

# OPERADOR DE REGULARIZACIÓN PARA LA DETERMINACIÓN DE LA FUENTE EN UNA ECUACIÓN PARABÓLICA COMPLETA

Guillermo F. Umbricht<sup>†‡</sup>, Diana Rubio<sup>◊</sup>, Domingo A. Tarzia<sup>†‡</sup> y María Inés Troparevsky<sup>△</sup>

<sup>†</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Godoy Cruz 2290, C1425FQB CABA, Argentina.

<sup>‡</sup> Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina, [guilleungs@yahoo.com.ar](mailto:guilleungs@yahoo.com.ar), [DTarzia@austral.edu.ar](mailto:DTarzia@austral.edu.ar)

<sup>◊</sup> Instituto de Tecnologías Emergentes y Ciencias Aplicadas (ITECA), UNSAM-CONICET, Centro de Matemática Aplicada, Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de San Martín, 25 de mayo y Francia, B1650 San Martín, Buenos Aires, Argentina, [drubio@unsam.edu.ar](mailto:drubio@unsam.edu.ar)

<sup>△</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Av. Paseo Colón 850, C1063ACV CABA, Argentina, [mariainestro@gmail.com](mailto:mariainestro@gmail.com)

**Resumen:** En este trabajo se estudia el problema de identificación del término fuente en una ecuación parabólica completa, a partir de mediciones ruidosas tomadas en un tiempo fijo arbitrario. La solución resulta ser inestable, por eso se introduce un operador de regularización. Se brinda una regla para el parámetro de estabilización y una cota para el error cometido en la estimación. Un ejemplo numérico ilustra la efectividad del enfoque.

**Palabras clave:** ecuación parabólica completa, problema inverso y mal planteado, operador de regularización.

2000 AMS Subject Classification: 58J35 - 80A23 - 35R25 - 47A52.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de la determinación de fuentes tiene aplicaciones en la conducción de calor [8], [9], la identificación de fisuras [12], la teoría electromagnética [2], la prospección geofísica [1] y la detección de contaminantes [7], entre otros. La identificación de la fuente suele ser un problema mal planteado en el sentido de Hadamard [5] ya que la solución no depende continuamente de los datos. Los métodos de regularización juegan un papel importante en la estimación de soluciones inestables. Los más utilizados son el método de regularización iterativa [6], el método simplificado de regularización de Tikhonov [4], el método de regularización modificado [8],[9],[10], el truncamiento de Fourier [3] y el método de mollifications [11]. Aquí se introduce un nuevo enfoque para la ecuación parabólica completa. Se proporciona una regla para la selección del parámetro de regularización y se obtiene una cota para el error de estimación. Finalmente se incluye un ejemplo numérico.

## 2. MARCO MATEMÁTICO

Se considera la estimación de la fuente  $f$  en una ecuación parabólica completa a partir de una función de datos ruidosos medidos en un instante de tiempo genérico  $t_0$ ,

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) - \beta \cdot \nabla(u(\mathbf{x}, t)) - \gamma u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t = 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = y(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t = t_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

donde  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\alpha^2, \gamma, t_0 \in \mathbb{R}^+$ ;  $\beta \in \mathbb{R}^n$ ;  $\Delta, \nabla$  denotan a los operadores Laplaciano y Nabla, respectivamente y “ $\cdot$ ” representa el producto interno usual en  $\mathbb{R}^n$ . Se supone que  $u(\cdot, t), f(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  son desconocidas, y que  $y \in L^2(\mathbb{R}^n)$  se puede medir con cierto nivel de ruido, es decir, la función de datos  $y_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$  satisface

$$\|y - y_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon, \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_M, \quad (2)$$

donde  $\epsilon_M$  representa el nivel máximo de ruido. El problema parabólico (1) se puede reescribir en el espacio de frecuencias usando la transformada de Fourier  $n$ -dimensional y su solución está dada por (ver [10])

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{1 - e^{-\Omega(\boldsymbol{\xi})t}}{\Omega(\boldsymbol{\xi})} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}), \quad \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \hat{y}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (3)$$

donde  $\widehat{f}(\cdot), \widehat{y}(\cdot)$  denotan la transformada de Fourier  $n$ -dimensional de la fuente y los datos, respectivamente,  $\boldsymbol{\xi}$  es la variable en frecuencia y

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\Omega(\boldsymbol{\xi})}{1 - e^{-\Omega(\boldsymbol{\xi})t_0}}, \quad \text{siendo } \Omega(\boldsymbol{\xi}) = \alpha^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + i\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\xi} + \gamma \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Luego, la antittransformada de Fourier  $n$ -dimensional se aplica a la expresión (3) para obtener la solución. Denotemos  $f_\epsilon$  a la fuente obtenida a partir de los datos ruidosos  $y_\epsilon$ . La ecuación (3) lleva a

$$\widehat{f}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi})\widehat{y}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}). \quad (5)$$

De las ecuaciones (3) y (5) se deduce  $\|\widehat{f} - \widehat{f}_\epsilon\| = \|\Phi(\boldsymbol{\xi})(\widehat{y}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{y}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}))\| = |\Phi(\boldsymbol{\xi})| \|\widehat{y}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{y}_\epsilon(\boldsymbol{\xi})\|$ . De (4) se observa que si  $\|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow \infty$  entonces  $|\Phi(\boldsymbol{\xi})| \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $|\Phi(\boldsymbol{\xi})|$  amplifica las componentes de alta frecuencia del error de los datos. Esto puede conducir a un error significativo en la estimación de la fuente, por lo tanto el problema está mal planteado en el sentido de Hadamard [5].

### 3. SOLUCIÓN REGULARIZADA

Una estrategia de regularización para el problema de determinación de fuentes consiste en proponer una familia de operadores lineales y acotados  $R_\lambda$  que satisfagan:  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} R_\lambda \widehat{y}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi})\widehat{y}(\boldsymbol{\xi}), \forall \widehat{y} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Se considera  $R_\lambda : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , definido por

$$R_\lambda \widehat{y}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\Phi(\boldsymbol{\xi})}{e^{\lambda^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2/4}} \widehat{y}(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \widehat{y} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (6)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de regularización y la función exponencial se introdujo con fines de estabilización. Dado que  $R_\lambda$  está acotado y  $R_\lambda \rightarrow \Phi$  cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , la familia  $\{R_\lambda, \lambda\}$  es una estrategia de regularización convergente para  $\Phi$  [3]. Luego, la transformada  $n$ -dimensional de la fuente se puede aproximar a partir de:

$$\widehat{f}_{\epsilon,\lambda}(\boldsymbol{\xi}) = R_\lambda(\boldsymbol{\xi}) \widehat{y}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\Phi(\boldsymbol{\xi})}{e^{\lambda^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2/4}} \widehat{y}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}). \quad (7)$$

Finalmente, se aplica la antittransformada de Fourier  $n$ -dimensional y se obtiene una expresión analítica para la fuente que depende de los datos, del nivel de ruido y del parámetro de regularización. La fuente estimada viene dada por:

$$f_{\epsilon,\lambda}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \frac{\Phi(\boldsymbol{\xi})}{e^{\lambda^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2/4}} \widehat{y}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (8)$$

### 4. ANÁLISIS DE ERRORES

En esta sección, se deriva una expresión analítica para una cota del error de estimación de la fuente.

**Lema 1** Para  $\omega \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\omega) > 0$  se verifica  $\left| \frac{1}{1-e^{-\omega}} \right| \leq \frac{1}{1-e^{-Re(\omega)}}$ . Por otro lado, la función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{1-e^{-x}}, & 1 \leq x, \end{cases}$  satisface  $f(x) \leq 2$ .

*Prueba.* Ver [10]. □

**Lema 2** La función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{ax^2+b}$  satisface  $f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$  para  $a, b > 0$ . Por otro lado, se verifica  $g(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} < 1, \forall x > 0$ .

*Prueba.* Es inmediata utilizando análisis en un variable. □

**Lema 3** Para  $0 < \lambda < 1$  y  $p > 0$ , se tienen las siguientes desigualdades:

$$\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}} \left| (1 + \boldsymbol{\xi}^2)^{-p/2} \left( 1 - e^{-\lambda^2 \boldsymbol{\xi}^2/4} \right) \right| \leq \max\{\lambda^2, \lambda^p\}, \quad \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}} \left| \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{(1 - e^{\boldsymbol{\xi}^2}) e^{\lambda^2 \boldsymbol{\xi}^2/4}} \right| \leq \frac{4}{\lambda^2}. \quad (9)$$

Prueba. Ver [11]. □

**Teorema 1** Para  $\alpha^2, \gamma, t_0 > 0, \beta, \xi \in \mathbb{R}^n$  y  $0 < \lambda < 1$  se tiene

$$\left| \frac{\Phi(\xi)}{e^{\lambda^2 \|\xi\|^2/4}} \right| \leq \frac{8}{\lambda^2} M, \quad \text{donde} \quad M = \left[ 1 + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\sqrt{\alpha^2 \gamma}} \right] \max \left\{ \frac{1}{t_0}, \alpha^2 + \gamma \right\}. \quad (10)$$

Prueba. Usando ecuaciones (4) se sigue que  $\left| \frac{\Phi(\xi)}{e^{\lambda^2 \|\xi\|^2/4}} \right| = \left| \frac{(\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta \cdot \xi + \gamma) e^{-\lambda^2 \|\xi\|^2/4}}{1 - e^{-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta \cdot \xi + \gamma)t_0}} \right|$ . Bajo el Lema 1, se obtiene  $\left| \frac{\Phi(\xi)}{e^{\lambda^2 \|\xi\|^2/4}} \right| \leq \frac{|\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta \cdot \xi + \gamma|}{1 - e^{-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma)t_0}} e^{-\lambda^2 \|\xi\|^2/4}$ . Ahora se consideran dos posibles casos.

Caso 1:  $0 < (\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma)t_0 < 1$ . Utilizando los Lemas 1,2,3 y la desigualdad triangular se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(\xi)}{e^{\lambda^2 \|\xi\|^2/4}} \right| &\leq \frac{|\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma + \beta \cdot \xi| (\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma) t_0}{(1 - e^{-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma)t_0}) (e^{\|\xi\|^2 \lambda^2/4}) (\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma) t_0} \\ &< 2 \left( \frac{|\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma + \beta \cdot \xi|}{(e^{\|\xi\|^2 \lambda^2/4}) (\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma) t_0} \right) \frac{\|\xi\|^2}{1 - e^{-\|\xi\|^2}} \frac{1 - e^{-\|\xi\|^2}}{\|\xi\|^2} \\ &< \frac{8}{\lambda^2} \left( \frac{1}{t_0} + \frac{|\beta| \|\xi\|}{(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma) t_0} \right) \frac{1 - e^{-\|\xi\|^2}}{\|\xi\|^2} < \frac{8}{\lambda^2} \left[ \frac{1}{t_0} + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2 t_0 \sqrt{\alpha^2 \gamma}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Caso 2:  $(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma)t_0 \geq 1$ . Utilizando los Lemas 1,2,3 y la desigualdad triangular se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(\xi)}{e^{\lambda^2 \|\xi\|^2/4}} \right| &\leq \frac{|\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma + \beta \cdot \xi|}{(1 - e^{-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma)t_0}) (e^{\|\xi\|^2 \lambda^2/4})} \\ &< \frac{8}{\lambda^2} \left( \frac{\alpha^2 \|\xi\|^2 (1 - e^{-\|\xi\|^2})}{\|\xi\|^2} + \gamma \frac{1 - e^{-\|\xi\|^2}}{\|\xi\|^2} \right) \left( 1 + \frac{|\beta| \|\xi\|}{\alpha^2 \|\xi\|^2 + \gamma} \right) \\ &< \frac{8}{\lambda^2} (\alpha^2 + \gamma) \left[ 1 + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\sqrt{\alpha^2 \gamma}} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

□

**Teorema 2** (Cota del error de estimación) Se considera el problema inverso de determinar  $f$  en (1). Sea  $f_{\epsilon, \lambda}$  la solución regularizada definida en (8). Supongamos que  $f$  está acotada en norma  $H^p(\mathbb{R}^n)$ , para algún valor  $0 < p < \infty$ ; es decir,  $\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 (1 + \|\xi\|^2)^p d\xi)^{1/2} < C$ . Entonces, si se elige  $\lambda = (\epsilon/\epsilon_M)^{1/p+2}$ , se tiene

$$\|f(x) - f_{\epsilon, \lambda}(x)\| \leq \max \left\{ (\epsilon/\epsilon_M)^{2/(p+2)}, (\epsilon/\epsilon_M)^{p/(p+2)} \right\} (C + 8\epsilon_M M). \quad (13)$$

Prueba. Teniendo en cuenta que  $f$  está acotada en norma  $H^p$  se sigue que

$$\left\| \widehat{f}(\xi) - \frac{\Phi(\xi)}{e^{\frac{\lambda^2 \|\xi\|^2}{4}}} \widehat{y}(\xi) \right\| = \left\| \widehat{f}(\xi) \left( 1 - e^{-\frac{\lambda^2 \|\xi\|^2}{4}} \right) \frac{(1 + \|\xi\|^2)^{\frac{p}{2}}}{(1 + \|\xi\|^2)^{\frac{p}{2}}} \right\| \leq \sup_{\|\xi\| \in \mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{p}{2}} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda^2 \|\xi\|^2}{4}} \right) C. \quad (14)$$

Usando la desigualdad de Parseval, la desigualdad triangular, la inecuación (14), el Lema 3 y el Teorema 1,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_{\epsilon, \lambda}(x)\| &= \left\| \widehat{f}(\xi) - \widehat{f_{\epsilon, \lambda}}(\xi) \right\| = \left\| \widehat{f}(\xi) - \frac{\Phi(\xi)}{e^{\frac{\lambda^2 \|\xi\|^2}{4}}} \widehat{y}(\xi) \right\| + \left\| \frac{\Phi(\xi)}{e^{\frac{\lambda^2 \|\xi\|^2}{4}}} \widehat{y}(\xi) - \widehat{f_{\epsilon, \lambda}}(\xi) \right\| \\ &\leq \max \{ \lambda^2, \lambda^p \} C + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \frac{\Phi(\xi)}{e^{\lambda^2 \|\xi\|^2/4}} \right| \|\widehat{y}(\xi) - \widehat{y_\epsilon}(\xi)\| \leq \max \{ \lambda^2, \lambda^p \} C + \frac{8}{\lambda^2} M \epsilon \\ &= \max \{ \lambda^2, \lambda^p \} C + 8 M \lambda^p \epsilon_M \leq \max \{ \lambda^2, \lambda^p \} C + 8 M \max \{ \lambda^2, \lambda^p \} \epsilon_M \\ &= \max \{ \lambda^2, \lambda^p \} (C + 8 \epsilon_M M) = \max \left\{ (\epsilon/\epsilon_M)^{2/(p+2)}, (\epsilon/\epsilon_M)^{p/(p+2)} \right\} (C + 8 \epsilon_M M). \end{aligned} \quad (15)$$

□

**Ejemplo 1** Se considera el problema (1) con  $\alpha^2 = 1$ ,  $\beta = (0, 0)$ ,  $\nu = 1$ ,  $t_0 = 0, 4$ ,  $\epsilon = 0, 05$ . Los parámetros usados para la regularización son  $p = 0, 6$ ,  $\epsilon_M = 1, 05$  y  $\lambda = \left(\frac{1}{21}\right)^{5/13}$ . La fuente a estimar es:

$$f(x, y) = \begin{cases} 10 + x - y, & -10 \leq x \leq 0, & 0 \leq y \leq 10 + x, \\ 10 + x + y, & -10 \leq x \leq 0, & -10 - x \leq y \leq 0, \\ 10 - x - y, & 0 \leq x \leq 10, & 0 \leq y \leq 10 - x, \\ 10 - x + y, & 0 \leq x \leq 10, & -10 + x \leq y \leq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

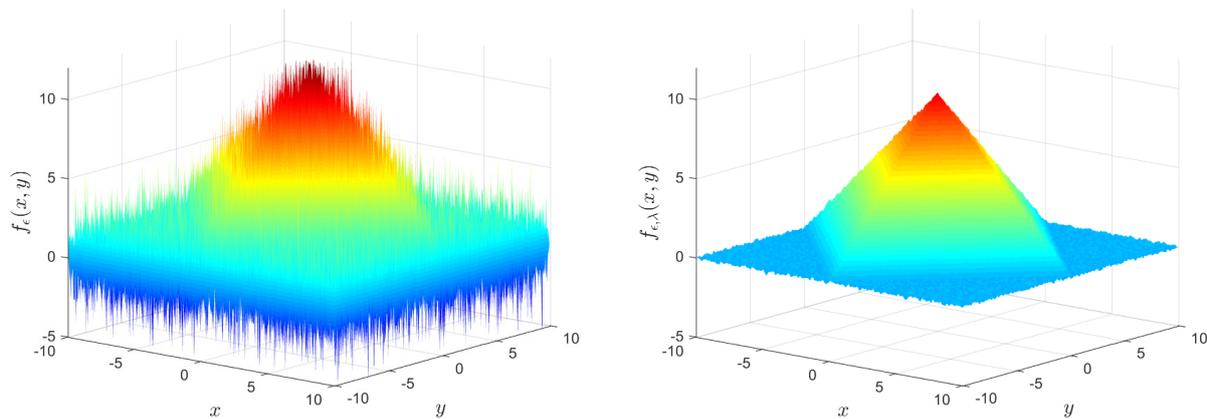


Figura 1: Fuentes, sin regularizar (izquierda); regularizada con  $p = 0, 6$  (derecha) para  $\epsilon = 0, 05$ .

El ejemplo presentado muestra un buen desempeño de la técnica de regularización, resultando en una estimación más precisa.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por SOARD / AFOSR FA9550-18-1-0523, el Programa de Investigación e Innovación Horizonte 2020 de la Unión Europea, el Acuerdo de Subvención Marie Skłodowska-Curie No. 823731 CONMECH y el Proyecto PIP 0275 del CONICET-UA, Rosario, ARG.

#### REFERENCIAS

- [1] G.C. BEROZA Y P. SPUDICH, *Linearized inversion for fault rupture behavior: application to the 1984 Morgan Hill, California, earthquake*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth 93(B6) (1988), pp. 6275–6296.
- [2] A. EL BADIA Y T. HA-DUONG, *An inverse source problem in potential analysis*. Inverse Problems 16(3) (2000), pp. 651–663.
- [3] H.W. ENGL, M. HANKE Y A. NEUBAUER, *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic, Boston, 1996.
- [4] C.L. FU, *Simplified Tikhonov y Fourier regularization methods on a general sideways parabolic equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics 167(2) (2004), pp. 449–463.
- [5] J. HADAMARD *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. The Mathematical Gazette 12(171) (1924), pp. 173–174.
- [6] B.T. JOHANSSON Y D. LESCNIC, *A procedure for determining a spacewise dependent heat source and the initial temperature*. Applicable Analysis: An International Journal 87(3) (2008), pp. 265–276.
- [7] G.S. LI, T.J. TAN, J. CHENG Y X.Q. WANG, *Determining magnitude of groundwater pollution sources by data compatibility analysis*. Inverse Problems in Science and Engineering 14(3) (2006), pp. 287–300.
- [8] G.F. UMBRICH Y D. RUBIO, *Sobre un método de regularización para identificar una fuente en una ecuación elíptica*. Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas 6(12) (2015), pp. 59–71.
- [9] G.F. UMBRICH, *Estimación de la fuente en una ecuación de Poisson: mediante un método de regularización*. Editorial Académica Española, Riga, Letonia, Unión Europea, 2019.
- [10] G.F. UMBRICH, *Identification of the source for full parabolic equation*. Mathematical Modelling and Analysis 26(3) (2021), pp: 339–357.
- [11] F. YANG Y C.L. FU, *A mollification regularization method for the inverse spatial-dependent heat source problem*. Journal of Computational and Applied Mathematics 255(C) (2014), pp. 555–567.
- [12] Y. ZENG Y J.G. ANDERSON, *A composite source model of the 1994 Northridge earthquake using genetic algorithms*. Bulletin of the Seismological Society of America 86(1B) (1996), pp. S71–S83.