

# SOLUCIONES ANALÍTICAS Y NUMÉRICAS DE UN PROBLEMA DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN MATERIALES MULTICAPA

Guillermo F. Umbrecht<sup>†\*</sup>, Domingo A. Tarzia<sup>†‡</sup> y Diana Rubio<sup>◊</sup>

<sup>†</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Godoy Cruz 2290, C1425FQB CABA, Argentina.*

<sup>\*</sup>*Laboratorio de Investigación, Desarrollo y Transferencia de la Universidad Austral (LIDTUA), Facultad de Ingeniería, Universidad Austral, Mariano Acosta 1611, B1629WWA Pilar, Buenos Aires, Argentina.*

[GUmbrecht@austral.edu.ar](mailto:GUmbrecht@austral.edu.ar)

<sup>‡</sup>*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina. [DTarzia@austral.edu.ar](mailto:DTarzia@austral.edu.ar)*

<sup>◊</sup>*Instituto de Tecnologías Emergentes y Ciencias Aplicadas (ITECA), UNSAM-CONICET, Centro de Matemática Aplicada, Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de San Martín, 25 de mayo y Francia, B1650 San Martín, Buenos Aires, Argentina. [drubio@unsam.edu.ar](mailto:drubio@unsam.edu.ar)*

**Resumen:** Se estudia un problema de transferencia de energía térmica en un cuerpo multicapa unidimensional, considerando difusión, advección, generación o pérdida de calor interna linealmente dependiente de la temperatura en cada capa, así como generación de calor debido a fuentes externas. Adicionalmente, se toma en cuenta la resistencia térmica de contacto en las interfaces entre cada par de materiales. El problema se modela matemáticamente y se derivan soluciones analíticas explícitas utilizando técnicas de Fourier. También se formula un esquema de diferencias finitas convergente para simular casos específicos.

**Palabras clave:** *transferencia de calor, materiales multicapa, resistencia térmica.*

2020 AMS Subject Classification: 80A19 - 42A16 - 35K10.

## 1. INTRODUCCIÓN

La transferencia de masa y/o calor en materiales multicapa tiene muchas aplicaciones de interés. Por ejemplo: crecimiento de tumores cerebrales, problemas microelectrónicos, liberación de fármacos en stents, la permeabilidad de la piel, la humedad en tejidos compuestos, determinación de contaminación en medios porosos, la emisión de gases de efecto invernadero, celdas de iones de litio y técnicas de limpieza de lana.

La literatura sobre problemas de transporte en materiales multicapa es extensa [3, 4], pero carece de generalidad. La mayoría de los artículos citados se centran únicamente en la difusión, descuidando otros procesos de transferencia térmica. Además, muchos no consideran la resistencia de contacto térmico en las interfaces entre cada par de materiales. Para estudiar problemas más realistas, es esencial comprender los procesos térmicos completos, lo que implica analizar la influencia de las fuentes de generación de calor externas, los términos disipativos y la resistencia de contacto térmico.

## 2. MODELADO MATEMÁTICO

El escenario implica la transferencia transitoria de energía térmica en un cuerpo multicapa ( $M$  capas) unidimensional. Se supone que cada capa es homogénea e isótropa. Además, se considera que la ganancia o pérdida de calor dentro de cada capa es proporcional a la temperatura local, junto con la advección impulsada por un flujo de fluido unidimensional. También se supone la generación de calor a partir de fuentes externas. Se desprecian los fenómenos de fuga térmica y la transferencia de calor por radiación.

La longitud total del cuerpo multicapa se denota por  $L$ . La interfaz entre los materiales  $m$ -ésimo y  $m+1$ -ésimo se encuentra en la posición  $l_m$  para  $m = 1, \dots, M-1$ , donde  $0 < l_m < L$ . En la Figura 1, se muestra un diagrama de referencia.

El fenómeno de transporte se modela con una ecuación de conservación de energía transitoria que representa un equilibrio entre difusión, advección, ganancia o pérdida de calor interno y generación de calor a partir de fuentes externas. Se suponen condiciones generales de contorno convectivo en los límites izquierdo y derecho, respectivamente. Adicionalmente, se considera igualdad de flujo térmico y salto térmico de temperatura en cada interfaz. Finalmente, se supone conocida la distribución inicial de temperaturas.

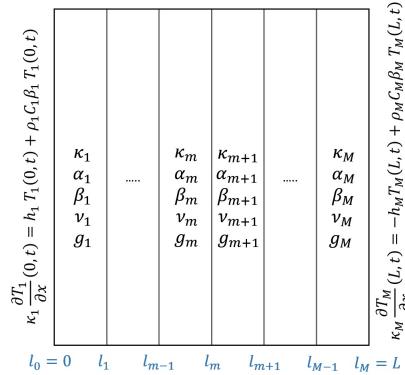


Figura 1: Esquema general del problema de interés.

El problema descripto se puede modelar con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_m}{\partial t} = \alpha_m \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} - \beta_m \frac{\partial T_m}{\partial x} + \nu_m T_m + s_m, & (x, t) \in (l_{m-1}, l_m) \times \mathbb{R}^+, \\ \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = h_1 T_1 + \rho_1 C_1 \beta_1 T_1, & x = 0, t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_M \frac{\partial T_M}{\partial x} = -h_M T_M + \rho_M C_M \beta_M T_M, & x = L, t \in \mathbb{R}^+, \\ T_{m+1} = T_m + R_m \frac{\partial T_m}{\partial x}, & x = l_m, t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_{m+1} \frac{\partial T_{m+1}}{\partial x} - \rho_{m+1} C_{m+1} \beta_{m+1} T_{m+1} = \kappa_m \frac{\partial T_m}{\partial x} - \rho_m C_m \beta_m T_m, & x = l_m, t \in \mathbb{R}^+, \\ T_m = T_{m,0}, & x \in [l_{m-1}, l_m], t = 0, \end{cases} \quad (1)$$

el subíndice en (1) denota la  $m$ -ésima capa del material, donde  $x$  y  $t$  representan las variables espacial y temporal, respectivamente. Las funciones  $T_m = T_m(x, t)$  representan la temperatura relativa a la temperatura ambiente en la  $m$ -ésima capa en la posición  $x$  y el tiempo  $t$ . El coeficiente  $\alpha_m$  denota la difusividad térmica del material en cada capa,  $\beta_m$  representa la velocidad de flujo y  $\nu_m$  corresponde al coeficiente que relaciona la tasa de generación o pérdida de calor interno con la temperatura local. Las funciones diferenciables  $s_m = s_m(x, t)$  modelan una fuente de calor externa que actúa sobre el cuerpo. Además,  $\kappa_m$ ,  $h_m$ ,  $\rho_m$  y  $C_m$  (para  $m = 1, \dots, M$ ) denotan: el coeficiente de conductividad térmica, el coeficiente de transferencia de calor por convección, la densidad y el calor específico a presión constante para cada capa, respectivamente. El parámetro  $R_m$  denota el valor de la resistencia de contacto térmico de la  $m$ -ésima interfaz.

### 3. SOLUCIÓN ANALÍTICA

El problema de interés dado por el sistema (1), se puede adimensionalizar a partir de las siguientes variables adimensionales:  $y = \frac{x}{L}$ ,  $\bar{l}_m = \frac{l_m}{L}$ ,  $\bar{R}_m = \frac{R_m}{L}$ ,  $\tau = \frac{\alpha_M}{L^2} t$ ,  $\theta_m = \frac{T_m}{T_r}$ ,  $\bar{\alpha}_m = \frac{\alpha_m}{\alpha_M}$ ,  $Pe_m = \frac{L}{\alpha_M} \beta_m$ ,  $\bar{\nu}_m = \frac{L^2}{\alpha_M} \nu_m$ ,  $\bar{s}_m = \frac{L^2}{T_r \alpha_M} s_m$ ,  $\bar{\kappa}_m = \frac{\kappa_m}{\kappa_M}$ ,  $Bi_1 = \frac{L}{\kappa_M} h_1$ ,  $Bi_M = \frac{L}{\kappa_M} h_M$ ; donde  $T_r$  es cualquier temperatura de referencia y  $Pe$ ,  $Bi$  representan los números adimensionales de Péclet y Biot, respectivamente. Se aplica este cambio de variables en el sistema (1) y se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau} = \bar{\alpha}_m \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial y^2} - Pe_m \frac{\partial \theta_m}{\partial y} + \bar{\nu}_m \theta_m + \bar{s}_m, & (y, \tau) \in (\bar{l}_{m-1}, \bar{l}_m) \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = Bi_1^* \theta_1, & y = 0, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_M}{\partial y} = Bi_M^* \theta_M, & y = 1, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \theta_{m+1} = \theta_m + \bar{R}_m \frac{\partial \theta_m}{\partial y}, & y = \bar{l}_m, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_{m+1}}{\partial y} = \gamma_m \theta_m + \sigma_m \frac{\partial \theta_m}{\partial y}, & y = \bar{l}_m, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \theta_m = \theta_{m,0}(y), & y \in [\bar{l}_{m-1}, \bar{l}_m], \tau = 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $Bi_1^* = \frac{Pe_1}{\bar{\alpha}_1} + \frac{Bi_1}{\bar{\kappa}_1}$ ,  $Bi_M^* = Pe_M - Bi_M$ ,  $\gamma_m = \frac{Pe_{m+1}}{\bar{\alpha}_{m+1}} - \frac{Pe_m}{\bar{\alpha}_m} \frac{\bar{\kappa}_m}{\bar{\kappa}_{m+1}}$ ,  $\sigma_m = \frac{\bar{\kappa}_m}{\bar{\kappa}_{m+1}} + \bar{R}_m \frac{Pe_{m+1}}{\bar{\alpha}_{m+1}}$ . Con la finalidad de eliminar los términos advectivos se introduce el siguiente cambio de variables:

$$\theta_m(y, \tau) = \exp(\chi_m y) \Theta_m(y, \tau), \quad (y, \tau) \in [\bar{l}_{m-1}, \bar{l}_m] \times \mathbb{R}^+, \quad \text{con} \quad \chi_m = \frac{Pe_m}{2 \bar{\alpha}_m}. \quad (3)$$

Se aplica este cambio de variables en el sistema (2) y para los siguientes parámetros  $\psi_m = \bar{\nu}_m - \bar{\alpha}_m \chi_m^2$ ,  $\widehat{s}_m(y, \tau) = \bar{s}_m(y, \tau) \exp(-\chi_m y)$ ,  $\bar{B}i_1 = Bi_1^* - \chi_1$ ,  $\bar{B}i_M = Bi_M^* - \chi_M$ ,  $\phi_m = \xi_m \delta_m$ ,  $\mu_m = \xi_m \bar{R}_m$ ,  $\varphi_m = \xi_m (\sigma_m - \bar{R}_m \chi_{m+1})$ ,  $\eta_m = \xi_m (\gamma_m + \sigma_m \chi_m - \delta_m \chi_{m+1})$ ,  $\xi_m = \exp(\bar{l}_m (\chi_m - \chi_{m+1}))$ ,  $\delta_m = 1 + \bar{R}_m \chi_m$ ,  $\Theta_{m,0}(y) = \theta_{m,0}(y) \exp(-\chi_m y)$ ; se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_m}{\partial \tau}(y, \tau) = \bar{\alpha}_m \frac{\partial^2 \Theta_m}{\partial y^2}(y, \tau) + \psi_m \Theta_m(y, \tau) + \widehat{s}_m(y, \tau), & (y, \tau) \in (\bar{l}_{m-1}, \bar{l}_m) \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial y}(y, \tau) = \bar{B}i_1 \Theta_1(y, \tau), & y = 0, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_M}{\partial y}(y, \tau) = \bar{B}i_M \Theta_M(y, \tau), & y = 1, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \Theta_{m+1}(y, \tau) = \phi_m \Theta_m(y, \tau) + \mu_m \frac{\partial \Theta_m}{\partial y}(y, \tau), & y = \bar{l}_m, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_{m+1}}{\partial y}(y, \tau) = \eta_m \Theta_m(y, \tau) + \varphi_m \frac{\partial \Theta_m}{\partial y}(y, \tau), & y = \bar{l}_m, \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \Theta_m(y, \tau) = \Theta_{m,0}(y), & y \in [\bar{l}_{m-1}, \bar{l}_m], \tau = 0. \end{cases} \quad (4)$$

El sistema (4) se resuelve utilizando separación de variables y técnicas de Fourier. Esto da lugar a:

$$\Theta_m(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{m,n}(\tau) f_{m,n}(y), \quad (y, \tau) \in [\bar{l}_{m-1}, \bar{l}_m] \times \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

donde  $f_{m,n}(y) = A_{m,n} \cos(\omega_{m,n} y) + B_{m,n} \sin(\omega_{m,n} y)$  con  $A_{1,n} = 1$ ,  $B_{1,n} = \frac{\bar{B}i_1}{\omega_{1,n}}$  y

$$\begin{aligned} A_{m+1,n} &= \frac{\sin(\omega_{m,n} \bar{l}_m)}{\cos(\omega_{m+1,n} \bar{l}_m)} (\phi_m B_{m,n} - \mu_m \omega_{m,n} A_{m,n}) \\ &+ \frac{\cos(\omega_{m,n} \bar{l}_m)}{\cos(\omega_{m+1,n} \bar{l}_m)} (\phi_m A_{m,n} + \mu_m \omega_{m,n} B_{m,n}) - \tan(\omega_{m+1,n} \bar{l}_m) B_{m+1,n} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_{m+1,n} &= \sin(\omega_{m+1,n} \bar{l}_m) [\sin(\omega_{m,n} \bar{l}_m) (\phi_m B_{m,n} - \mu_m \omega_{m,n} A_{m,n})] \\ &+ \sin(\omega_{m+1,n} \bar{l}_m) [\cos(\omega_{m,n} \bar{l}_m) (\phi_m A_{m,n} + \mu_m \omega_{m,n} B_{m,n})] \\ &+ \frac{\cos(\omega_{m+1,n} \bar{l}_m)}{\omega_{m+1,n}} [\sin(\omega_{m,n} \bar{l}_m) (\eta_m B_{m,n} - \varphi_m \omega_{m,n} A_{m,n})] \\ &+ \frac{\cos(\omega_{m+1,n} \bar{l}_m)}{\omega_{m+1,n}} [\cos(\omega_{m,n} \bar{l}_m) (\eta_m A_{m,n} + \varphi_m \omega_{m,n} B_{m,n})]. \end{aligned} \quad (7)$$

Los parámetros  $\omega_{m,n}$  son los autovalores espaciales que se definen según:

$$\omega_{m,n} = \omega_{m,n}(\lambda_n) = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \psi_m}{\bar{\alpha}_m}} = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \bar{\nu}_m - \bar{\alpha}_m \chi_m^2}{\bar{\alpha}_m}} = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \bar{\nu}_m - \frac{Pe_m^2}{4\bar{\alpha}_m}}{\bar{\alpha}_m}}, \quad (8)$$

donde  $\lambda_n$  representan los autovalores temporales y son las infinitas soluciones de:

$$\tan(\omega_{M,n}(\lambda_n)) = \frac{\omega_{M,n}(\lambda_n) B_{M,n} - \bar{B}i_M A_{M,n}}{\bar{B}i_M B_{M,n} + \omega_{M,n}(\lambda_n) A_{M,n}}. \quad (9)$$

Las funciones temporales  $\bar{A}_{m,n}(\tau)$  se obtienen de:

$$\bar{A}_{m,n}(\tau) = \exp((\psi_m - \bar{\alpha}_m \omega_{m,n}^2) \tau) \left[ K_n + \int_0^\tau S_{m,n}(s) \exp((\bar{\alpha}_m \omega_{m,n}^2 - \psi_m) s) ds \right], \quad (10)$$

donde

$$S_{m,n}(\tau) = \frac{\int_{\bar{l}_{m-1}}^{\bar{l}_m} \widehat{s}_m(y, \tau) f_{m,n}(y) dy}{\int_{\bar{l}_{m-1}}^{\bar{l}_m} [f_{m,n}(y)]^2 dy} \quad \text{con} \quad \widehat{s}_m(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{m,n}(\tau) f_{m,n}(y). \quad (11)$$

Por último, la sucesión  $K_n$  se determina por:

$$K_n = \frac{\sum_{m=1}^M \frac{\Psi_m}{\bar{\alpha}_m} \int_{\bar{l}_{m-1}}^{\bar{l}_m} \Theta_{m,0}(y) f_{m,n}(y) dy}{\sum_{m=1}^M \frac{\Psi_m}{\bar{\alpha}_m} \int_{\bar{l}_{m-1}}^{\bar{l}_m} [f_{m,n}(y)]^2 dy} \quad \text{con} \quad \Psi_m = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m-1} (\varphi_i \phi_i - \eta_i \mu_i)}. \quad (12)$$

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Se propone un método explícito de diferencias finitas de segundo orden hacia adelante en el tiempo y centrado en el espacio donde  $\Delta x = 0,01 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$  son los pasos de discretización espacial y temporal.

**Ejemplo 1** *Se simula el proceso de transferencia para un cuerpo de Ni – Al – Cu – Ag, los parámetros térmicos se toman de [1] y los coeficientes de transferencia de calor por convección se calculan según [2]. Además, se consideran:  $M = 4$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $l_1 = 0,25 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0,50 \text{ m}$ ,  $l_3 = 0,75 \text{ m}$ ,  $t_\infty = 72000 \text{ s} = 20 \text{ h}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0,02 \text{ m/s}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = -0,0001 \text{ 1/s}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 0,1 \text{ m}$ ,  $T_{1,0}(x) = T_{2,0}(x) = T_{3,0}(x) = T_{4,0}(x) = 0$ . La fuente de generación de calor  $s(x, t)$  para  $t \in [0, t_\infty]$  y  $m = 1, 2, 3, 4$  está dada por:*

$$s(x, t) = s_m(x, t) = \frac{(M + m) \frac{\text{°C}}{\text{m}^2 \text{s}}}{t_\infty^2} (x - l_{m-1})(x - l_m) t (t - t_\infty), \quad x \in [l_{m-1}, l_m], \quad (13)$$

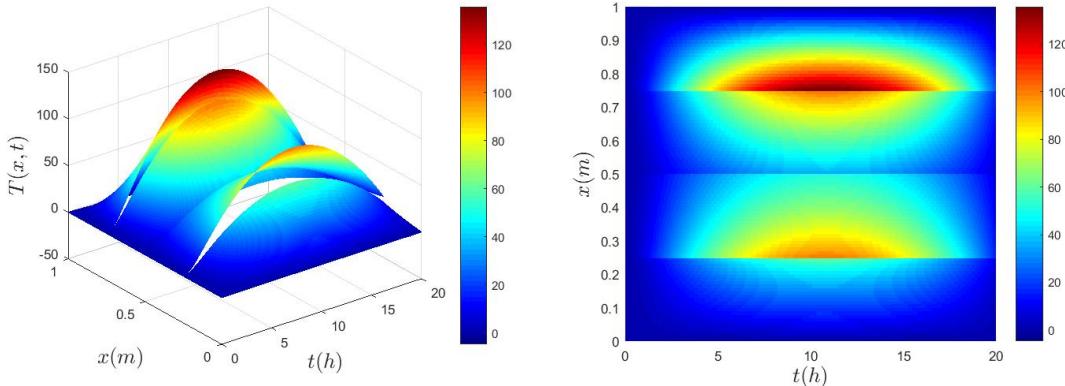


Figura 2: Distribución de temperatura para Ni – Al – Cu – Ag

En la Figura 2 se observa el perfil espacio-temporal de temperatura. Se muestran las discontinuidades de temperatura debidas al salto térmico en  $l_1 = 0,25 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0,50 \text{ m}$  y  $l_3 = 0,75 \text{ m}$ . Además, se puede ver que la temperatura máxima de cada capa se alcanza en  $t = 10 \text{ h}$ , lo que está directamente relacionado con la naturaleza de la fuente térmica. Por otro lado, se ve claramente que la temperatura alcanzada por la primera capa es menor que la alcanzada por la segunda capa, la temperatura de la segunda capa es menor que la de la tercera, y la temperatura de la tercera capa es menor que la temperatura alcanzada por la última capa. Esto se debe a que la plata es un material más conductivo y difusivo que el cobre, que a su vez es más conductivo y difusivo que el aluminio, que es más conductivo y difusivo que el níquel. Estos resultados son consistentes con la física del problema.

#### REFERENCIAS

- [1] Y.A. CENGEL, *Heat and mass transfer: a practical approach*. McGraw-Hill, New York (2007).
- [2] G.F. UMBRECHT, D. RUBIO, R. ECHARRI, C. EL HASI, *A technique to estimate the transient coefficient of heat transfer by convection*. Latin American Applied Research 50(3) (2020), pp. 229–234.
- [3] G.F. UMBRECHT, D. RUBIO, D.A. TARZIA, *Bilayer one-dimensional convection-diffusion- reaction-source problem: Analytical and numerical solution*. International Journal of Thermal Sciences 208 (2025), 109471.
- [4] W.-B. YUAN, N. YU, L.-Y. LI, Y. FANG, *Heat transfer analysis in multi-layered materials with interfacial thermal resistance*. Composite Structures 293 (2022), 115728.