

Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021



DETERMINACIÓN DE LOS MATERIALES QUE COMPONEN UNA BARRA CON INTERFAZ SÓLIDO-SÓLIDO

Guillermo F. Umbricht^{†‡}, Diana Rubio[†] y Domingo A. Tarzia^{◇*}

[†]Centro de Matemática Aplicada, Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, B1650 San Martín, Buenos Aires, Argentina, diana.rubio@unsam.edu.ar

[‡]Instituto de Ciencias e Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Juan María Gutiérrez 1150, B1613 Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina, guilleungs@yahoo.com.ar

[◇]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar

*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina, Godoy Cruz 2290, C1425FQB Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Resumen:

El objetivo del trabajo es el de determinar los dos materiales desconocidos que componen una barra con interfaz sólido-sólido. Se considera un caso estacionario de transferencia de calor a lo largo de una barra totalmente aislada en su superficie lateral de diámetro despreciable compuesta por dos tramos consecutivos de materiales diferentes. En el extremo izquierdo se impone una condición de Dirichlet que representa una fuente de temperatura constante y en el otro extremo una condición de Robin que modela la disipación de calor por convección. Se estiman los coeficientes de conductividad térmica de ambos sólidos con dos sobre-condiciones diferentes: a) dos mediciones ruidosas de temperatura (una en la interfaz y la otra en el extremo derecho) y b) con una medición de temperatura en la interfaz y otra medición de flujo de calor en el borde derecho de la barra. Se dan dos ejemplos numéricos que ilustran las ideas utilizadas.

Palabras clave: *transferencia de calor, identificación de parámetros.*

2000 AMS Subject Classification: 80A20 - 80A23.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de transferencia de calor en materiales multicapa o con interfaz sólido-sólido han sido muy estudiados en los últimos años debido a las múltiples y diferentes aplicaciones que se ha encontrado en la ciencia y la ingeniería [4]. Estos problemas tienen aplicaciones directas en distintas industrias, entre las más importantes, la metalúrgica [10], la tecnológica y electrónica [2], la automotriz [5], la aeroespacial y la aviación [1].

La estimación de la conductividad térmica fue ampliamente abordada bajo diversos enfoques. Fue estudiada bajo técnicas numéricas de problemas inversos, ver por ejemplo [6],[9]. En [7] se realizó la estimación bajo condiciones particulares utilizando el método de gradiente conjugado. En [9] se utilizó el método de diferencias finitas con la misma finalidad. Por su parte en [14] se propone un modelo inverso lineal para estimar la dependencia con la temperatura de la conductividad térmica y en [15] se realiza lo mismo mediante la utilización de métodos iterativos. Otras estrategias interesantes de estimación pueden verse en [11],[12]. Problemas particulares de estimación de la conductividad térmica que tienen en cuenta medios multidimensionales, medios no homogéneos y cambios de fase se abordan en [3],[7],[8].

En este trabajo se estudia la estimación simultánea de las conductividades térmicas de una barra de diámetro despreciable y longitud conocida totalmente aislada compuesta por dos materiales perfectamente unidos con una fuente de temperatura constante en el borde izquierdo y con disipación por convección en el borde derecho. Se propone la estimación de los dos parámetros a partir de dos sobre-condiciones: a) dos mediciones de temperatura, una en la interfaz y otra en el borde derecho de la barra; b) de las mediciones de temperatura en la interfaz y del flujo de calor en el borde derecho.

2. PROBLEMA DIRECTO

Se estudia el problema estacionario de transferencia de calor de una barra de longitud L [m] y diámetro d [m] totalmente aislada en su superficie lateral. Debido a que $L \gg d$, se supone que la conducción es

unidimensional. Además, se considera que la barra está construida con dos tramos de materiales homogéneos e isótropos perfectamente unidos. El primer tramo de la barra construida tiene una longitud l [m] con $0 < l < L$, por lo que en el segundo tramo tiene una longitud de $L - l$. El borde izquierdo se encuentra controlado por una fuente puntual a temperatura constante y el borde derecho queda libre permitiendo el proceso de convección.

La Figura 1 representa esquemáticamente el problema de estudio

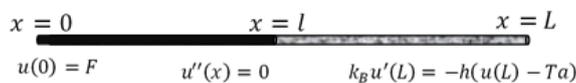


Figura 1: Esquema del Problema con Interfaz.

El problema de interés se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u''(x) = 0, & 0 < x < l, \\ u''(x) = 0, & l < x < L, \\ u(x) = F, & x = 0, \\ u(x^-) = u(x^+), & x = l, \\ \kappa_1 u'(x^-) = \kappa_2 u'(x^+), & x = l, \\ \kappa_2 u'(x) = -h(u(x) - T_a), & x = L, \end{cases} \tag{1}$$

donde u [$^{\circ}C$] es la temperatura de la barra, F [$^{\circ}C$] es el valor de la fuente puntual en $x = 0$, κ_1 y κ_2 [$W/m^{\circ}C$] son las conductividades térmicas de los materiales que componen la barra, T_a [$^{\circ}C$] representa la temperatura ambiente, h [$W/^{\circ}Cm^2$] es el coeficiente de transferencia de calor por convección y

$$u(l^-) = \lim_{x \rightarrow l^-} u(x), \quad u(l^+) = \lim_{x \rightarrow l^+} u(x).$$

Lema 1 Sean $\kappa_1, \kappa_2, T_a, F, h, l, L \in \mathbb{R}^+$ tal que $F > T_a$ y $L > l > 0$. Entonces la solución del sistema (1) viene dada por;

$$u(x) = \begin{cases} F + \frac{\kappa_2 h (T_a - F)}{\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 h L + (\kappa_2 - \kappa_1) h l} x, & 0 < x \leq l, \\ F + \frac{l(\kappa_2 - \kappa_1)(T_a - F)h}{\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 h L + (\kappa_2 - \kappa_1) h l} + \frac{\kappa_1 h (T_a - F)}{\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 h L + (\kappa_2 - \kappa_1) h l} x, & l < x \leq L. \end{cases} \tag{2}$$

Prueba. Detalles de la demostración y ejemplos numéricos pueden verse en [13]. □

3. PROBLEMA INVERSO (ESTIMACIÓN DE LAS CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS)

3.1. ESTIMACIÓN A PARTIR DE DOS MEDICIONES DE TEMPERATURA

El siguiente resultado indica cómo estimar las conductividades térmicas κ_1, κ_2 a partir de una medición de temperatura T_1 en la interfaz y otra T_2 en el borde derecho de la barra.

Teorema 1 Sean $T_a, F, h, L, T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $F > T_a$, T_1 y T_2 las temperaturas medidas en $x = l$ y $x = L$ respectivamente, que satisfacen $T_a < T_2 < T_1 < F$. Entonces la estimación de κ_1 y κ_2 viene dada por

$$\hat{\kappa}_1 = h l \frac{T_2 - T_a}{F - T_1}, \quad \hat{\kappa}_2 = h(L - l) \frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_2}. \tag{3}$$

Prueba. De la ecuación (2) se obtiene una expresión para los datos T_1, T_2 que dependen de los parámetros a estimar

$$T_1 = F + \frac{\hat{\kappa}_2 h(T_a - F)}{\hat{\kappa}_1 \hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_1 hL + (\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)hl}, \tag{4}$$

$$T_2 = F + \frac{l(\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)(T_a - F)h}{\hat{\kappa}_1 \hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_1 hL + (\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)hl} + \frac{\hat{\kappa}_1 h(T_a - F)}{\hat{\kappa}_1 \hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_1 hL + (\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)hl}L. \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) se despejan $\hat{\kappa}_1$ y $\hat{\kappa}_2$ con lo que se obtiene (3). □

3.2. ESTIMACIÓN A PARTIR DE UNA MEDICIÓN DE TEMPERATURA Y OTRA DE FLUJO

El siguiente resultado indica cómo estimar las conductividades térmicas κ_1, κ_2 a partir de una medición de temperatura T_1 en la interfaz y una medición de flujo térmico q en el borde derecho de la barra.

Teorema 2 Sean $T_a, F, h, L, T_1, q \in \mathbb{R}^+$ tal que $F > T_a, T_1$ es la temperatura medida en $x = l$ y q es el flujo medido en $x = L$, que satisfacen $T_a < T_1 < F$ y $0 < q < h(T_1 - T_a)$. Entonces la estimación de κ_1 y κ_2 viene dada por

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{ql}{F - T_1}, \quad \hat{\kappa}_2 = \frac{h(L - l)}{\frac{h}{q}(T_1 - T_a) - 1}. \tag{6}$$

Prueba. De la ecuación (2) se obtiene una expresión para los datos T_1, q que dependen de los parámetros a estimar

$$T_1 = F + \frac{\hat{\kappa}_2 h(T_a - F)}{\hat{\kappa}_1 \hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_1 hL + (\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)hl}, \tag{7}$$

$$q = -\kappa_2 u'(L) = \frac{-\hat{\kappa}_2 \kappa_1 h(T_a - F)}{\hat{\kappa}_1 \hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_1 hL + (\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)hl}L. \tag{8}$$

De las ecuaciones (7) y (8) se despejan $\hat{\kappa}_1$ y $\hat{\kappa}_2$ con lo que se obtiene (6). □

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

En este trabajo no se realizan mediciones experimentales, los datos se obtienen a partir de la solución del problema directo a la que se le agrega ruido para simular numéricamente las temperaturas medidas.

Ejemplo 1 Se considera la estimación de las conductividades térmicas para una barra de Plomo-Hierro. Los datos utilizados son: $L = 10\text{ m}, l = 4\text{ m}, d = 0,01\text{ m}, F = 100^\circ\text{C}, T_a = 25^\circ\text{C}, h = 10\text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$. Para los valores exactos de conductividades térmicas ($\kappa_{Pb} = 35\text{ W}/\text{m}^\circ\text{C}, \kappa_{Fe} = 73\text{ W}/\text{m}^\circ\text{C}$) las temperaturas en la interfaz y en el borde son: $u(l) = 71,08^\circ\text{C}$ y $u(L) = 50,30^\circ\text{C}$.

La siguiente tabla muestra los valores obtenidos para los parámetros estimados utilizando distintos valores de temperatura T_1 y T_2 cercanos a los valores exactos. Los resultados muestran, para la configuración utilizada, un error de a lo sumo 4% en la estimación de κ_1 y del 2% en la estimación de κ_2 .

$T_1 [^\circ\text{C}]$	70,5	70,6	70,7	70,8	70,9	71	71,1	71,2	71,3
$T_2 [^\circ\text{C}]$	49,8	49,9	50	50,1	50,2	50,3	50,4	50,5	50,6
$\hat{\kappa}_1 [\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}]$	33,62	33,87	34,12	34,38	34,63	34,89	35,15	35,41	35,67
$\hat{\kappa}_2 [\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}]$	71,88	72,17	72,46	72,75	73,04	73,33	73,62	73,91	74,20
$ \kappa_1 - \hat{\kappa}_1 /\kappa_1$	0,0392	0,0320	0,0248	0,0176	0,0103	0,0029	0,0044	0,0119	0,0194
$ \kappa_2 - \hat{\kappa}_2 /\kappa_2$	0,0152	0,0113	0,0073	0,0033	0,0005	0,0044	0,0085	0,0125	0,0164

Tabla 1: Ejemplo 1: Estimación y errores relativos de $\hat{\kappa}_1$ y $\hat{\kappa}_2$ para distintos valores de T_1 y T_2 .

Ejemplo 2 Se considera, nuevamente, la estimación de las conductividades térmicas para una barra de Plomo-Hierro. Los datos utilizados son los mismos que en el Ejemplo 1. Para los valores exactos de conductividades térmicas, la temperatura en la interfaz y el flujo en el borde son: $u(l) = 71,08^\circ\text{C}$ y $q = 292,97\text{ W}/\text{m}^2$.

La siguiente tabla muestra los valores obtenidos para los parámetros estimados utilizando distintos valores de temperatura T_1 y de flujo q cercanos a los valores exactos. Los resultados muestran, para la configuración utilizada, un error de a lo sumo 2 % en la estimación de κ_1 y del 3 % en la estimación de κ_2 .

$T_1 [^\circ\text{C}]$	70,5	70,6	70,7	70,8	70,9	71	71,1	71,2	71,3
$q [\text{W}/\text{m}^2]$	252,92	252,93	252,94	252,95	252,96	252,97	252,98	252,99	253,00
$\hat{\kappa}_1 [\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}]$	34,29	34,41	34,53	34,65	34,77	34,89	35,01	35,13	35,26
$\hat{\kappa}_2 [\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}]$	75,09	74,73	74,37	74,01	73,66	73,31	72,96	72,62	72,28
$ \kappa_1 - \hat{\kappa}_1 /\kappa_1$	0,0201	0,0167	0,0134	0,0099	0,0065	0,0030	0,0004	0,0039	0,0074
$ \kappa_2 - \hat{\kappa}_2 /\kappa_2$	0,0287	0,0237	0,0188	0,0139	0,0090	0,0043	0,0004	0,0051	0,0098

Tabla 2: Ejemplo 2: Estimación y errores relativos de $\hat{\kappa}_1$ y $\hat{\kappa}_2$ para distintos valores de T_1 y q .

5. CONCLUSIONES

Se considera un proceso de transferencia de calor estacionario en una barra constituida por dos materiales diferentes en contacto con condiciones de borde apropiadas. Mediante dos mediciones ruidosas de temperatura y considerando una medición ruidosa de temperatura y otra de flujo, se estiman las conductividades térmicas de los materiales y con ello se determina la composición de la barra. El ejemplo numérico estudiado indica que ambos métodos propuestos podrían resultar de utilidad para identificar los materiales con los que está construida la barra.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por SOARD/AFOSR a través de la subvención FA9550-18-1-0523, por el programa de investigación e innovación horizonte 2020 de la Unión Europea bajo el convenio de beca Marie Sklodowska-Curie No. 823731 CONMECH y por el proyecto PIP No. 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

- [1] V. BARTURKIN, *Micro-satellites thermal control-concepts and components*, Acta Astronautica, 56(1) (2005), pp.161-170.
- [2] D.G. CAHILL, W.K. FORD, K.E. GOODSON, G.D. MAHAN, A. MAJUMDAR, H.J. MARIS, R. MERLIN AND S.R. PHIIIPOT, *Nanoscale thermal transport*, Journal of Applied Physics, 93(2) (2003), pp.793-818.
- [3] S. CHANTASIRIWAN, *Steady-state determination of temperature-dependent thermal conductivity*, International Communications in Heat and Mass Transfer, 29(6) (2002), pp.811-819.
- [4] D.D.L. CHUNG, *Thermal interface materials*, Journal of Materials Engineering and Performance, 10(1) (2001), pp.56-59.
- [5] A.M. CLAUSING AND B.T. CHAO, *Thermal contact resistance in a vacuum environment*, Journal of Heat Transfer, 87(2) (1965), pp.243-250.
- [6] G.P. FLACH AND M.N. ÖZISIK, *Inverse heat conduction problem of simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity per unit volume*, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 16(2) (1989), pp.249-266.
- [7] C.H. HUANG, J.Y. YAN AND H.T. CHEN, *Function estimation in predicting temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 9(4) (1995), pp.667-673.
- [8] T. JURKOWSKI, Y. JARNY AND D. DELAUNAY, *Estimation of thermal conductivity of thermoplastics under moulding conditions: an apparatus and an inverse algorithm*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 40(17) (1997), pp.4169-4181.
- [9] T.T. LAM AND W.K. YEUNG, *Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 9(2) (1995), pp.335-344.
- [10] H.Y. MA, P.X. ZHU, S.G. ZHOU, J. XU, W.F. HUANG AND H.M. YANG, *Preliminary research on Pb-Sn-Al laminated composite electrode materials applied to zinc electrodeposition*, Advanced Materials Research, 150 (2010), pp.303-308.
- [11] N.N. SALVA AND D.A. TARZIA, *Simultaneous determination of unknown coefficients through a phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity*, JP Journal of Heat and Mass Transfer, 5(1) (2011), pp.11-39.
- [12] D.A. TARZIA, *The determination of unknown thermal coefficients through phase change process with temperature-dependent thermal conductivity*, International Communications in Heat and Mass Transfer, 25(1) (1998), pp.139-147.
- [13] G.F. UMBRICH, D. RUBIO AND D.A. TARZIA, *Estimation technique for a contact point between two materials in a stationary heat transfer problem*, Mathematical Modelling of Engineering Problems, 7(4) (2020), pp.607-613.
- [14] C.Y. YANG, *A linear inverse model for the temperature-dependent thermal conductivity determination in one-dimensional problems*, Applied Mathematical Modelling, 22(1) (1998), pp.1-9.
- [15] C.Y. YANG, *Estimation of the temperature dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problem*, Applied Mathematical Modelling, 23(6) (1999), pp.469-478.