

Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021



TRANSFERENCIA DE CALOR ESTACIONARIA EN MATERIALES MULTICAPA

Guillermo F. Umbricht^{†‡}, Diana Rubio[†] y Domingo A. Tarzia^{◇*}

[†]Centro de Matemática Aplicada, Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, B1650 San Martín, Buenos Aires, Argentina, diana.rubio@unsam.edu.ar

[‡]Instituto de Ciencias e Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Juan María Gutiérrez 1150, B1613 Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina, guilleungs@yahoo.com.ar

[◇]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar

*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina, Godoy Cruz 2290, C1425FQB Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Resumen:

En este trabajo se estudia el proceso de transferencia de calor estacionario a lo largo de una barra totalmente aislada en su superficie lateral de diámetro despreciable, compuesta por n tramos consecutivos de materiales diferentes perfectamente unidos. En el extremo izquierdo se impone una condición de Dirichlet que representa una fuente de temperatura constante y en el otro extremo una condición de Robin que modela la disipación de calor por convección. Se consideran las ecuaciones que modelan el problema y se obtiene una expresión analítica para la temperatura en cada punto de la barra. Ejemplos numéricos son incluidos para ilustrar las ideas utilizadas.

Palabras clave: *transferencia de calor, materiales multicapa.*

2000 AMS Subject Classification: 80A20 - 74A40.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de transferencia de calor en materiales multicapa o con interfaz sólido-sólido han sido muy estudiados en los últimos años debido a las múltiples y diferentes aplicaciones que se ha encontrado en la ciencia y la ingeniería [4]. Estos problemas tienen aplicaciones directas en distintas industrias, entre las más importantes, la metalúrgica [6], la tecnológica y electrónica [2], la automotriz [5], la aeroespacial y la aviación [1].

El avance de la tecnología requiere materiales con propiedades térmicas, eléctricas, magnéticas, acústicas y ópticas particulares, debido a eso se han estudiado las propiedades en la interfaz de diferentes combinaciones de materiales. Entre las diferentes propiedades en la interfaz, las que resultan de mayor interés en la bibliografía son: la tensión, la adhesión, la resistencia térmica, la corrosión, la conductividad eléctrica y conductividad térmica, entre otras.

En este trabajo se obtiene la solución analítica del problema estacionario de transferencia de calor en una barra compuesta por n tramos consecutivos de materiales diferentes, homogéneos e isotrópicos perfectamente unidos. La temperatura en el borde izquierdo de la barra está a temperatura constante y el borde derecho queda libre permitiendo el fenómeno de convección.

El proceso de transferencia con las mismas características considerando dos materiales y una interfaz fue tratado en [8]. En este trabajo se generaliza ese problema a n interfaces.

2. PROBLEMA CON DOS INTERFACES

Con la finalidad de simplificar la comprensión del resultado, se considera, antes de tratar el problema con n interfaces, la transferencia de calor en una barra con tres materiales y dos interfaces.

Se denota por u_1 [$^{\circ}C$] a la temperatura de la sección izquierda de la barra, u_2 [$^{\circ}C$] a la temperatura de la sección media de la barra, u_3 [$^{\circ}C$] a la temperatura de la sección derecha de la barra, F [$^{\circ}C$] al valor de la fuente puntual en $x = 0$, κ_1 , κ_2 y κ_3 [$W/m^{\circ}C$] a las conductividades térmicas de cada material, T_a [$^{\circ}C$] a la temperatura ambiente, h [$W/^{\circ}Cm^2$] al coeficiente de transferencia de calor por convección, L [m] a la longitud de la barra, l_1 [m] a la posición de la interfaz entre el material de la izquierda y el del centro y l_2 [m] a la posición de la interfaz entre el material del centro y el de la derecha.

El problema de interés, en este caso, se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_1''(x) = 0, & 0 < x < l_1, \\ u_2''(x) = 0, & l_1 < x < l_2, \\ u_3''(x) = 0, & l_2 < x < L, \\ u_1(x) = F, & x = 0, \\ u_1(x) = u_2(x), & x = l_1, \\ u_2(x) = u_3(x), & x = l_2, \\ \kappa_1 u_1'(x) = \kappa_2 u_2'(x), & x = l_1, \\ \kappa_2 u_2'(x) = \kappa_3 u_3'(x), & x = l_2, \\ \kappa_3 u_3'(x) = -h(u_3(x) - T_a), & x = L. \end{cases} \tag{1}$$

El siguiente resultado brinda la solución analítica para el problema con dos interfaces.

Lema 1 Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, T_a, F, h, l_1, l_2, L \in \mathbb{R}^+$ tal que $F > T_a$ y $L > l_2 > l_1$. Entonces la solución del sistema (1) viene dada por,

$$u_1(x) = F + \zeta x, \quad 0 < x \leq l_1, \tag{2}$$

$$u_2(x) = F + \zeta \left[l_1 \left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} x \right], \quad l_1 < x \leq l_2. \tag{3}$$

$$u_3(x) = F + \zeta \left[l_1 \left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) + l_2 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{\kappa_1}{\kappa_3} \right) + \frac{\kappa_1}{\kappa_3} x \right], \quad l_2 < x \leq L, \tag{4}$$

donde

$$\zeta = -\frac{F - T_a}{L\zeta_0}, \quad \text{con} \quad \zeta_0 = \frac{\kappa_1}{hL} + \frac{l_1\kappa_1}{L} \left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} \right) + \frac{l_2\kappa_1}{L} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_3} \right) + \frac{\kappa_1}{\kappa_3}. \tag{5}$$

Prueba. Dado que las derivadas segundas de las funciones u_i con $i = 1, 2, 3$ se anulan, se propone como solución $u_i = b_i + a_i x$, donde las constantes a_i y b_i se determinan mediante las condiciones de las distintas interfaces y de borde. Se utilizan dichas condiciones y se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} b_1 = F, \\ b_1 + a_1 l_1 = b_2 + a_2 l_1, \\ b_2 + a_2 l_2 = b_3 + a_3 l_2, \\ \kappa_1 a_1 = \kappa_2 a_2, \\ \kappa_2 a_2 = \kappa_3 a_3, \\ \kappa_3 a_3 = -h(b_3 + a_3 L - T_a). \end{cases} \tag{6}$$

El sistema (6) es lineal de orden 6×6 . Se lo resuelve mediante cualquier método apropiado y se obtiene (2)-(5) tal como se quería probar. \square

3. PROBLEMA CON n INTERFACES

Se considera ahora el problema con n interfaces y $n+1$ materiales. Se denota por u_i [$^\circ C$] a la temperatura de la sección correspondiente al i -ésimo material de la barra comenzando desde la izquierda, κ_i [$W/m^\circ C$] a la conductividad térmica del i -ésimo material y l_i [m] a la posición de la i -ésima interfaz ($i = 1, 2, \dots, n$).

Este problema se modela mediante la siguiente familia de sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} u_i''(x) = 0, & l_{i-1} < x < l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \\ u_1(x) = F, & x = 0, \\ u_i(x) = u_{i+1}(x), & x = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \kappa_i u_i'(x) = \kappa_{i+1} u_{i+1}'(x), & x = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \kappa_{n+1} u_{n+1}'(x) = -h(u_{n+1}(x) - T_a), & x = L. \end{cases} \tag{7}$$

El siguiente resultado brinda la solución analítica para el problema con n interfaces. A efectos de homogeneizar las notaciones, se considera $l_0 = 0$ y $l_{n+1} = L$.

Teorema 1 Sean κ_i con $i = 1, 2, \dots, n + 1$, l_i con $i = 1, 2, \dots, n$, $T_a, F, h, L \in \mathbb{R}^+$ tal que $F > T_a$ y $L > l_i > l_{i-1}$ para todo $i = 2, \dots, n$. Entonces la solución del sistema (7) viene dada por,

$$u_i(x) = b_i + a_i x, \quad l_{i-1} < x < l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1, \tag{8}$$

donde

$$\begin{cases} b_1 = F, \\ a_1 = -\frac{F - T_a}{L\zeta_0} < 0, \\ b_{i+1} = b_i + l_i a_i \left(1 - \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}}\right), & i = 1, 2, \dots, n, \\ a_{i+1} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}} a_i < 0, & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \tag{9}$$

donde ζ_0 está dado por:

$$\zeta_0 = \frac{\kappa_1}{hL} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\kappa_1}{\kappa_i} \frac{l_i - l_{i-1}}{L} > 0.$$

Prueba. Dado que las derivadas segundas de las funciones u_i con $i = 1, 2, \dots, n + 1$ se anulan, se propone como solución $u_i = b_i + a_i x$. Donde las constantes a_i y b_i se determinan mediante las condiciones de las distintas interfaces y de borde. Se utilizan dichas condiciones y se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} b_1 = F, \\ b_{i+1} = b_i + l_i(a_i - a_{i+1}), & i = 1, 2, \dots, n, \\ \kappa_i a_i = \kappa_{i+1} a_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n, \\ b_{n+1} = T_a - a_{n+1} \left(L + \frac{\kappa_{n+1}}{h}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Observando que $a_j = \frac{\kappa_i}{\kappa_j} a_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n + 1$, el sistema (10) se puede reescribir

$$\begin{cases} b_1 = F, \\ b_{i+1} = b_i + l_i a_1 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_i} - \frac{\kappa_1}{\kappa_{i+1}}\right), & i = 1, 2, \dots, n, \\ \kappa_i a_i = \kappa_{i+1} a_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n, \\ b_{n+1} = T_a - a_1 \kappa_1 \left(\frac{L}{\kappa_{n+1}} + \frac{1}{h}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Se reemplaza de manera recursiva a $b_1 = F$ en b_2 , b_2 en b_3 , ... , b_n en b_{n+1} y se obtiene (9) tal como se quería demostrar. □

4. EJEMPLOS

Ejemplo 1 A manera de ejemplo se consideran barras de distintos materiales con diferente cantidad de interfaces. Los datos utilizados para la realización de los ejemplos son: $L = 1\text{ m}$, $F = 100^\circ\text{C}$, $T_a = 25^\circ\text{C}$. El coeficiente de transferencia de calor h se determina para cada combinación de materiales según las ecuaciones (9)-(11) de [7]. Para ello, se supuso que el fluido disipativo es aire y que la barra tiene un diámetro de 1cm. Las conductividades térmicas de los diferentes materiales fueron tomados en promedio de [3] y se agrupan en el cuadro 1.

En el gráfico de la izquierda de la Figura 1 se puede visualizar los perfiles de temperatura para diferentes materiales considerando dos interfaces ($l_1 = 0,4\text{ m}$, $l_2 = 0,7\text{ m}$). Se aprecia que para el caso Ni-Cu-Ag la segunda interfaz es casi imperceptible, lo mismo ocurre con la primera interfaz en el caso Fe-Ni-Ag. Esto se debe a que las conductividades térmicas del cobre y la plata son similares como también lo son la del hierro y la del níquel.

En el gráfico de la derecha de la Figura 1 se puede visualizar los perfiles de temperatura para diferentes materiales considerando tres interfaces ($l_1 = 0,2 m, l_2 = 0,5 m, l_3 = 0,8 m$). Las dos configuraciones de materiales elegidas hacen que en este caso se aprecien bien las tres interfaces.

Materiales	Plomo	Hierro	Niquel	Aluminio	Cobre	Plata
Símbolo	Pb	Fe	Ni	Al	Cu	Ag
$\kappa [W/m^{\circ}C]$	35	73	90	204	386	419

Tabla 1: Conductividad térmica de diferentes materiales.

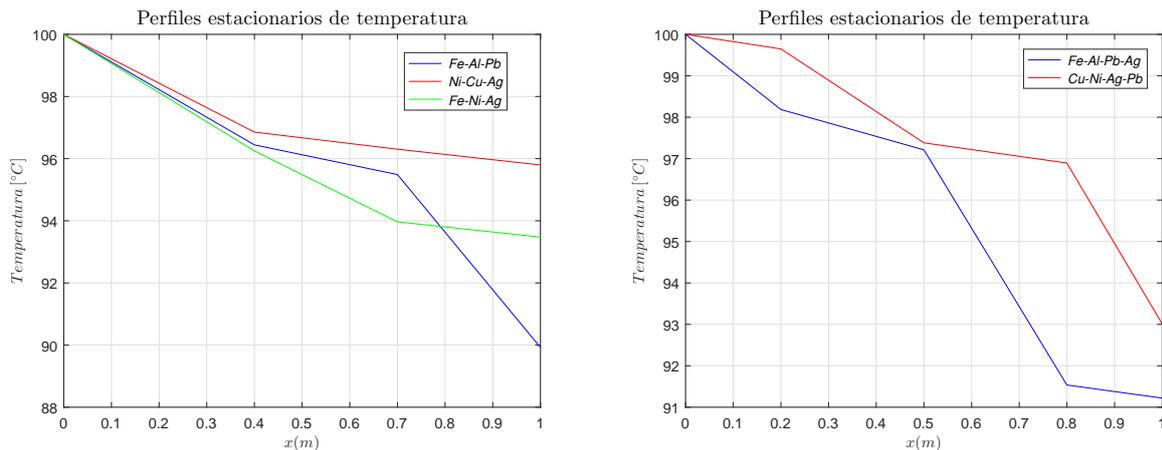


Figura 1: Perfil de temperatura para diferentes materiales. Con dos interfaces (izquierda) y tres interfaces (derecha).

5. CONCLUSIONES

Se considera un proceso de transferencia de calor estacionario en una barra constituida por n materiales diferentes en contacto, perfectamente unidos, con condiciones de borde apropiadas. Se obtiene una expresión analítica para la temperatura en cualquier punto de la barra. Ejemplos numéricos muestran la consistencia de la solución.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por SOARD/AFOSR a través de la subvención FA9550-18-1-0523, por el programa de investigación e innovación horizonte 2020 de la Unión Europea bajo el convenio de beca Marie Sklodowska-Curie No. 823731 CONMECH y por el proyecto PIP No. 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

- [1] V. BARTURKIN, *Micro-satellites thermal control-concepts and components*, Acta Astronautica, 56(1) (2005), pp.161-170.
- [2] D.G. CAHILL, W.K. FORD, K.E. GOODSON, G.D. MAHAN, A. MAJUMDAR, H.J. MARIS, R. MERLIN AND S.R. PHIIPOT, *Nanoscale thermal transport*, Journal of Applied Physics, 93(2) (2003), pp.793-818.
- [3] CENGEL, Y.A., *Heat and mass transfer. A practical approach*, McGraw-Hill, New York, 2007.
- [4] D.D.L. CHUNG, *Thermal interface materials*, Journal of Materials Engineering and Performance, 10(1) (2001), pp.56-59.
- [5] A.M. CLAUSING AND B.T. CHAO, *Thermal contact resistance in a vacuum environment*, Journal of Heat Transfer, 87(2) (1965), pp.243-250.
- [6] H.Y. MA, P.X. ZHU, S.G. ZHOU, J. XU, W.F. HUANG AND H.M. YANG, *Preliminary research on Pb-Sn-Al laminated composite electrode materials applied to zinc electrodeposition*, Advanced Materials Research, 150 (2010), pp.303-308.
- [7] G.F. UMBRICH, D. RUBIO, R. ECHARRI AND C. EL HASI, *A technique to estimate the transient coefficient of heat transfer by convection*, Latin American Applied Research, 50(3) (2020), pp.229-234.
- [8] G.F. UMBRICH, D. RUBIO AND D.A. TARZIA, *Estimation technique for a contact point between two materials in a stationary heat transfer problem*, Mathematical Modelling of Engineering Problems, 7(4) (2020), pp.607-613.