k \right\|_{0H^1(0,1)} + c \left\| w^k \right\|_{C([0,1])} \\ &= c \left\| w^k \right\|_{0H^{1+\alpha}(0,1)} + c \left\| w^k \right\|_{C([0,1])} \leq c \|u^k\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por lo tanto, por (4.57), (4.58) y el Lema 4 obtenemos que

$$\frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \left\| \partial^\alpha (\eta' D_x^\alpha u^k) \right\|_{L^2(0,1)} \leq c \left\| A(t) u^k \right\|_{L^2(0,1)}. \quad (4.59)$$

Combinando (4.56), (4.59) y (4.53) con  $\bar{\gamma} = 0$ , resulta que para cada  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$

$$\left\| F^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} \leq c \left\| A(t) u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} \leq c(t-\sigma)^{\frac{\gamma}{(1+\alpha)}-1} \|u_\sigma\|_{H^\gamma(0,1)} \quad (4.60)$$

y por lo tanto  $F^k \in L^1(\sigma, T; L^2(0, 1))$ .

Por otro lado, puesto que  $u^k \in C([\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ , de la definición de  $F^k$ , se sigue que  $F^k \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1))$ . De hecho, para  $0 < \tau < t \leq T$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| F^k(\cdot, t) - F^k(\cdot, \tau) \right\|_{L^2(0,1)} &\leq \alpha \|\eta\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \left\| I^{1-\alpha} [A(t) u^k(\cdot, t) - A(\tau) u^k(\cdot, \tau)] \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + \left\| \partial^\alpha \left( \frac{1}{s^{1+\alpha}(\tau)} (\eta' D_x^\alpha u^k)(\cdot, \tau) - \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} (\eta' D_x^\alpha u^k)(\cdot, t) \right) \right\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

El primer término tiende a cero porque la integral fraccionaria está acotada en  $L^2$  y  $A(\cdot)u^k \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1))$ . Además, dado que  $u^k \in C([\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ , tenemos  $\eta' D_x^\alpha u^k \in C([\sigma, T]; {}_0H^1(0, 1))$ . En particular, teniendo en cuenta (4.14), se tiene que  $\frac{1}{s^{1+\alpha(t)}} \eta' D_x^\alpha u^k \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1))$ . Entonces, por Lema 4 y (4.55), deducimos que  $F^k \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1))$ , y por lo tanto verificamos (I).

Para probar (II) procedemos de la siguiente manera. Como  $\varphi^k \in C_0^\infty(0, 1) \subseteq {}_0H^{1+2\alpha}(0, 1)$ , se sigue que  $\partial^\alpha \varphi^k = \frac{\partial}{\partial x} I^{1-\alpha} \varphi^k \in H^{1+\alpha}(0, 1)$  y en consecuencia,  $\partial^\alpha \varphi^k \cdot \eta \in H_0^{1+\alpha}(0, 1) \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ .

Finalmente, probaremos (III). De (2.10) tenemos  $\partial^\alpha u^k = D_x^\alpha u^k$ . Por lo tanto, basta con mostrar que  $D_x^\alpha u^k \cdot \eta \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1)) \cap C([\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Por lo anterior, sabemos que  $D_x^\alpha u^k \cdot \eta \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1))$ . Veamos entonces que  $D_x^\alpha u^k \cdot \eta \in C([\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ .

Por un lado, para cualquier  $0 < \beta < 1 + \alpha$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(0,1)} \leq \left\| \eta' D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(0,1)} + \left\| \eta \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(0,1)}.$$

Aplicando Teorema 14 y la estimación (4.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \eta \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(0,1)} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\beta}{1+\alpha}}} \\ &\leq c(t - \sigma)^{-\frac{\beta}{1+\alpha}} \left\| \varphi^k \right\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Además,

$$\left\| \eta' D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(0,1)} \leq c \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)}.$$

Adicionalmente, si  $\beta \in (0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} &\leq c \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^1(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \leq c \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^1(0,1)} \\ &\leq c \left( \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} \right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} &\leq \left\| \partial^\alpha w^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} + c \left\| w^k \right\|_{C([0,1])} \\ &\leq c \left\| w^k(\cdot, t) \right\|_{{}_0H^{1+\alpha}(0,1)} = c \left\| u^k(\cdot, t) \right\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \leq c \left\| A(t)u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \leq c \left\| A(t)u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)}, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (4.62)$$



Consideremos ahora  $\beta \in (1, 1 + \alpha)$ . Dado que  $\beta - 1 \in (0, 1)$ , por (4.61) y (4.62), se sigue que

$$\begin{aligned} \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} &= \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^{\beta-1}(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \\ &\leq \left\| D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^{\beta-1}(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} + c \left\| \eta \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k(\cdot, t) \right\|_{H^{\beta-1}(0,1)} \\ &\leq c \left( \left\| A(t)u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} + (t - \sigma)^{-\frac{\beta-1}{1+\alpha}} \left\| \varphi^k \right\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (4.63)$$

Entonces, por Lema (4), (4.61), (4.62) y (4.63), deducimos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, t) \right\|_{H^\beta(0,1)} \leq c \left( \left\| A(t)u^k(\cdot, t) \right\|_{L^2(0,1)} + (t - \sigma)^{-\frac{\beta}{1+\alpha}} \left\| v f^k \right\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} \right), \quad (4.64)$$

lo que implica

$$\frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k) \in L_{loc}^\infty((\sigma, T]; H^\beta(0, 1)) \text{ para cada } 0 < \beta < 1 + \alpha.$$

Teniendo en cuenta la definición de  $\eta$ , y el hecho de que  $\|\eta D_x^\alpha u^k\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} = \|\eta D_x^\alpha u^k\|_{0H^{1+\alpha}(0,1)}$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \eta D_x^\alpha u^k(\cdot, t) - \eta D_x^\alpha u^k(\cdot, \tau) \right\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha}^2 &= \left\| \eta D_x^\alpha u^k(\cdot, t) - \eta D_x^\alpha u^k(\cdot, \tau) \right\|_{0H^{1+\alpha}(0,1)}^2 \\ &= \left\| \eta D_x^\alpha u^k(\cdot, t) - \eta D_x^\alpha u^k(\cdot, \tau) \right\|_{L^2(0,1)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, \tau) \right\|_{0H^\alpha(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Como  $D_x^\alpha u^k \cdot \eta \in C([\sigma, T]; L^2(0, 1))$ , se sigue que la primera norma en el lado derecho de (4.65) tiende a cero cuando  $\tau \rightarrow t$ .

Para el último término en (4.65), usamos la caracterización [26, (3.17)] y [19, Corolario 1.2.7.] para deducir que

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, \tau) \right\|_{0H^\alpha(0,1)}^2 \\ &\leq c \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, \tau) \right\|_{0H^\beta(0,1)}^{\frac{\alpha}{\beta}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\eta D_x^\alpha u^k)(\cdot, \tau) \right\|_{L^2(0,1)}^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \end{aligned}$$

para todo  $\alpha < \beta < 1 + \alpha$ . Por (4.64), para todo  $\sigma < \tau, t \leq T$ , la primera norma está acotada mientras que la segunda tiende a cero cuando  $\tau \rightarrow t$  porque  $u^k \in C([\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Por lo tanto,  $D_x^\alpha u^k \cdot \eta \in C((\sigma, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Además,  $D_x^\alpha u^k \cdot \eta \in C^1((\sigma, T]; L^2(0, 1))$ . De hecho,  $A(t)u^k \in C((\sigma, T]; L^2(0, 1))$  y por (4.61)  $A(t)u^k \in L_{loc}^\infty((\sigma, T]; H^\beta(0, 1))$  para cada  $\beta \in (0, 1 + \alpha)$ , por lo que aplicando de nuevo la estimación de espacios de interpolación, en particular obtenemos que  $A(t)u^k \in C((\sigma, T]; H^1(0, 1))$  y en consecuencia  $u_t^k \in C((\sigma, T]; H^1(0, 1))$ . Luego,

$\partial^\alpha u_t^k \cdot \eta = D_x^\alpha u_t^k \cdot \eta \in C((\sigma, T]; L^2(0, 1))$ , y se verifica la condición (III).

Podemos aplicar ahora la Proposición 16 al problema (4.54) para obtener que  $\partial^\alpha u^k \cdot \eta$  satisface la identidad integral

$$(\partial^\alpha u^k \cdot \eta)(x, t) = G(t, \sigma)(\partial^\alpha \varphi^k \cdot \eta)(x) + \int_\sigma^t G(t, \tau) F^k(x, \tau) d\tau. \quad (4.66)$$

Consideremos  $\gamma_0 \in (0, 1 + \alpha)$ . Dado que  $\partial^\alpha u^k \cdot \eta \in L^2(0, 1)$  y  $F^k \in L^1(\sigma, T; L^2(0, 1))$ , por (4.26), Teorema 14 y (4.66) se sigue que

$$\begin{aligned} \left\| (\partial^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, t) \right\|_{H^{\gamma_0}(0,1)} &= \left\| (\partial^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, t) \right\|_{H^{\gamma_0}(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \leq c \left\| (\partial^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, t) \right\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\gamma_0}{1+\alpha}}} \\ &\leq c \left\| G(t, \sigma)(\partial^\alpha \varphi^k \cdot \eta) \right\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\gamma_0}{1+\alpha}}} + c \int_\sigma^t \left\| G(t, \tau) F^k(\cdot, \tau) \right\|_{[L^2(0,1), \tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\gamma_0}{1+\alpha}}} d\tau \\ &\leq c(t - \sigma)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} \left\| \partial^\alpha \varphi^k \cdot \eta \right\|_{L^2(0,1)} + c \int_\sigma^t (t - \tau)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} \left\| F^k(\cdot, \tau) \right\|_{L^2(0,1)} d\tau. \end{aligned}$$

Usando la estimación (4.60) obtenemos que para cada  $0 < \bar{\gamma} < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \left\| (\partial^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, t) \right\|_{H^{\gamma_0}(0,1)} &\leq c(t - \sigma)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} \left\| \partial^\alpha \varphi^k \right\|_{L^2(0, \omega_*)} + c \int_\sigma^t (t - \tau)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} (\tau - \sigma)^{\frac{\bar{\gamma}}{1+\alpha} - 1} d\tau \|u_\sigma\|_{H^{\bar{\gamma}}(0,1)} \\ &= c(t - \sigma)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} \left\| \partial^\alpha \varphi^k \right\|_{L^2(0, \omega_*)} + c(t - \sigma)^{\frac{\bar{\gamma} - \gamma_0}{1+\alpha}} B\left(\frac{\bar{\gamma}}{1 + \alpha}, 1 - \frac{\gamma}{1 + \alpha}\right) \|u_\sigma\|_{H^{\bar{\gamma}}(0,1)}, \end{aligned}$$

donde  $B$  es la función Beta dada en la Definición 2.

Por la Proposición 11 y (4.50) tenemos  $\left\| \partial^\alpha \varphi^k \right\|_{L^2(0, \omega_*)} \leq c \left\| \varphi^k \right\|_{0H^\alpha(0, \omega_*)} \leq c \|u_\sigma\|_{0H^\alpha(0, \omega_*)}$  para  $k$  suficientemente grande. Entonces,

$$\left\| (\partial^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, t) \right\|_{H^{\gamma_0}(0,1)} \leq c \left[ (t - \sigma)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{0H^\alpha(0, \omega_*)} + (t - \sigma)^{\frac{\bar{\gamma} - \gamma_0}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{H^{\bar{\gamma}}(0,1)} \right] \quad (4.67)$$

Aplicando (2.10) y [8, Proposición 2.1] deducimos que

$$\left\| (D_x^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, t) \right\|_{H^{\gamma_0}(0,1)} \leq c(t - \sigma)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{0H^\alpha(0,1)}. \quad (4.68)$$

Como  $\eta$  es suave, podemos aplicar (4.67) cambiando  $\eta$  por  $\eta'$  para obtener

$$\left\| (D_x^\alpha u^k \cdot \eta')(\cdot, t) \right\|_{H^{\gamma_0}(0,1)} \leq c(t - \sigma)^{-\frac{\gamma_0}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{0H^\alpha(0,1)}. \quad (4.69)$$

Entonces, combinando (4.68), (4.69) y Proposición 10, deducimos que para todo  $0 < \gamma < \alpha$

$$\begin{aligned} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u^k \cdot \eta \right) (\cdot, t) \right\|_{H^\gamma(0,1)} &= \left\| \frac{\partial}{\partial x} (D_x^\alpha u^k \cdot \eta)(\cdot, t) \right\|_{H^\gamma(0,1)} + \left\| (D_x^\alpha u^k \cdot \eta')(\cdot, t) \right\|_{H^\gamma(0,1)} \\ &\leq c(t - \sigma)^{-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{0H^\alpha(0,1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (4.14),

$$\left\| A(t)u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\gamma(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \leq c(t - \sigma)^{-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{H^\alpha(0,1)}. \quad (4.70)$$

Finalmente, puesto que la norma es débil semicontinua inferior, deducimos que

$$\|A(t)u(\cdot, t)\|_{H^\gamma(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \leq c \left\| A(t)u^k(\cdot, t) \right\|_{H^\gamma(\frac{\varepsilon}{2}, \omega^*)} \leq c(t - \sigma)^{-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}} \|u_\sigma\|_{H^\alpha(0,1)}$$

donde  $c = c(\alpha, b, M, \varepsilon, \omega, T, \gamma)$ . Dado que  $\varepsilon$  y  $\omega$  son números arbitrarios, obtenemos (4.49). □

A partir de los resultados anteriores, presentamos a continuación un lema de regularidad local de la solución de (4.18).

**Lema 9.** Sean  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $v_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , y  $v$  la mild solution de (4.18) obtenida en el Teorema 13. Entonces se cumplen los siguientes resultados:

1. Existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que

$$v \in L_{loc}^\infty(0, T; H_{loc}^{\beta+1+\alpha}(0, 1)) \text{ y } \partial^\alpha v_x \in L_{loc}^\infty(0, T; H_{loc}^\beta(0, 1)). \quad (4.71)$$

2. Además, existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que

$$v \in C((0, T]; H_{loc}^{\beta+1+\alpha}(0, 1)) \text{ y } \partial^\alpha v_x \in C((0, T]; H_{loc}^\beta(0, 1)). \quad (4.72)$$

*Demostración.* 1. Sea  $\beta \in (\frac{1}{2}, \alpha)$ . Por definición de *mild solution*

$$v(x, t) = G(t, 0)v_0(x) + \int_0^t G(t, \sigma)f(x, \sigma)d\sigma. \quad (4.73)$$

Queremos aplicar el Teorema 14. Para ello, consideremos  $0 < \varepsilon < \omega < 1$ , apliquemos el operador  $A(t)$  a (4.73) y estimemos su norma

$$\|A(t)v\|_{H^\beta(\varepsilon, \omega)} \leq \|A(t)G(t, 0)v_0\|_{H^\beta(\varepsilon, \omega)} + \int_0^t \|A(t)G(t, \sigma)f(\cdot, \sigma)\|_{H^\beta(\varepsilon, \omega)} d\sigma.$$

Adicionalmente, sea  $\sigma \in [0, T]$  y denotemos  $w(x, t) := G(t, \sigma)f(x, \sigma)$ . Entonces,

$$w_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}G(t, \sigma)f(x, \sigma) = A(t)G(t, \sigma)f(x, \sigma) = A(t)w(x, t) \quad \text{y}$$

$$w(x, \sigma) = G(\sigma, \sigma)f(x, \sigma) = f(x, \sigma).$$

Por tanto, por Teorema 14, Lema 8 y (4.27), se sigue que

$$\begin{aligned} \|A(t)v\|_{H^\beta(\varepsilon,\omega)} &\leq \|A(t)G(t,0)v_0\|_{H^\beta(\varepsilon,\omega)} + \int_0^t \|A(t)G(t,\sigma)f(\cdot,\sigma)\|_{H^\beta(\varepsilon,\omega)} d\sigma \\ &\leq c \|A(t)G(t,0)v_0\|_{[L^2(0,1),\tilde{\mathcal{D}}_\alpha]_{\frac{\beta}{1+\alpha}}} + c \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{1+\beta}{1+\alpha}} \|f(\cdot,\sigma)\|_{H^\alpha(0,1)} d\sigma \quad (4.74) \\ &\leq ct^{-\frac{\beta}{1+\alpha}} \|v_0\|_{\tilde{\mathcal{D}}_\alpha} + c \frac{1+\alpha}{\alpha-\beta} t^{\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha}} \|f\|_{L^\infty(0,T;H^\alpha(0,1))}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (4.14) se sigue que  $\partial^\alpha v_x \in L^\infty_{loc}(0,T;H^\beta_{loc}(0,1))$  para todo  $\frac{1}{2} < \beta < \alpha$ .

Por otro lado, puesto que  $v(\cdot,t) \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  para cada  $t \in (0,T)$ , existe  $w(\cdot,t) \in {}_0H^{1+\alpha}(0,1)$  tal que

$$v(x,t) = w(x,t) - w(1,t)x^\alpha,$$

de donde,  $w_x(\cdot,t) \in H^\alpha(0,1)$ . Además, dado que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha x^\alpha = 0$ , se sigue que  $A(t)v = A(t)w$ , por lo que  $\partial^\alpha w_x(\cdot,t) = \partial^\alpha v_x(\cdot,t) \in H^\beta_{loc}(0,1)$  para todo  $\frac{1}{2} < \beta < \alpha$ . Por lo tanto, aplicando Lema 1, deducimos que  $w_x \in L^\infty_{loc}(0,T;H^{\beta+\alpha}_{loc}(0,1))$ . Finalmente

$$\|v_x(\cdot,t)\|_{H^{\beta+\alpha}(\varepsilon,\omega)} \leq \|w_x(\cdot,t)\|_{H^{\beta+\alpha}(\varepsilon,\omega)} + \|\alpha w(1,t)x^{\alpha-1}\|_{H^{\beta+\alpha}(\varepsilon,\omega)} \quad (4.75)$$

y teniendo en cuenta que  $x^{\alpha-1} \in H^{\beta+\alpha}(\varepsilon,\omega)$ , deducimos que  $v_x \in L^\infty_{loc}(0,T;H^{\beta+\alpha}_{loc}(0,1))$ , con lo cual (4.71) queda demostrado.

2. Notemos que  $v \in C([0,T];\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$  debido al Teorema 13. Dado que para todo  $0 < \varepsilon < \omega < 1$  y para cada  $0 < \bar{\beta} < \beta$  se verifica

$$H^{\bar{\beta}+\alpha+1}(\varepsilon,\omega) = [H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega), H^{\beta+\alpha+1}(\varepsilon,\omega)]_{\frac{\bar{\beta}}{\beta}},$$

podemos estimar como sigue aplicando el teorema de interpolación ([19, Corolario 1.2.7])

$$\|v(\cdot,t) - v(\cdot,\tau)\|_{H^{\bar{\beta}+\alpha+1}(\varepsilon,\omega)} \leq c \|v(\cdot,t) - v(\cdot,\tau)\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)}^{1-\frac{\bar{\beta}}{\beta}} \|v(\cdot,t) - v(\cdot,\tau)\|_{H^{\beta+\alpha+1}(\varepsilon,\omega)}^{\frac{\bar{\beta}}{\beta}},$$

donde  $c = c(\beta, \bar{\beta}, \varepsilon)$ . Por lo probado en el apartado 1, existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que  $\|v(\cdot,t) - v(\cdot,\tau)\|_{H^{\beta+\alpha+1}(\varepsilon,\omega)}^{\frac{\bar{\beta}}{\beta}}$  está acotada en cada intervalo compacto contenido en  $(0,T]$ , y  $\|v(\cdot,t) - v(\cdot,\tau)\|_{H^{1+\alpha}(\varepsilon,\omega)}^{1-\frac{\bar{\beta}}{\beta}}$  tiende a cero pues  $v \in C([0,T];\tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Concluimos que  $v \in C((0,T];H^{\bar{\beta}+1+\alpha}_{loc}(0,1))$ .

Para obtener la regularidad de  $\partial^\alpha v_x$  observemos que para cada  $0 < \varepsilon < \omega < 1$ ,  $0 < \tau < t \leq T$  y cada  $0 < \bar{\beta} < \beta$ , aplicando nuevamente el teorema de interpolación obtenemos

$$\|\partial^\alpha v_x(\cdot,t) - \partial^\alpha v_x(\cdot,\tau)\|_{H^{\bar{\beta}}(\varepsilon,\omega)} \leq c \|\partial^\alpha v_x(\cdot,t) - \partial^\alpha v_x(\cdot,\tau)\|_{L^2(0,1)}^{1-\frac{\bar{\beta}}{\beta}} \|\partial^\alpha v_x(\cdot,t) - \partial^\alpha v_x(\cdot,\tau)\|_{H^{\beta}(\varepsilon,\omega)}^{\frac{\bar{\beta}}{\beta}}.$$

De nuevo, por lo probado en el apartado anterior,  $\|\partial^\alpha v_x(\cdot, t) - \partial^\alpha v_x(\cdot, \tau)\|_{L^2(0,1)}^{1-\frac{\bar{\beta}}{\beta}}$  tiende a cero cuando  $\tau \rightarrow t$ , mientras que  $\|\partial^\alpha v_x(\cdot, t) - \partial^\alpha v_x(\cdot, \tau)\|_{H^{\beta(\varepsilon, \omega)}}^{\frac{\bar{\beta}}{\beta}}$  está acotada en cada intervalo compacto contenido en  $(0, T]$ . Por lo tanto, podemos elegir  $\bar{\beta} > \frac{1}{2}$  tal que  $\partial^\alpha v_x \in C((0, T]; H_{loc}^{\bar{\beta}}(0, 1))$ .  $\square$

Para concluir esta sección, aplicaremos el Lema 9-2, para establecer el siguiente resultado de regularidad adicional, necesario para utilizar un principio del máximo, que nos permitirá probar existencia y unicidad de solución al problema de Stefan fraccionario.

**Corolario 7.** *Bajo las hipótesis del Lema 9, para cada  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$  existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que para todo  $0 < \varepsilon < \omega < 1$  se tiene que*

$$v_x \in C((0, T]; H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega)).$$

*Demostración.* Por Lema 9-2, existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que  $v \in C((0, T]; H_{loc}^{1+\alpha+\beta}(0, 1))$ . Luego, por Proposición 10

$$\|v_x(\cdot, t) - v_x(\cdot, \tau)\|_{H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega)} \leq c \|v(\cdot, t) - v(\cdot, \tau)\|_{H^{1+\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \tau.$$

$\square$

#### 4.1.6. Existencia de una solución clásica al problema de frontera móvil

Demostremos a continuación un resultado de existencia y unicidad de solución al problema de frontera móvil (4.13), probando primero que la *mild solution*  $v$  obtenida en Teorema 13 es una solución de (4.18) y utilizando luego la relación (4.15).

**Teorema 15.** *Sean  $b > 0$  y  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Supongamos que  $s$  satisface (4.14), y  $v_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ , donde  $v_0(x) = u_0(bx)$ . Entonces, existe una única solución  $u$  a (4.13) tal que  $u \in C(\overline{Q_{s,T}})$ ,  $u_t, \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \in C(Q_{s,T})$ , y para todo  $t \in (0, T]$ ,  $u(\cdot, t) \in AC[0, s(t)]$ ,  $u_t(\cdot, t), \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t) \in L^2(0, s(t))$ . Además, existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que para todo  $t \in (0, T]$  y  $0 < \varepsilon < \omega < s(t)$  resulta  $u_x(\cdot, t) \in H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega)$ .*

*Demostración.* Sea  $v$  la *mild solution* de (4.18) dada por Teorema 13. Por hipótesis  $v_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ . Entonces, por Teorema 13,  $v$  es única y  $v \in C([0, T]; \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Dado que  $v(\cdot, t) \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$  para todo  $t \in [0, T]$ ,  $v$  satisface (4.18)-(ii). Por otro lado, por Lema 7,  $v$  verifica (4.18)-(i). Además, por definición de la familia  $G(t, \sigma)$  y la regularidad de  $v$  se tiene que  $v(x, 0) = v_0(x)$ . Por lo tanto,  $v$  es una solución de (4.18).

Por otro lado,  $v$  tiene la regularidad dada por Lema 9 y Corolario 6. En particular,  $v \in C([0, 1] \times [0, T])$ . Adicionalmente, por Corolario 7 existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que, para  $0 < \varepsilon < \omega < 1$ ,  $v_x \in C((0, T]; H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega))$ .

Definamos  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{s(t)}, t\right)$ . Entonces,  $u$  es solución de (4.13). Teniendo en cuenta que  $v \in C([0, 1] \times [0, T])$  y (4.14), se sigue que  $u \in C(\overline{Q_{s,T}})$ . Por otro lado, dado que  $v_x \in C((0, T]; H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega))$  para todo  $0 < \varepsilon < \omega < 1$ , tenemos que  $u_x(\cdot, t) \in H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega)$  para todo  $t \in (0, T]$  y para cada  $0 < \varepsilon < \omega < s(t)$ . Además, sabemos que  $v \in C([0, T], \tilde{\mathcal{D}}_\alpha)$ . Entonces, deducimos que  $u(\cdot, t) \in AC[0, s(t)]$  para todo  $t \in [0, t]$ .

Observemos que por Proposición 11 tenemos que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v(\cdot, t) = \partial^\alpha v_x(\cdot, t) \in L^2(0, 1)$ , para todo  $t \in (0, T]$ . Entonces, si definimos  $p = \frac{x}{s(t)}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = \frac{1}{s^{1+\alpha}(t)} \left( \frac{\partial}{\partial p} D_x^\alpha v \right) (p, t),$$

y por (4.14) deducimos que  $u_t(\cdot, t), \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t) \in L^2(0, s(t))$ , para todo  $t \in (0, T]$ . Además, por Lema 9-2 tenemos que  $\partial^\alpha v_x \in C((0, T]; H_{loc}^\beta(0, 1))$ , de donde, por Teorema 3 se sigue que  $\partial^\alpha v_x \in C((0, 1) \times (0, T])$ . Por lo tanto,  $\partial^\alpha u_x \in C(Q_{s,T})$  y concluimos que  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u, u_t \in C(Q_{s,T})$ .

Probaremos ahora la unicidad de solución. Sean  $u_1, u_2$  soluciones de (4.13) con la regularidad dada en el teorema. Definimos  $u = u_1 - u_2$ . Entonces,  $u$  es una solución de (4.13) para  $u_0 \equiv 0$ . En consecuencia, si en la ecuación (4.13)-(i) multiplicamos por  $u$ , integramos sobre  $Q_{s,t_0}$  para  $0 < t_0 < T$ , y aplicamos el Teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_0^{s(\tau)} u_t(x, \tau) \cdot u(x, \tau) dx d\tau - \int_0^{t_0} \int_0^{s(\tau)} \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, \tau) \cdot u(x, \tau) dx d\tau = 0 \\ & \frac{1}{2} \int_0^{s(t_0)} \int_{s^{-1}(x)}^{t_0} \frac{d}{dt} (u(x, \tau)^2) d\tau dx + \int_0^{t_0} \int_0^{s(\tau)} -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, \tau) \cdot u(x, \tau) dx d\tau = 0 \quad (4.76) \\ & \frac{1}{2} \int_0^{s(t_0)} |u(x, t_0)|^2 dx + \int_0^{t_0} \left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t), u(\cdot, t) \right) d\tau = 0. \end{aligned}$$

De (4.9) deducimos que

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t), u(\cdot, t) \right) \geq c_\alpha \|u(\cdot, t)\|_{H^{\frac{1+\alpha}{2}}(0, s(t))}^2, \quad (4.77)$$

donde  $c_\alpha$  es una constante positiva que depende de  $\alpha$ . Entonces,

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^{s(t_0)} |u(x, t_0)|^2 dx + \int_0^{t_0} \left( -\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t), u(\cdot, t) \right) d\tau \geq 0 \quad (4.78)$$

de donde  $\frac{1}{2} \int_0^{s(t_0)} |u(x, t_0)|^2 dx = 0$ . Por lo tanto, dado que  $u \in C(\overline{Q_{s,T}})$ , se sigue que  $u(\cdot, t_0) = 0$ . Siendo  $0 < t_0 < T$  un número arbitrario, resulta que  $u \equiv 0$ , y luego  $u_1 \equiv u_2$ . □

#### 4.1.7. Existencia de una solución clásica al Problema de Stefan con condición de Dirichlet

Retomemos el problema de Stefan fraccionario, es decir,

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & u_t - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u = 0, & \text{en } Q_{s,T} \\
 (ii) \quad & u(0, t) = 0, u(t, s(t)) = 0, & t \in (0, T), \\
 (iii) \quad & u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & 0 < x < s(0) = b, \\
 (iv) \quad & \dot{s}(t) = - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} (D_x^\alpha u)(x, t), & t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

**Observación 22.** *Notemos que, de [26, Proposition 2.9], si  $u$  es la solución de (4.79) dada por el Teorema 15 para una función fija  $s$ , deducimos que  $D_x^\alpha u(\cdot, t) \in C(0, s(t))$ , para todo  $t \in (0, T]$ , y luego  $\lim_{x \rightarrow s(t)^-} (D_x^\alpha u)(x, t) = D_x^\alpha u(s(t), t)$  está bien definido para todo  $t \in (0, T)$ .*

En esta sección, hallaremos una solución al problema (4.79) combinando un teorema de punto fijo con las soluciones de (4.13) obtenidas en el Teorema 15 para cada  $s$  que verifique (4.14). Previamente, necesitaremos establecer algunos resultados. Uno de ellos corresponde a un principio del máximo para la ecuación gobernante en (4.79). Comencemos con un lema auxiliar.

**Lema 10.** *[26, Proposición 2.9] Sea  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente continua en  $[0, L]$ . Si existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, L)$ ,  $f \in H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, L)$ , entonces  $D_x^\alpha f$  es continua en  $(0, L]$  y*

1. *Si  $f$  alcanza su máximo en  $x_0 \in (0, L)$ , entonces  $D_x^\alpha f(x_0) \geq 0$ . Además, si  $f$  no es constante en  $[0, x_0]$ , luego  $D_x^\alpha f(x_0) > 0$ .*
2. *Si  $f$  alcanza su mínimo en  $x_0 \in (0, L)$ , entonces  $D_x^\alpha f(x_0) \leq 0$ . Además, si  $f$  no es constante en  $[0, x_0]$ , luego  $D_x^\alpha f(x_0) < 0$ .*

Continuamos con un resultado donde requerimos la regularidad obtenida en el Corolario 7.

**Proposición 20.** *[26, Proposición 2.10] Sea  $\alpha \in (0, 1)$ , y  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente continua tal que existe  $\beta > \frac{1}{2}$  con  $f' \in H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, L)$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $\frac{d}{dx} D_x^\alpha f$  es continua en  $(0, L]$  y*

1. Si  $f$  alcanza un máximo local en  $x_0 \in (0, L)$  el cual es un máximo global en  $[0, x_0]$ , entonces  $(\frac{d}{dx}D_x^\alpha f)(x_0) \leq 0$ . Más aún, si  $f$  no es constante en  $[0, x_0]$ , entonces  $(\frac{d}{dx}D_x^\alpha f)(x_0) < 0$ .
2. Si  $f$  alcanza un mínimo local en  $x_0 \in (0, L)$  el cual es un mínimo global en  $[0, x_0]$ , entonces  $(\frac{d}{dx}D_x^\alpha f)(x_0) \geq 0$ . Más aún, si  $f$  no es constante en  $[0, x_0]$ , entonces  $(\frac{d}{dx}D_x^\alpha f)(x_0) > 0$ .

*Demostración.* Veamos primero que  $\frac{d}{dx}D_x^\alpha f$  es continua en  $(0, L)$ . Para ello, tomemos  $x_1, x \in (0, L)$ . Supongamos que  $x_1 < x$  (el caso  $x < x_1$  es análogo). Notemos que para cada  $0 < \varepsilon < y < L$  se verifica que

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\alpha) \left( \frac{d}{dx}D_x^\alpha f \right) (y) &= \frac{d}{dy} \int_0^\varepsilon (y-p)^{-\alpha} f'(p) dp + \frac{d}{dy} \int_\varepsilon^y (y-p)^{-\alpha} f'(p) dp \\ &= -\alpha \int_0^\varepsilon (y-p)^{-\alpha-1} f'(p) dp + \frac{d}{dy} \int_\varepsilon^y (y-p)^{-\alpha} [f'(p) - f'(\varepsilon)] dp + f'(\varepsilon)(y-\varepsilon)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Denotemos  $\partial_\varepsilon^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_\varepsilon^x (x-p)^{-\alpha} f(p) dp$ . Entonces, para  $\varepsilon \in (0, x_1)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\alpha) \left| \frac{d}{dx}D_x^\alpha f(x) - \frac{d}{dx}D_x^\alpha f(x_1) \right| &\leq \alpha \int_0^\varepsilon [(x_1-p)^{-\alpha-1} - (x-p)^{-\alpha-1}] |f'(p)| dp \\ &+ \Gamma(1-\alpha) |\partial_\varepsilon^\alpha [f' - f'(\varepsilon)](x) - \partial_\varepsilon^\alpha [f' - f'(\varepsilon)](x_1)| + |f'(\varepsilon)| [(x_1-\varepsilon)^{-\alpha} - (x-\varepsilon)^{-\alpha}]. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho tiende a cero cuando  $x \rightarrow x_1$  puesto que la convergencia bajo el signo integral es uniforme. Por Corolario 2 tenemos que

$$I_\varepsilon^{1-\alpha} [f' - f'(\varepsilon)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^x (x-p)^{-\alpha} [f' - f'(\varepsilon)] dp \in {}_0H^{1+\beta}(\varepsilon, L),$$

En consecuencia, deducimos que  $\partial_\varepsilon^\alpha [f' - f'(\varepsilon)] \in H^\beta(\varepsilon, L) \hookrightarrow C[\varepsilon, L]$ . Por lo tanto, queda probada la continuidad de  $\frac{d}{dx}D_x^\alpha f$  en  $(0, L)$ .

A continuación probaremos el apartado 1. El apartado 2 se demuestra de forma análoga. Definimos  $g(x) := f(x_0) - f(x)$ . Notemos que, por los Sobolev embeddings  $g' \in C^{0,\gamma}[\varepsilon, L]$  para  $\gamma = \alpha + \beta - \frac{1}{2} > \alpha$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Entonces, para cada  $0 < \varepsilon < x \leq x_0$  podemos estimar como sigue

$$|g'(x)| = |g'(x) - g'(x_0)| \leq c|x - x_0|^\gamma \tag{4.80}$$

y

$$g(x) \leq \int_x^{x_0} |g'(p)| dp \leq \frac{c}{\gamma+1} |x - x_0|^{\gamma+1}. \tag{4.81}$$

Teniendo en cuenta estas desigualdades, podemos derivar bajo el signo integral como sigue

$$\left( \frac{d}{dx}D_x^\alpha g \right) (x_0) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{p \rightarrow x_0^-} (x_0-p)^{-\alpha} g'(p) - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_0} (x_0-p)^{-\alpha-1} g'(p) dp.$$



y por (4.80) deducimos que el límite es cero. Aplicando integración por partes vemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}D_x^\alpha g\right)(x_0) &= -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x_0}(x_0-p)^{-\alpha-1}g'(p)dp = \\ &= -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{p\rightarrow x_0^-}\frac{g(p)}{(x_0-p)^{\alpha+1}} + \frac{\alpha x_0^{-\alpha-1}g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x_0}(x_0-p)^{-\alpha-2}g(p)dp, \end{aligned}$$

y por (4.81) el límite es cero, por lo que

$$\left(\frac{d}{dx}D_x^\alpha g\right)(x_0) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}x_0^{-\alpha-1}g(0) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x_0}(x_0-p)^{-\alpha-2}g(p)dp$$

y

$$\left(\frac{d}{dx}D_x^\alpha g\right)(x_0) \geq 0, \text{ de donde } \left(\frac{d}{dx}D_x^\alpha f\right)(x_0) \leq 0.$$

Más aún, de la igualdad anterior, deducimos que si  $f$  no es constante en  $[0, x_0]$  entonces

$$\left(\frac{d}{dx}D_x^\alpha f\right)(x_0) < 0. \quad \square$$

Continuamos con un principio del extremo débil para la ecuación de difusión fraccionaria.

**Teorema 16.** [26, Teorema 2.15] *Sea  $u$  una solución de la ecuación*

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}D_x^\alpha u = f \quad \text{en } Q_{s,T}$$

tal que  $u \in C(\overline{Q_{s,T}})$ ,  $u_t, \frac{\partial}{\partial x}D_x^\alpha u \in C(Q_{s,T})$  y  $u(\cdot, t) \in AC[0, s(t)] \forall t \in (0, t)$ . Supongamos también que  $s$  verifica (4.14) y  $u$  satisface la condición de regularidad local

$$\exists \beta > \frac{1}{2} \text{ tal que, para cada } t \in (0, T) \text{ y cada } 0 < \varepsilon < \omega < s(t), \quad u_x(\cdot, t) \in H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega). \quad (4.82)$$

Entonces  $u$  alcanza su máximo en  $\partial\Gamma_{s,T}$  si  $f \leq 0$ , y  $u$  alcanza su mínimo en  $\partial\Gamma_{s,T}$  si  $f \geq 0$ , donde  $\partial\Gamma_{s,T}$  denota la frontera parabólica de  $Q_{s,T}$ , dada por

$$\partial\gamma_{s,T} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

con  $\gamma_1 = \{(0, t) : 0 \leq t \leq T\}$ ,  $\gamma_2 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq s(0) = b\}$  y  $\gamma_3 = \{(s(t), t) : 0 \leq t \leq T\}$ .

*Demostración.* Demostraremos la primera afirmación por el absurdo. Supongamos que existe un punto  $(x_0, t_0) \in \overline{Q_{s,T}} \setminus \partial\Gamma_{s,T}$  tal que  $\max_{\overline{Q_{s,T}}} u = u(x_0, t_0) > \max_{\partial\Gamma_{s,T}} u := M$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , definimos  $v(x, t) = (u(x, t) - M)e^{-\varepsilon t}$ . Entonces,  $(x_0, t_0)$  es el máximo de  $v$  en  $\overline{Q_{s,T}}$  y además

$$v(x_0, t_0) = (u(x_0, t_0) - M)e^{-\varepsilon t_0} > 0.$$

Por otro lado,

$$v_t - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v = -\varepsilon v + f e^{\varepsilon t},$$

de donde

$$v_t(x_0, t_0) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v(x_0, t_0) = -\varepsilon v(x_0, t_0) + f e^{\varepsilon t_0} < 0. \quad (4.83)$$

Teniendo en cuenta que  $(x_0, t_0)$  es un máximo, resulta que  $v_t(x_0, t_0) = 0$  y por Proposición 20  $\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v(x_0, t_0) \leq 0$ , de donde

$$v_t(x_0, t_0) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v(x_0, t_0) \geq 0,$$

lo cual contradice (4.83), y por lo tanto  $u$  debe alcanzar su máximo en la frontera parabólica. Para ver que  $u$  alcanza su mínimo en la frontera parabólica si  $f \geq 0$ , basta con aplicar el caso anterior a la función  $-u$ .  $\square$

Combinando el principio del máximo con el Lema 10, obtenemos los siguientes lemas.

**Lema 11.** [26, Proposición 2.18] *Sea  $u$  la solución de (4.13) dada por el Teorema 15, para una función fija  $s$ . Entonces  $(D_x^\alpha u)(s(t), t) \leq 0$  para todo  $t \in (0, T]$ . Además, si  $u_0 \not\equiv 0$ , entonces para todo  $t \in (0, T]$ ,  $(D_x^\alpha u)(s(t), t) < 0$ .*

*Demostración.* Por Teorema 16,  $u$  alcanza su mínimo en la frontera parabólica, por lo que  $u \geq 0$ . Además,  $u$  alcanza su mínimo en la frontera libre  $s$ , pues  $u(s(t), t) = 0$ . En consecuencia, la tesis se sigue de Lema 10.  $\square$

Continuamos con resultados que establecen la no positividad de la derivada fraccionaria de la solución  $u$  en la frontera  $s$ .

**Lema 12.** [26, Lema 2.17] *Sea  $u$  una solución de (4.13)–(i) con la regularidad dada en Teorema 15, y sea  $t_0 \in (0, T]$  tal que  $u(s(t_0), t_0) = 0$ . Entonces  $(D_x^\alpha u)(s(t_0), t_0) < 0$  o  $u \equiv 0$  en  $Q_{s, t_0}$ .*

*Demostración.* Por el teorema 15 tenemos que

$$u(\cdot, t) \in AC[0, s(t)], \text{ para todos } t \in (0, T],$$

y

$$u_x(\cdot, t) \in H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega) \text{ para todos } 0 < \varepsilon < \omega < s(t), t \in (0, T].$$

Además,  $u$  verifica la hipótesis del Teorema 16, de donde alcanza su máximo y su mínimo en la frontera parabólica. Puesto que  $u_0(x) \geq 0$  para todo  $x$ , el mínimo de  $u$  es 0 y se alcanza en

$(s(t), t)$ . Por lo tanto podemos aplicar el Lema 10, obteniendo que  $D_x^\alpha u(s(t), t)$  es continua en  $(0, T]$ ,  $(D_x^\alpha u)(s(t), t) \leq 0$  para todo  $t \in (0, T]$ , y si  $u \neq 0$ ,  $(D_x^\alpha u)(s(t), t) < 0$ .

□

**Lema 13.** *Sea  $u$  la solución de (4.13) dada por el Teorema 15. Supongamos que  $s$  satisface (4.14), y  $u_0$  verifica*

$$0 \leq u_0(x) \leq \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)}(b^\alpha - x^\alpha), \quad x \in [0, b]. \quad (4.84)$$

donde  $M$  es la constante en (4.14). Entonces,

$$(D_x^\alpha u)(s(t), t) \geq -\frac{M}{2}, \quad t \in (0, T), \quad (4.85)$$

y

$$0 \leq u(x, t) \leq \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)}(s^\alpha(t) - x^\alpha), \quad (x, t) \text{ en } Q_{s,T}. \quad (4.86)$$

*Demostración.* Sea  $u$  la solución de (4.13) dada por el Teorema 15. Definimos  $v(x, t) = \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)}(s^\alpha(t) - x^\alpha)$ , y  $w(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$ . Por hipótesis,  $u$  y  $v$  tienen la regularidad dada por el Teorema 16, por lo que  $w$  tiene la misma regularidad que  $u$ .

Por otro lado,

$$w(x, 0) = v(x, 0) - u(x, 0) = \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)}(b^\alpha - x^\alpha) - u_0(x) \geq 0,$$

$$w(0, t) = v(0, t) - u(0, t) = \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)}s^\alpha(t) \geq 0,$$

$$w(s(t), t) = v(s(t), t) - u(s(t), t) = 0,$$

y por (4.14),

$$w_t(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha w(x, t) = \frac{M\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}s^{\alpha-1}(t)\dot{s}(t) \geq 0.$$

Por lo tanto, por Teorema 16,  $w \geq 0$ , de donde deducimos (4.86).

Observemos que

$$D_x^\alpha v(s(t), t) = -\frac{M}{2} \quad (4.87)$$

Además,  $w(\cdot, t) \in H^{1+\alpha}(\varepsilon, s(t))$  para todo  $\varepsilon \in (0, s(t))$ , y  $w(\cdot, t)$  alcanza su mínimo en  $x = s(t)$ . Entonces, por Lema 10,  $D_x^\alpha w(s(t), t) \leq 0$ . Finalmente, teniendo en cuenta (4.87), deducimos que

$$D_x^\alpha u(s(t), t) \geq D_x^\alpha v(s(t), t) = -\frac{M}{2}.$$

□

Para demostrar existencia de solución al problema 4.79 por un teorema de punto fijo, haremos uso de la siguiente condición integral equivalente a (4.79)–(iv).

**Proposición 21.** *Sea  $(u, s)$  una solución a (4.79) que tiene la regularidad dada en Teorema 16. Entonces, la condición (4.79)–(iv) es equivalente a la siguiente condición integral*

$$s^2(t) = b^2 + 2 \int_0^b xu_0(x)dx - 2 \int_0^t I^{1-\alpha} u(s(\tau), \tau) d\tau - 2 \int_0^{s(t)} xu(x, t) dx. \quad (4.88)$$

*Demostración.* Supongamos que  $u$  satisface (4.79) y definamos  $h(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq b, \\ s^{-1}(x) & x > b. \end{cases}$

Luego, multiplicando la ecuación (4.79)–(i) por  $x$  e integrando respecto a  $t$  en  $(h(x), t)$  obtenemos

$$xu(x, t) - xu(x, h(x)) = \int_{h(x)}^t x \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, \tau) d\tau$$

Integrando dicha igualdad respecto de  $x$  en  $(0, s(t))$ , y luego aplicando el teorema de Fubini e integrando por partes, deducimos que

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} xu(x, t) dx - \int_0^{s(t)} xu(x, h(x)) dx &= \int_0^{s(t)} \int_{h(x)}^t x \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, \tau) d\tau dx \\ \int_0^{s(t)} xu(x, t) dx - \int_0^b xu(x, 0) dx &= \int_0^t s(\tau) D_x^\alpha u(s(\tau), \tau) d\tau - \int_0^t \int_0^{s(t)} D_x^\alpha u(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Por otro lado, de (2.12) resulta

$$\int_0^{s(t)} xu(x, t) dx - \int_0^b xu(x, 0) dx = \int_0^t s(\tau) D_x^\alpha u(s(\tau), \tau) d\tau - \int_0^t I^{1-\alpha} u(s(\tau), \tau) d\tau \quad (4.89)$$

Recordemos que, por Observación 22, la condición (4.79)–(iv) viene dada por  $\dot{s}(t) = -D_x^\alpha u(s(t), t)$ . Aplicando dicha igualdad en (4.89) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} xu(x, t) dx - \int_0^b xu(x, 0) dx &= - \int_0^t s(\tau) \dot{s}(\tau) d\tau - \int_0^t I^{1-\alpha} u(s(\tau), \tau) d\tau \\ \int_0^{s(t)} xu(x, t) dx - \int_0^b xu(x, 0) dx &= - \int_0^t \frac{1}{2} \frac{dt}{dt} (s^2)(\tau) d\tau - \int_0^t I^{1-\alpha} u(s(\tau), \tau) d\tau \\ \int_0^{s(t)} xu(x, t) dx - \int_0^b xu(x, 0) dx &= - \frac{s^2(t) - b^2}{2} - \int_0^t I^{1-\alpha} u(s(\tau), \tau) d\tau, \end{aligned}$$

de donde se deduce la condición (4.88).

Por el contrario, si suponemos que el par  $(u, s)$  verifica (4.13) y (4.88), derivando ambos lados en (4.88), usando (4.13)–(ii), y haciendo integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} 2s(t)\dot{s}(t) &= -2I^{1-\alpha}u(s(t), t) - 2 \int_0^{s(t)} xu_t(x, t)dx = -2I^{1-\alpha}u(s(t), t) - 2 \int_0^{s(t)} x \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t)dx \\ &= -2I^{1-\alpha}u(s(t), t) - 2 \left( s(t)D_x^\alpha u(s(t), t) - \int_0^{s(t)} D_x^\alpha u(x, t)dx \right) \end{aligned}$$

Luego, por (2.11),

$$\begin{aligned} 2s(t)\dot{s}(t) &= -2I^{1-\alpha}u(s(t), t) - 2s(t)D_x^\alpha u(s(t), t) + 2I^{1-\alpha}u(s(t), t) \\ &= -2s(t)D_x^\alpha u(s(t), t), \end{aligned} \tag{4.90}$$

de donde, por (4.14) se deduce (4.79)–(iv). □

A continuación, queremos aplicar la Proposición 21 para obtener un resultado de dependencia monótona respecto de los datos para el problema (4.79). Para ello, necesitaremos el siguiente Lema de Gronwall generalizado.

**Lema 14.** [9, Teorema 2.1] Sean  $p > q \geq 0$ ,  $x(t)$  y  $h(t)$  funciones reales continuas no negativas definidas en  $I = [0, \infty)$ , y sea  $n(t)$  una función continua positiva no decreciente definida en  $I$ . Si se cumple la siguiente desigualdad

$$x^p(t) \leq n^p(t) + \int_0^t h(s)x^q(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

entonces

$$x(t) \leq n(t) \left[ 1 + \frac{p-q}{p} \int_0^t h(s)n^{-(p-q)}(s)ds \right], \quad \forall t \in I.$$

**Teorema 17.** Para  $i = 1, 2$ , sean  $s_i$  funciones tales que verifican (4.14) y  $u^i$  las soluciones de (4.13) dadas por el Teorema 15, correspondientes a  $s_i$ ,  $b_i$  y  $u_0^i$ . Si  $b_1 \leq b_2$  y  $u_0^1 \leq u_0^2$ , entonces para cada  $t \in [0, T]$  resulta  $s_1(t) \leq s_2(t)$ .

*Demostración.* Consideremos dos casos.

**Caso 1:**  $b_1 < b_2$ ,  $u_0^1 \leq u_0^2$  y  $u_0^1 \neq u_0^2$  en  $[0, b_1]$ .

Supongamos que existe  $t \in [0, T]$  tal que  $s_1(t) > s_2(t)$ . Definimos  $t_0 = \inf\{t \in [0, T] : s_1(t) = s_2(t)\}$ . Por hipótesis,  $s_1(0) = b_1 < b_2 = s_2(0)$  y  $s_1, s_2$  son funciones continuas en  $[0, T]$ . Entonces,  $t_0$  está bien definido y  $t_0 > 0$ .

Por Teorema 16, la función  $v := u_2 - u_1$  verifica que  $v \geq 0$  en  $Q_{s_1, t_0}$ . Además, por definición de  $t_0$ ,  $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ , de donde  $v(s_1(t_0), t_0) = 0$ . Por lo tanto, por Lema 12 tenemos que  $v \equiv 0$

en  $Q_{s_1, t_0}$  o  $D_x^\alpha v(s(t_0), t_0) < 0$ . Por hipótesis,  $u_0^1 \neq u_0^2$ , de donde  $v \neq 0$ . Entonces,

$$0 > (D_x^\alpha v)(s(t_0), t_0) = (D_x^\alpha u_2)(s(t_0), t_0) - (D_x^\alpha u_1)(s(t_0), t_0) = \dot{s}_1(t_0) - \dot{s}_2(t_0), \quad (4.91)$$

y por lo tanto  $\dot{s}_1(t_0) < \dot{s}_2(t_0)$ . Por otro lado, de la definición de  $t_0$ ,  $s_1(t) < s_2(t)$  para todo  $t \in [0, t_0)$  y  $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ , de donde  $\dot{s}_1(t_0) \geq \dot{s}_2(t_0)$ , lo cual contradice (4.91). Por lo tanto,  $s_1(t) \leq s_2(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ .

**Caso 2:**  $b_1 \leq b_2$ ,  $u_0^1 \leq u_0^2$ .

Queremos aplicar el caso 1. Para ello, consideremos  $\delta > 0$ , y  $u_0^\delta$  una función suave en  $[0, b_2 + \delta]$  tal que

$$u_0^\delta \equiv 0, \text{ en } \left[ b_2 + \frac{\delta}{2}, b_2 + \delta \right], \quad u_0^\delta \geq u_0^2, \text{ en } [0, b_2],$$

$$\max_{x \in [0, b_2]} (u_0^\delta(x) - u_0^2(x)) = \delta, \quad \max_{x \in [b_2, b_2 + \frac{\delta}{2}]} u_0^\delta(x) = \delta.$$

Denotemos por  $(u^\delta, s_\delta)$  la solución a (4.79) correspondiente a los datos  $b_2 + \delta$  y  $u_0^\delta$ .

Por Caso 1, tenemos que  $s_1 \leq s_\delta$  y  $s_2 \leq s_\delta$ . Además, por Proposición 21 deducimos que

$$\begin{aligned} s_\delta^2(t) - s_2^2(t) &= 2\delta b_2 + \delta^2 + 2 \int_{b_2}^{b_2 + \frac{\delta}{2}} x u_0^\delta(x) dx + 2 \int_0^{b_2} x (u_0^\delta - u_0^2)(x) dx \\ &\quad + 2 \int_0^t [I^{1-\alpha} u^2(s_2(\tau), \tau) - I^{1-\alpha} u^\delta(s_\delta(\tau), \tau)] d\tau \\ &\quad - 2 \int_0^{s_2(t)} x (u^\delta - u^2)(x, t) dx - 2 \int_{s_2(t)}^{s_\delta(t)} x u^\delta(x, t) dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, por Teorema 16 tenemos que  $u^\delta \geq 0$ ,  $u^\delta - u^2 \geq 0$ . Además,  $\|u_0^\delta - u_0^2\|_{L^\infty(0, b_2)} = \delta$ , y por lo tanto,

$$s_\delta^2(t) - s_2^2(t) \leq 2\delta b_2 + \delta^2 + \delta \left( b_2 \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) + b_2^2 \delta + 2 \int_0^t [I^{1-\alpha} u^2(s_2(\tau), \tau) - I^{1-\alpha} u^\delta(s_\delta(\tau), \tau)] d\tau. \quad (4.92)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} B(\tau) := I^{1-\alpha} u^2(s_2(\tau), \tau) - I^{1-\alpha} u^\delta(s_\delta(\tau), \tau) &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_0^{s_2(\tau)} \frac{u^2(x, \tau)}{(s_2(\tau) - x)^\alpha} - \frac{u^\delta(x, \tau)}{(s_2(\tau) - x)^\alpha} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{s_2(\tau)} \frac{u^\delta(x, \tau)}{(s_2(\tau) - x)^\alpha} - \frac{u^\delta(x, \tau)}{(s_\delta(\tau) - x)^\alpha} dx \right], \end{aligned}$$

y por (4.86) y Observación 19,

$$0 \leq u^\delta(x, \tau) \leq \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} (s_\delta^\alpha(\tau) - x^\alpha) \leq \frac{M(b_2 + \delta + MT)^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}.$$

Además, sabemos que  $s_2 \leq s_\delta$  y  $u^2 \leq u^\delta$ , por lo tanto

$$B(\tau) \leq \frac{M(b_2 + \delta + MT)^\alpha}{2\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2 - \alpha)}(s_\delta(\tau) - s_2(\tau))^{1-\alpha}. \quad (4.93)$$

Adicionalmente,

$$2b_2(s_\delta(t) - s_2(t)) \leq (s_\delta(t) + s_2(t))(s_\delta(t) - s_2(t)) = s_\delta^2(t) - s_2^2(t). \quad (4.94)$$

Combinando (4.92), (4.93) y (4.94), obtenemos

$$s_\delta(t) - s_2(t) \leq \delta \left( 1 + \frac{b_2}{2} + \frac{\delta}{2b_2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{8b_2} \right) + \frac{M(b_2 + \delta + MT)^\alpha}{b_2\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t (s_\delta(\tau) - s_2(\tau))^{1-\alpha} d\tau. \quad (4.95)$$

Podemos aplicar la desigualdad de Grönwall generalizada dada en Lema 14 con  $x(t) = s_\delta(t) - s_2(t)$ ,  $n(t) = \delta \left( 1 + \frac{b_2}{2} + \frac{\delta}{2b_2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{8b_2} \right)$ ,  $h(t) = \frac{M(b_2 + \delta + MT)^\alpha}{b_2\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2 - \alpha)}$ ,  $p = 1$  y  $q = 1 - \alpha$ , al lado derecho de (4.95). Entonces,

$$\begin{aligned} s_\delta(t) - s_2(t) &\leq \delta \left( 1 + \frac{b_2}{2} + \frac{\delta}{2b_2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{8b_2} \right) \\ &\quad + \alpha \delta^{1-\alpha} \left( 1 + \frac{b_2}{2} + \frac{\delta}{2b_2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{8b_2} \right)^{1-\alpha} \frac{M(b_2 + \delta + MT)^\alpha}{b_2\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2 - \alpha)} T, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} s_1(t) \leq s_\delta(t) &\leq s_2(t) + \delta \left( 1 + \frac{b_2}{2} + \frac{\delta}{2b_2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{8b_2} \right) \\ &\quad + \alpha \delta^{1-\alpha} \left( 1 + \frac{b_2}{2} + \frac{\delta}{2b_2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{8b_2} \right)^{1-\alpha} \frac{M(b_2 + \delta + MT)^\alpha}{b_2\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2 - \alpha)} T, \end{aligned} \quad (4.96)$$

Finalmente, haciendo  $\delta \rightarrow 0$ , se sigue que

$$s_1(t) \leq s_2(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

□

De Teorema 15 y Teorema 17 se deduce el siguiente resultado de unicidad.

**Corolario 8.** *Existe a lo sumo una solución a (4.79) en la clase de funciones que satisfacen las hipótesis de regularidad del Teorema 15.*

*Demostración.* Sean  $(u_1, s_1), (u_2, s_2)$  soluciones a (4.79). Entonces,  $u_1, u_2$  son soluciones a (4.13). Puesto que  $s_1(0) = s_2(0) = b$  y  $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0(x)$ , por Teorema 17 se deduce que  $s_1 \equiv s_2$ . Por otro lado, por Teorema 15 existe una única solución a (4.13) para una función  $s$  dada. En consecuencia,  $u_1 \equiv u_2$ , y por lo tanto la solución a (4.79) es única. □

Finalmente, estamos en condiciones de probar el resultado principal de existencia y unicidad de solución al problema (4.79).

**Teorema 18.** Sean  $b, T > 0$ ,  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $u_0 \in {}_0H^{1+\alpha}(0, b)$  con  $u_0 \geq 0$  y  $u_0(0) = u_0(b) = 0$ , y  $v_0(x) := u_0(bx)$  tal que  $v_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_\alpha$ . Además, supongamos que existe una constante positiva  $M$  tal que,

$$u_0(x) \leq \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)}(b^\alpha - x^\alpha), \quad x \in [0, b]. \quad (4.97)$$

Entonces, existe una única solución  $(u, s)$  al problema (4.79), tal que  $s \in C^{0,1}([0, T])$ ,  $0 < \dot{s}(t) \leq M$  para todo  $t \in (0, T]$ ,  $u \in C(\overline{Q_{s,T}})$ ,  $u_t, \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u \in C(Q_{s,T})$ , y para todo  $t \in (0, T]$ ,  $u(\cdot, t) \in AC[0, s(t)]$ ,  $u_t(\cdot, t), \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(\cdot, t) \in L^2(0, s(t))$ . Además, existe  $\beta > \frac{1}{2}$  tal que para todo  $t \in (0, T]$  y  $0 < \varepsilon < \omega < s(t)$  resulta  $u_x(\cdot, t) \in H^{\alpha+\beta}(\varepsilon, \omega)$ .

*Demostración.* Queremos aplicar el Teorema de punto fijo de Schauder. Para ello, haremos uso de la condición integral dada en Proposición 21 para definir un operador  $P$  apropiado.

Consideremos el siguiente conjunto

$$\Sigma := \{s \in C^{0,1}[0, T] : 0 \leq \dot{s} \leq M, s(0) = b\}.$$

Notemos que  $\Sigma$  es un subconjunto compacto y convexo del espacio de Banach  $C[0, T]$  respecto de la norma del máximo. Entonces, para cada  $s \in \Sigma$  definimos

$$(Ps)(t) = \left( b^2 - 2 \int_0^t D_x^\alpha u(s(\tau), \tau) s(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.98)$$

donde  $u$  es la única solución de (4.13) dada por Teorema 15.

Veamos que  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . Sea

$$H(t) = b^2 - 2 \int_0^t D_x^\alpha u(s(\tau), \tau) s(\tau) d\tau.$$

Entonces  $H(0) = b^2$  y por Lema 11  $H'(t) \geq 0$  para todo  $t > 0$ . Luego  $Ps$  está bien definida y de la regularidad de  $u$  deducimos que  $Ps$  es una función continua. Por otro lado, de Lema 13 tenemos

$$0 \leq (Ps)'(t) = \frac{-2D_x^\alpha u(s(t), t)s(t)}{2H^{1/2}(t)} \leq \frac{M}{2b}(b + MT) \leq M \quad \text{si } T \leq \frac{b}{M}. \quad (4.99)$$

Luego  $Ps \in \Sigma$ .

Nos falta probar que el operador  $P$  es continuo en la norma del máximo. Para ello, comencemos por reescribir a  $Ps$  usando la relación (4.89):

$$(Ps)(t) = (b^2 + 2j(t))^{1/2} \quad (4.100)$$



donde

$$j(t) = \int_0^b xu_0(x)dx - \int_0^t I^{1-\alpha}u(s(\tau), \tau)d\tau - \int_0^{s(t)} xu(x, t)dx > 0. \quad (4.101)$$

Definamos  $s_1, s_2 \in \Sigma$  y  $s_{min}(t) := \min\{s_1(t), s_2(t)\}$ ,  $s_{max}(t) := \max\{s_1(t), s_2(t)\}$ ,  $i : [0, T] \rightarrow \{1, 2\}$  con  $i(t) = 1$  si  $s_{max}(t) = s_1(t)$  y  $i(t) = 2$  en caso contrario, y sean  $u_1, u_2$  soluciones de (4.13) dadas por el Teorema 15 correspondientes a  $s_1$  y  $s_2$  respectivamente, y  $v(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Entonces,  $v$  satisface

$$\begin{aligned} (i) \quad & v_t - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v = 0, && \text{en } Q_{s_{min}, T} \\ (ii) \quad & v(0, t) = 0, && t \in (0, T), \\ (iii) \quad & v(s_{min}(t), t) = (-1)^{i(t)+1} u_{i(t)}(s_{min}(t), t) && t \in (0, T), \\ (iv) \quad & v(x, 0) = 0, && 0 < x < b. \end{aligned}$$

Por Teorema 16,  $v$  alcanza su máximo y su mínimo en la frontera parabólica, por lo que,

$$\max_{Q_{s_{min}, T}} |v| \leq \max_{t \in [0, T]} |u_{i(t)}(s_{min}(t), t)|,$$

y aplicando (4.86), obtenemos que

$$\max_{Q_{s_{min}, T}} |v| \leq \frac{M}{2\Gamma(1 + \alpha)} \max_{t \in [0, T]} |s_1^\alpha(t) - s_2^\alpha(t)|. \quad (4.102)$$

Observemos que, por (4.101),

$$(b^2 + 2j_1(t))^{\frac{1}{2}} \geq b.$$

En consecuencia, usando la estimación real

$$d^r - c^r \leq \frac{r}{c^{1-r}}(d - c), \text{ para } 0 < c < d, \quad (4.103)$$

resulta que

$$\begin{aligned} |(Ps_2)(t) - (Ps_1)(t)| &= \left| (b^2 + 2j_2(t))^{1/2} - (b^2 + 2j_1(t))^{1/2} \right| \leq \frac{2|j_2(t) - j_1(t)|}{2b} \\ &\leq \frac{1}{b} \left( \int_0^t |I^{1-\alpha}u_1(s_1(\tau), \tau) - I^{1-\alpha}u_2(s_2(\tau), \tau)|d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{s_{min}(t)} x|v(x, t)|dx + \int_{s_{min}(t)}^{s_{max}(t)} xu_{i(t)}(x, t)dx \right) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
& \Gamma(1-\alpha) |I^{1-\alpha} u_2(s_2(\tau), \tau) - I^{1-\alpha} u_1(s_1(\tau), \tau)| = \left| \int_0^{s_2(t)} \frac{u_2(x, t)}{(s_2(t) - x)^\alpha} dx - \int_0^{s_1(t)} \frac{u_1(x, t)}{(s_1(t) - x)^\alpha} dx \right| \\
& \leq \int_0^{s_{\min}(\tau)} \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} (s_{\max}^\alpha(\tau) - x^\alpha) \left( \frac{1}{(s_{\min}(\tau) - x)^\alpha} - \frac{1}{(s_{\max}(\tau) - x)^\alpha} \right) dx \\
& \quad + \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{s_{\min}(\tau)}^{s_{\max}(\tau)} \frac{s_{\max}^\alpha(\tau) - x^\alpha}{(s_{\max}(\tau) - x)^\alpha} dx + \int_0^{s_{\min}(\tau)} \frac{|v(x, \tau)|}{(s_{\min}(\tau) - x)^\alpha} dx \\
& \leq \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{s_{\min}(\tau)} (s_{\max}^\alpha(\tau) - x^\alpha) \left( \frac{1}{(s_{\min}(\tau) - x)^\alpha} - \frac{1}{(s_{\max}(\tau) - x)^\alpha} \right) dx \\
& \quad + \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{s_{\min}(\tau)}^{s_{\max}(\tau)} \frac{s_{\max}^\alpha(\tau) - x^\alpha}{(s_{\max}(\tau) - x)^\alpha} dx \\
& \quad + \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \max_{\tau \in [0, T]} |s_1^\alpha(\tau) - s_2^\alpha(\tau)| \int_0^{s_{\min}(\tau)} (s_{\min}(\tau) - x)^{-\alpha} dx \\
& =: F_1 + F_2 + F_3.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Aplicando la sustitución  $w = \frac{x}{s_{\min}(\tau)}$  en  $F_1$ , y usando de nuevo (4.103), resulta que

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 (s_{\max}(\tau)^\alpha - w^\alpha s_{\min}(\tau)^\alpha) \left( \frac{1}{(s_{\min}(\tau) - w s_{\min}(\tau))^\alpha} - \frac{1}{(s_{\max}(\tau) - w s_{\min}(\tau))^\alpha} \right) s_{\min}(\tau) dw \\
&= \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \left( \left( \frac{s_{\max}(\tau)}{s_{\min}(\tau)} \right)^\alpha - w^\alpha \right) \left( (1-w)^{-\alpha} - \left( \frac{s_{\max}(\tau)}{s_{\min}(\tau)} - w \right)^{-\alpha} \right) s_{\min}(\tau) dw \\
&\leq \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \alpha w^{\alpha-1} \left( \frac{s_{\max}(\tau)}{s_{\min}(\tau)} - w \right) \left( (1-w)^{-\alpha} - \left( \frac{s_{\max}(\tau)}{s_{\min}(\tau)} - w \right)^{-\alpha} \right) s_{\min}(\tau) dw \\
&= \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \alpha w^{\alpha-1} (1-w)^{-\alpha} \left( \left( \frac{s_{\max}(\tau)}{s_{\min}(\tau)} - w \right) - (1-w)^\alpha \left( \frac{s_{\max}(\tau)}{s_{\min}(\tau)} - w \right)^{1-\alpha} \right) s_{\min}(\tau) dw \\
&\leq \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \alpha w^{\alpha-1} (1-w)^{-\alpha} \left( \left( \frac{s_{\max}(\tau)}{s_{\min}(\tau)} - w \right) - (1-w)^\alpha (1-w)^{1-\alpha} \right) s_{\min}(\tau) dw \\
&= \frac{\alpha M}{2\Gamma(1+\alpha)} (s_{\max}(\tau) - s_{\min}(\tau)) \int_0^1 w^{\alpha-1} (1-w)^{-\alpha} dw \\
&= \frac{\alpha M}{2\Gamma(1+\alpha)} (s_{\max}(\tau) - s_{\min}(\tau)) B(\alpha, 1-\alpha) \\
&= \frac{\alpha M}{2\Gamma(1+\alpha)} (s_{\max}(\tau) - s_{\min}(\tau)) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \\
&\leq \frac{M\Gamma(1-\alpha)}{2} \max_{t \in [0, T]} |s_1(t) - s_2(t)|.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por (4.14) y (4.103), es fácil ver que  $F_2$  y  $F_3$  en (4.105) están acotados por  $\max_{t \in [0, T]} |s_1(t) - s_2(t)|$  como sigue,

$$F_2 \leq \frac{M(b + MT)^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, T]} |s_{\max}(t) - s_{\min}(t)|,$$

$$F_3 \leq \frac{M(b+MT)^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha}(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, T]} |s_{max}(t) - s_{min}(t)|.$$

Por lo tanto, si  $c = \max \left\{ \frac{M\Gamma(1-\alpha)}{2}, \frac{M(b+MT)^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha}(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \right\}$ , tenemos

$$\Gamma(1-\alpha) |I^{1-\alpha} u_2(s_2(\tau), \tau) - I^{1-\alpha} u_1(s_1(\tau), \tau)| \leq c \max_{t \in [0, T]} |s_{max}(t) - s_{min}(t)|, \quad (4.106)$$

Aplicando (4.86), (4.102) y (4.106) a (4.104), obtenemos que

$$\begin{aligned} & |(Ps_2)(t) - (Ps_1)(t)| \\ & \leq \frac{1}{b} \left( \frac{cT}{\Gamma(1-\alpha)} \max_{t \in [0, T]} |s_{max}(t) - s_{min}(t)| \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha M b^{\alpha-1}}{2\Gamma(1+\alpha)} \max_{t \in [0, T]} |s_{max}(t) - s_{min}(t)| \int_0^{s_{min}(t)} x dx + \frac{M}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{s_{min}(t)}^{s_{max}(t)} x (s_{max}^\alpha(t) - x^\alpha) dx \right) \\ & \leq \frac{1}{b} \left( \frac{cT}{\Gamma(1-\alpha)} \max_{t \in [0, T]} |s_{max}(t) - s_{min}(t)| \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha M b^{\alpha-1} (b+MT)^2}{4\Gamma(1+\alpha)} \max_{t \in [0, T]} |s_{max}(t) - s_{min}(t)| + \frac{M s_{max}^\alpha(t) s_{max}(t)^2 - s_{min}(t)^2}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \\ & \leq \frac{1}{b} \left( \frac{cT}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha M b^{\alpha-1} (b+MT)^2}{4\Gamma(1+\alpha)} + \frac{M s_{max}^\alpha(t) s_{max}(t) + s_{min}(t)}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \max_{t \in [0, T]} |s_{max}(t) - s_{min}(t)| \end{aligned}$$

Concluimos que, para  $C = \frac{1}{b} \left( \frac{cT}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha M b^{\alpha-1} (b+MT)^2}{4\Gamma(1+\alpha)} + \frac{M(b+MT)^{1+\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)} \right)$ ,

$$|(Ps_1)(t) - (Ps_2)(t)| \leq C \max_{t \in [0, T]} |s_1(t) - s_2(t)|.$$

Por lo tanto,  $P$  es continua en la norma del máximo, y por Teorema del punto fijo de Schauder se obtiene que para  $T \leq \frac{b}{M}$ , existe  $s \in \Sigma$  tal que  $Ps = s$  y el par  $(u, s)$  verifica (4.13) y (4.88). Aplicando Proposición 21 deducimos que  $(u, s)$  es una solución de (4.79) y la unicidad se sigue del Corolario 8. Por lo tanto, probamos el resultado para  $T \leq \frac{b}{M}$ . Podemos extender el resultado para  $T > \frac{b}{M}$  mediante un argumento estándar, considerando un paso de tiempo de longitud  $\frac{b}{2M}$  y tomando como condición inicial el valor de la solución obtenida en el paso anterior en el punto  $\frac{b}{4M}$ . Luego, por Teorema 15, en cada paso la condición inicial es lo suficientemente regular como para repetir los argumentos del primer paso. Más precisamente, sea  $(u^0, s^0)$  la solución a (4.79) para  $T = \frac{b}{2M}$ , y consideremos un nuevo problema dado por (4.79) con  $u_0^1(x) = u^0(x, \frac{b}{4M})$ ,  $s^1(0) = b^1 := s^0(\frac{b}{4M}) \geq b$ . Entonces  $u_0^1$  satisface la hipótesis (4.97) debido al Lema 13, y podemos repetir el razonamiento anterior obteniendo una solución  $(u^1, s^1)$  al problema (4.79) en  $[0, \frac{b}{2M}]$ . Notemos que de la Proposición 21  $s^0$  y  $s^1$  verifican tanto la condición de Stefan (4.79)–(iv) como las hipótesis del Corolario 8, por lo que las soluciones  $(u^0, s^0)$  y  $(u^1, s^1)$  coinciden en la región  $\{0 \leq x \leq s^0(t) = s^1(t - \frac{b}{4M}), \frac{b}{4M} \leq t < \frac{b}{2M}\}$ . Entonces, podemos afirmar que el par  $(u, s)$  dado

por  $s(t) = \begin{cases} s^0(t), & 0 \leq t < \frac{b}{4M} \\ s^1(t - \frac{b}{4M}), & \frac{b}{4M} \leq t < \frac{b}{2M} \end{cases}$  y  $u(x, t) = \begin{cases} u^0(x, t) & 0 \leq x \leq s(t), 0 \leq t < \frac{b}{4M} \\ u^1(x, t - \frac{b}{4M}) & 0 \leq x \leq s(t), \frac{b}{4M} \leq t < \frac{b}{2M} \end{cases}$  es una solución a (4.79) en  $Q_{s, \frac{b}{2M}}$  y tiene la regularidad dada en el enunciado.

Finalmente, repitiendo este argumento  $k$  veces de forma tal que  $\frac{b}{4M}k > T$ , podemos obtener una solución  $(u, s)$  en  $Q_{s, T}$  para (4.79), definiendo  $s : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$  y  $u : Q_{s, T} \mapsto \mathbb{R}$  como sigue

$$s(t) = s^i \left( t - i \frac{b}{4M} \right), \text{ para } t \in \left( i \frac{b}{4M}, (i+1) \frac{b}{4M} \right], \quad i = 0, \dots, k$$

$$u(x, t) = u^i \left( x, t - i \frac{b}{4M} \right), \text{ para } x \in [0, s^i(t)], \quad t \in \left( i \frac{b}{4M}, (i+1) \frac{b}{4M} \right], \quad i = 0, \dots, k.$$

□

## 4.2. Soluciones autosimilares para los problemas de Stefan fraccionarios en el espacio

El objetivo de esta sección es obtener una solución exacta a cada uno de los siguientes problemas:

*Encontrar un par de funciones  $u : Q_{s, T} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  con cierta regularidad tales que*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) & 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ u(0, t) &= U_0 > U_m & 0 < t < T, \\ u(s(t), t) &= U_m & 0 < t < T, \\ s(0) &= 0, \\ \dot{s}(t) &= - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} D_x^\alpha u(x, t) & 0 < t < T. \end{aligned} \tag{4.107}$$

*Encontrar un par de funciones  $w : Q_{s, T} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  con cierta regularidad tales que*

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha w(x, t) & 0 < x < r(t), 0 < t < T, \\ D_x^\alpha w(0^+, t) &= -g_0 t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} & 0 < t < T, \\ w(r(t), t) &= g_m < g_0 & 0 < t < T, \\ r(0) &= 0, \\ \dot{r}(t) &= - \lim_{x \rightarrow r(t)^-} D_x^\alpha w(x, t) & 0 < t < T. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Como primer paso, buscaremos una solución autosimilar general para la ecuación de difusión fraccionaria

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t). \tag{4.109}$$

Luego, estableceremos algunas propiedades referentes a dicha solución, y finalmente obtendremos las soluciones exactas para cada problema aplicando las condiciones iniciales y de borde correspondientes a cada uno de ellos.

#### 4.2.1. Soluciones autosimilares de la ecuación de difusión fraccionaria

Comencemos con la búsqueda de una solución autosimilar para la ecuación (4.109) a través del método de las variables de similitud [4, 24, 36].

Supongamos que  $u = u(x, t)$  es una solución a (4.109) y definamos

$$u_\lambda(x, t) = u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^b}\right), \quad (4.110)$$

para  $b \in \mathbb{R}$  y  $\lambda > 0$ .

Antes de proseguir, notemos que si  $u$  es solución de (4.109) y no depende de  $t$ , entonces  $u(x, t) = c_1 x^\alpha + c_2$ , para  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . En consecuencia, omitiremos este caso en el siguiente análisis.

**Proposición 22.** *Sea  $u = u(x, t)$  una función tal que  $u_t \not\equiv 0$ . Luego,  $u$  es una solución de (4.109) en  $[0, b] \times (0, T)$  si y solo si  $u_\lambda$  es una solución de (4.109) en  $[0, \frac{b}{\lambda}] \times (0, \frac{T}{\lambda^{1+\alpha}})$  con  $b = 1 + \alpha$ .*

*Demostración.* Definamos la función  $u_\lambda(x, t) := u(\bar{x}, \bar{t})$  donde  $\bar{x} = \frac{x}{\lambda}$  y  $\bar{t} = \frac{t}{\lambda^b}$ . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(x, t) = u_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) \frac{1}{\lambda^b}. \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_\lambda(x, t) = u_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{t}) \frac{1}{\lambda}. \quad (4.112)$$

$$D_x^\alpha u_\lambda(x, t) = \lambda^{-\alpha} D_{\bar{x}}^\alpha u(\bar{x}, \bar{t}). \quad (4.113)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u_\lambda(x, t) = \lambda^{-\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} D_{\bar{x}}^\alpha u(\bar{x}, \bar{t}). \quad (4.114)$$

Luego, de (4.111), (4.112) y (4.114) se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u_\lambda(x, t) = \lambda^{-b} u_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) - \lambda^{-\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} D_{\bar{x}}^\alpha u(\bar{x}, \bar{t}). \quad (4.115)$$

En consecuencia, si  $u$  es una solución de (4.109) en  $[0, b] \times (0, T)$ , entonces para todo  $(\bar{x}, \bar{t}) \in [0, \frac{b}{\lambda}] \times (0, \frac{T}{\lambda^{1+\alpha}})$  resulta que

$$u_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} D_{\bar{x}}^\alpha u(\bar{x}, \bar{t}) = 0. \quad (4.116)$$

Por lo tanto, para que  $\frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u_\lambda(x, t) = 0$ , debe ser

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^{1+\alpha-b} u_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} D_{\bar{x}}^\alpha u(\bar{x}, \bar{t}) = (\lambda^{1+\alpha-b} - 1) u_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) + u_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} D_{\bar{x}}^\alpha u(\bar{x}, \bar{t}) \\ &= (\lambda^{1+\alpha-b} - 1) u_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}), \end{aligned}$$

de donde, puesto que  $u_t \neq 0$ , deducimos que  $\lambda^{1+\alpha-b} - 1 = 0$  y por lo tanto  $b = 1 + \alpha$ . □

Si tomáramos  $\lambda = t^{\frac{1}{1+\alpha}}$  podríamos tener una expresión de  $u_\lambda$  en función de  $u$  reduciendo el problema a una sola variable. Esto nos indica que la relación  $\frac{x}{t^{\frac{1}{1+\alpha}}}$  juega un papel importante en la ecuación (4.109) para la búsqueda de soluciones autosimilares. En consecuencia, consideremos una solución de la forma

$$\theta(z) := u(x, t), \tag{4.117}$$

donde  $z$  es la variable de similaridad definida como

$$z := \frac{x}{t^{\frac{1}{1+\alpha}}}. \tag{4.118}$$

Aplicando la regla de la cadena se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\frac{z}{(1+\alpha)t} \theta'(z). \tag{4.119}$$

y realizando la sustitución  $w = \frac{x}{t^{\frac{1}{1+\alpha}}}$ , obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^z \frac{\theta'(w)}{t^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (z-w)^\alpha} dw \right) = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial z} D_z^\alpha \theta(z), \tag{4.120}$$

de donde

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = -\frac{1}{t} \left[ \frac{z}{1+\alpha} \theta'(z) + \frac{\partial}{\partial z} D_z^\alpha \theta(z) \right]. \tag{4.121}$$

Luego,  $\theta$  verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria fraccionaria:

$$\frac{z}{1+\alpha} \theta'(z) + \frac{\partial}{\partial z} D_z^\alpha \theta(z) = 0. \tag{4.122}$$

Recíprocamente, si  $\theta$  es una solución de (4.122), podemos realizar el camino inverso y obtener que  $u$  es una solución de (4.109). Más precisamente:

**Proposición 23.** *La función  $u$  es una solución autosimilar de la ecuación (4.109) si y solo si la función  $\theta$  definida por (4.117) con  $z$  definida por (4.118), es una solución de la ecuación (4.122).*

En consecuencia, para hallar una solución autosimilar de (4.109), busquemos una solución a (4.122). Haciendo la sustitución  $\sigma(z) = \theta'(z)$ , y usando la Proposición 2.13, convertimos (4.122) en la siguiente ecuación

$$\frac{z}{1+\alpha}\sigma(z) + \partial^\alpha\sigma(z) = 0. \quad (4.123)$$

De [14, Ejemplo 4.3] sabemos que una solución a (4.123) está dada por

$$\sigma(z) = cz^{\alpha-1}E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{z^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right) = c\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-1)^n\frac{z^{(n+1)(1+\alpha)-2}}{(1+\alpha)^n}, \quad (4.124)$$

con  $c \in \mathbb{R}$  y  $c_n$  dado por (2.4).

Por lo tanto,

$$\theta(z) = A + B\int_0^z w^{\alpha-1}E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)dw = A + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(-1)^n}{(1+\alpha)^n}\frac{z^{(n+1)(1+\alpha)-1}}{(n+1)(1+\alpha)-1}$$

es una solución a la ecuación (4.122) para  $A$  y  $B$  constantes reales arbitrarias.

**Observación 23.**  $\theta$  es una función absolutamente continua, ya que  $\theta(z) = \theta(0) + \int_0^z \theta'(w)dw$ . Por lo tanto, por Proposición 2.13,  $\frac{\partial}{\partial z}D_x^\alpha\theta(z) = \partial^\alpha(\theta')(z)$ .

En adelante denotaremos por

$$\sigma_\alpha(w) := w^{\alpha-1}E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right). \quad (4.125)$$

Del desarrollo anterior, tenemos el siguiente resultado, referente a soluciones autosimilares para la ecuación (4.109).

**Proposición 24.** Para cada  $A, B \in \mathbb{R}$ , la función  $u: \mathbb{R}_0^+ \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u(x, t) = A + B\int_0^{x/t^{1+\alpha}} \sigma_\alpha(w)dw. \quad (4.126)$$

es una solución a la ecuación (4.109).

*Demostración.* La demostración es una consecuencia directa de la regla de la cadena, la Proposición 2.13, y la siguiente igualdad que se deriva del Teorema 2 para  $m = 1 + \frac{1}{\alpha}$ ,  $l = 1$  y  $a = -\frac{1}{1+\alpha}$

$$\left(\partial^\alpha\left[p^{\alpha-1}E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{p^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right]\right)(x) = -\frac{1}{1+\alpha}x^\alpha E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right) \quad (4.127)$$

□

**Observación 24.** Otro camino para probar que (4.126) es una solución de (4.109) es el siguiente.

Primero, observemos que

$$u(x, t) = A + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (-1)^n}{(1 + \alpha)^n} \frac{x^{(n+1)(1+\alpha)-1}}{[(n+1)(1 + \alpha) - 1] t^{\frac{(n+1)(1+\alpha)-1}{1+\alpha}}},$$

donde la serie del lado derecho es absolutamente convergente sobre conjuntos compactos en  $\mathbb{R}_0^+ \times (0, T)$ . Entonces, podemos intercambiar derivadas parciales y el operador  $D_x^\alpha$  con la serie, obteniendo que

$$D_x^\alpha u(x, t) = B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (-1)^n}{(1 + \alpha)^n} \frac{\Gamma((n+1)(1 + \alpha) - 1)}{\Gamma((n+1)(1 + \alpha) - \alpha)} \frac{x^{n(1+\alpha)}}{t^{\frac{(n+1)(1+\alpha)-1}{1+\alpha}}}, \quad (4.128)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n (-1)^n n}{(1 + \alpha)^{n-1}} \frac{\Gamma((n+1)(1 + \alpha) - 1)}{\Gamma((n+1)(1 + \alpha) - \alpha)} \frac{x^{n(1+\alpha)-1}}{t^{\frac{(n+1)(1+\alpha)-1}{1+\alpha}}},$$

y

$$u_t(x, t) = B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1} (-1)^n}{(1 + \alpha)^n} \frac{x^{n(1+\alpha)-1}}{t^{\frac{(n+1)(1+\alpha)-1}{1+\alpha}}}.$$

Entonces, si denotamos  $C_{\alpha, n} := \frac{c_{n-1}}{(1+\alpha)} - \frac{c_n n \Gamma((n+1)(1+\alpha)-1)}{\Gamma((n+1)(1+\alpha)-\alpha)}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} C_{\alpha, n} &= \frac{1}{(1 + \alpha)} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\Gamma((j+1)(1 + \alpha))}{\Gamma((j+1)(1 + \alpha) + \alpha)} - \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma((j+1)(1 + \alpha))}{\Gamma((j+1)(1 + \alpha) + \alpha)} \frac{n \Gamma((n+1)(1 + \alpha) - 1)}{\Gamma((n+1)(1 + \alpha) - \alpha)} \\ &= \frac{1}{(1 + \alpha)} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\Gamma((j+1)(1 + \alpha))}{\Gamma((j+1)(1 + \alpha) + \alpha)} \left[ 1 - \frac{n(1 + \alpha) \Gamma(n(1 + \alpha))}{\Gamma(n(1 + \alpha) + \alpha)} \frac{\Gamma((n+1)(1 + \alpha) - 1)}{\Gamma((n+1)(1 + \alpha) - \alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + \alpha)} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\Gamma((j+1)(1 + \alpha))}{\Gamma((j+1)(1 + \alpha) + \alpha)} \left[ 1 - \frac{\Gamma(n(1 + \alpha) + 1)}{\Gamma(n(1 + \alpha) + \alpha)} \frac{\Gamma(n(1 + \alpha) + \alpha)}{\Gamma(n(1 + \alpha) + 1)} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + \alpha)} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\Gamma((j+1)(1 + \alpha))}{\Gamma((j+1)(1 + \alpha) + \alpha)} [1 - 1] = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

El resultado (4.129) se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que la función  $u$  es una solución de (4.109).

Continuamos con diferentes expresiones para la derivada  $D_x^\alpha$  de la solución autosimilar general obtenida en la Proposición 24, que serán útiles más adelante.



**Proposición 25.** Si  $u$  es la solución autosimilar dada en (4.126), entonces

$$D_x^\alpha u(x, t) = B \left( \frac{\Gamma(\alpha)}{t^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}(-1)^{n-1}}{n(1+\alpha)^{n+1}} \frac{x^{n(1+\alpha)}}{t^{n+1-\frac{1}{1+\alpha}}} \right) \quad (4.130)$$

o equivalente,

$$-D_x^\alpha u(x, t) = -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{Bt^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \int_0^{x/t^{\frac{1}{1+\alpha}}} w^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}, 1} \left( -\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) dw. \quad (4.131)$$

*Demostración.* Usando el hecho de que

$$c_n = c_{n-1} \frac{\Gamma(n(1+\alpha))}{\Gamma(n(1+\alpha)+\alpha)} = c_{n-1} \frac{\Gamma(n(1+\alpha)+1)}{\Gamma(n(1+\alpha)+\alpha)n(1+\alpha)} = \frac{c_{n-1}}{n(1+\alpha)} \frac{\Gamma((n+1)(1+\alpha)-\alpha)}{\Gamma((n+1)(1+\alpha)-1)},$$

y reemplazando la expresión anterior en (4.128) obtenemos

$$\begin{aligned} -D_x^\alpha u(x, t) &= -\frac{B\Gamma(\alpha)}{t^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} - B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(-1)^n}{(1+\alpha)^n} \frac{\Gamma((n+1)(1+\alpha)-1)}{\Gamma((n+1)(1+\alpha)-\alpha)} \frac{x^{n(1+\alpha)}}{t^{\frac{(n+1)(1+\alpha)-1}{1+\alpha}}} \\ &= -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}(-1)^{n-1}}{n(1+\alpha)^{n+1}} \frac{x^{n(1+\alpha)}}{t^{n+1-\frac{1}{1+\alpha}}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} -D_x^\alpha u(x, t) &= -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}(-1)^{n-1}}{n(1+\alpha)^{n+1}} \frac{x^{n(1+\alpha)}}{t^{n+1-\frac{1}{1+\alpha}}} \\ &= -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{Bt^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \int_0^{x/t^{\frac{1}{1+\alpha}}} \frac{d}{dw} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}(-1)^{n-1}}{n(1+\alpha)^n} w^{n(1+\alpha)} \right) dw \\ &= -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{Bt^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \int_0^{x/t^{\frac{1}{1+\alpha}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(-1)^n}{(1+\alpha)^n} w^{(n+1)(1+\alpha)-1} dw \\ &= -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{Bt^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \int_0^{x/t^{\frac{1}{1+\alpha}}} w^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}, 1} \left( -\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) dw \end{aligned}$$

□

Para cerrar la presente sección, probaremos que la función  $\sigma_\alpha$  en la solución autosimilar dada en (4.125) es no negativa en  $\mathbb{R}^+$ , para lo cual haremos uso del principio del máximo dado en el Teorema 16.

**Proposición 26.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces la función  $\sigma_\alpha$  definida en (4.125) es una función no negativa en  $\mathbb{R}^+$ .

*Demostración.* Notemos que  $\sigma_\alpha(0^+) = +\infty$  y  $\sigma_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+)$ . Supongamos que existe  $z_0 > 0$  tal que  $\sigma_\alpha(z_0) < 0$ . Entonces podemos afirmar que existe un “primer valor”  $c > 0$  para el cual

$\sigma_\alpha(c) = 0$ . Además, de [13, Lemma 5.2] sabemos que la función de variable compleja  $E_{\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}, 1}(z)$  es una función entera, por lo que tiene raíces aisladas y podemos elegir un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que  $\sigma_\alpha(z) > 0$  para  $z \in (0, c)$ ,  $\sigma_\alpha(z) < 0$  para  $z \in (c, c + \delta]$  y

$$\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw > 0. \quad (4.132)$$

Sea  $0 < \varepsilon < 1$  y consideremos las funciones  $s^{\varepsilon, \delta}$  y  $u^\varepsilon$  definidas por

$$s^{\varepsilon, \delta}(t) = (c + \delta)(t + \varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t \geq 0, \quad \text{para } t \in (0, T) \quad (4.133)$$

y

$$u^\varepsilon(x, t) = u(x, t + \varepsilon) = \frac{\int_0^{x/(t+\varepsilon)^{1/(1+\alpha)}} \sigma_\alpha(w)dw}{\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw} \quad \text{para } 0 < x < s^{\varepsilon, \delta}(t), 0 < t < T, \quad (4.134)$$

donde  $u$  es la función definida en (4.126) para  $A = 0$  y  $B = \frac{1}{\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw}$ . Entonces, si consideramos la región

$$Q_{s^{\varepsilon, \delta}, T} = \{(x, t) : 0 < x < s^{\varepsilon, \delta}(t), 0 < t < T\},$$

y su frontera parabólica

$$\partial\gamma_{s^{\varepsilon, \delta}, T} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

donde  $\gamma_1 = \{(0, t) : 0 \leq t \leq T\}$ ,  $\gamma_2 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq s^{\varepsilon, \delta}(0) = (c + \delta)\varepsilon^{\frac{1}{1+\alpha}}\}$  y  $\gamma_3 = \{(s^{\varepsilon, \delta}(t), t) : 0 \leq t \leq T\}$  (ver Figura 4.2), resulta que  $u^\varepsilon$  es una solución al problema de frontera móvil

$$\begin{aligned} (i) \quad & u_t - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = 0, & 0 < x < s^{\varepsilon, \delta}(t), 0 < t < T, \\ (ii) \quad & u(0, t) = 0, & 0 < t < T, \\ (iii) \quad & u(s^{\varepsilon, \delta}(t), t) = 1, & 0 < t < T, \\ (iv) \quad & u(x, 0) = \frac{\int_0^{x/\varepsilon^{1/(1+\alpha)}} \sigma_\alpha(w)dw}{\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw} \geq 0, & 0 < x \leq s^{\varepsilon, \delta}(0) = (c + \delta)\varepsilon^{\frac{1}{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Además,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x, t) &= \frac{1}{\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(-1)^n}{(1+\alpha)^n [(n+1)(1+\alpha) - 1]} \frac{x^{(n+1)(1+\alpha)-1}}{(t+\varepsilon)^{n+1-\frac{1}{1+\alpha}}} \\ &= \frac{1}{\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw} \left( \frac{x}{(t+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}}} \right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(-1)^n}{(1+\alpha)^n [(n+1)(1+\alpha) - 1]} \left( \frac{x^{1+\alpha}}{t+\varepsilon} \right)^n. \end{aligned} \quad (4.136)$$

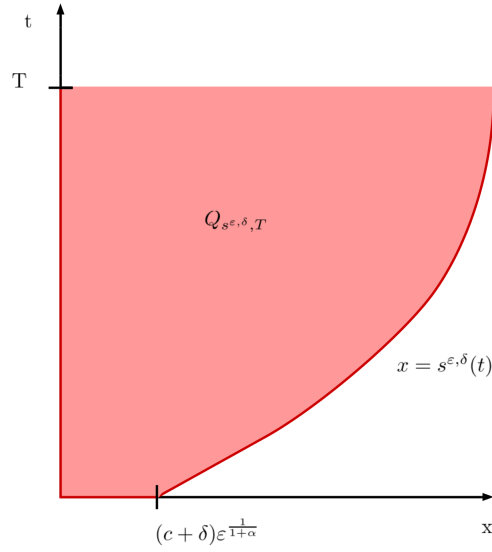


Figura 4.2: Región  $Q_{s^{\epsilon, \delta}, T}$  y su frontera parabólica.

La serie de potencias en (4.136) es absolutamente convergente en  $\overline{Q_{s^{\epsilon, \delta}, T}}$ . Entonces,  $u^\epsilon \in C(\overline{Q_{s^{\epsilon, \delta}, T}})$  y  $u^\epsilon \in C^\infty(Q_{s^{\epsilon, \delta}, T})$ . En particular,  $u^\epsilon$ , satisface las hipótesis del Teorema 16, por lo que alcanza su mínimo y su máximo en la frontera parabólica  $\partial\gamma_{s^{\epsilon, \delta}, T}$ , y por lo tanto  $u^\epsilon(x, t) \geq 0$  para todo  $(x, t) \in Q_{s^{\epsilon, \delta}, T}$ . Para determinar el máximo, analizamos el comportamiento de  $u^\epsilon$  en la frontera parabólico como sigue.

Sea  $f_t(x) := u^\epsilon(x, t)$ . Entonces,

$$f'_t(x) = \frac{\sigma_\alpha\left(\frac{x}{(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)}}\right)}{(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)} \int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw}$$

siendo  $f'_t(x) \geq 0$  en  $(0, c(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)})$  y  $f'_t(x) < 0$  en  $(c(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)}, (c+\delta)(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)})$ , por definición de  $c$ . Concluimos entonces que  $f_t$  alcanza su máximo sobre  $[0, (c+\delta)(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)}] = [0, s^{\epsilon, \delta}(t)]$  en el punto  $x = c(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)}$ . Además,  $f_t(c(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)}) > f_t(s^{\epsilon, \delta}(t))$ .

Por otro lado, si denotamos por  $\xi_t = c(t+\epsilon)^{1/(1+\alpha)}$ , podemos afirmar que

$$f_t(\xi_t) = u^\epsilon(\xi_t, t) = \frac{\int_0^c \sigma_\alpha(w)dw}{\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)dw} = u^\epsilon(\xi_{t'}, t') = f_{t'}(\xi_{t'}), \quad \forall t, t' \in [0, T],$$

y luego,  $u^\epsilon$  alcanza su máximo en  $\overline{Q_{s^{\epsilon, \delta}, T}}$  en cada punto  $(\xi_t, t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ . En particular,  $u^\epsilon$  alcanza su máximo en  $(\xi_0, 0) \in \partial\gamma_{s^{\epsilon, \delta}, T}$ . Denotemos por  $A := u^\epsilon(\xi_t, t)$ , para cada  $t \in [0, T]$ , y

observemos que  $A = u^\varepsilon(\xi_t, t) > u^\varepsilon((s^{\varepsilon, \delta}(t), t) = 1, \forall t \leq T$ .

Consideremos ahora la función

$$v(x, t) = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \Gamma(1+\alpha)t$$

y definamos

$$w_\kappa^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x, t) + \kappa v(x, t)$$

donde la constante  $\kappa$  se especificará más adelante. Observemos que  $v$  y  $w_\kappa^\varepsilon$  son soluciones de (4.135)–(i), para cada  $\kappa > 0$ , y además  $w_\kappa^\varepsilon$  verifica la hipótesis del Teorema 16. Entonces,

$$\frac{\max_{Q_{s^\varepsilon, \delta, T}} w_\kappa^\varepsilon}{\max_{\partial\gamma_{s^\varepsilon, \delta, T}} w_\kappa^\varepsilon} = \max_{\partial\gamma_{s^\varepsilon, \delta, T}} w_\kappa^\varepsilon. \quad (4.137)$$

Finalmente, analizamos  $w_\kappa^\varepsilon$  en la frontera parabólica:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, s^{\varepsilon, \delta}(0)]} w_\kappa^\varepsilon(x, 0) &\leq \max_{x \in [0, s^{\varepsilon, \delta}(0)]} u^\varepsilon(x, 0) + \kappa \max_{x \in [0, s^{\varepsilon, \delta}(0)]} v(x, 0) \\ &= u^\varepsilon(\xi_0, 0) + \kappa v(s^{\varepsilon, \delta}(0), 0) \\ &= A + \kappa \frac{(c + \delta)^{1+\alpha} \varepsilon}{1 + \alpha}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Adicionalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, s^{\varepsilon, \delta}(t)]} w_\kappa^\varepsilon(x, t) &\geq w_\kappa^\varepsilon(\xi_t, t) \\ &= A + \kappa \left[ \frac{c^{1+\alpha}(t + \varepsilon)}{1 + \alpha} + \Gamma(1 + \alpha)t \right]. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Luego, tomando  $t_0 > \varepsilon \frac{(c+\delta)^{1+\alpha} - c^{1+\alpha}}{c^{1+\alpha} + \Gamma(2+\alpha)} > 0$ , se cumple que

$$\frac{c^{1+\alpha}(t_0 + \varepsilon)}{1 + \alpha} + \Gamma(1 + \alpha)t_0 > \frac{(c + \delta)^{1+\alpha} \varepsilon}{1 + \alpha},$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta (4.138) y (4.139) obtenemos:

$$\max_{x \in [0, s^{\varepsilon, \delta}(t_0)]} w_\kappa^\varepsilon(x, t_0) > \max_{x \in [0, s^{\varepsilon, \delta}(0)]} w_\kappa^\varepsilon(x, 0).$$

y concluimos que  $w_\kappa^\varepsilon$  no alcanza su máximo en  $\gamma_2$ .

Por otro lado,  $v(\cdot, t)$  es una función estrictamente creciente para cada  $t$  fijo. Entonces,  $w_\kappa^\varepsilon$  no alcanza su máximo en  $\gamma_1$ .

Por último, podemos elegir  $\kappa$  de modo que verifique  $\kappa < \frac{(A-1)(\alpha+1)}{[(c+\delta)^{1+\alpha}-c^{1+\alpha}]/(T+\varepsilon)}$ , de donde podemos afirmar que

$$\begin{aligned} w_\kappa^\varepsilon(s^{\varepsilon,\delta}(t), t) &= 1 + \kappa \left[ \frac{(c+\delta)^{1+\alpha}(t+\varepsilon)}{1+\alpha} + \Gamma(1+\alpha)t \right] \\ &< A + \kappa \left[ \frac{c^{1+\alpha}(t+\varepsilon)}{1+\alpha} + \Gamma(1+\alpha)t \right] = w_\kappa^\varepsilon(\xi_t, t), \quad \forall t \leq T, \end{aligned}$$

y en consecuencia  $w_\kappa^\varepsilon$  no alcanza su máximo en  $\gamma_3$ . Concluimos que  $w_\kappa^\varepsilon$  no alcanza su máximo en la frontera parabólica  $\partial\gamma_{s^{\varepsilon,\delta},T}$ , lo que contradice la igualdad (4.137).

Esta contradicción proviene de suponer que existe  $z_0 > 0$  tal que  $\sigma_\alpha(z_0) < 0$ , por lo que

$$\sigma_\alpha(z) \geq 0, \quad \forall z > 0. \tag{4.140}$$

□

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 9.** *La función de Mittag-Leffler de tres parámetros involucrada en la solución autosimilar (4.126) es no negativa, es decir,*

$$E_{\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}, 1} \left( -\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) \geq 0 \quad \text{para todo } x > 0. \tag{4.141}$$

### 4.2.2. Solución explícita para el problema de Stefan de una fase en espacio fraccionario con una condición de Dirichlet en la cara fija

Aplicaremos la solución exacta general obtenida en la Proposición 24 para obtener un resultado de existencia y unicidad de solución autosimilar para el siguiente problema de Stefan fraccionario con condición de Dirichlet:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha u(x, t) = 0, \quad 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ (ii) \quad & u(0, t) = U_0 > U_m, \quad 0 < t < T, \\ (iii) \quad & u(s(t), t) = U_m, \quad 0 < t < T, \\ (iv) \quad & s(0) = 0, \\ (v) \quad & \dot{s}(t) = -(D_x^\alpha u)(s(t), t), \quad 0 < t < T. \end{aligned} \tag{4.142}$$

Por Proposición 24, comencemos definiendo  $u$  como (4.126). Entonces  $u$  verifica (4.142)-(i). Queremos determinar  $A$  y  $B$  en (4.126) de modo tal que  $u$  verifique las restantes condiciones en (4.142). En consecuencia, de (4.142)-(ii), deducimos que  $A = U_0$ . Además, de la condición (4.142)-(iii), tenemos

$$u(s(t), t) = U_0 + B \int_0^{s(t)/t^{1/(1+\alpha)}} \sigma_\alpha(w) dw = U_m. \tag{4.143}$$

Teniendo en cuenta que (4.143) debe verificarse para todo  $t \in (0, T)$ , deducimos que  $s$  debe ser proporcional a  $t^{\frac{1}{1+\alpha}}$ , es decir

$$s(t) = \xi t^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad \text{para algún } \xi \in \mathbb{R}^+, \quad t \in (0, T). \quad (4.144)$$

Reemplazando (4.144) en (4.143) vemos que

$$B = \frac{-(U_0 - U_m)}{\int_0^\xi \sigma_\alpha(w) dw}, \quad (4.145)$$

Reemplazando ahora (4.131) en (4.142)(v), y derivando (4.144), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{1+\alpha} t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} &= -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + B\frac{t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \int_0^\xi w\sigma_\alpha(w) dw \\ &= \frac{Bt^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \left( -\Gamma(\alpha)(1+\alpha) + \int_0^\xi w\sigma_\alpha(w) dw \right) \end{aligned} \quad (4.146)$$

Combinando (4.145) y (4.146), hallamos la siguiente condición

$$\xi = \frac{(U_0 - U_m) \left( \Gamma(\alpha)(1+\alpha) - \int_0^\xi w\sigma_\alpha(w) dw \right)}{\int_0^\xi \sigma_\alpha(w) dw}. \quad (4.147)$$

Por lo tanto, buscamos un número positivo  $\xi$  que verifique la siguiente ecuación

$$x = H_\alpha(x), \quad x > 0,$$

donde la función  $H_\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  se define mediante la expresión:

$$H_\alpha(x) = \frac{(U_0 - U_m) \left( \Gamma(\alpha)(1+\alpha) - \int_0^x w\sigma_\alpha(w) dw \right)}{\int_0^x \sigma_\alpha(w) dw}. \quad (4.148)$$

Notemos que

$$\lim_{x \searrow 0} \int_0^x w\sigma_\alpha(w) dw = 0^+, \quad \lim_{x \searrow 0} \int_0^x \sigma_\alpha(w) dw = 0^+.$$

Entonces  $H_\alpha(0^+) = \lim_{x \searrow 0} H_\alpha(x) = +\infty$ , pues  $(U_0 - U_m)\Gamma(\alpha)(1+\alpha) > 0$ . Además, por Proposición 26,

$$\begin{aligned} H'_\alpha(x) &= \frac{-(U_0 - U_m)x\sigma_\alpha(x) \int_0^x \sigma_\alpha(w) dw - (U_0 - U_m) \left( \Gamma(\alpha)(1+\alpha) - \int_0^x w\sigma_\alpha(w) dw \right) \sigma_\alpha(x)}{\left( \int_0^x \sigma_\alpha(w) dw \right)^2} \\ &= \frac{-(U_0 - U_m)\sigma_\alpha(x) \left[ \Gamma(\alpha)(1+\alpha) + \int_0^x (xw)\sigma_\alpha(w) dw \right]}{\left( \int_0^x \sigma_\alpha(w) dw \right)^2} \leq 0, \end{aligned}$$

de donde  $H_\alpha$  es una función no creciente en  $[0, +\infty)$ , y podemos afirmar que existe un único  $\xi > 0$  tal que  $H(\xi) = \xi$ .

Del análisis anterior se sigue el siguiente teorema.

**Teorema 19.** *Una solución explícita para el problema (4.142) está dada por*

$$u_\alpha(x, t) = U_0 - \frac{(U_0 - U_m)}{\int_0^{\xi_\alpha} \sigma_\alpha(w) dw} \int_0^{x/t^{1/(1+\alpha)}} \sigma_\alpha(w) dw. \quad (4.149)$$

$$s_\alpha(t) = \xi_\alpha t^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t \in (0, T), \quad (4.150)$$

donde  $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^+$  es la única solución de la ecuación

$$H_\alpha(x) = x, \quad x > 0, \quad (4.151)$$

y la función  $H_\alpha$  está definida por (4.148).

**Observación 25.** *Si tomamos  $\alpha = 1$  en (4.142), recuperamos el problema clásico de Lamé-Clapeyron-Stefan*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0, \quad 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ (ii) \quad & u(0, t) = U_0 > U_m, \quad 0 < t < T, \\ (iii) \quad & u(s(t), t) = U_m, \quad 0 < t < T, \\ (iv) \quad & s(0) = 0, \\ (v) \quad & \dot{s}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} u(s(t), t), \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (4.152)$$

Por otro lado,

$$\sigma_1(w) = w^0 E_{1,2,1} \left( -\frac{w^2}{2} \right) = e^{-(\frac{w}{2})^2}.$$

Entonces, el par

$$u_1(x, t) := U_0 - \frac{(U_0 - U_m)}{\int_0^{\xi_1} \sigma_1(w) dw} \int_0^{x/t^{1/2}} \sigma_1(w) dw = U_0 - \frac{(U_0 - U_m)}{\operatorname{erf} \left( \frac{\xi_1}{2} \right)} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right), \quad (4.153)$$

$$s_1(t) := \xi_1 \sqrt{t}, \quad t \in (0, T), \quad (4.154)$$

es una solución de (4.152) donde  $\xi_1 \in \mathbb{R}^+$  es la única solución de la ecuación

$$H_1(x) = x, \quad x > 0, \quad (4.155)$$

con

$$H_1(x) = \frac{(U_0 - U_m) \left( 2 - \int_0^x w e^{-w^2/4} dw \right)}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2} \right)} = \frac{U_0 - U_m}{\sqrt{\pi}} \frac{2e^{-(\frac{x}{2})^2}}{\operatorname{erf} \left( \frac{x}{2} \right)}.$$

En consecuencia, hemos recuperado la solución clásica de Lamé-Clapeyron-Stefan al problema (4.152) dada en [17].

### 4.2.3. Solución explícita para el problema de Stefan fraccionario en el espacio con condición de Neumann en el borde fijo

Considerando ahora el problema (4.108), es decir,

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D_x^\alpha v(x, t) = 0, \quad 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ (ii) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} D_x^\alpha v(x, t) = -g_0 t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad 0 < t < T, \\ (iii) \quad & v(s(t), t) = g_m < g_0, \quad 0 < t < T, \\ (iv) \quad & s(0) = 0, \\ (v) \quad & \dot{s}(t) = -(D_x^\alpha v)(s(t), t), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \tag{4.156}$$

y procediendo como en la sección anterior, obtendremos un resultado similar al Teorema 19.

Nuevamente, consideremos  $v$  definida por (4.126). Entonces, de (4.156)–(ii) y (4.130), deducimos que  $B = -\frac{g_0}{\Gamma(\alpha)}$ , pues

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} D_x^\alpha v(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} B \left( \frac{\Gamma(\alpha)}{t^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1} (-1)^{n-1}}{n(1+\alpha)^{n+1}} \frac{x^{n(1+\alpha)}}{t^{n+1-\frac{1}{1+\alpha}}} \right) = \frac{B\Gamma(\alpha)}{t^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}$$

De la condición (4.156)–(iii), tenemos que

$$v(s(t), t) = A - \frac{g_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s(t)/t^{1/(1+\alpha)}} \sigma_\alpha(w) dw = g_m. \tag{4.157}$$

por lo que  $s$  debe ser proporcional a  $t^{\frac{1}{1+\alpha}}$ , es decir,

$$s(t) = \eta t^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad \text{para algún } \eta \in \mathbb{R}^+, \quad t \in (0, T). \tag{4.158}$$

Entonces

$$A = g_m + \frac{g_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta \sigma_\alpha(w) dw \tag{4.159}$$

De la condición (4.156)(v), (4.131) y (4.158) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{1+\alpha} t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} &= g_0 t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \frac{g_0}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \int_0^\eta w \sigma_\alpha(w) dw \\ &= g_0 t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left( 1 - \frac{1}{(1+\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta w \sigma_\alpha(w) dw \right), \end{aligned}$$



o equivalente

$$\eta = g_0 \left( (1 + \alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta w \sigma_\alpha(w) dw \right), \quad (4.160)$$

Por lo tanto,  $\eta$  debe verificar la siguiente ecuación

$$x = G_\alpha(x), \quad x > 0,$$

donde la función  $G_\alpha$  se define en  $\mathbb{R}_0^+$  por la expresión:

$$G_\alpha(x) = g_0 \left( (1 + \alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x w \sigma_\alpha(w) dw \right). \quad (4.161)$$

Adicionalmente, notemos que  $G_\alpha$  es continua en  $[0, +\infty)$ . De Proposición 26 se deduce que  $G_\alpha$  es una función decreciente. Además  $G_\alpha(0) = g_0(1 + \alpha) > 0$ .

Del análisis anterior, concluimos que existe un único  $\eta \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\eta = G_\alpha(\eta)$ , de donde se sigue el siguiente teorema.

**Teorema 20.** *Una solución explícita para el problema (4.156) está dada por*

$$\begin{aligned} v_\alpha(x, t) &= g_m + \frac{g_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta_\alpha} w^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}, 1} \left( -\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) dw \\ &\quad - \frac{g_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x/t^{1/(1+\alpha)}} w^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}, 1} \left( -\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) dw \end{aligned} \quad (4.162)$$

$$\begin{aligned} &= g_m + \frac{g_0}{\Gamma(\alpha)} \int_{x/t^{1/(1+\alpha)}}^{\eta_\alpha} w^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}, 1} \left( -\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) dw \\ s_\alpha(t) &= \eta_\alpha t^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.163)$$

donde  $\eta_\alpha \in \mathbb{R}^+$  es la única solución de la ecuación

$$G_\alpha(x) = x, \quad x > 0,$$

y la función  $G_\alpha$  está definida por (4.161).

**Observación 26.** *Para  $\alpha = 1$  en (4.156), tenemos*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = 0, \quad 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ (ii) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -g_0 t^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < t < T, \\ (iii) \quad & v(s(t), t) = g_m, \quad 0 < t < T, \\ (iv) \quad & s(0) = 0, \\ (v) \quad & \dot{s}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} v(s(t), t), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (4.164)$$

y

$$\sigma_1(w) = w^0 E_{1,2,1} \left( -\frac{w^2}{2} \right) = e^{-\left(\frac{w}{2}\right)^2}.$$

Entonces, el par

$$v_1(x, t) = g_m + g_0 \int_{x/\sqrt{t}^{\frac{1}{2}}}^{\eta_1} w^0 E_{1,2,1} \left( -\frac{w^2}{2} \right) dw = g_m + g_0 \sqrt{\pi} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\eta_1}{2} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad (4.165)$$

$$s_1(t) = \eta_1 \sqrt{t}, \quad t \in (0, T) \quad (4.166)$$

es una solución al problema de Lamé-Clapeyron-Stefan (4.164), donde  $\eta_1 \in \mathbb{R}^+$  es la única solución a la ecuación

$$G_1(x) = x, \quad x > 0, \quad (4.167)$$

con

$$G_1(x) = g_0 \left( 2 - \int_0^x w \sigma_1(w) dw \right) = 2g_0 e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

lo cual coincide con lo obtenido en [35, 36].

Para finalizar, analizamos la imposibilidad de obtener soluciones autosimilares no constantes para el problema (4.156) con condición de borde de tipo Neumann clásica.

**Observación 27.** Consideremos el problema (4.156) cambiando la condición (4.156)(ii) por una condición de Neumann de la forma  $v_x(0+, t) = g(t)$ . Entonces, de (4.126) deducimos que

$$v_x(x, t) = B \frac{x^{\alpha-1}}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( \frac{-x^{1+\alpha}}{(1+\alpha)t} \right)^k. \quad (4.168)$$

Observemos que  $c_k < 2$  para todo  $k$ . Entonces, la serie en (4.168) es convergente para  $x < 1$ . Además, para  $x = 0$ , la serie es igual a 1. Por lo tanto, dado que  $\alpha - 1 < 0$ , concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v_x(x, t) = -\infty.$$

Por lo tanto, debe ser  $B = 0$ , y de la condición de borde en  $s(t)$  deducimos que  $v(x, t) = g_m$  y  $s(t) \equiv 0$ . Esto nos indica que para obtener soluciones interesantes, si estamos modelando el flujo con una derivada de Caputo, entonces la condición de Neumann también debe ser dada en términos de la derivada de Caputo y no en términos clásicos.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En esta tesis se estudiaron diversos problemas de Stefan. Por un lado, se obtuvieron soluciones explícitas para un problema de aleaciones binaria con diferentes condiciones de borde. Adicionalmente, se probaron desigualdades para el coeficiente asociado a la frontera libre. Por otro lado, se realizó un estudio teórico de un problema de Stefan fraccionario en el espacio, deduciendo resultados de existencia, unicidad y regularidad de solución para una condición de tipo Dirichlet. Para este último caso, se desarrollaron varias herramientas necesarias como un principio del extremo débil, una condición integral equivalente a la condición de Stefan fraccionaria, un resultado de monotonía para la frontera libre, y estimaciones que relacionan normas en espacios de Sobolev fraccionarios y espacios de interpolación.

Finalmente, se obtuvieron soluciones exactas para el problema de Stefan fraccionario en el espacio, representada en términos de las funciones de Mittag-Leffler de tres parámetros para condiciones de borde de tipo Dirichlet y Neumann fraccionaria.

### **Futuros trabajos**

A partir de los resultados obtenidos en esta tesis, surgen varios caminos a seguir para profundizar en los temas desarrollados.

1. El resultado de existencia y unicidad de solución al problema de Stefan fraccionario en el espacio se obtuvo para un valor de  $b$  estrictamente positivo, siendo dicha condición fundamental en el análisis del problema. Siguiendo la línea de [26], se puede analizar la existencia de solución para el caso  $b = 0$  como límite de las soluciones para valores de  $b > 0$ .
2. Analizar resultados y efectividad de esquemas numéricos aplicados a problemas de Stefan fraccionario en el espacio.

3. Encontrar un operador en  $\mathbb{R}^n$  que generalice a  $\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha$  para el estudio de problemas de Stefan fraccionario en el espacio en varias variables.
4. Comparar las soluciones obtenidas en [21] con las soluciones autosimilares para el problema de Stefan fraccionario en el espacio.

# Bibliografía

- [1] A. P. Alexandrov, D. V. & Malygin. Self-similar solidification of an alloy from a cooled boundary. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 49, 2006.
- [2] V. Alexiades and A. D. Solomon. *Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes*. Hemisphere, Taylor and Francis, Washington, 1993.
- [3] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [4] J. R. Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [5] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [6] J. S. & Ro S. T & Yoo H. Chung, J. D. & Lee. An analytical approach to the conduction-dominated solidification of binary mixtures. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 42:373–377, 1999.
- [7] J. Crank. *Free and Moving Boundary Problems*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [8] Palatucci G. Valdinoci E. Di Nezza, E. Hitchhiker’s guide to the fractional sobolev spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2012.
- [9] Ragab A. Eldeeb A. El-Owaidy, H. On some new nonlinear integral inequalities of gronwall-bellman type. *Kyungpook Mathematical Journal*, 2015.
- [10] C. M. Elliott and J. R. Ockendon. *Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems*, volume 59. Pitman, London, 1982.
- [11] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [12] Papageorgiou N.S. Gasinski, L. *Nonlinear Analysis*. Chapman & Hall, 2006.

- [13] R. Gorenflo, A. Kilbas, F. Mainardi, and S. Rogosin. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, London, 2014.
- [14] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [15] A. A. Kilbas and M. Saigo. On Mittag-Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 4(4):355–370, 1996.
- [16] A. Kubica and M. Yamamoto. Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 21(2):276–311, 2018.
- [17] G. Lamé and B. P. Clapeyron. Mémoire sur la solidification par refroidissement d’un globe liquide. *Annales de Chimie et de Physique 2<sup>e</sup> série*, 47:250–256, 1831.
- [18] J. L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Volume 1., 2012*. Springer-Verlag, 1972.
- [19] A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Springer Science and Business Media, 2012.
- [20] V. J. Lunardini. *Heat Transfer with Freezing and Thawing*. Elsevier, London, 1991.
- [21] Rybka P. Sato S. Namba, T. Special solutions to the space fractional diffusion problem. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 25(6):2139–2165, 2022.
- [22] T. Namba, P. Rybka, and V.R. Voller. Some comments on using fractional derivative operators in modeling non-local diffusion processes. *J. Comput. Appl. Math.*, 381:113040, 2021.
- [23] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [24] Y. Pinchover and J. Rubinstein. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2005.
- [25] A. Yu. Popov and A. M. Sedletskii. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions. *Journal of Mathematical Sciences*, 190(2):209–409, 2013.

- [26] Ryszewska K. Venturato L. Roscani, S. A one-phase space-fractional stefan problem with no liquid initial domain. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 54(5):5489–5523, 2022.
- [27] L. I. Rubinstein. The Stefan Problem. *Translations of Mathematical Monographs* **27**, american mathematical society. 1971.
- [28] L.I. Rubinstein. *The Stefan Problem*. Translations of Mathematical Monographs, 27, American Mathematical Society, Providence, 1971.
- [29] W. Rudin. *Functional Analysis. Second Edition*. International Editions, Mc-Graw-Hill, New York, 1991.
- [30] K. Ryszewska. *A semigroup approach to space-fractional diffusion and the analysis of fractional Stefan models*. PhD. Thesis, Warsaw University of Technology, 2020.
- [31] K. Ryszewska. A space-fractional Stefan problem. *Nonlinear Anal.*, 199:112027, 2020.
- [32] Kilbas A. A. Marichev O. I. Samko, S. G. *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [33] D. G. & Alexiades V. Solomon, A. D. & Wilson. Explicit solutions to phase change problems. *Quart. of Appl. Math.* 41:237–243, 1983.
- [34] J. Stefan. Über einige probleme der theorie der Wärmeleitung. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissemschaften Mathematisch-Naturwissemschaftliche classe*, 98:473–484, 1889.
- [35] D. A. Tarzia. An inequality for the coeficient  $\sigma$  of the free boundary  $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$  of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem. *Quart. Appl. Math.*, 39:491–497, 1981.
- [36] D. A. Tarzia. *Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface*, chapter 20, Advanced Topics in Mass Transfer, pages 439–484. Mohamed El-Amin (Ed.), Intech, Rijeka, 2011.
- [37] D. A. Tarzia. Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions. *Therm. Sci.* 21:187–197, 2017.
- [38] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Mathematical Library, 1977.

- [39] V. R. Voller. A similarity solution for solidification of an under-cooled binary alloy. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 49:1981–1985, 2006.
- [40] V. R. Voller. An enthalpy method for modeling dendritic growth in a binary alloy. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 51:823–834, 2008.
- [41] V. R. Voller. A numerical method for the Rubinstein binary-alloy problem in the presence of an under-cooled liquid. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 51:696–706, 2008.
- [42] V. R. Voller. On a fractional derivative form of the green-ampt infiltration model. *Advance in Water Resources*, 34:257–262, 2011.
- [43] V. R. Voller. Fractional Stefan problems. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 74:269–277, 2014.
- [44] M. Hieber W. Arendt, C. Batty and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhäuser,, 2011.
- [45] H. Weber. *Die Partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik*. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1901.
- [46] A. D. & Alexiades V. Wilson, D. G. & Solomon. A shortcoming of the explicit solution for the binary alloy solidification problem. *Lett. heat mass transf.* 9:421–428, 1982.
- [47] D. G. Wilson. Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multi-phase Stefan problems. *SIAM J. Appl. Math.* 35:135–147, 1978.
- [48] M. Yamamoto. Fractional calculus and time-fractional differential equations: Revisit and construction of a theory. *Mathematics*, 10(5):698, 2022.