



# MACI 2019 Vol. 7



# VII

## CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA, COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Luis R. Ceballos, Claudia M. Gariboldi y Bruno A. Rocca (Eds.)



Río Cuarto, Córdoba, Argentina  
8 al 10 de Mayo de 2019

# PROBLEMAS INVERSOS ASOCIADOS A UN PROCESO ESTACIONARIO DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Guillermo Umbricht<sup>†‡</sup>, Diana Rubio<sup>†</sup> y Domingo Tarzia<sup>◊</sup>

<sup>†</sup>*Centro de Matemática Aplicada, Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, San Martín, Buenos Aires, Argentina, [diana.rubio@unsam.edu.ar](mailto:diana.rubio@unsam.edu.ar)*

<sup>‡</sup>*Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Juan María Gutiérrez 1150, Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina, [guilleungs@yahoo.com.ar](mailto:guilleungs@yahoo.com.ar)*

<sup>◊</sup>*CONICET - Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina. [DTarzia@austral.edu.ar](mailto:DTarzia@austral.edu.ar)*

**Resumen:** En este trabajo se estudia un caso estacionario de transferencia de calor a lo largo de una barra totalmente aislada de diámetro despreciable compuesta por dos tramos consecutivos de materiales diferentes. En el extremo izquierdo se impone una condición de Dirichlet que representa una fuente de temperatura constante y en el otro extremo una condición de Robin que modela la disipación de calor por convección. Mediante la solución del problema directo e imponiendo una sobre-condición de flujo en el extremo derecho, se analiza dos problemas inversos diferentes: la estimación de la longitud de interfaz y la estimación de la conductividad térmica del primer material. Con la finalidad de conocer la dependencia de los parámetros estimados con respecto a los datos se realiza un análisis de sensibilidad y de elasticidad. Ejemplos numéricos son incluidos para ilustrar las ideas utilizadas.

**Palabras clave:** *transferencia de calor, problemas inversos, análisis sensibilidad.*

2000 AMS Subject Classification: 80A20 - 80A23 - 49Q12.

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se considera el problema estacionario de transferencia de calor de una barra de diámetro despreciable y longitud conocida totalmente aislada compuesta por dos materiales con una fuente de temperatura constante en el borde izquierdo y con disipación por convección en el borde derecho.

Se supone que sólo podemos tener información adicional del material y sus propiedades en el extremo derecho de la barra. Se desea estimar la posición de la interfaz ( $l$ ) y la conductividad térmica del material desconocido ( $k_1$ ) que se propone determinarlo a partir de una sobre-condición de flujo en el borde derecho.

Una de las herramientas utilizadas para medir la influencia local de un parámetro en los resultados de un determinado modelo es la función de sensibilidad [1]. Otra herramienta utilizada principalmente en economía es la función de elasticidad [2]. Mediante la función de sensibilidad y de elasticidad se analizará la dependencia local de los parámetros a estimar con respecto al flujo dado.

## 2. PROBLEMA DIRECTO

El problema de interés se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y condiciones de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u''(x) = 0, & 0 < x < l, \\ v''(x) = 0, & l < x < L, \\ u(x) = F, & x = 0, \\ u(x) = v(x), & x = l, \\ k_1 u'(x) = k_2 v'(x), & x = l, \\ -k_2 v'(x) = h(v(x) - T_a), & x = L. \end{array} \right. \quad (1)$$

donde  $u$  es la temperatura del material de la izquierda [°C] y  $v$  es la temperatura del material de la derecha [°C].  $F$  es el valor de la fuente puntual en  $x = 0$  [°C],  $k_1$  y  $k_2$  son las conductividades térmicas de cada material [W/m<sup>2</sup>°C].  $T_a$  representa la temperatura ambiente [°C] y  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección en  $x = L$  [W/m<sup>2</sup>°C]; además,  $L$  es la longitud de la barra [m] y  $l$  la posición de la interfaz entre los dos materiales [m].

**Lema 1** Sean  $k_1, k_2, T_a, F, h, l, L \in \mathbb{R} > 0$  tal que  $F > T_a$  y  $L > l$ . Entonces la solución del sistema (1) viene dada por,

$$u(x) = F + \frac{k_2 h (T_a - F)}{k_1 k_2 + k_1 h L + (k_2 - k_1) h l} x \tag{2}$$

$$v(x) = F + \frac{l(k_2 - k_1)(T_a - F)h}{k_1 k_2 + k_1 h L + (k_2 - k_1) h l} + \frac{k_1 h (T_a - F)}{k_1 k_2 + k_1 h L + (k_2 - k_1) h l} x \tag{3}$$

*Prueba.* Basta observar que  $u$  y  $v$  deben ser funciones lineales y se acoplan mediante las cuatro condiciones de contorno. □

**Ejemplo 1** Se considera una barra de longitud  $L = 1m$  compuesta por dos materiales diferentes en contacto y se grafica, a modo de ejemplo, el perfil espacial de temperaturas para distintos materiales y diferentes posiciones de puntos de contacto. En el gráfico de la izquierda se puede observar que si la ubicación de la interfaz se encuentra en el medio de la barra entonces la ubicación de los dos materiales a izquierda o a derecha no influye en el valor de temperatura que se alcanza en el borde derecho; esto no ocurre si el punto de contacto no está exactamente en el medio. En la figura de la derecha se aprecia el perfil para distintos materiales y diferentes ubicaciones de interfaz.

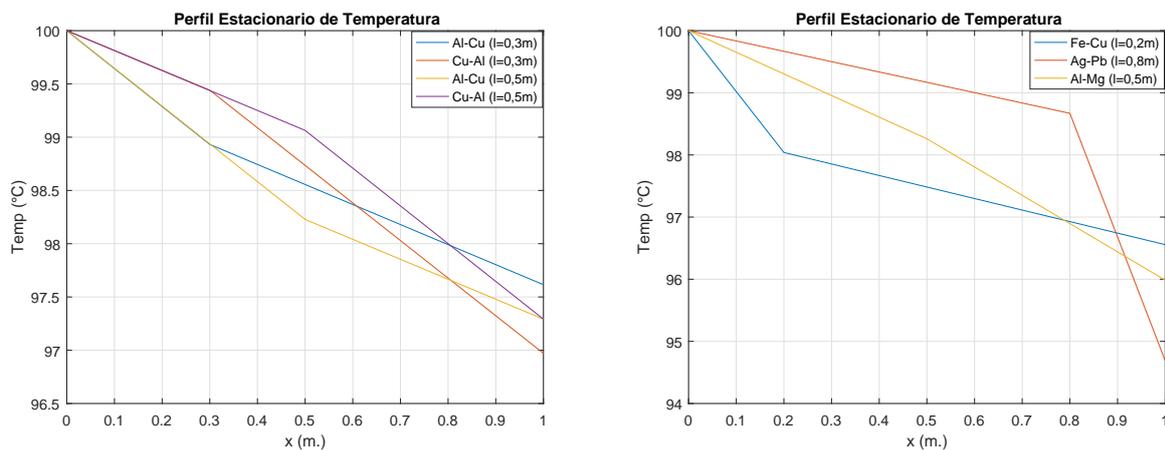


Figura 1: Perfil Estacionario de Temperatura para Diferentes Materiales.

### 3. PROBLEMAS INVERSOS

#### 3.1. ESTIMACIÓN DE LA UBICACIÓN DEL PUNTO DE CONTACTO

El siguiente resultado indica cómo estimar la posición del punto de contacto a partir del flujo  $Q$  en el extremo derecho. Cabe mencionar que el error de medición del flujo se debe a los errores de mediciones de temperaturas y es independiente de los valores de los parámetros del modelo.

**Teorema 1** Sean  $k_1, k_2, T_a, F, h, L, \hat{Q} \in \mathbb{R} > 0$  tal que  $F > T_a$ ,  $k_1 \neq k_2$  y  $\hat{Q}$  es el flujo de calor medido en  $x = L$  que satisface  $\frac{mh(F-T_a)}{Lh+m} < \hat{Q} < \frac{Mh(F-T_a)}{Lh+M}$  donde  $m = \min\{k_1; k_2\}$  y  $M = \max\{k_1; k_2\}$ . Entonces la estimación de  $\hat{l}$  viene dada por,

$$\hat{l} = \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \left( \frac{F - T_a}{\hat{Q}} - \frac{1}{h} - \frac{L}{k_2} \right) \tag{4}$$

*Prueba.* De la ley de Fourier ( $\hat{Q} = -k_2 v'(L)$ ) se despeja  $l$  y se obtiene (4). □

**Nota 1** Nótese que  $k_2 \neq k_1$  por suponer que los dos materiales son diferentes.

**Lema 2** El error en la estimación de  $\hat{l}$  en función del error en la medición de  $\hat{Q}$  está dada por:

$$|\hat{l} - l| = \frac{k_1 k_2}{|k_2 - k_1|} \frac{F - T_a}{\hat{Q} Q} |\hat{Q} - Q|.$$

**Nota 2** Este resultado indica que la estimación empeora cuando los materiales tienen conductividades similares y cuando aumenta la diferencia entre la fuente de temperatura  $F$  y la temperatura ambiente  $T_a$ .

**Ejemplo 2** Se considera la estimación de  $l$  para una barra  $Al - Cu$ . Los datos utilizados son:  $L = 10m, F = 100^\circ C, T_a = 25^\circ C, k_1 = 386W/m^2^\circ C, k_2 = 204W/m^2^\circ C, h = 10W/m^\circ C$ . Para  $l = 4m$  el valor de flujo exacto es  $Q = 536,5787178W/m^2$ . Para poder aplicar el Teorema 1, se considera  $Q \in (503, 2894737; 595, 6790123)$ . La siguiente tabla muestra los valores obtenidos de  $\hat{l}$  utilizando distintos valores de  $\hat{Q}$  cercanos al exacto.

$\hat{Q}$	534	535	536	537	538
$\hat{l}$	3,707	3,821	3,934	4,047	4,159

Tabla 1: Estimación de  $\hat{l}$  para distintos valores de  $\hat{Q}$ .

**Análisis de Sensibilidad y Elasticidad en la Estimación de  $l$**  Para analizar la dependencia local de  $l$  en función de  $Q$  se define la sensibilidad y la elasticidad de  $l$  en función de  $Q$  como:  $S_l(Q) = \left| \frac{\partial l}{\partial Q} \right| = \left| \frac{k_1 k_2 (F - T_a)}{(k_2 - k_1) Q^2} \right|$  y  $E_l(Q) = \left| Q \frac{S_l(Q)}{l(Q)} \right| = \left| \frac{h k_2 (F - T_a)}{Q (k_2 - L h) - h k_2 (F - T_a)} \right|$ . Utilizando los mismos valores del ejemplo 2 se grafica  $S_l(Q)$  y  $E_l(Q)$  que pueden apreciarse en la siguiente figura.

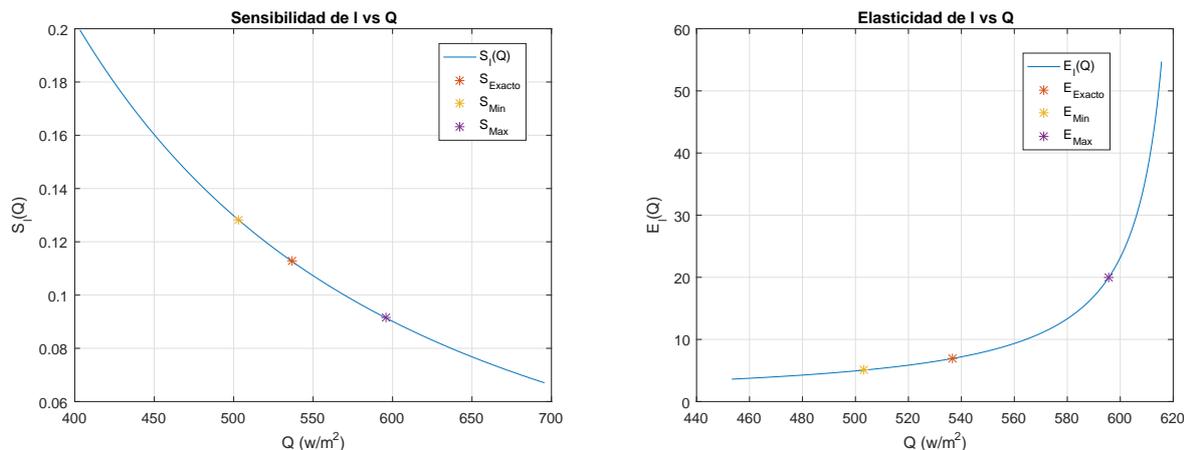


Figura 2: Sensibilidad y Elasticidad de  $l$  en función de  $Q$ .

Se puede observar que la sensibilidad es menor que 1 lo que significa que la solución no depende fuertemente de  $Q$ . Por tal motivo, un mínimo error en la medición de  $Q$  puede implicar mucho error en la medición de  $l$ . En el análisis de elasticidad se observa que un 1 % en el error de medición de  $Q$  se traduce aproximadamente en un error del 6 % en la estimación de  $l$ .

### 3.2. ESTIMACIÓN DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

Dado que la barra no presenta aislación en el borde derecho, se supone que es posible conocer ese material y su conductividad térmica. Por tal motivo, sólo se va a estimar  $k_1$  a partir del flujo  $Q$  en  $x = L$ .

**Teorema 2** Sean  $k_2, T_a, F, h, L, l, \hat{Q} \in \mathbb{R} > 0$  tal que  $F > T_a; L > l$  y  $\hat{Q}$  es el flujo de calor medido en  $x = L$  que satisfice  $0 < \hat{Q} < \frac{k_2 h (F - T_a)}{k_2 + h(L - l)}$ . Entonces la estimación de  $\hat{k}_1$  viene dada por,

$$\hat{k}_1 = \frac{Q h l k_2}{h k_2 (F - T_a) - Q k_2 - Q h (L - l)} \tag{5}$$

Prueba. De la ley de Fourier ( $\hat{Q} = -k_2 v'(L)$ ) se despeja  $k_1$  y se obtiene (5). □

**Ejemplo 3** Se considera la estimación de  $k_1$  para una barra  $Fe - Pb$ . Los datos utilizados son:  $L = 5m, l = 2m, F = 150^\circ C, T_a = 20^\circ C, k_2 = 35W/m^2^\circ C, h = 10W/m^\circ C$ . Para  $k_1 = 73W/m^2^\circ C$  el valor de flujo exacto es  $Q = 610,009183W/m^2$ . Para poder aplicar el Teorema 2 se considera  $Q \in (0; 700)$ . La siguiente tabla muestra los valores obtenidos para  $\hat{k}_1$  utilizando distintos valores de  $\hat{Q}$  cercanos al exacto.

$\hat{Q}$	609	610	611	612	613
$\hat{k}_1$	72,071	72,991	73,932	74,895	75,879

Tabla 2: Estimación de  $\hat{k}_1$  para distintos valores de  $\hat{Q}$ .

**Análisis de Sensibilidad y Elasticidad en la Estimación de  $k_1$**  Como en el caso de la estimación del punto de contacto se define la sensibilidad y la elasticidad de  $k_1$  en función de  $Q$  como:  $S_{k_1}(Q) = \left| \frac{\partial k_1}{\partial Q} \right| = \left| \frac{h^2 k_2^2 l (F - T_a)}{h k_2 (F - T_a) - k_2 Q - h (L - l) Q^2} \right|$  y  $E_{k_1}(Q) = \left| Q \frac{S_{k_1}(Q)}{k_1(Q)} \right| = \left| \frac{k_2 (F - T_a)}{h k_2 (F - T_a) - k_2 Q - h (L - l) Q^2} \right|$ . Utilizando los mismos valores del ejemplo 3 se grafica  $S_{k_1}(Q)$  y  $E_{k_1}(Q)$  que pueden apreciarse en la siguiente figura.

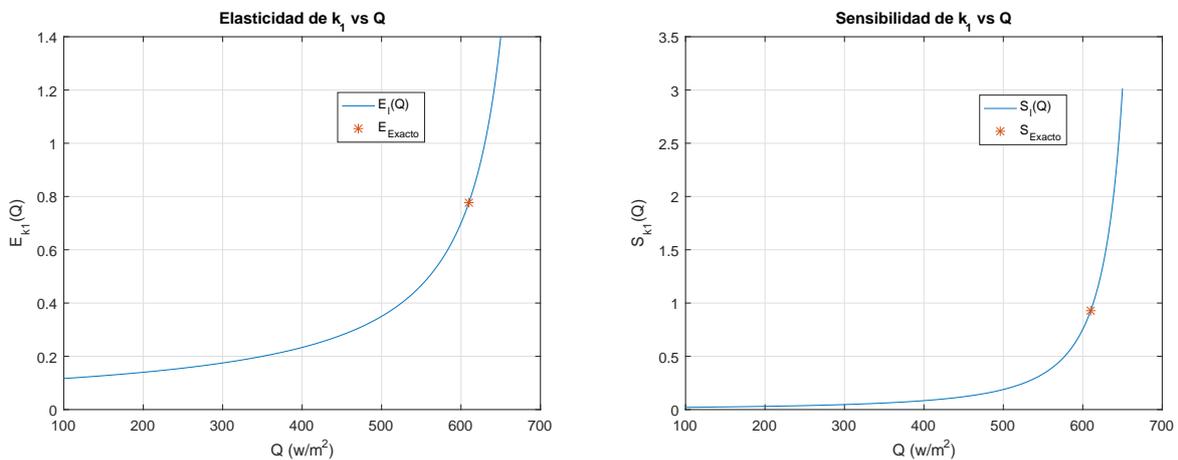


Figura 3: Sensibilidad y Elasticidad de  $k_1$  en función de  $Q$ .

Se puede observar que la sensibilidad no es tan baja como en el caso de  $l$  pero sigue tomando valores chicos. En el análisis de elasticidad se observa que un 1% en el error de medición de  $Q$  se traduce aproximadamente en un error del 1% en la estimación de  $k_1$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Se considera un proceso de transferencia de calor estacionario en una barra constituida por dos materiales diferentes en contacto con condiciones de borde apropiadas. Mediante una sobre-condición de flujo se estima la distancia de la interfaz y la conductividad térmica del primer material. A partir del análisis de sensibilidad y elasticidad, se concluye que para tener buena estimación en ambos casos es necesario que el error en las mediciones del flujo sea pequeño y para esto se necesita una buena precisión en las mediciones de temperatura, de otro modo la estimación de los parámetros estudiados distarán de sus valores reales.

#### REFERENCIAS

[1] H.T. BANKS, S. DEDIU, S.L. ERNSTBERGER, *Sensitivity functions and their uses in inverse problems*, J. Inverse and Ill-posed Problems, 15 (2007), pp.683-708.  
 [2] K. SYDSAETER, P.J. HAMMOND, *Mathematics for economic analysis*, Prentice Hall, New Jersey (1995).