

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

V SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 19 al 21 de Diciembre de 1994

26

Rosario - República Argentina
1995

CUADERNOS del Instituto de Matemática Beppo Levi No. 26 (1995)

V SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

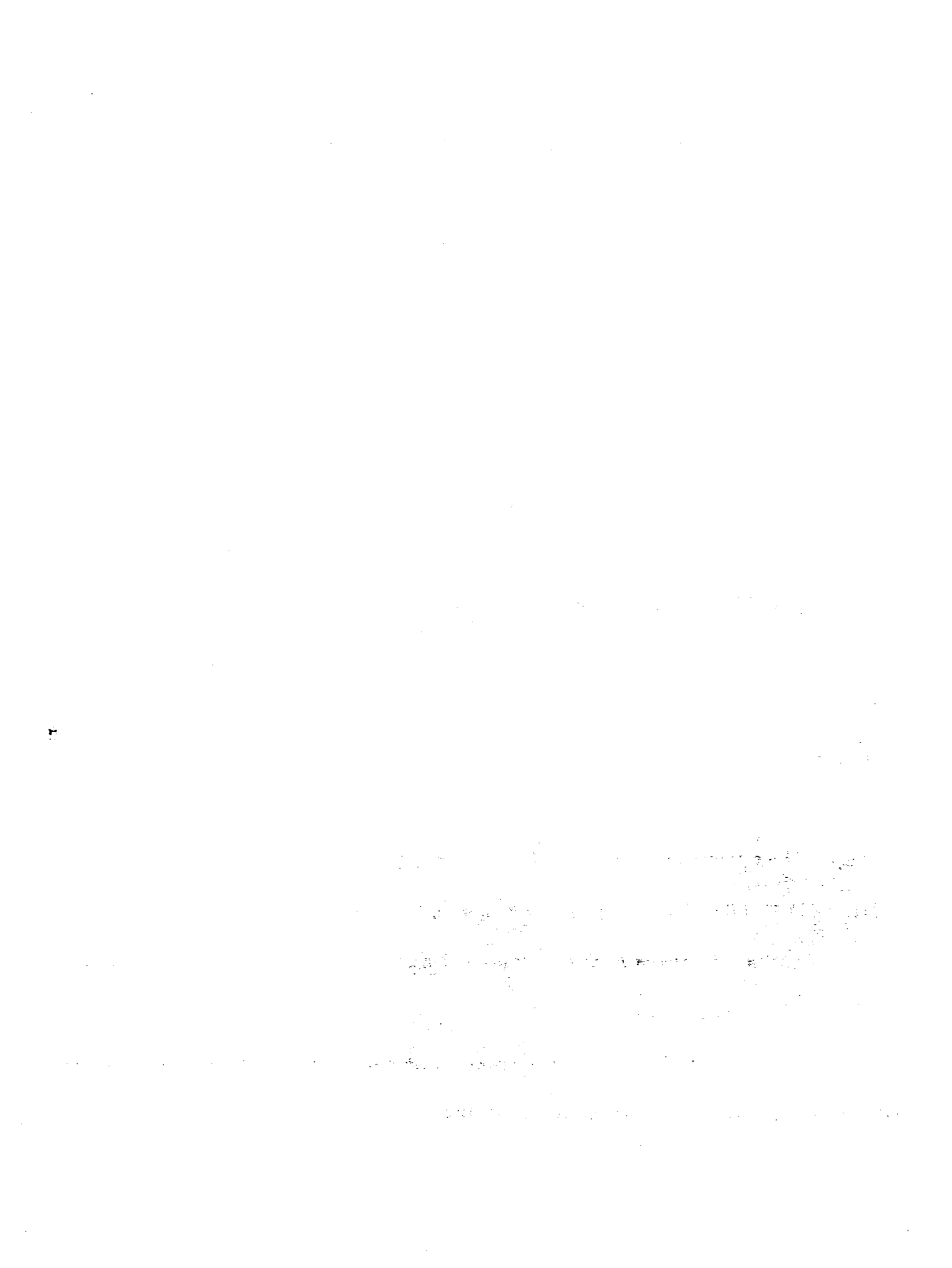
Y SUS APLICACIONES , (Vol. 2),

Rosario, 19 al 21 de diciembre de 1994.

D.A. TARZIA (Editor)

INDICE

PREFACIO	pág. iii—xi
C. LEDERMAN— N. WOLANSKI, "Un problema de frontera libre de la teoría de combustión I"	pág. 1—13
C. LEDERMAN— N. WOLANSKI, "Un problema de frontera libre de la teoría de combustión II"	pág. 15—25
A.R. GONZALEZ — D.A. TARZIA, "Determination of thermal coefficients in semi-infinite materials with mushy zone in phase-change process"	pág. 27—48
J.I. ETCHEVERRY, "Modelado numérico de la fusión y evaporación de materiales mediante haces de electrones"	pág. 49—58
A.C. BRIOZZO — D.A. TARZIA, "Solución exacta de un problema de frontera libre de flujos en un medio saturado-no saturado con difusividad variable"	pág. 59—72
P.R. MARANGUNIC, "El problema de Stefan simétrico a dos fases con sobre-enfriamiento"	pág. 73—88
D.A. TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan-Signorini con condiciones de contorno mixtas"	pág. 89—102
CONTENIDO de la Serie Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi	pág. 103



PREFACIO

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años (ver Anexo I), el *Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral* y el *Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario, PROMAR (CONICET-UNR)*, que se desarrolla en el *Instituto de Matemática "Beppo Levi"* de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, emprendieron, a través de los proyectos de investigación y desarrollo "*Aplicaciones de Problemas de Frontera Libre*" y "*Problemas de Frontera Libre de la Física Matemática*", la organización del interdisciplinario *V Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones*, realizado en la ciudad de Rosario (Argentina) durante el período del 19 al 21 de diciembre de 1994.

Esta quinta edición se realizó en memoria del Profesor Julio Esteban Bouillet, destacado investigador en el área de Ecuaciones Diferenciales, recientemente desaparecido, quien fuera miembro del Comité Organizador y colaborador entusiasta de estos Seminarios desde sus comienzos.

El Comité Organizador estuvo compuesto por J. E. BOUILLET (IAM y UBA, Buenos Aires), E. A. GARCIA (CNEA, Buenos Aires), D. A. TARZIA (UA y PROMAR, Rosario) (Coordinador) y L. T. VILLA (UNSa, Salta).

La Secretaría estuvo a cargo de L. R. BERRONE, A. BRIOZZO (Coordinadora), G. G. GARGUICHEVICH, P. R. MARANGUNIC, M. F. NATALE, E. SANTILLAN MARCUS y M. C. SANZIEL.

Este Seminario ha sido realizado, en parte, gracias a subsidios que a tal efecto otorgaron la Fundación Antorchas, la Fundación J. Prats y el CONICET. Además, se contó con el auspicio del Comité Argentino de Transferencia de Calor y Materia (CAMAT).

Además colaboraron las siguientes entidades : CIDCA (CIC-CONICET-UNLP), La Plata; CNEA (sede Constituyentes), Buenos Aires; FAMAF (UNC), Córdoba; FCEFQ (UNRC), Río Cuarto; FCEyN (UBA), Buenos Aires; IAM (CONICET),

Buenos Aires; IFLYSIB (UNLP-CONICET-CIC); INENCO (CONICET-UNSa), Salta; INIQUI (CONICET-UNSa), Salta. En el Seminario participaron 37 personas provenientes de 8 ciudades argentinas (ver Anexo II – Lista de Participantes).

Los objetivos del Seminario fueron :

- 1) Gestar un *encuentro bianual/trianual* de las personas y grupos de investigación que trabajan en problemas de frontera libre y temas conexos, en particular, en el problema de Stefan (cambio de fase), a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos.
- 2) Despertar el interés y promover el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*, no limitando el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia.

Esta quinta edición del Seminario estuvo constituida por conferencias sobre aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones (ver Anexo III-Programa). En años sucesivos, los temas versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numérico (no tratados en Seminarios anteriores) y los principios teóricos irán paulatinamente dando lugar a las aplicaciones. Se prevé la realización de una mesa redonda donde se invitará a industriales de distintas áreas para que expongan sobre los problemas no resueltos en sus respectivas empresas.

Para finalizar, quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a los investigadores encargados de la redacción de estas notas como asimismo a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA

Compilador

Rosario, Marzo 1995.

ANEXO I

PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Los problemas de frontera libre son aquellos problemas de contorno donde interviene además una incógnita (la "frontera libre") que separa dos o más regiones, y sobre la cual se conocen datos que dependen del modelo analizado. Según el número de dimensiones del espacio, en lugar de una superficie de separación se podrá tener una curva o un número finito de puntos.

Un ejemplo típico es el problema de Stefan (o problema de cambio de fase), que estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida (por ej. hielo y agua en procesos de fusión o solidificación). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. Sobre la superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, se impone una condición adicional que surge del principio de conservación de la energía. El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha frontera libre, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Otros ejemplos son :

- problemas de hidráulica, por ej. el del dique poroso, donde una superficie desconocida separa la zona seca de la zona húmeda;
- el problema del obstáculo, donde hay una zona de contacto entre el obstáculo y la configuración de equilibrio de la cuerda o membrana elástica;
- problemas de difusión-reacción gas-sólido en Ingeniería Química, donde la superficie incógnita separa la región del sólido ya atacada de la todavía no atacada;
- problemas de elasto-visco-plasticidad, problemas térmicos con pared semi-permeable, semiconductores bajo una unión P-N, problemas en medios porosos, problemas de mecánica de los fluidos, etc.

Entre las múltiples aplicaciones de estos problemas se pueden mencionar :

electropintura; envenenamiento y regeneración de catalizadores; combustión de sólidos; solidificación de aleaciones binarias; soldadura de metales; colada continua del acero; congelación de alimentos en la industria frigorífica; almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase; oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares, en caso de accidentes; procesos de ablación térmica; difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos, para el tratamiento médico de tumores mediante la aplicación de radiaciones; problemas de control óptimo ligados a procesos con cambio de fase; solidificación de suelos húmedos; derretimiento de glaciares; crecimiento de raíces de cultivo; etc.

El avance considerable que se ha obtenido en el desarrollo teórico de estos temas a nivel nacional, y sus variadas aplicaciones industriales que se encuentran en etapa inicial, impulsaron la realización de este V Seminario, prosiguiendo la línea de los ya concretados I y II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones (Rosario, 4-8/7/83 y 13-17/10/86, respectivamente) y III y IV Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones (Rosario, 11-15/10/1988 y 14-18/12/1992, respectivamente). El material correspondiente a los cuatro Seminarios anteriores ha sido publicado en la colección CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", números 11, 12, 13, 14, 17, 18, 23 y 24.

ANEXO II

LISTA DE PARTICIPANTES

Nelson ACOSTA, Fac. de Ingeniería, Univ. Nac. de Salta, Buenos Aires 177, (4400) Salta (Argentina).

Carlos M. ALMIRON, B^o 17 de agosto, Sector 3, Mz. "C", Casa N^o 16, (3400) Corrientes (Argentina).

Laura ARAGONE, Depto Matemática, Fac. de Cs. Ex., Ing y Agrim., Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario (Argentina).

Marcelo BALLARDINI, Pte. Roca 2374, (2000) Rosario (Argentina)

Lucio R. BERRONE, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
E-Mail: LRBLEVI@BIBFEI.EDU.AR

Juan Pablo BORGNA, Depto Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Buenos Aires (Argentina).

Angélica BOUCIGUEZ, INENCO, Fac. de Ciencias Exactas, Univ. Nac. de Salta, Buenos Aires 177, (4400) Salta (Argentina).

Adriana BRIOZZO, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina).
E-Mail: MATEMATI@UAUFCE.EDU.AR

Víctor CORTINEZ, Instituto de Mecánica Aplicada, Dpto Ingeniería Univ. Nac. del Sur, (8000) Bahía Blanca (Argentina).

Silvia DI MARCO, Depto Matemática, Fac. de Cs. Ex., Ing y Agrim., Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
E-Mail: DIMARCO@BIBFEI.EDU.AR

María DZIOBA, Depto Matemática, Fac. Cs. Ex. Fco. Qcas. y Nat., Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Ruta 36, km 601, 5800 Río Cuarto (Argentina).

Javier ETCHEVERRY, Instituto Argentino de Matemática, Viamonte 1636, 1er Cuerpo, 1055 Buenos Aires (Argentina). Depto. Mat. FCEN-UBA.
E-Mail: JETCIEV@MATE.DM.UBA.AR

Mónica A. FUSTER, Depto Matemática, Univ. Nac. del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca (Argentina).

Eduardo E. GARCIA, Depto Combustibles Nucleares, CNEA, Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (Argentina).

E-Mail : EGARCIA@CNEA.EDU.AR

Graciela G. GARGUICHEVICH, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina); y PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

E-Mail: MATEMATI@UAUFCE.EDU.AR

Adriana GONZALEZ, Depto Matemática, Fac. Cs. Ex. Fco. Qcas., Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Ruta 36, km 601, 5800 Río Cuarto (Argentina).

Víctor A. KUZ, IFLYSIB (UNLP-CONICET-CIC), Calle 59 No. 789, Casilla de Correo 565, 1900 La Plata (Argentina). E-Mail: VAKUZ@IFLYSI.EDU.AR

Pedro LAMBERTI, FAMAFA, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaiso y R. Martinez, 5000 Córdoba (Argentina).

E-Mail: LAMBERTI@FAMAFA.EDU.AR

Claudia LEDERMAN, Depto. Matemática, Fac. De Cs. Ex. y Nat. UBA, Ciudad Universitaria, Pab. 1, (1428) Buenos Aires (Argentina).

E-Mail: CLEDERMA@MATE.DM.UBA.EDU.AR

Pablo LOTITO, Instituto Politécnico Superior, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

E-Mail: LOTITO@BIBFEI.EDU.AR

Elina M. MANCINELLI, Depto Matemática, Fac. de Cs. Ex., Ing y Agrim., Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

Pedro R. MARANGUNIC, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

E-Mail: PMARANGU@BIBFEI.EDU.AR

Rodolfo H. MASCHERONI, CIDCA, Calle 47 y 116, 1900 La Plata (Argentina).

Ma. Fernanda NATALE, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina).

E-Mail: MATEMATI@UAUFCE.EDU.AR

Leticia I. PETRICH, Fac. de Cs. Ex. y Nat. y Agrim. (UNNE), 9 de Julio 1449, (3400) Corrientes (Argentina).

Domingo PRATO, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaiso y R. Martinez, 5000 Córdoba (Argentina).
E-Mail: PRATO@FAMAF.EDU.AR

Juan C. REGINATO, Depto Física, Fac. Cs. Ex. Fco. Qcas. y Nat., Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Ruta 36, km 601, 5800 Río Cuarto (Argentina).
E-Mail: REGINATO@UNRCC.EDU.AR

Gabriela REYERO, Depto Matemática, Fac. de Cs. Ex., Ing y Agrim., Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
E-Mail: REYERO@BIBFEI.EDU.AR

Julio ROSSI, Depto Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Buenos Aires (Argentina).
E-Mail: JROSSI@MATE.DM.UBA.AR

Gustavo SANCHEZ SARMIENTO, Depto Física, Fac. de Ingeniería, Univ. de Buenos Aires, Buenos Aires (Argentina).

Eduardo SANTILLAN MARCUS, Depto Matemática, Fac. de Cs. Ex., Ing y Agrim., Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina); y Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina).
E-Mail: MATEMATI@UAUFCE.EDU.AR

Ma. Cristina SANZIEL, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

Domingo A. TARZIA, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina); y PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
E-Mail: TARZIA@UAUFCE.EDU.AR

Ma. Ofelia TIFNI, Fac. de Cs. Ex. y Nat. y Agrim. (UNNE), 9 de Julio 1449, (3400) Corrientes (Argentina).

Cristina V. TURNER, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaiso y R. Martinez, 5000 Córdoba (Argentina).
E-Mail: TURNER@MATE.UNCOR.EDU

Luis T. VILLA, INIQUI (CONICET-UNSa), Fac. de Ciencias Tecnológicas, Univ. Nac. de Salta, Buenos Aires 177, 4400 Salta (Argentina).

Noemí WOLANSKI, Depto Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Bs. As. (Argentina).
E-Mail:WOLANSKI@MATE.DM.UBA.AR

ANEXO III

PROGRAMA DEL SEMINARIO

Lunes 19 de Diciembre

- L. T. Villa – H. Quiroga, "Modelos de frontera libre en transformaciones fluido – sólido – reactivo".
- E. A. García, "Método de frontera móvil para simular la oxidación de circonio a la temperatura de fusionamiento de un reactor nuclear de potencia".
- C. V. Turner, "El problema de Stefan a una fase para un líquido sobrenfriado con una condición convectiva en el borde fijo".
- P. R. Marangunic, "El problema de Stefan simétrico a dos fases con sobre-enfriamiento".

Martes 20 de Diciembre

- D. A. Tarzia, "Comportamiento asintótico en el problema de Stefan a una fase con una condición convectiva en el borde fijo".
- A. C. Briozzo, "Soluciones exactas en problemas de frontera libre con coeficiente de difusión no lineal".
- J. I. Etcheverry, "Sobre un método numérico para resolver un problema de contorno para $u_t = \alpha u_{xx}$ ".
- L. R. Berrone, "Mínimo de funciones armónicas en dominios convexos con condiciones mixtas de contorno".
- R. M. Mascheroni, "Dos problemas de frontera libre acoplados: solidificación con simultánea sublimación".
- A. M. González, "Determinación de coeficientes térmicos en materiales semi-infinitos con zona pastosa".
- M. C. Sanziel, "Análisis numérico de problemas de Stefan con fuente de energía interna".
- D. A. Tarzia, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan-Signorini con condiciones mixtas de contorno".

Domingo PRATO, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaiso y R. Martinez, 5000 Córdoba (Argentina).

E-Mail: PRATO@FAMAF.EDU.AR

Juan C. REGINATO, Depto Física, Fac. Cs. Ex. Fco. Qcas. y Nat., Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Ruta 36, km 601, 5800 Río Cuarto (Argentina).

E-Mail: REGINATO@UNRCC.EDU.AR

Gabriela REYERO, Depto Matemática, Fac. de Cs. Ex., Ing y Agrim., Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

E-Mail: REYERO@BIBFEI.EDU.AR

Julio ROSSI, Depto Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Buenos Aires (Argentina).

E-Mail: JROSSI@MATE.DM.UBA.AR

Gustavo SANCHEZ SARMIENTO, Depto Física, Fac. de Ingeniería, Univ. de Buenos Aires, Buenos Aires (Argentina).

Eduardo SANTILLAN MARCUS, Depto Matemática, Fac. de Cs. Ex., Ing y Agrim., Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina); y Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina).

E-Mail: MATEMATI@UAUFCE.EDU.AR

Ma. Cristina SANZIEL, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

Domingo A. TARZIA, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina); y PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).

E-Mail: TARZIA@UAUFCE.EDU.AR

Ma. Ofelia TIFNI, Fac. de Cs. Ex. y Nat. y Agrim. (UNNE), 9 de Julio 1449, (3400) Corrientes (Argentina).

Cristina V. TURNER, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaiso y R. Martinez, 5000 Córdoba (Argentina).

E-Mail: TURNER@MATE.UNCOR.EDU

Luis T. VILLA, INIQUI (CONICET-UNSa), Fac. de Ciencias Tecnológicas, Univ. Nac. de Salta, Buenos Aires 177, 4400 Salta (Argentina).

Noemí WOLANSKI, Depto Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Bs. As. (Argentina).

E-Mail: WOLANSKI@MATE.DM.UBA.AR

Miércoles 21 de Diciembre

- **N. Wolanski, "Un problema de frontera libre proveniente de la teoría de combustión. Parte I".**
- **C. Lederman, "Un problema de frontera libre proveniente de la teoría de combustión. Parte II".**
- **V. A. Kuz, "Dinámica de la condensación de un vapor saturado".**
- **J. I. Etcheverry, "Modelo numérico de umbrales de fusión de metales irradiados por un cañón de electrones".**
- **A. C. Bouciguez, "Análisis térmico y solución numérica al problema de transferencia de calor en dos fases".**
- **J. C. Reginato, "Toma de agua y crecimiento de raíces de cultivo".**
- **G. Sánchez Sarmiento, "Determinación numérica del perfil de refractario erosionado y de la acumulación de materiales adheridos en un crisol de alto horno".**



UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE DE LA TEORÍA DE COMBUSTIÓN I

C. LEDERMAN Y N. WOLANSKI

1. Introducción.

Es nuestro propósito en estas notas presentar un modelo matemático de propagación de llamas laminares que se deduce a partir de una serie de simplificaciones aplicables a este tipo de problemas de combustión. En esta presentación seguiremos la exposición de Buckmaster y Ludford en [BL2].

Una característica de estos procesos es que admiten ondas viajeras, es decir perfiles que viajan en el tiempo sin deformarse, a velocidad constante respecto del medio. Comentaremos en consecuencia los resultados conocidos respecto de la existencia y comportamiento de estas ondas, particularmente en el caso multidimensional. Uno de los problemas naturales es el de la estabilidad de estas ondas viajeras. Presentaremos aquí los últimos resultados conocidos en este sentido.

Finalmente trataremos el problema asintótico que se obtiene al considerar grandes energías de activación. En la segunda parte de esta exposición (cfr. [LW]), presentaremos resultados relacionados con la existencia, regularidad y comportamiento asintótico de este problema de frontera libre. En particular comentaremos los resultados que hemos obtenido respecto de la estabilidad de las ondas viajeras (cfr. [CLW1]). Por otro lado, hemos estudiado la

Parcialmente financiado por la Universidad de Buenos Aires mediante el subsidio EX117. La Dra. Wolanski es miembro del CONICET.

generalización a dos fases de este problema de frontera libre, que no había sido tratado previamente en la literatura (cfr. [CLW2]). En [LW] comentaremos sobre los resultados que hemos obtenido para este problema.

2. Presentación del modelo.

En este trabajo nos limitaremos a presentar en forma sintética las ecuaciones que gobiernan fenómenos de combustión cuya formulación matemática es relativamente simple. Para ello hay ciertas suposiciones sobre el fenómeno en cuestión como números de Mach pequeños que hacen que estas ecuaciones no puedan describir, por ejemplo, detonaciones. Sin embargo han sido consideradas adecuadas para describir lo que se conocen como ondas de deflagración.

Seguiremos aquí la presentación de Buckmaster y Ludford en [BL2]. Para una exposición más extensiva de los modelos de combustión referimos al lector interesado a los libros [BL1] y [B].

Supondremos que la mayor parte de la mezcla consiste de un compuesto inerte (por ejemplo, nitrógeno). Las propiedades de este compuesto son las que determinan las de la mezcla (por ejemplo, viscosidad, calor específico). Los componentes reactantes y sus productos están muy diluïdos en este “baño” inerte. De modo que en las ecuaciones de conservación de masa y momento se toman la densidad y velocidad de la mezcla como si fuera un sólo compuesto. Del mismo modo, se considera una sólo ecuación para el balance de energía, aunque considerando el calor liberado por las reacciones químicas.

Para simplificar el modelo se hacen las siguientes observaciones. Como en los problemas que se consideran las temperaturas son muy altas respecto de las velocidades (estas consideraciones excluyen por supuesto el caso de detonaciones), un número de Mach característico es muy pequeño. Esto permite observar que la presión involucrada en el balance térmico es el término principal de la descomposición asintótica con respecto al número de Mach, mientras que la presión involucrada en la conservación de momento es el término de orden 1. Por lo tanto, las pequeñas variaciones espaciales de presión que dan lugar a las bajas velocidades pueden suponerse como presentes únicamente en este término. Es decir, se reemplaza la presión por un

par de presiones independientes una para cada ecuación y, para el balance de energía supondremos presión constante.

Por otro lado, la única forma significativa de energía es la térmica (también debido a las bajas velocidades). Del mismo modo la transformación de energía cinética en energía térmica por disipación en el medio viscoso también se considera despreciable. Considerando asimismo al calor específico y a la densidad del medio como constantes, se encuentra la siguiente ecuación para la temperatura T :

$$(2.1) \quad \rho c \frac{DT}{Dt} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = q$$

donde q es el calor liberado por unidad de volumen de fluido por la reacción química. Discutiremos la forma de q más adelante.

La velocidad que aparece en la derivada total se obtiene de las ecuaciones de conservación de masa y de momento que han quedado desacopladas de esta ecuación por las consideraciones sobre la presión antes descriptas.

Consideremos ahora los componentes individuales de la mezcla. Para hacer la exposición más sencilla supondremos que estamos en la presencia de una reacción de un paso, con un combustible y un oxidante que consideraremos en forma conjunta como un compuesto diluido en el baño inerte. De modo que sólo debemos considerar el comportamiento de Y , la fracción de masa de este compuesto, es decir, ρY es la densidad de masa del compuesto. Conservación de masa da lugar a la ecuación,

$$\rho \frac{DY}{Dt} - \nabla \cdot (\mu \nabla Y) = \dot{\nu}$$

donde $\dot{\nu}$ es la razón de producción de masa del compuesto por unidad de volumen. Para esta cantidad se tiene la siguiente relación,

$$\dot{\nu} = -mk(T)\rho^\gamma Y^\delta (= -m\omega)$$

donde γ y δ son constantes positivas, ω es la velocidad de la reacción, y m es la masa molecular del compuesto. La constante $k(T)$ está dada por una ley empírica conocida como Ley de Arrhenius, a saber,

$$k = BT^\alpha e^{-\frac{E}{RT}}$$

donde B, α y E son constantes positivas. E se conoce como energía de activación.

Finalmente, el calor liberado q es proporcional a la velocidad de reacción. Es decir,

$$q = Q\omega$$

con $Q > 0$.

Pasando a variables adimensionales se obtiene el sistema,

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} - \Delta u &= \Omega \\ \rho \frac{Dv}{Dt} - \frac{1}{\mathcal{L}} \Delta v &= -\Omega \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L} = \frac{\lambda}{\mu c}$ es el llamado número de Lewis, y $\Omega = \mathcal{D}v^\delta e^{\frac{t}{u}}$.

Si suponemos que la reacción tiene lugar sólo para temperaturas cercanas a una cierta temperatura, digamos 1, debemos cambiar la expresión de Ω , a saber,

$$\Omega = \begin{cases} 0 & u < \theta \text{ o } u > 1 \\ \mathcal{D}v^\delta e^{\frac{t}{u-\theta}} & \theta < u < 1 \end{cases}$$

De modo que uno supone dado un campo de velocidades V compatible con las ecuaciones de conservación de masa y momento (en particular, al suponer la aproximación de densidad constante se debe tener $\text{div } V = 0$). (u, v) deben ser solución de

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u - \Delta u &= v^\delta f(u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + V \cdot \nabla v - \frac{1}{\mathcal{L}} \Delta v &= -v^\delta f(u) \end{aligned}$$

donde $f(u)$ es una función con soporte en $1 \geq u \geq \theta$, con $0 < \theta < 1$, regular para $u < 1$ y con $f'(1^-) > 0$.

A estas ecuaciones se le agregan condiciones de contorno. Una situación natural es aquella en la que el gas se encuentra en un cilindro. Supongamos que el eje del cilindro tiene por dirección el eje x . Escribamos los puntos del

cilindro como (x, y) donde $y \in \Sigma$, la sección transversal del mismo. En este caso es natural tener un campo de velocidades paralelo al eje x : $V = (\alpha(y), 0)$ y condición de contorno en las paredes del cilindro

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y, t) &= 0 & y \in \Sigma \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, y, t) &= 0 & y \in \Sigma \end{aligned}$$

La primer ecuación en (2.3) proviene de suponer una frontera adiabática. Cuando el número de Lewis \mathcal{L} es 1, $Z = u + v$ es solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} + \alpha(y)Z_x - \Delta Z &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \nu}(x, y, t) &= 0 & y \in \Sigma \end{aligned}$$

Esta ecuación es más sencilla de resolver pues no tiene término de reacción. Una vez hallada la solución Z se tiene la relación $v = Z - u$ que puede reemplazarse en el término de reacción de la primer ecuación en (2.2). De esta manera se obtiene una ecuación de reacción difusión para u .

En particular si inicialmente $Z = 1$, se tendrá $v = 1 - u$. En este caso el sistema (2.2) se reduce a la ecuación

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(y)u_x - \Delta u &= \beta(u) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y, t) &= 0 & y \in \Sigma \end{aligned}$$

donde, si consideramos a $\delta = 1$, $\beta(u) = (1 - u)^\delta f(u)$ tiene soporte en $[\theta, 1]$, es regular para $u < 1$, es globalmente Lipschitz y satisface $\beta'(1) < 0$.

La ventaja del caso Z constante es que el término de reacción no depende de (x, y, t) , es sólo función de u .

3. Ondas viajeras.

Si buscamos una situación compatible con la presencia de una llama avanzando en el cilindro, es natural suponer que en un extremo del cilindro la combustión haya finalizado y el combustible se haya terminado (en este modelo la combustión finaliza sólo cuando no hay más combustible), mientras que en el otro extremo no ha comenzado la combustión y la fracción de combustible es 1. Es decir esperamos que se satisfaga la condición

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, y, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y, t) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x, y, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, t) = 1 \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos una onda viajera, es decir $u = u(x + ct, y)$, $v = v(x + ct, y)$ representa un perfil que se mueve en el tiempo a velocidad constante en la dirección del eje del cilindro. En este caso el sistema (2.2) con las condiciones de contorno (2.3) y (3.1) se convierte en:

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} (c + \alpha(y))u_x - \Delta u &= v f(u) \\ (c + \alpha(y))v_x - \Delta v &= -v f(u) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y, t) &= 0 \quad y \in \Sigma \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, y, t) &= 0 \quad y \in \Sigma \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, y, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y, t) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x, y, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, t) &= 1 \end{aligned} \right.$$

En este caso necesariamente $Z = u + v = 1$, y el problema se reduce a una única ecuación elíptica en u

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} (c + \alpha(y))u_x - \Delta u &= \beta(u) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y, t) &= 0 \quad y \in \Sigma \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, t) &= 1 \end{aligned} \right.$$

En el caso en que α es constante la solución de (3.3) es independiente de y . El problema es unidimensional y su estudio se remonta a los trabajos de Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (cfr. [KPP], [K], [AW], también [FMcL] para resultados de estabilidad).

El caso multidimensional ha sido estudiado en una serie de trabajos de Berestycki con diversos autores. En 1989 en [BeLa] Berestycki y Larrouturou probaron la existencia de solución del problema (3.3) bajo ciertas condiciones sobre el perfil de velocidades α , condiciones que fueron removidas en [BLL]. Lo que se prueba es que existe un par (c, u) con $c \in \mathbb{R}$ tal que se satisface (3.3). Claramente si (c, u) es una tal solución el par (c, \bar{u}) con $\bar{u}(x, y, t) = u(x + x_0, y, t)$ es también solución cualquiera sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Por lo tanto la solución no es única. Sin embargo hay unicidad a menos de traslaciones en la variable x , es decir, si identificamos una función con su trasladada en la variable x la solución es única. En particular, la velocidad de la onda viajera es única. Esta situación cambia completamente si $\theta = 0$. (ver [BN1] y [BN2]). En estos trabajos se demuestra además que la solución es estrictamente creciente con x , más aún, $u_x > 0$. Además se estudia el comportamiento asintótico cuando x tiende a infinito de esta solución. Berestycki y Nirenberg han demostrado en estos trabajos que

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \gamma_- e^{\lambda_1^- x} \eta_1^-(y) + o(e^{\lambda_1^- x}) && \text{cuando } x \rightarrow -\infty \\ 1 - u(x, y) &= \gamma_+ e^{\lambda_1^+ x} \eta_1^+(y) + o(e^{\lambda_1^+ x}) && \text{cuando } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

donde $\lambda_1^+ < 0$, $\lambda_1^- > 0$, $\gamma_+ > 0$ y $\eta_1^+(y)$ es autofunción de un problema de autovalores generalizado correspondiente al primer "autovalor" λ_1^+ . Específicamente, λ_1^+ es el autovalor principal y $\eta_1^+(y)$ la correspondiente autofunción de

$$\begin{aligned} \left(\Delta_y + b^+ - \lambda_1^+ (c + \alpha(y)) + (\lambda_1^+)^2 \right) \eta &= 0 \quad \text{en } \Sigma \\ \frac{\partial \eta}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial \Sigma \end{aligned}$$

donde b^+ es 0 para el problema correspondiente a $x \rightarrow -\infty$ y es $\beta'(1^-)$ para $x \rightarrow +\infty$ (recordar que 0 es el valor límite de u para $x \rightarrow -\infty$ y 1 para $x \rightarrow +\infty$).

A partir de (3.2) uno puede observar que $(c + \alpha(y))$ es la velocidad del medio con respecto a las coordenadas móviles en las que la onda es estacionaria. En los citados trabajos, Berestycki y Nirenberg prueban que en promedio esta velocidad es estrictamente positiva, es decir

$$c + \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \alpha(y) dy > 0$$

4. Estabilidad de Ondas Viajeras.

El problema de la estabilidad de ondas viajeras consiste en saber si una solución del problema (2.4) que inicialmente está cerca de una onda viajera (en algún sentido), converge a una de ellas cuando el tiempo tiende a infinito.

Hay muchos resultados en este sentido dependiendo de qué entiende uno por estar cerca.

El primer resultado, en el caso multidimensional es de 1992. En [BLR] se estudió el problema de la “estabilidad lineal”, es decir se estudia el problema linealizado alrededor de una onda viajera y se ve que el origen es estable para este problema lineal estudiando el espectro del operador.

Posteriormente, Roquejoffre en [R1] probó un resultado de estabilidad no lineal que fue mejorando en trabajos posteriores. En este primer trabajo probó que si el dato inicial u_0 de (2.4) es una perturbación de una onda viajera en el sentido de que la diferencia es una función uniformemente chica en el cilindro con decrecimiento exponencial cuando $x \rightarrow -\infty$, la solución tiende cuando t tiende a infinito a una trasladada de la onda viajera y la velocidad de convergencia es exponencial.

Otro excelente resultado de Roquejoffre (cfr. [R2]) dice que si el dato inicial u_0 de (2.4) es creciente en x , $u_0(-\infty, y) = 0$, $u_0(+\infty, y) = 1$, $u(x, y, t)$ tiende a una onda viajera cuando el tiempo tiende a infinito.

Finalmente, en [R3] Roquejoffre demostró que en coordenadas móviles (con la velocidad de la onda viajera, es decir tales que la onda viajera pasa

a ser estacionaria), para toda solución de (2.4) y para toda sección acotada del cilindro, existe un tiempo T tal que $u(x, y, t)$ es monótona creciente en la variable x en esa sección del cilindro para tiempos más grandes que T .

Todos estos resultados de estabilidad hacen uso de ideas de sistemas dinámicos, en particular muchas de las ideas fueron utilizadas por primera vez en el caso unidimensional por Sattinger en [S].

Si en estas ecuaciones se tiene en cuenta la presencia de un parámetro (la energía de activación), los resultados antes mencionados no explicitan la dependencia en este parámetro, lo que impide inferir cual será el comportamiento asintótico del problema límite que describiremos en la Sección siguiente.

5. Límite Asintótico para grandes energías de activación.

Nos interesa encontrar una ecuación que describa el comportamiento del sistema para grandes energías de activación. Para que este paso al límite tenga sentido deberá hacerse de modo tal que la energía total entregada al sistema se mantenga controlada. Supondremos que se mantiene constante, es decir

$$(5.1) \quad \int \beta(u) du = M$$

es independiente de la energía de activación en el paso al límite. Observando la Ley de Arrhenius se ve que esto sólo es posible si la temperatura de ignición θ tiende a 1.

Modelamos esta situación considerando en (2.4) una fuente $\beta_\varepsilon(u)$ con $\varepsilon \rightarrow 0$ representando el inverso de la energía de activación; y θ_ε la temperatura de ignición tendiendo a 1 de modo tal que

$$\int \beta_\varepsilon(u) du = M$$

Una forma de tener esta situación es suponer que $\beta_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1} g(\frac{1-u}{\varepsilon})$, con g satisfaciendo (5.1) y $\text{sop } g = [0, \theta]$ ($\theta_\varepsilon = 1 - \varepsilon\theta$).

El primer estudio formal realizado en este sentido se refirió al problema elíptico de las ondas viajeras. En [BCN] se consideró la familia de problemas

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (c_\varepsilon + \alpha(y))u_x^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) \\ u^\varepsilon(-\infty, y) = 0 \\ u^\varepsilon(+\infty, y) = 1 \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Sigma \end{array} \right.$$

En el citado trabajo los autores demostraron estimaciones a priori que les permitieron ver que existe una subsucesión $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $c_{\varepsilon_n} \rightarrow c$, $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$; y que u es “solución” del siguiente problema de frontera libre

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (c + \alpha(y))u_x - \Delta u = 0 \quad \text{en } (u < 1) \\ u(-\infty, y) = 0 \\ u(+\infty, y) = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sqrt{2M} \quad \text{sobre } \partial(u < 1) \end{array} \right.$$

La condición de frontera libre (condición sobre la derivada normal en $\Gamma := \partial(u < 1)$) fue demostrada en el sentido de que es válida en toda porción regular de Γ . Resultados de regularidad de la frontera libre han sido anunciados por los autores pero no han sido aún publicados.

El problema general de evolución fué considerado por Caffarelli y Vázquez en [CV]. En este trabajo los autores consideran los problemas

$$u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = -\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)$$

donde para ellos $\beta_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1}\beta(\frac{u}{\varepsilon})$ con β una función soportada cerca del origen (es decir han reemplazado u por $1 - u$).

En [CV] el problema está planteado en todo \mathbb{R}^n y no en un cilindro, y la velocidad $\alpha(y)$ del fluido se considera nula. El dato inicial u_0^ε se toma no negativo y acotado.

Los autores demuestran que si $u_0^\varepsilon \rightarrow u_0$ uniformemente sobre compactos y además $\partial(u_0^\varepsilon > 0)$ converge a $\partial(u_0 > 0)$ en distancia uniformemente sobre compactos, y si los datos satisfacen además $|\nabla u_0^\varepsilon| \leq L$ con L independiente de ε , las correspondientes soluciones están acotadas en norma Höder $1, \frac{1}{2}$ uniformemente en ε . Existe por lo tanto una subsucesión convergente uniformemente sobre compactos a una función u que resulta ser solución del siguiente problema de frontera libre

$$(5.4) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } (u > 0) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\sqrt{2M} & \text{sobre } \partial(u > 0) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

donde ν es la dirección normal exterior a $\Omega(t) := \{x / u(x, t) > 0\}$.

La condición de frontera libre se satisface bajo condiciones que aseguran que ésta es Lipschitz y que $u_t \leq 0$.

Comentaremos un poco más sobre los resultados de [CV] y otros relacionados en [LW].

El problema (5.4) también admite ondas viajeras. Estas son ondas planas (dadas por funciones de una sólo variable espacial) que son solución de (5.3) con $\alpha(y) = 0$ y $\Sigma = \mathbb{R}^{n-1}$ (salvo que hay que reemplazar u por $1 - u$). Por lo tanto nuevamente se plantea el problema de la estabilidad de estas ondas. Como hemos dicho en la Sección 4 los resultados para el problema semilineal no se traducen en resultados para el problema de frontera libre (es decir no pasan al límite), y es por lo tanto necesario encarar este problema en forma independiente de los resultados conocidos.

Por otro lado es de esperar que métodos aplicables al problema de frontera libre puedan dar lugar a estimaciones uniformes en ε para la estabilidad de las ondas viajeras del problema continuo.

REFERENCES

- [AW] D. G. Aronson y H. F. Weinberger, *Nonlinear Diffusion in Population Genetics, Partial Differential Equations and Related Topics*. Lect. Notes in Math., vol. 446, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975, pp. 5-49.

- [B] J. Buckmaster (eds.), *The Mathematics of Combustion*, SIAM, Philadelphia, 1985.
- [BeLa] H. Berestycki y B. Larrouturou, *A Semilinear Elliptic Equation in a Strip Arising in a Two-Dimensional Flame Propagation Model*, *J. Reine Angew. Math.* **396** (1989), 14-40.
- [BCN] H. Berestycki, L. A. Caffarelli y L. Nirenberg, *Uniform Estimates for Regularization of Free Boundary Problems*, *Analysis and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics* (Cora Sadosky, eds.), vol. 122, Dekker, 1988, pp. 567-594.
- [BL1] J. Buckmaster y G. S. S. Ludford, *Theory of Laminar Flames*, University Press, Cambridge, 1982.
- [BL2] ———, *Lectures on Mathematical Combustion*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 43, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [BLL] H. Berestycki, B. Larrouturou y P. L. Lions, *Multidimensional Travelling Wave Solutions of a Flame Propagation Model*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **117** (1992), 97-117.
- [BLR] H. Berestycki, B. Larrouturou y J. M. Roquejoffre, *Stability of Travelling Fronts in a Model for Flame Propagation, Part I: Linear Analysis*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **117** (1992), 97-117.
- [BN1] H. Berestycki y L. Nirenberg, *Some Qualitative Properties of Solutions of Semilinear Equations in Cylindrical Domains*, *Analysis et Cetera* (dedicated to J. Moser) (P. H. Rabinowitz y E. Zehnder, eds.), Academic Press, New York, 1990, pp. 115-164.
- [BN2] ———, *Travelling Fronts in Cylinders*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire* **9** (1992), 1-37.
- [CLW1] L. A. Caffarelli, C. Lederman y N. Wolanski, *Stability of Travelling Waves in a Free Boundary Problem from Combustion*, en preparación.
- [CLW2] ———, *A Two Phase Free Boundary Problem from Combustion*, en preparación.
- [CV] L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez, *A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising in Flame Propagation*, *Trans. AMS* **347**(2) (1995), 411-426.
- [FMcL] P. C. Fife y J. B. McLeod, *The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **65** (1977), 335-361.
- [K] J. I. Kanel', *Stabilization of Solutions of the Cauchy Problem for Equations Encountered in Combustion Theory*, *Mat. Sbornik* **149** (1962), 245-288.
- [KPP] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii y N. S. Piskunov, *The Study of the Equation of Diffusion with Increase in the Quantity of Matter and its Application to a Biological Problem*, *Bjul. Moskovskogo Gos. Univ.* **17** (1937), 1-26.
- [LW] C. Lederman y N. Wolanski, *Un Problema de Frontera Libre de la Teoría de Combustión II*, en este volúmen.
- [R1] J. M. Roquejoffre, *Stability of Travelling Fronts in a Model for Flame Propagation. Part II: Nonlinear Stability*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* vol 117 (1992), 119-153.

- [R2] _____, *Convergence to Travelling Waves for Solutions of a Class of Semilinear Parabolic Equations*, por aparecer en *J. Diff. Equations*.
- [R3] _____, *Eventual Monotonicity and Convergence to Travelling Fronts for the Solutions of Parabolic Equations in Cylinders*, preprint.
- [S] D. H. Sattinger, *Stability of Waves of Nonlinear Parabolic Equations*, *Adv. Math.* **22** (1976), 312-355.

DEPTO. DE MATEMÁTICA, FAC. DE CIENCIAS EXACTAS, UNIV. DE BUENOS AIRES,
(1428) BUENOS AIRES, ARGENTINA



UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE DE LA TEORÍA DE COMBUSTIÓN II

C. LEDERMAN Y N. WOLANSKI

1. Introducción.

El objeto de estas notas, que continúan con la exposición comenzada en [LW], es la descripción de un problema de frontera libre que se origina en el estudio de la propagación de llamas. Presentaremos resultados relacionados con la existencia, regularidad y comportamiento asintótico de las soluciones de este problema. En particular comentaremos los resultados que hemos probado en [CLW1] y [CLW2].

El modelo de combustión presentado en [LW] consiste en un sistema de dos ecuaciones parabólicas semilineales para funciones que representan la temperatura y la fracción de masa del reactante en un gas que se está quemando. Bajo hipótesis adicionales este sistema se reduce a una única ecuación para la temperatura. En esta ecuación aparece un parámetro E conocido como la energía de activación.

Un nuevo modelo de combustión se obtiene a partir del ya descrito, al considerar el límite asintótico para grandes energías de activación. En este modelo se desprecia el ancho de la zona de combustión, considerandola como una superficie de separación entre los productos de la combustión y el gas sin quemar. Como el gas cambia de estado sobre esta superficie, se producen discontinuidades en las derivadas de la variables físicas involucradas.

Parcialmente financiado por la Universidad de Buenos Aires mediante el subsidio EX117. La Dra. Wolanski es miembro del CONICET.

Matemáticamente, se obtiene un problema de frontera libre que, cuando la velocidad del gas es considerada nula, puede formularse del siguiente modo:

(P)

Dada u_0 una función acotada y no negativa definida en \mathbb{R}^n , hallar una función u no negativa definida en \overline{Q} , donde $Q = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, tal que

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{en } Q \cap \{u > 0\}, \\ u &= 0, \quad u_\nu = -1 \quad \text{sobre } Q \cap \partial\{u > 0\}, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

(u_ν denota la derivada respecto a la normal exterior espacial ν a la frontera libre $Q \cap \partial\{u > 0\}$).

La función u tiene el significado de menos la temperatura, más precisamente $u = 1 - \eta T$, donde T es la temperatura y η un factor de normalización. En cada tiempo t la frontera libre corresponde al frente de la llama, es decir la zona donde la reacción química está teniendo lugar; esta superficie separa la región ya quemada de la región todavía sin quemar, representadas respectivamente por $\{u = 0\}$ y $\{u > 0\}$.

Es importante destacar que el problema (P) tiene sentido como modelo de combustión sólo si la frontera libre es monótona en el tiempo: de otro modo se estaría afirmando que un mismo material se quema más de una vez. Sin embargo, matemáticamente el problema tiene sentido cualquiera sea el comportamiento de la frontera libre.

2. Ejemplos de soluciones.

Antes de comentar los resultados de existencia de solución para este problema, comenzaremos presentando dos familias de soluciones clásicas construidas por Caffarelli y Vázquez en [CV]. Estas soluciones particulares resultan importantes para la comprensión de la teoría general y también constituyen una herramienta útil en argumentos de comparación.

2.1. ONDAS VIAJERAS.

Se buscan soluciones de la forma

$$u(x, t) = f(x_1 - ct) = f(\zeta),$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\zeta = x_1 - ct$ y c es una constante, la velocidad de la onda viajera. Para $c = 0$ se obtienen los dos perfiles estacionarios

$$f_1(\zeta) = (x_1)^+, \quad f_2(\zeta) = (-x_1)^+.$$

Para $c > 0$ se obtiene una solución cuyo soporte se expande, dada por

$$f_3^c(\zeta) = \frac{1}{c}(e^{-c\zeta} - 1)^+,$$

y otra solución cuyo soporte se contrae, dada por

$$f_4^c(\zeta) = \frac{1}{c}(1 - e^{-c\zeta})^+.$$

Sin embargo, sólo esta última corresponde a un dato inicial acotado y representa la situación con sentido físico de que la llama avanza.

En forma análoga se encuentran soluciones de la forma $u(x, t) = f(x_1 + ct)$ moviéndose con velocidad $c > 0$ en la dirección negativa del eje x_1 . También se consiguen ondas viajeras a partir de las halladas, mediante rotaciones en x y traslaciones en x o t .

2.2. SOLUCIONES AUTOSIMILARES.

En [CV] los autores construyen para cada $T > 0$ una solución con soporte compacto, que se anula idénticamente a partir del tiempo T . Esto lo hacen de la siguiente manera: buscan soluciones autosimilares de la forma

$$U(x, t) = (T - t)^\alpha f(x/(T - t)^\beta),$$

donde necesariamente será $\alpha = \beta = 1/2$. Suponiendo además que f es radialmente simétrica, hallan una $f = f(r)$ regular en $0 \leq r \leq R$, $f = 0$ en $r \geq R$ satisfaciendo

$$f'(0) = 0, \quad f(r) > 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq r < R,$$

$$f(R) = 0 \quad \text{y} \quad f'(R) = 1$$

y tal que la U definida arriba resulta solución de (P) . Esta solución es C^∞ para $0 < t < T$ en su soporte

$$\{(x, t) : 0 \leq t \leq T, \quad |x| \leq R(T - t)^{1/2}\}$$

y por lo tanto es una solución clásica de (P) en $\mathbb{R}^n \times [0, T)$. Sin embargo en el punto de extinción $x = 0, t = T$ la frontera se mueve con velocidad infinita.

3. Resultados de existencia de solución.

En esta sección nos referiremos a los resultados de existencia de solución que se conocen hasta el presente. Hay varios resultados de existencia que corresponden a distintos conceptos de solución, ya sea clásica, débil o viscosa. Lo deseable sería probar que todas las soluciones que puedan ser construidas son tan suaves o clásicas como sea posible. Este es un aspecto del problema que aún no ha sido estudiado.

3.1. EXISTENCIA EN EL CASO UNIDIMENSIONAL.

Un problema de frontera libre similar al que tratamos en estas notas, aparece en el estudio de ondas planas de detonación. Una simplificación de este modelo conduce a la ecuación unidimensional de Burgers $u_t = u_{xx} + uu_x$ bajo condiciones laterales como en (P) . En [HH] se prueba la existencia de soluciones clásicas de este problema para ciertos datos iniciales. Ellos se basan en una transformación de este problema en uno de tipo elíptico-parabólico.

Aunque este enfoque se aplica también a la ecuación del calor, no parece extenderse a más dimensiones espaciales. Por otra parte no se sabe si las soluciones de (P) obtenidas de este modo son límite asintótico para altas energías de activación del modelo considerado en [LW].

3.2. EXISTENCIA LOCAL DE SOLUCIONES CLÁSICAS.

En [AG] se prueba la existencia y unicidad local de solución clásica de (P) para el caso multidimensional. Este resultado es obtenido para $0 \leq t \leq T$,

T pequeño, suponiendo que los datos iniciales son muy regulares y que la frontera inicialmente se encuentra entre dos superficies

$$x_n = f^-(x'), \quad x_n = f^+(x'),$$

donde $x = (x', x_n)$. Este resultado es local y en general no es válido globalmente: el ejemplo en 2.2 muestra que aún para datos iniciales muy regulares puede no existir solución clásica global en el tiempo.

3.3 EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES.

Caffarelli y Vázquez probaron en [CV] que bajo ciertas hipótesis sobre el dato inicial u_0 , existe una solución débil del problema (P). Ellos consideran el siguiente problema:

(P_ϵ)

$$\begin{aligned} u_t^\epsilon &= \Delta u^\epsilon - \beta_\epsilon(u^\epsilon) \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u^\epsilon(x, 0) &= u_0^\epsilon(x) \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $\epsilon > 0$, u_0^ϵ son funciones no negativas que aproximan al dato inicial u_0 cuando $\epsilon \rightarrow 0$, y $\beta_\epsilon(s) = \frac{1}{\epsilon}\beta(\frac{s}{\epsilon})$, con $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y regular soportada en $(0, 1)$ y tal que $\int \beta(s)ds = \frac{1}{2}$. En [CV] se prueba que si se eligen las u_0^ϵ de modo tal que cuando $\epsilon \rightarrow 0$

$$u_0^\epsilon \rightarrow u_0 \quad \text{uniform.}, \quad \partial\{u_0^\epsilon > 0\} \rightarrow \partial\{u_0 > 0\} \quad \text{uniform.},$$

(sobre compactos) entonces existe una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos a una función no negativa u , que es solución de la ecuación del calor en $\{u > 0\}$. Si se tiene $|\nabla u_0^\epsilon| \leq L$, u resulta Lipschitz en x y Hölder $\frac{1}{2}$ en t , y satisface la condición inicial u_0 .

Si además $\Delta u_0^\epsilon + a|\nabla u_0^\epsilon| \leq 0$, entonces $\partial\{u > 0\}$ es Lipschitz y u es solución débil de (P) en el siguiente sentido:

$$\int \int_Q u(\phi_t + \Delta \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \phi dx = \int_{\partial\{u>0\}} \phi d\Sigma \cos \alpha,$$

para toda función test $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T))$, donde $d\Sigma$ es el elemento de área en $\partial\{u > 0\}$ y α es el ángulo formado por la normal exterior $\eta(x, t)$ en un punto $(x, t) \in \partial\{u > 0\}$ y el hiperplano $t=\text{constante}$.

La condición de frontera libre se satisface en casi todo punto de $\partial\{u > 0\}$, teniéndose $\partial_\nu u = -1$ en los puntos no horizontales y $\nabla u = 0$ en los puntos horizontales.

La forma en que se aproximan los datos iniciales es esencial, ya que se podría obtener un límite u sin frontera libre aunque el dato inicial la tuviera.

3.4 EXISTENCIA DE SOLUCIONES VISCOSAS A UNA Y DOS FASES.

Si en el problema (P_ϵ) descrito en 3.3 se les permite a las funciones involucradas tomar también valores negativos, se obtiene al pasar al límite un nuevo problema de frontera libre, que constituye una generalización a dos fases del problema (P) y puede formularse del siguiente modo:

(P')

Dada u_0 una función acotada definida en \mathbb{R}^n , hallar una función u definida en \overline{Q} , donde $Q = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, tal que

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{en } Q \setminus \partial\{u > 0\}, \\ u &= 0, \quad (u_\nu^+)^2 - (u_\nu^-)^2 = 1 \quad \text{sobre } Q \cap \partial\{u > 0\}, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$, y ν es la normal exterior espacial a la frontera libre $Q \cap \partial\{u > 0\}$.

En [CLW1] se estudia el problema (P') como límite de los problemas aproximantes (P_ϵ) . Antes de comentar los resultados obtenidos, comencemos dando algunas definiciones. Con Q_1 denotaremos un subcilindro de Q .

Definición: Sea v una función continua en \overline{Q}_1 . Diremos que v es una subsolución (supersolución) clásica de (P') en Q_1 si

- (i) $\Delta v - v_t \geq 0$ (≤ 0) en $\Omega^+ =: Q_1 \cap \{v > 0\}$.
- (ii) $\Delta v - v_t \geq 0$ (≤ 0) en $\Omega^- =: Q_1 \cap \{v \leq 0\}^\circ$.
- (iii) $v \in C^1(\overline{\Omega^+}) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$.
- (iv) Para todo $(x, t) \in \partial\Omega^+ \cap Q_1$, $\nabla_x v^+(x, t) \neq 0$, y

$$(v_\nu^+)^2 - (v_\nu^-)^2 \geq 1 \quad (\leq 1),$$

donde $\nu := \frac{\nabla_x v^+}{|\nabla_x v^+|}$.

Diremos que v es una solución clásica si es simultáneamente subsolución y supersolución clásica.

Definición: Sea u una función continua en Q_1 ; diremos que u es una subsolución (supersolución) viscosa de (P') en Q_1 si, para todo subcilindro Q_2 de Q_1 , y para toda supersolución (subsolución) v en Q_2 ,

$$u \leq v \text{ (} u \geq v \text{)} \quad \text{en } \partial_p Q_2, \text{ y}$$

$$\partial\{u > 0\} \cap \partial\{v > 0\} \cap \partial_p Q_2 = \emptyset$$

implica que $u \leq v$ ($u \geq v$) en Q_2 .

La función u se llama solución viscosa si es simultáneamente subsolución y supersolución viscosa.

En [CLW1] se estudia el problema (P_ϵ) permitiendo que las funciones tomen también valores negativos y se prueba, entre otros resultados, el siguiente teorema:

Teorema. *Sea u_0 una función acotada definida en \mathbb{R}^n tal que*

- (i) *existen dos direcciones de monotonía (si $n > 1$),*
- (ii) *existe x_0 tal que $u_0(x) \leq 0$ si $x \leq x_0$ y $u_0(x) \geq 0$ si $x \geq x_0$ (si $n = 1$).*

Entonces existen aproximaciones u_0^ϵ del dato inicial u_0 tal que las correspondientes u^ϵ convergen a una función u que es solución viscosa del problema (P') .

Destacamos que este resultado no fuerza a u a tomar valores negativos con lo cual el caso a una fase también está contenido en [CLW1]. El concepto de solución viscosa es adecuado como idea de solución débil para problemas de frontera libre ya que no requiere ninguna hipótesis sobre la regularidad de la misma. Por otro lado, hay resultados muy recientes para otro tipo de problema de frontera libre parabólico a dos fases (ver [ACS]), donde se prueba que bajo ciertas hipótesis las soluciones viscosas son clásicas.

Otras generalizaciones a dos fases del problema (P) también fueron estudiadas, pero imponiendo la condición de frontera libre que aparece en el modelo de detonación en lugar de la considerada en (P') . En esta línea se

encuentra el trabajo [BHS], que trata un problema unidimensional y [AG], que prueba que existen soluciones locales multidimensionales. En ambos casos la condición de frontera libre considerada es $|\nabla u^+| - |\nabla u^-| = 1$, y por lo tanto estas generalizaciones no pueden verse como límite asintótico para altas energías de activación del modelo considerado en [LW].

4. Resultados de estabilidad: convergencia a ondas viajeras.

Del mismo modo que con el modelo de combustión considerado en [LW], es natural preguntarse si una solución de (P) que inicialmente está cerca de una onda viajera converge a una de ellas cuando el tiempo tiende a infinito. Hay varios resultados al respecto:

4.1 CONVERGENCIA DE SOLUCIONES CLÁSICAS.

En el trabajo [HH] -que ya fue comentado en 3.1- se prueba que las soluciones que ellos hallan convergen a ondas viajeras cuando $t \rightarrow \infty$, y que la frontera libre es asintóticamente lineal. También en [BNS] se estudia la estabilidad de ondas viajeras del problema unidimensional: prueban que una solución clásica que está inicialmente cerca de una onda viajera, converge exponencialmente a una traslación de esa onda. Este resultado -que se obtiene mediante técnicas similares a las usadas en el estudio de la estabilidad de ondas viajeras de ecuaciones parabólicas semilineales- requiere para su validez que la frontera libre sea regular.

Como también ocurre con [HH], los argumentos empleados en [BNS] son unidimensionales y no parecen extenderse a más dimensiones.

4.2 CONVERGENCIA DE SOLUCIONES VISCOSAS-DÉBILES.

En [CLW2] se prueba un resultado de convergencia a ondas viajeras para soluciones viscosas-débiles de (P) , en el caso unidimensional a una fase, bajo ciertas hipótesis sobre los datos iniciales.

Llamamos solución viscosa-débil a una solución viscosa de (P) (ver 3.4), que admite una representación mediante una fórmula integral, que cuando $n = 1$ es la siguiente:

$$u(X, T) = 0 \quad \text{si } X \leq \gamma(T), \quad T \geq 0,$$

$$u(X, T) = - \int_{T_0}^T K(\gamma(t) - X, T - t) dt + \int_{\gamma(T_0)}^{+\infty} u(x, T_0) K(x - X, T - T_0) dx,$$

si $X \geq \gamma(T)$, $T \geq T_0$. Aquí $K(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ es el núcleo de Gauss, $T_0 \geq 0$ es arbitrario y $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, la función que en este caso determina a la frontera libre.

Las ondas viajeras involucradas son las acotadas, que sin pérdida de la generalidad supondremos definidas por $\phi(x) = (1 - e^{-x})^+$ (ver 2.1). El resultado probado en [CLW2] para $n = 1$ es el siguiente:

Teorema. *Sea u una solución viscosa-débil de (P) tal que*

$$\phi(x + h_1) \leq u_0(x) \leq \phi(x + h_2)$$

donde $h_1 \leq h_2$. Entonces existe $h_1 \leq h_\infty \leq h_2$ tal que

$$t - \gamma(t) \rightarrow h_\infty, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - \phi(x + h_\infty - t)| \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Si además γ es una función creciente, entonces

$$|t - \gamma(t) - h_\infty| \leq C e^{-\mu\sqrt{t}}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - \phi(x + h_\infty - t)| \leq C e^{-\mu\sqrt{t}},$$

donde C y μ son constantes que dependen sólo de $h_2 - h_1$.

Es claro que el resultado también se aplica a soluciones clásicas de (P). El teorema afirma por otra parte, que la velocidad de convergencia será exponencial para ciertas soluciones que pueden no estar inicialmente cerca de una onda viajera.

La idea de la demostración es la siguiente: Como u es viscosa y está inicialmente entre dos ondas viajeras esta comparación se tiene para todo tiempo, es decir

$$\phi(x + h_1 - t) \leq u(x, t) \leq \phi(x + h_2 - t).$$

Por lo tanto la frontera libre de u se encuentra entre las fronteras de las dos ondas viajeras para todo tiempo. El hecho de que la solución sea viscosa-débil permite ir probando inductivamente que frontera libre se encuentra entre las fronteras libres de ondas viajeras cada vez más cercanas, con lo

cual la frontera resulta asintóticamente lineal. La conclusión se obtiene, finalmente, a partir de la fórmula integral.

El interés de este resultado reside fundamentalmente en el hecho de que la demostración requiere que la condición de frontera libre se satisfaga en el sentido viscoso-débil y no necesariamente clásico. Pensamos que esto posibilitará extender el teorema al caso multidimensional, donde por ahora sólo se probó la existencia de soluciones débiles ([CV]), y viscosas ([CLW1]), pero no clásicas.

5. Comentarios acerca de la unicidad de solución.

En general el problema (P) no tiene unicidad de solución. Para esto basta observar que si se tiene una solución del problema (P) para un cierto dato inicial u_0 y se toma la solución acotada de la ecuación del calor en Q con el mismo dato inicial, se consigue otra solución del problema (P) con dato u_0 , aunque sin frontera libre.

En [HH] se prueba que en el caso de una dimensión espacial y para ciertos datos iniciales, el problema admite una solución que es única dentro de una clase de soluciones débiles. Por otra parte, las soluciones clásicas locales de [AG] son únicas para tiempos pequeños.

Finalmente, en [CV] solamente prueban que las distintas aproximaciones de los datos iniciales convergen a una única solución en el caso de las soluciones especiales comentadas en 2.1 y 2.2. Para el caso general, las soluciones dependerán en principio, de la forma en que se aproximen los datos iniciales y lo mismo ocurre con las soluciones construidas en [CLW1].

REFERENCES

- [ACS] I. Athanasopoulos, L. Caffarelli, S. Salsa, *Regularity of the free boundary in parabolic phase transition problems*, preprint.
- [AG] D. Andreucci, R. Gianni, *Classical solutions to a multidimensional free boundary problem arising in combustion theory*, Commun. in Partial Differential Equations, 19(5/6), 803-826(1994).
- [BHS] M. Bertsch, D. Hilhorst, C. Schmidt-Laine, *The well-posedness of a free boundary problem for Burgers' equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 23, N.9, pp. 1211-1224, 1994.
- [BNS] C. M. Brauner, S. Noor Ebad, C. Schmidt-Laine, *Nonlinear stability analysis of singular travelling waves in combustion - a one phase problem*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 16, N.10, pp. 881-892, 1991.

- [CLW1] L. Caffarelli, C. Lederman, N. Wolanski, *A two phase free boundary problem from combustion*, en preparación.
- [CLW2] L. Caffarelli, C. Lederman, N. Wolanski, *Stability of travelling waves in a free boundary problem from combustion*, en preparación.
- [CV] L. Caffarelli, J. Vázquez, *A free boundary problem for the heat equation arising in flame propagation*, Transactions of the American Mathematical Society, V.347, N.2, pp. 411, 1995.
- [HH] D. Hilhorst, J. Hulshof, *An elliptic-parabolic problem in combustion theory: Convergence to travelling waves*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 17, N.6, pp. 519-546, 1991.
- [LW] C. Lederman, N. Wolanski, *Un problema de frontera libre de la teoría de combustión I*, Cuadernos del Instituto de Matematica Beppo Levi, este volumen.

DEPTO. DE MATEMÁTICA, FAC. DE CIENCIAS EXACTAS, UNIV. DE BUENOS AIRES,
(1428) BUENOS AIRES, ARGENTINA



DETERMINATION OF THERMAL COEFFICIENTS IN SEMI-INFINITE MATERIALS WITH MUSHY ZONE IN PHASE-CHANGE PROCESS

Adriana M. GONZÁLEZ – Domingo A. TARZIA

I. INTRODUCTION

We consider a semi-infinite material with mass densities $\rho > 0$ equal in both solid and liquid phases and we can assume, without loss of generality, that the phase-change temperature is 0° C.

If the material is initially assumed to be liquid at the constant temperature $E > 0$ and a constant temperature $-D < 0$ is imposed on the fixed face $x=0$, then three distinct regions can be distinguished (for a mathematical and properties description of this simple model see [Ta4]; for the one-phase model see [SoWiA11]) :

(H₁) The liquid phase, at temperature $\theta_2 = \theta_2(x,t) > 0$, occupying the region $x > r(t)$, $t > 0$.

(H₂) The solid phase, at temperature $\theta_1 = \theta_1(x,t) < 0$, occupying the region $0 < x < s(t)$, $t > 0$.

(H₃) The mushy zone, at temperature 0 , occupying the region $s(t) \leq x \leq r(t)$, $t > 0$.

We make two assumptions on its structure :

(a) The material in the mushy zone contains a fixed fraction $\epsilon\lambda$ (with $0 < \epsilon < 1$) of the total latent heat $\lambda > 0$, i.e.,

$$(1) \quad k_1 \theta_{1_x}(s(t),t) - k_2 \theta_{2_x}(r(t),t) = \lambda \rho \left(\epsilon \dot{s}(t) + (1 - \epsilon) \dot{r}(t) \right), \quad t > 0.$$

(b) The width of the mushy zone is inversely proportional (with constant $\gamma > 0$) to the temperature gradient at the point $(s(t), t)$, i.e.,

$$(2) \quad \theta_{1_x}(s(t), t) (r(t) - s(t)) = \gamma, \quad t > 0.$$

We suppose that the temperature $\theta = \theta(x, t)$ of the material is defined by

$$(3) \quad \theta(x, t) = \begin{cases} \theta_1(x, t) < 0 & \text{if } 0 < x < s(t), t > 0 \\ 0 & \text{if } s(t) \leq x \leq r(t), t > 0 \\ \theta_2(x, t) > 0 & \text{if } x > r(t), t > 0. \end{cases}$$

The governing differential equations for the solid and liquid phases, the continuity of the temperature, the initial and boundary conditions, and an overspecified heat flux condition [Ca, Ta2] on the fixed face $x=0$ [StTa, Ta1 – Ta4] are given by

$$(4) \quad \alpha_1 \theta_{1_{xx}}(x, t) = \theta_{1_t}(x, t), \quad 0 < x < s(t), t > 0$$

$$(5) \quad \alpha_2 \theta_{2_{xx}}(x, t) = \theta_{2_t}(x, t), \quad x > r(t), t > 0$$

$$(6) \quad \theta_1(s(t), t) = \theta_2(r(t), t) = 0, \quad t > 0.$$

$$(7) \quad \theta_1(0, t) = -D < 0, \quad t > 0,$$

$$(8) \quad \theta_2(x, 0) = \theta_2(+\infty, t) = E > 0, \quad x > 0, t > 0,$$

$$(9) \quad s(0) = r(0) = 0.$$

$$(10) \quad k_1 \theta_{1_x}(0, t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad \text{with } h_0 > 0.$$

where $c_i > 0$, $k_i > 0$ and $\alpha_i = a_i^2 = k_i / \rho c_i > 0$ are the specific heat, the thermal conductivity and the diffusion coefficient for the phase i ($i=1$: solid phase; $i=2$: liquid phase) respectively.

We shall present some of the results obtained in [GoTa]. If by means of a phase-change experiment we are able to measure certain quantities, then we shall find formulae for the simultaneous determination of the unknown coefficients (ϵ, γ : parameters of the mushy zone; $\lambda, \rho, c_1, c_2, k_1, k_2$: thermal coefficients of the material).

The different problems for determining several unknown coefficients have not always an explicit solution; it does exist iff some complementary conditions for the corresponding data are verified. We generalize the results obtained in [StTa] for the particular case $\epsilon = 1$ and $\gamma = 0$ (i.e., without mushy region) and those obtained in [Ta3] for the one-phase case. In [Ta2] several references on free-moving boundary problems and determination of physical coefficients are given.

We shall consider the simple mushy zone model for the two-phase Stefan problem for determining one unknown thermal coefficient of a semi-infinite material with an overspecified condition on the fixed face, supposing not knowing the free boundaries $x = s(t)$ and $x = r(t)$. The results obtained for the eight possible cases are considered in Table I which shows both the necessary and sufficient conditions to be verified by the data for the existence and uniqueness of the solution and the expression of the corresponding unknown coefficient.

We shall consider the same model for determining two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material with an overspecified condition on the fixed face, supposing known the expression for the moving boundary $x = s(t)$. The results obtained for the twenty-eight possible cases are considered in Table II which shows both the necessary and sufficient conditions to be verified by the data for the existence of the solution and the expression of the corresponding unknown coefficients. There are several cases where the moving boundary problem has a unique solution iff some

conditions are verified.

The functions and the restrictions used in the text, Tables I and II are summarized in Appendix I and Appendix II respectively.

II. DETERMINATION OF ONE UNKNOWN THERMAL COEFFICIENT

Taking into account the hypotheses (H₁) – (H₃) we can formulate the following

PROBLEM (P₁) : Find the free boundaries $x=s(t)$ and $x=r(t)$, defined for $t > 0$ with $0 < s(t) < r(t)$ and $s(0)=r(0)=0$, the temperature $\theta=\theta(x,t)$, defined by (I-3) for $x > 0$ and $t > 0$, and one of the eight unknown thermal coefficients $\epsilon, \gamma, \lambda, \rho, c_1, c_2, k_1, k_2$ such that they satisfy the conditions (I-1), (I-2), (I-4) – (I-10) where $D > 0$, $E > 0$ and $h_0 > 0$ are data and they must be known or determined by an experience of phase-change [ArLaTa].

The solution of this problem is given by [CaJa, Ru, SoWiAl2, Ta1, Ta4]

$$(1) \quad \theta_1(x,t) = -D + \frac{D}{f\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)} f\left(\frac{x}{2 a_1 \sqrt{t}}\right),$$

$$(2) \quad \theta_2(x,t) = \frac{-E f\left(\frac{\omega}{a_2}\right)}{1 - f\left(\frac{\omega}{a_2}\right)} + \frac{E}{1 - f\left(\frac{\omega}{a_2}\right)} f\left(\frac{x}{2 a_2 \sqrt{t}}\right),$$

$$(3) \quad s(t) = 2 \sigma \sqrt{t}, \sigma > 0,$$

$$(4) \quad r(t) = 2 \omega \sqrt{t}, \omega > \sigma,$$

where f is the error function, the coefficient ω is given by

$$(5) \quad \omega = \omega(\sigma) = a_1 W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right),$$

and, the coefficient σ and the unknown thermal coefficient are obtained by solving the following system of equations

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{h_0}{\lambda \rho a_1} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a_1^2}\right) - \frac{E k_2}{\lambda \rho a_1 a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\omega(\sigma)}{a_2}\right) = G\left(\frac{\sigma}{a_1}\right), \\ \text{(b)} \quad \frac{a_1}{k_1} f\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) = \frac{D}{h_0 \sqrt{\pi}}. \end{array} \right.$$

The eight possible cases for Problem (P₁) are considered in Table I. We remark here that the coefficient ω is always given by the expression (5) as a function of σ and a_1 (a_1 can also be an unknown in some cases, e.g. cases 5, 6 and 8) [GoTa].

III. DETERMINATION OF TWO UNKNOWN THERMAL COEFFICIENTS

Taking into account the hypotheses (H₁) – (H₃) we can formulate the following

PROBLEM (P₂) : Find the free boundary $x=r(t)$, defined for $t > 0$ with $r(0)=0$, the temperature $\theta=\theta(x,t)$, defined by (I-3) for $x > 0$ and $t > 0$, and two of the eight unknown thermal coefficients $\epsilon, \gamma, \lambda, \rho, c_1, c_2, k_1, k_2$ such that they satisfy the conditions (I-1), (I-2), (I-4) – (I-10) where the moving boundary $x=s(t)$, defined for $t > 0$ with $s(0)=0$, is given by (II-3) with a known coefficient $\sigma > 0$ and $D, E, h_0 > 0$ are data and they must be known or determined by an experience of phase-change [ArLaTa].

The solution of that problem is given by (II-1), (II-2) and (II-4) where the coefficient ω and the unknown thermal coefficients are obtained by solving the system of equations (II-6). The twenty-eight cases for Problem (P₂) (cases 9 to 36) are considered in Table II. Now, we shall prove the properties corresponding only for the determination of k_1 and k_2 (case 9).

THEOREM 1 (Case 9). – The necessary and sufficient condition for Problem (P₂), with ω, k_1 and k_2 unknown, to have a unique solution is that data $\sigma > 0, D > 0,$

$E > 0$, $h_0 > 0$, mushy zone coefficients $0 < \epsilon < 1$ and $\gamma > 0$, and thermal coefficients of the phase-change material $\lambda, \rho, c_1, c_2 > 0$ do verify the conditions

$$(1) \quad \frac{h_0}{E \rho \sigma c_2} > 1 + \frac{\gamma}{D} + \frac{\lambda}{E c_2} \left(1 + \frac{(1 - \epsilon) \gamma}{D} \right) \quad , \quad \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}} < H_{20}(x_{23}) \quad ,$$

where x_{23} is the unique positive zero of function H_{23} .

In such case, the solution is given by (II-1), (II-2) and (II-4) with

$$(2) \quad \omega = \sigma H_{25}(\xi_1) \quad , \quad k_1 = \rho \sigma^2 c_1 \frac{1}{\xi_1^2} \quad , \quad k_2 = \rho \sigma^2 c_2 \frac{H_{25}^2(\xi_1)}{B^2} \quad ,$$

where ξ_1 is the unique solution of the equation

$$(3) \quad H_{20}(x) = \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}} \quad , \quad x > 0$$

and B is the only solution of the equation

$$(4) \quad \frac{1}{H_{16}(x)} = \frac{\lambda}{E c_2} \frac{H_{21}(\xi_1)}{W(\xi_1)} \quad , \quad x > 0.$$

PROOF . - We define

$$(5) \quad \xi_1 = \frac{\sigma}{a_1} \quad , \quad \text{with} \quad a_1 = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\rho c_1}}.$$

The coefficients ω and k_1 are obtained using (5) and the element ξ_1 is given from (II-6b) as the solution of (3). From (II-6a) it follows that ξ_1 and k_2 should verify

$$(6) \quad \frac{E k_2}{\lambda \rho a_1 a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} \frac{W(\xi_1)}{\xi_1}\right) = H_{21}(\xi_1).$$

If we define

$$(7) \quad B = \frac{\sigma}{a_2} \frac{W(\xi_1)}{\xi_1} = \frac{\sigma}{a_2} H_{25}(\xi_1) \quad , \quad \text{with} \quad a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho c_2}} \quad ,$$

then equation (6) is equivalent to

$$(8) \quad \frac{F_1(B)}{B} = \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{E c_2} \frac{H_{21}(\xi_1)}{W(\xi_1)} \quad , \quad B > 0 \quad ,$$

that is, B is the solution of (4). Taking into account the properties of the function H_{16} we can deduce that there exists a unique solution of (4) if and only if

$$H_{23}(\xi_1) > 0 \quad \text{iff} \quad H_{23}(0^+) > 0 \quad \text{and} \quad \xi_1 < x_{23} \quad (\text{i.e., (1)}) \quad ,$$

where x_{23} is the only positive root of H_{23} (because H_{23} is a decreasing function for $x > 0$ and $H_{23}(+\infty) = -\infty$). From (7) we obtain the coefficient k_2 .

REFERENCES

- [ArLaTa] J. C. Arderius – M. A. Lara – D. A. Tarzia, “*Experimental-numerical determination of thermal coefficients through a phase-change process*”, To appear.
- [Ca] J. R. Cannon, “*The one-dimensional heat equation*”, Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).
- [CaJa] H. S. Carslaw – J. C. Jaeger, “*Conduction of heat in solids*”, Oxford University Press, London (1959).
- [GoTa] A.M. González – D.A. Tarzia, “*Determination on unknown coefficients of a semi-infinite material through a simple mushy zone model for the two-phase Stefan problem*”, Int. J. Engng. Sci., To appear.
- [Ru] L. I. Rubinstein, “*The Stefan problem*”, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).
- [SoWiAll] A. D. Solomon – D. G. Wilson – V. Alexiades, “*A mushy zone model with*

an exact solution", Letters Heat Mass Transfer, 9 (1982), 319–324.

[SoWiAl2] A. D. Solomon – D. G. Wilson – V. Alexiades, "Explicit solutions to phase-change problems", Quart. Appl. Math., 41 (1983), 237 – 243.

[StTa] M. B. Stampella – D. A. Tarzia, "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", Int. J. Engng. Sci., 27 (1989), 1407–1419.

[Ta1] D. A. Tarzia, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math., 39 (1981 – 82), 491 – 497.

[Ta2] D. A. Tarzia, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151–1157.

[Ta3] D. A. Tarzia, "Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades' mushy zone model", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 14 (1987), 219–228.

[Ta4] D. A. Tarzia, "Neumann-like solution for the two-phase Stefan problem with a simple mushy zone model", Comp. Appl. Math., 9 (1990), 201–211.

APPENDIX I

The following real functions are defined, for $x > 0$, by

$$f(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{1 - f(x)}, \quad F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{f(x)},$$

$$W(x) = W(x, \gamma) = x + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2D} f(x) \exp(x^2), \quad H_3(x) = \exp(-x^2) - \frac{E k_2}{h_0 a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{a_1}{a_2} W(x)\right),$$

$$G(x) = G(x, \gamma) = x + \frac{(1-\epsilon) \gamma \sqrt{\pi}}{2D} f(x) \exp(x^2), \quad H_2(x) = \frac{h_0}{\lambda \rho a_1} \exp(-x^2) - G(x),$$

$$H_4(x) = \frac{h_0}{\lambda \rho a_1} \exp(-x^2) - x - \frac{E k_2}{\lambda \rho a_1 a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{a_1}{a_2} W(x)\right), \quad H_1(x) = x F_1(x),$$

$$\begin{aligned}
H_5(x) &= \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2D} f(x) \exp(x^2) - H_4(x), & H_6(x) &= (1 - \epsilon) \frac{a_2}{a_1} x + \frac{E k_2}{\lambda \rho a_1 a_2 \sqrt{\pi}} F_1(x), \\
H_7(x) &= \frac{h_0}{\lambda \rho a_1} \exp(-x^2) - x - \frac{E k_2}{\lambda \rho a_1 a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{a_1}{a_2} x\right), & H_8(x) &= \frac{W(x)}{f(x)}, \\
H_9(x) &= \frac{G(x)}{f(x)}, & H_{10}(x) &= \frac{h_0^2 \sqrt{\pi}}{D \lambda \rho k_1} \exp(-x^2) - \frac{E h_0 k_2}{D \lambda \rho k_1 a_2} F_1\left(\frac{D k_1}{h_0 a_2 \sqrt{\pi}} H_8(x)\right), \\
H_{11}(x) &= \frac{\beta_2}{\beta_1} x + F_1(x), & H_{12}(x) &= \beta_1 \beta_3 \frac{1}{x}, & H_{13}(x) &= f(x) W(x), \\
\beta_1 &= \frac{D k_1}{h_0 a_2 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2D}\right), & \beta_2 &= \frac{D \lambda \rho k_1 a_2}{E h_0 k_2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{(1-\epsilon) \gamma \sqrt{\pi}}{2D}\right), & \beta_3 &= \frac{h_0 a_2 \sqrt{\pi}}{E k_2}, \\
H_{14}(x) &= f(x) G(x), & H_{15}(x) &= \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}} \exp(-x^2) - \frac{D E c_1 k_2}{\lambda \pi h_0 a_2} F_1\left(\frac{h_0 \sqrt{\pi}}{D \rho c_1 a_2} H_{13}(x)\right), \\
H_{16}(x) &= \sqrt{\pi} x \exp(x^2) (1 - f(x)), & H_{19}(x) &= f(x) H_{18}(x), \\
H_{17}(x) &= \frac{h_0}{E \rho a_1 c_2} \exp(-x^2) - \left(1 + \frac{(1-\epsilon) \lambda}{E c_2}\right) \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2D} f(x) \exp(x^2) - \left(1 + \frac{\lambda}{E c_2}\right) x, \\
H_{18}(x) &= \exp(x^2) \left(G(x) + \frac{E}{\lambda} \sqrt{\frac{c_1 c_2 k_2}{\pi k_1}} F_1\left(\sqrt{\frac{k_1 c_2}{c_1 k_2}} W(x)\right)\right), & H_{20}(x) &= x f(x), \\
H_{21}(x) &= H_{21}(x, \gamma) = \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} x \exp(-x^2) - G(x, \gamma), & H_{23}(x) &= \frac{H_{22}(x)}{x}, \\
H_{22}(x) &= \frac{h_0}{E \rho \sigma c_2} x \exp(-x^2) - \left(1 + \frac{(1-\epsilon) \lambda}{E c_2}\right) \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2D} f(x) \exp(x^2) - \left(1 + \frac{\lambda}{E c_2}\right) x, \\
H_{24}(x) &= \frac{f(x)}{x}, & H_{25}(x) &= \frac{W(x)}{x}, & H_{27}(x) &= \frac{H_{26}(x)}{x}, \\
H_{26}(x) &= x \exp(-x^2) - \frac{E k_2}{h_0 a_2 \sqrt{\pi}} x F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} H_{25}(x)\right), & H_{28}(x) &= \frac{H_{21}(x)}{x}, \\
H_{29}(x) &= \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} \exp(-x^2) - 1 - \frac{E k_2}{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} H_{25}(x)\right), \\
H_{30}(x) &= \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2D} \frac{1}{x F_2(x)} - H_{29}(x), & H_{31}(x) &= (1 - \epsilon) \frac{a_2}{\sigma} x + \frac{E k_2}{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}} F_1(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{32}(x) &= \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} \exp(-x^2) - 1 - \frac{E k_2}{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2}\right), & H_{34}(x) &= \frac{E c_2 \sqrt{\pi}}{D c_1} \frac{W(x)}{F_2(x)}, \\
H_{33}(x) &= \frac{\sigma h_0 c_1}{\lambda k_1} \exp(-x^2) - x G(x) - \frac{E c_2}{\lambda} x W(x), & H_{35}(x) &= 1 - H_{34}(x), \\
H_{36}(x) &= \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}} F_2(x) - x - \frac{E c_2}{\lambda} W(x), & H_{37}(x) &= H_{36}(x) - \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2 D} \frac{1}{F_2(x)}, \\
H_{38}(x) &= x + \frac{E c_2}{\lambda \sqrt{\pi}} F_1(x), & H_{39}(x) &= \sqrt{H_{20}(x)} \left(1 + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2 D} \frac{1}{x F_2(x)}\right), \\
H_{40}(x) &= G(x) + \frac{E}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{H_{24}(x)}} \sqrt{\frac{D c_1 c_2 k_2}{\sigma h_0 \sqrt{\pi^3}}} F_1\left(\sqrt{\frac{\sigma h_0 c_2 \sqrt{\pi}}{D c_1 k_2}} H_{39}(x)\right), & H_{42}(x) &= \frac{G(x)}{x}, \\
H_{41}(x) &= \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}} F_2(x), & H_{43}(x) &= \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} \exp(-x^2) - \left(1 + \frac{E c_2}{\lambda}\right), \\
H_{44}(x) &= \frac{E c_2}{\lambda \sqrt{\pi}} W(\xi_1) H_1(x) + G(\xi_1) x^2 \quad (\xi_1 > 0), & H_{46}(x) &= \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}} F_2(x) - W(x), \\
H_{45}(x) &= \frac{\sigma h_0 c_1}{\lambda k_1} \exp(-x^2) - x G(x), & H_{47}(x) &= H_{46}(x) + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2 D} \frac{1}{F_2(x)}, \\
H_{48}(x) &= \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} \exp(-x^2) - 1, & H_{49}(x) &= \frac{\exp(-x^2)}{x} - \frac{E}{\sigma h_0} \sqrt{\frac{k_1 c_2 k_2}{\pi c_1}} F_1\left(\sqrt{\frac{k_1 c_2}{c_1 k_2}} W(x)\right), \\
H_{50}(x) &= \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}} F_2(x) - \left(1 + \frac{E c_2}{\lambda}\right) x, & H_{52}(x) &= H_{51}(x) - \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2 D} \frac{x}{F_2(x)}, \\
H_{51}(x) &= \frac{\sigma h_0 c_1}{\lambda k_1} \exp(-x^2) - x^2 - \frac{E}{\lambda} \sqrt{\frac{c_1 c_2 k_2}{\pi k_1}} x F_1\left(\sqrt{\frac{k_1 c_2}{c_1 k_2}} W(x)\right), \\
H_{53}(x) &= (1 - \epsilon) \sqrt{\frac{c_1 k_2}{k_1 c_2}} x + \frac{E}{\lambda} \sqrt{\frac{c_1 c_2 k_2}{\pi k_1}} F_1(x), & H_{55}(x) &= x f(x) \exp(x^2) = \frac{x}{F_2(x)}, \\
H_{54}(x) &= \frac{\sigma h_0 c_1}{\lambda k_1} \exp(-x^2) - \left(\epsilon + (1 - \epsilon) \sqrt{\frac{c_1 k_2}{k_1 c_2}}\right) x^2 - \frac{E}{\lambda} \sqrt{\frac{c_1 c_2 k_2}{\pi k_1}} x F_1\left(\sqrt{\frac{k_1 c_2}{c_1 k_2}} x\right), \\
H_{56}(x) &= \frac{1}{H_{55}(x)} - \frac{E k_2}{D \rho \sigma c_1 a_2} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} H_{25}(x)\right), & H_{58}(x) &= x F_2(x), \\
H_{57}(x) &= H_{57}(x, \gamma) = \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}} F_2(x) - G(x, \gamma).
\end{aligned}$$

APPENDIX II

The restrictions used in the text are the following

$$(R1) \quad h_0 > \frac{E k_2}{a_2 \sqrt{\pi}}$$

$$(R2) \quad \frac{D k_1}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}} < f(x_2) , \quad x_2 : \text{ the unique positive zero of } H_2$$

$$(R3) \quad \frac{D k_1}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}} < f(x_3) , \quad x_3 : \text{ the unique positive zero of } H_3$$

$$(R4) \quad \frac{D k_1}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}} < f(x_4) , \quad x_4 : \text{ the unique positive zero of } H_4$$

$$(R5) \quad \frac{D k_1}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}} > f(x_5) , \quad x_5 : \text{ the unique positive zero of } H_5$$

$$(R6) \quad \frac{D k_1}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}} < f(x_7) , \quad x_7 : \text{ the unique positive zero of } H_7$$

$$(R7) \quad h_0 > \frac{D k_1}{a_2 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2 D} \right) \frac{1}{\eta} ,$$

η : the unique positive solution of the equation $H_{11}(x) = H_{12}(x)$, $x > 0$

$$(R8) \quad \frac{D k_1}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}} < f(x_{17}) , \quad x_{17} : \text{ the unique positive zero of } H_{17}$$

$$(R9) \quad \frac{h_0}{E \rho \sigma c_2} > 1 + \frac{\gamma}{D} + \frac{\lambda}{E c_2} \left(1 + \frac{(1 - \epsilon) \gamma}{D} \right)$$

$$(R10) \quad h_0 > \frac{D k_1}{2 \sigma}$$

$$(R11) \quad \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}} < H_{20}(x_{23}) , \quad x_{23} : \text{ the unique positive zero of } H_{23}$$

$$(R12) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{23}) , \quad x_{23} : \text{ the unique positive zero of } H_{23}$$

$$(R13) \quad h_0 > \frac{E k_2}{a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} \left(1 + \frac{\gamma}{D}\right)\right)$$

$$(R14) \quad \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} > 1 + \frac{(1 - \epsilon) \gamma}{D}$$

$$(R15) \quad \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} > 1 + \frac{E k_2}{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} \left(1 + \frac{\gamma}{D}\right)\right)$$

$$(R16) \quad \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} > 1 + \frac{\gamma}{D} + \frac{E k_2}{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} \left(1 + \frac{\gamma}{D}\right)\right)$$

$$(R17) \quad \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} > 1 + \frac{E k_2}{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2}\right)$$

$$(R18) \quad \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}} < H_{20}(x_{27}) , \quad x_{27} : \text{ the unique positive zero of } H_{27}$$

$$(R19) \quad \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}} < H_{20}(x_{28}) , \quad x_{28} : \text{ the unique positive zero of } H_{28}$$

$$(R20) \quad H_{20}(x_{29}) > \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}} > H_{20}(x_{30}) ,$$

x_{29} : the unique positive zero of H_{29} , x_{30} : the unique positive zero of H_{30}

$$(R21) \quad \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}} < H_{20}(x_{32}) , \quad x_{32} : \text{ the unique positive zero of } H_{32}$$

$$(R22) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{33}) , \quad x_{33} : \text{ the unique positive zero of } H_{33}$$

$$(R23) \quad h_0 = \frac{D k_1}{a_1 f\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) \sqrt{\pi}}$$

$$(R24) \quad H_{35}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 0 \text{ or } \frac{\sigma}{a_1} < x_{35} , \quad x_{35} : \text{ the unique positive zero of } H_{35}$$

$$(R25) \quad H_{36}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 0 \text{ or } \frac{\sigma}{a_1} < x_{36} , \quad x_{36} : \text{ the unique positive zero of } H_{36}$$

$$(R26) \quad \frac{D k_1}{E \rho a_1 a_2 c_2} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) \leq 1$$

$$(R27) \quad \frac{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}}{E k_2} \left(\frac{D k_1}{\lambda \rho \sigma a_1 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) - 1 \right) > 1$$

$$(R28) \quad F_1\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) < \frac{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}}{E k_2} \left(\frac{D k_1}{\lambda \rho \sigma a_1 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) - 1 \right)$$

$$(R29) \quad H_{57}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 0 \text{ or } \frac{\sigma}{a_1} < x_{57}, \quad x_{57} : \text{ the unique positive zero of } H_{57}$$

$$(R30) \quad \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} > 1 + \frac{(1 - \epsilon) \gamma}{D} + \frac{E k_2}{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} \left(1 + \frac{\gamma}{D}\right)\right)$$

$$(R31) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{27}), \quad x_{27} : \text{ the unique positive zero of } H_{27}$$

$$(R32) \quad h_0 > \rho \sigma (\lambda + E c_2)$$

$$(R33) \quad H_{43}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 0 \text{ or } \frac{\sigma}{a_1} < x_{43},$$

x_{43} : the unique positive zero of H_{43} when (R32) is verified

$$(R34) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{28}), \quad x_{28} : \text{ the unique positive zero of } H_{28}$$

$$(R35) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{29}), \quad x_{29} : \text{ the unique positive zero of } H_{29}$$

$$(R36) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} < H_{24}(x_{30}), \quad x_{30} : \text{ the unique positive zero of } H_{30}$$

$$(R37) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{32}), \quad x_{32} : \text{ the unique positive zero of } H_{32}$$

$$(R38) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{45}), \quad x_{45} : \text{ the unique positive zero of } H_{45}$$

$$(R39) \quad H_{47}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 0 \text{ or } \frac{\sigma}{a_1} < x_{47}, \quad x_{47} : \text{ the unique positive zero of } H_{47}$$

$$(R40) \quad H_{55}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) < \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}}$$

$$(R41) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{54}), \quad x_{54} : \text{ the unique positive zero of } H_{54}$$

$$(R42) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{49}), \quad x_{49} : \text{ the unique positive zero of } H_{49}$$

$$(R43) \quad H_{50}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 0 \text{ or } \frac{\sigma}{a_1} < x_{50}, \quad x_{50} : \text{ the unique positive zero of } H_{50}$$

$$(R44) \quad \frac{D k_1 a_2}{E a_1 k_2} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 1$$

$$(R45) \quad F_1\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) < \frac{D k_1 a_2}{E a_1 k_2} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)$$

$$(R46) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} > H_{24}(x_{51}), \quad x_{51} : \text{ the unique positive zero of } H_{51}$$

$$(R47) \quad \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}} < H_{24}(x_{52}), \quad x_{52} : \text{ the unique positive zero of } H_{52}$$

$$(R48) \quad H_{56}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) > 0 \text{ or } \frac{\sigma}{a_1} < x_{56}, \quad x_{56} : \text{ the unique positive zero of } H_{56}.$$

Table I

UNKNOWN		
CASE	COEFFICIENTS RESTRICTIONS	SOLUTION
1	c_2, σ, ω (R2)	$\sigma = a_1 \xi_1, \quad c_2 = \frac{c_1 k_2}{k_1} \frac{B^2}{W^2(\xi_1)}, \quad \omega = a_1 W(\xi_1)$ <p>where ξ_1 is the unique positive solution of the equation</p> $f(x) = \frac{D k_1}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}}, \quad x > 0$ <p>and B is the only positive solution of the equation</p> $H_1(x) = \frac{\lambda k_1 \sqrt{\pi}}{E c_1 k_2} W(\xi_1) H_2(\xi_1), \quad x > 0.$
2	λ, σ, ω (R1), (R3)	$\sigma = a_1 \xi_1, \quad \lambda = \frac{h_0}{\rho a_1} \frac{H_3(\xi_1)}{G(\xi_1)}, \quad \omega = a_1 W(\xi_1)$ <p>where ξ_1 is given as in case 1.</p>
3	ϵ, σ, ω (R1), (R4) (R5)	$\sigma = a_1 \xi_1, \quad \epsilon = \frac{2 D}{\gamma \sqrt{\pi}} F_2(\xi_1) H_5(\xi_1), \quad \omega = a_1 W(\xi_1)$ <p>where ξ_1 is given as in case 1.</p>
4	γ, σ, ω (R1), (R6)	$\sigma = a_1 \xi_1, \quad \gamma = \frac{2 D}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a_2}{a_1} B - \xi_1 \right) F_2(\xi_1), \quad \omega = a_1 W(\xi_1)$ <p>where ξ_1 is given as in case 1 and B is the only positive solution of the equation</p> $H_6(x) = \frac{h_0}{\lambda \rho a_1} \exp(-\xi_1^2) - \epsilon \xi_1, \quad x > \frac{a_1}{a_2} \xi_1.$
5	c_1, σ, ω (R7)	$\sigma = \frac{D k_1}{h_0 \sqrt{\pi}} \frac{1}{H_{24}(\xi_1)}, \quad c_1 = \frac{\pi h_0^2}{D^2 \rho k_1} f^2(\xi_1), \quad \omega = \frac{D k_1}{h_0 \sqrt{\pi}} H_8(\xi_1)$ <p>where ξ_1 is the unique positive solution of the equation</p> $H_9(x) = H_{10}(x), \quad x > 0.$

6 k_1, σ, ω (R1) $\sigma = \frac{h_0 \sqrt{\pi}}{D \rho c_1} H_{20}(\xi_1), k_1 = \frac{\pi h_0^2}{D^2 \rho c_1} \Gamma^2(\xi_1), \omega = \frac{h_0 \sqrt{\pi}}{D \rho c_1} H_{13}(\xi_1)$

where ξ_1 is the unique positive solution of the equation

$$H_{14}(x) = H_{15}(x), \quad x > 0.$$

7 k_2, σ, ω (R8) $\sigma = a_1 \xi_1, k_2 = \frac{k_1 c_2}{c_1} \frac{W^2(\xi_1)}{B^2}, \omega = a_1 W(\xi_1)$

where ξ_1 is given as in case 1 and B is the only positive solution of the equation

$$\frac{1}{H_{16}(x)} = \frac{\lambda}{E c_2} \frac{H_2(\xi_1)}{W(\xi_1)}, \quad x > 0.$$

8 ρ, σ, ω — $\sigma = \frac{\lambda k_1}{h_0 c_1} \xi_1 H_{18}(\xi_1), \rho = \frac{h_0^2 c_1}{\lambda^2 k_1} \frac{1}{H_{18}^2(\xi_1)},$

$$\omega = \frac{\lambda k_1}{h_0 c_1} W(\xi_1) H_{18}(\xi_1)$$

where ξ_1 is the unique positive solution of the equation

$$H_{19}(x) = \frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

Table II

CASE	UNKNOWN COEFFICIENTS RESTRICTIONS	SOLUTION
9	ω, k_1, k_2 (R9), (R11)	$\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad k_1 = \rho \sigma^2 c_1 \frac{1}{\xi_1^2}, \quad k_2 = \rho \sigma^2 c_2 \frac{H_{25}^2(\xi_1)}{B^2}$ <p>where ξ_1 is the unique solution of the equation</p> $H_{20}(x) = \frac{D \rho \sigma c_1}{h_0 \sqrt{\pi}}, \quad x > 0$ <p>and B is the only solution of the equation</p> $\frac{1}{H_{16}(x)} = \frac{\lambda}{E c_2} \frac{H_{21}(\xi_1)}{W(\xi_1)}, \quad x > 0.$
10	ω, c_1, k_2 (R9), (R10) (R12)	$\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad c_1 = \frac{k_1}{\rho \sigma^2} \xi_1^2, \quad k_2 = \rho \sigma^2 c_2 \frac{H_{25}^2(\xi_1)}{B^2}$ <p>where ξ_1 is the unique solution of the equation</p> $H_{24}(x) = \frac{D k_1}{\sigma h_0 \sqrt{\pi}}, \quad x > 0$ <p>and B is given as in case 9.</p>
11	ω, λ, k_1 (R13), (R18)	$\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad \lambda = \frac{h_0}{\rho \sigma} \frac{H_{26}(\xi_1)}{G(\xi_1)}, \quad k_1 = \rho \sigma^2 c_1 \frac{1}{\xi_1^2}$ <p>where ξ_1 is given as in case 9.</p>
12	ω, k_1, c_2 (R14), (R19)	$\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad k_1 = \rho \sigma^2 c_1 \frac{1}{\xi_1^2}, \quad c_2 = \frac{k_2}{\rho \sigma^2} \frac{B^2}{H_{25}^2(\xi_1)}$ <p>where ξ_1 is given as in case 9 and B is the only solution of the equation</p> $H_1(x) = \frac{\lambda \rho \sigma^2 \sqrt{\pi}}{E k_2} H_{25}(\xi_1) H_{28}(\xi_1), \quad x > 0.$
13	ω, ϵ, k_1 (R16), (R20)	$\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad \epsilon = 1 - \frac{2D}{\gamma \sqrt{\pi}} H_{29}(\xi_1) H_{58}(\xi_1),$ $k_1 = \rho \sigma^2 c_1 \frac{1}{\xi_1^2}$ <p>where ξ_1 is given as in case 9.</p>

14 ω, γ, k_1 (R17), (R21) $\omega = B a_2, \gamma = \frac{2D}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a_2}{\sigma} B - 1 \right) H_{58}(\xi_1), k_1 = \rho \sigma^2 c_1 \frac{1}{\xi_1^2}$

where ξ_1 is given as in case 9 and B is the only solution of the equation

$$H_{31}(x) = \frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} \exp(-\xi_1^2) - \epsilon, \quad x > \frac{\sigma}{\xi_1}.$$

15 ω, ρ, k_2 (R10), (R22) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \rho = \frac{k_1}{\sigma^2 c_1} \xi_1^2, k_2 = \frac{k_1 c_2}{c_1} \frac{W^2(\xi_1)}{B^2}$

where ξ_1 is given as in case 10 and B is the only solution of the equation

$$\frac{1}{H_{16}(x)} = \frac{\lambda}{E c_2} \frac{H_{45}(\xi_1)}{\xi_1 W(\xi_1)}, \quad x > 0.$$

16 ω, λ, k_2 (R23), (R24) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right), \lambda = \frac{1}{G\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)} \left(\frac{D c_1}{\sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) - E c_2 \frac{W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}{H_{16}(B)} \right),$

$$k_2 = \frac{k_1 c_2}{c_1} \frac{W^2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}{B^2}$$

for any $B > H_{16}^{-1}\left(\frac{E c_2 \sqrt{\pi}}{D c_1} \frac{W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}{F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}\right)$.

17 ω, ϵ, k_2 (R23), (R25) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right), k_2 = \frac{k_1 c_2}{c_1} \frac{W^2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}{B^2},$

$$\epsilon = \frac{2D}{\gamma \sqrt{\pi}} W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) -$$

$$- \frac{2D}{\lambda \gamma \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) \left(\frac{D c_1}{\sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) - E c_2 \frac{W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}{H_{16}(B)} \right)$$

for any $H_{16}^{-1}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) < B < H_{16}^{-1}\left(\frac{1}{C}\right)$ if $\frac{\sigma}{\bar{a}_1} < x_{37}$

or for any $B > H_{16}^{-1}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ if $x_{37} \leq \frac{\sigma}{\bar{a}_1} < x_{36}$

where $\Lambda = \frac{\lambda}{E c_2 W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)} \left(H_{41}\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) - \frac{\sigma}{\bar{a}_1} \right)$ and

$$C = \frac{\lambda}{E c_2 W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)} H_{40}\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right).$$

18 ω, ϵ, γ (R23), (R26) $\omega = \omega(\gamma) = \sigma \left(1 + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2 D} \frac{1}{H_{58}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)} \right),$
 (R27), (R28)

$$\epsilon = \epsilon(\gamma) = 1 - \frac{\sigma}{\omega(\gamma) - \sigma} \left(\frac{D k_1}{\lambda \rho \sigma \sqrt{\pi}} H_{58}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) - 1 \right) -$$

$$- \frac{1}{\omega(\gamma) - \sigma} \frac{E k_2}{\lambda \rho a_2 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\omega(\gamma)}{a_2}\right)$$

for any $0 < \gamma < \frac{2 D a_2}{a_1 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) \left(F_1^{-1}(B) - \frac{\sigma}{a_2} \right)$

where

$$B = \frac{\lambda \rho \sigma a_2 \sqrt{\pi}}{E k_2} \left(\frac{D k_1}{\lambda \rho \sigma a_1 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) - 1 \right).$$

19 ω, c_2, k_2 (R23), (R29) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right), \quad c_2 = \frac{\lambda}{E} \frac{H_{16}(B) H_{57}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}{W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)},$

$$k_2 = \frac{\lambda k_1 \sqrt{\pi}}{E c_1} \frac{W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) H_{57}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}{H_1(B)}$$

for any $B > 0$.

20 ω, ρ, k_1 $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \rho = \frac{h_0 \sqrt{\pi}}{D \sigma c_1} H_{20}(\xi_1), k_1 = \frac{\sigma h_0 \sqrt{\pi}}{D} H_{24}(\xi_1)$

where ξ_1 is the unique solution of the equation

$$H_{40}(x) = H_{41}(x), \quad x > 0.$$

21 ω, c_1, k_1 (R30) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), c_1 = \frac{h_0 \sqrt{\pi}}{D \rho \sigma} H_{20}(\xi_1), k_1 = \frac{\sigma h_0 \sqrt{\pi}}{D} H_{24}(\xi_1)$

where ξ_1 is the unique solution of the equation

$$\frac{h_0}{\lambda \rho \sigma} H_{27}(x) = H_{42}(x), \quad x > 0.$$

22 ω, λ, c_1 (R10), (R13) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad \lambda = \frac{h_0}{\rho \sigma} \frac{H_{26}(\xi_1)}{G(\xi_1)}, \quad c_1 = \frac{k_1}{\rho \sigma^2} \xi_1^2,$
 (R31)

where ξ_1 is given as in case 10.

23 ω, γ, k_2 (R23), (R43) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{a_1}, \gamma\right), \quad k_2 = \frac{k_1 c_2}{c_1} \frac{W^2\left(\frac{\sigma}{a_1}, \gamma\right)}{B^2}$
 for any $0 < \gamma < \frac{2 D F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}{\left(1 - \epsilon + \frac{E c_2}{\lambda}\right) \sqrt{\pi}} H_{50}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)$
 where $B = B(\gamma)$ is the unique solution of the equation

$$\frac{1}{H_{16}(x)} = \frac{\lambda}{E c_2} \frac{H_{57}\left(\frac{\sigma}{a_1}, \gamma\right)}{W\left(\frac{\sigma}{a_1}, \gamma\right)}, \quad x > 0.$$

24 ω, ϵ, c_1 (R16), (R35) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad \epsilon = 1 - \frac{2 D}{\gamma \sqrt{\pi}} H_{20}(\xi_1) H_{58}(\xi_1), \quad c_1 = \frac{k_1}{\rho \sigma^2} \xi_1^2$
 where ξ_1 is given as in case 10.

25 ω, c_1, c_2 (R10), (R14) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad c_1 = \frac{k_1}{\rho \sigma^2} \xi_1^2, \quad c_2 = \frac{k_2}{\rho \sigma^2} \frac{B^2}{H_{25}^2(\xi_1)}$
 (R34)
 where ξ_1 is given as in case 10 and B is given as in case 12.

26 ω, ρ, c_1 (R10) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1), \quad \rho = \frac{k_2}{\sigma^2 c_2} \frac{B^2}{H_{25}^2(\xi_1)}, \quad c_1 = \frac{k_1 c_2}{k_2} \frac{W^2(\xi_1)}{B^2}$
 where ξ_1 is given as in case 10 and B is the only solution of the equation

$$H_{44}(x) = \frac{\sigma h_0 c_2}{\lambda k_2} \frac{W^2(\xi_1)}{\xi_1 \exp(\xi_1^2)}, \quad x > 0.$$

27 ω, γ, c_1 (R10), (R17) $\omega = B a_2, \quad \gamma = \frac{2 D}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a_2}{\sigma} B - 1\right) H_{58}(\xi_1), \quad c_1 = \frac{k_1}{\rho \sigma^2} \xi_1^2$
 (R37)
 where ξ_1 is given as in case 10 and B is given as in case 14.

28 ω, λ, c_2 (R23) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right), \quad \lambda = \frac{1}{G\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)} \left(\frac{D c_1}{\sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) - \frac{E c_1 k_2}{k_1 \sqrt{\pi}} \frac{H_1(B)}{W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}\right),$

$$c_2 = \frac{c_1 k_2}{k_1} \frac{B^2}{W^2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}$$

 for any $0 < B < H_1^{-1}\left(\frac{D k_1}{E k_2} W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)\right)$.

29 ω, ρ, c_2 (R10), (R38) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1)$, $\rho = \frac{k_1}{\sigma^2 c_1} \xi_1^2$, $c_2 = \frac{c_1 k_2}{k_1} \frac{B^2}{W^2(\xi_1)}$

where ξ_1 is given as in case 10 and B is the only solution of the equation

$$H_1(x) = \frac{\lambda k_1 \sqrt{\pi}}{E c_1 k_2} H_{25}(\xi_1) H_{45}(\xi_1) , \quad x > 0.$$

30 ω, ϵ, c_2 (R23), (R39) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)$, $c_2 = \frac{c_1 k_2}{k_1} \frac{B^2}{W^2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}$,

$$\epsilon = \frac{2 D}{\gamma \sqrt{\pi}} W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) -$$

$$- \frac{2 D}{\lambda \gamma \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) \left(\frac{D c_1}{\sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) - \frac{E c_1 k_2}{k_1 \sqrt{\pi}} \frac{H_1(B)}{W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)} \right)$$

for any $H_1^{-1}(A) < B < H_1^{-1}(C)$ if $\frac{\sigma}{\bar{a}_1} < x_{46}$

or for any $0 < B < H_1^{-1}(C)$ if $x_{46} \leq \frac{\sigma}{\bar{a}_1} < x_{47}$

where $A = \frac{\lambda k_1 \sqrt{\pi}}{E c_1 k_2} W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) H_{46}\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)$ and

$$C = \frac{\lambda k_1 \sqrt{\pi}}{E c_1 k_2} W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right) H_{47}\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right).$$

31 ω, γ, c_2 (R23), (R40) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}, \gamma\right)$, $c_2 = \frac{k_2}{\rho a_1^2} \frac{B^2}{W^2\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}, \gamma\right)}$,

$$\text{for any } 0 < \gamma < \frac{2 D H_{58}\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)}{(1-\epsilon) \sqrt{\pi}} \left(\frac{D c_1}{\lambda \sqrt{\pi}} \frac{1}{H_{55}\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}\right)} - 1 \right)$$

where $B = B(\gamma)$ is the unique solution of the equation

$$H_1(x) = \frac{\lambda k_1 \sqrt{\pi}}{E c_1 k_2} W\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}, \gamma\right) H_{57}\left(\frac{\sigma}{\bar{a}_1}, \gamma\right) , \quad x > 0.$$

32 ω, λ, ρ (R10), (R42) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1)$, $\lambda = \frac{\sigma h_0 c_1}{k_1} \frac{H_{49}(\xi_1)}{G(\xi_1)}$, $\rho = \frac{k_1}{\sigma^2 c_1} \xi_1^2$

where ξ_1 is given as in case 10.

33 $\omega, \lambda, \epsilon$ (R23), (R48) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right), \epsilon = 1 - \frac{2D}{\gamma\sqrt{\pi}} \left(\frac{Dc_1}{\lambda\sqrt{\pi}} H_{56}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) - 1 \right) H_{58}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)$

$$\text{for any } \frac{\frac{Dc_1}{\sqrt{\pi}} H_{56}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}{1 + \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D} \frac{1}{H_{58}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}} < \lambda < \frac{Dc_1}{\sqrt{\pi}} H_{56}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)$$

34 ω, λ, γ (R23), (R44) $\omega = a_1 W\left(\frac{\sigma}{a_1}, \gamma\right)$,
 (R45)

$$\lambda = \frac{Dc_1}{G\left(\frac{\sigma}{a_1}, \gamma\right)\sqrt{\pi}} \left(F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) - \frac{E}{D} \sqrt{\frac{c_2 k_2}{c_1 k_1}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_2} H_{25}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)\right) \right)$$

$$\text{for any } 0 < \gamma < \frac{2D H_{58}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}{(1-\epsilon)\sqrt{\pi}} \left({}_2F_1^{-1}\left(\frac{Dk_1 a_2}{E a_1 k_2} F_2\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)\right) - 1 \right)$$

35 ω, ϵ, ρ (R46), (R47) $\omega = \sigma H_{25}(\xi_1)$, $\epsilon = 1 - \frac{2D}{\gamma\sqrt{\pi}} \frac{H_{51}(\xi_1)}{H_{55}(\xi_1)}$, $\rho = \frac{k_1}{\sigma^2 c_1} \xi_1^2$

where ξ_1 is given as in case 10.

36 ω, γ, ρ (R10), (R41) $\omega = \sigma \sqrt{\frac{c_1 k_2}{k_1 c_2}} \frac{B}{\xi_1}$, $\gamma = \frac{2D}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\frac{c_1 k_2}{k_1 c_2}} B - \xi_1 \right) F_2(\xi_1)$,

$$\rho = \frac{k_1}{\sigma^2 c_1} \xi_1^2$$

where ξ_1 is given as in case 10 and B is the only solution of the equation

$$H_{53}(x) = \frac{\sigma h_0 c_1}{\lambda k_1} \frac{\exp(-\xi_1^2)}{\xi_1} - \epsilon \xi_1, \quad x > \sqrt{\frac{k_1 c_2}{c_1 k_2}} \xi_1.$$

Adriana M. GONZÁLEZ
 Depto. de Matemática,
 Facultad de Cs. Exactas, Fco-Qras y Naturales,
 Univ. Nac. de Río Cuarto,
 Campus Universitario, Ruta 36, km 601,
 (5800) Río Cuarto, Argentina.

Domingo A. TARZIA
 Depto. de Matemática
 FCE, Univ. Austral,
 Paraguay 1950,
 (2000) Rosario, Argentina.
 and
 PROMAR (CONICET - UNR),
 Instituto de Matemática "B. Levi",
 Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.

Modelado numérico de la fusión y evaporación de materiales mediante haces de electrones

Javier I. Etcheverry

Resumen

En este trabajo se modela la interacción de un haz de electrones de energías del orden de las decenas de keV con un material. Se utiliza un método de Monte Carlo para calcular tanto el coeficiente de retrodispersión como la densidad de energía depositada por el haz en función de la distancia a la superficie del material. Esta información permite resolver la ecuación del calor en el material con un término de fuentes adecuado. De este modo se obtienen resultados sobre umbrales de fusión y evaporación de las muestras, curvas de espesor fundido en función de la energía de la descarga, así como otras curvas de interés.

1 Introducción

Los haces de electrones han sido utilizados desde hace ya mucho tiempo en numerosos procesos de gran importancia práctica. Por ejemplo, en tratamiento superficial de materiales, consolidación superficial de capas delgadas, fabricación de fases metaestables, etc. Además, constituyen una herramienta esencial en las técnicas de fabricación de microcomponentes electrónicos, circuitos integrados, etc.

En general todas estas aplicaciones están basadas en los fenómenos térmicos producidos por la gran cantidad de energía depositada por el haz durante un breve lapso en una capa delgada cercana a la superficie del material irradiado.

Los fenómenos producidos al irradiar un material con un haz de electrones de la energía de interés (decenas de KeV) se pueden esencialmente dividir en tres aspectos principales ([1]):

1) Deposición de energía en el material debida a las interacciones entre el haz y los componentes del material.

2) Calentamiento del material debido al flujo de energía.

3) Interacciones entre el calentamiento del material, y la deposición de energía (por ejemplo, cambios de los coeficientes de absorción, de retrodispersión, etc, con la temperatura).

Una de las ventajas de la irradiación con haces de electrones es que esta interacción no es demasiado importante, pues la deposición de energía se debe principalmente a la interacción promedio de los electrones incidentes con todos los electrones del blanco (y no como en el caso de los láseres sólo con los electrones de valencia), que en su mayoría no son afectados por las variaciones de temperatura. De este modo, el problema planteado puede dividirse en dos aspectos principales: determinar la deposición de energía en el material, y resolver el problema térmico resultante.

En este trabajo se calcularán la reflectividad (coeficiente de retrodispersión) y los perfiles de deposición de energía para un dado material mediante un método de Monte Carlo ([2], [3], [4]). Esta información junto con un modelo simple de la forma temporal del haz de electrones permite plantear para el material la ecuación del calor con un término de fuentes adecuado. Finalmente se resuelve numéricamente este problema en una dimensión espacial por el método de líneas, y se presentan curvas mostrando el comportamiento de diferentes variables de interés (temperaturas alcanzadas, forma del término de fuentes, determinación de umbrales de fusión y evaporación, etc).

Por una cuestión de claridad se dedican secciones separadas al tratamiento del método de Monte Carlo, el planteo del problema térmico, y finalmente los resultados numéricos.

2 Método de Monte Carlo

Se supone un haz de electrones con energías del orden de las decenas de keV, incidiendo sobre una superficie metálica plana.

Para electrones de estas energías la materia consiste esencialmente de electrones libres y núcleos. Un electrón del haz que atraviesa un material sufre dos tipos de encuentros:

Colisiones nucleares:	Prácticamente elásticas Sólo alteran la dirección del electrón Pueden producir defectos en la red cristalina
Colisiones electrónicas:	Colisiones inelásticas Detienen lentamente al electrón Número muy grande de interacciones

Otros mecanismos de pérdida de energía (radiación de frenado y de Cherenkov) sólo son importantes a energías del orden de los MeV.

Las colisiones electrónicas pueden tenerse en cuenta en promedio a través de fórmulas clásicas de Bethe ([5],[6]) para el poder frenador dE/ds :

$$\frac{dE}{ds} = 4\pi r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2} NZ \ln \left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\gamma-1}mc^2}{I} \right)$$

donde E es la energía del electrón, ds es un diferencial de camino recorrido, $r_0 = e^2/(mc^2)$ es el radio clásico del electrón, m la masa en reposo del electrón, v la velocidad del electrón, c la velocidad de la luz, $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. N es la cantidad de átomos de material por unidad de volumen, supuestos de número atómico Z .

Se denota con I al potencial de excitación medio, que puede ser aproximado para $Z > 12$ por la expresión empírica (I en eV):

$$I = (9.76 + 58.8Z^{-1.19})Z$$

La dificultad para utilizar estas fórmulas es que los electrones no siguen un camino rectilíneo dentro del material, debido a las dispersiones elásticas de gran ángulo.

2.1 Procedimiento de cálculo

El método de Monte Carlo utilizado [2] permite simular este proceso haciendo recorrer al electrón un segmento de recta de longitud igual al camino libre

medio Λ de un electrón en el material:

$$\Lambda = \frac{1}{n\Sigma} = \frac{A}{N_A\rho\Sigma}$$

donde Σ es la sección eficaz total, N_A el número de Avogadro, ρ la densidad del material, N el número de átomos por unidad de volumen, y A el peso atómico.

Luego, se dispersa por un choque elástico con una probabilidad por ángulo sólido dada por

$$P(\theta)d\Omega = \left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \frac{1}{\Sigma} \right) d\Omega$$

donde la sección eficaz de scattering de un electrón se calcula según una fórmula de dispersión de Rutherford apantallada:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{Z(Z+1)e^4}{p^2v^2} \frac{1}{(1 - \cos(\theta) + 2\beta)^2}$$

El valor de β se tomó según el obtenido por Nigam [2] usando un modelo de Thomas-Fermi:

$$\beta = \frac{1}{4} \left(1.12 \frac{\hbar\lambda_0}{p} \right)^2 \quad \lambda_0 = Z^{1/3}/0.885a_0$$

En cada segmento rectilíneo, se supuso una pérdida continua de energía dada por la expresión para el poder frenador (2). La trayectoria se continuó hasta que la energía del electrón fuera inferior a un valor mínimo (500 eV), o hasta que su energía según la fórmula de Bethe (2) ya no disminuyera.

2.2 Reflectividad y distribución de energía

Realizando estadística sobre un gran número de trayectorias (50000 en el caso de los resultados que se muestran), para varios materiales, se obtiene información sobre la cantidad y la energía de los electrones retrodispersados en función de la energía de los electrones incidentes (ver Figura 1). Notar que la reflectividad es aproximadamente independiente de la energía del haz incidente, aunque depende fuertemente de Z .

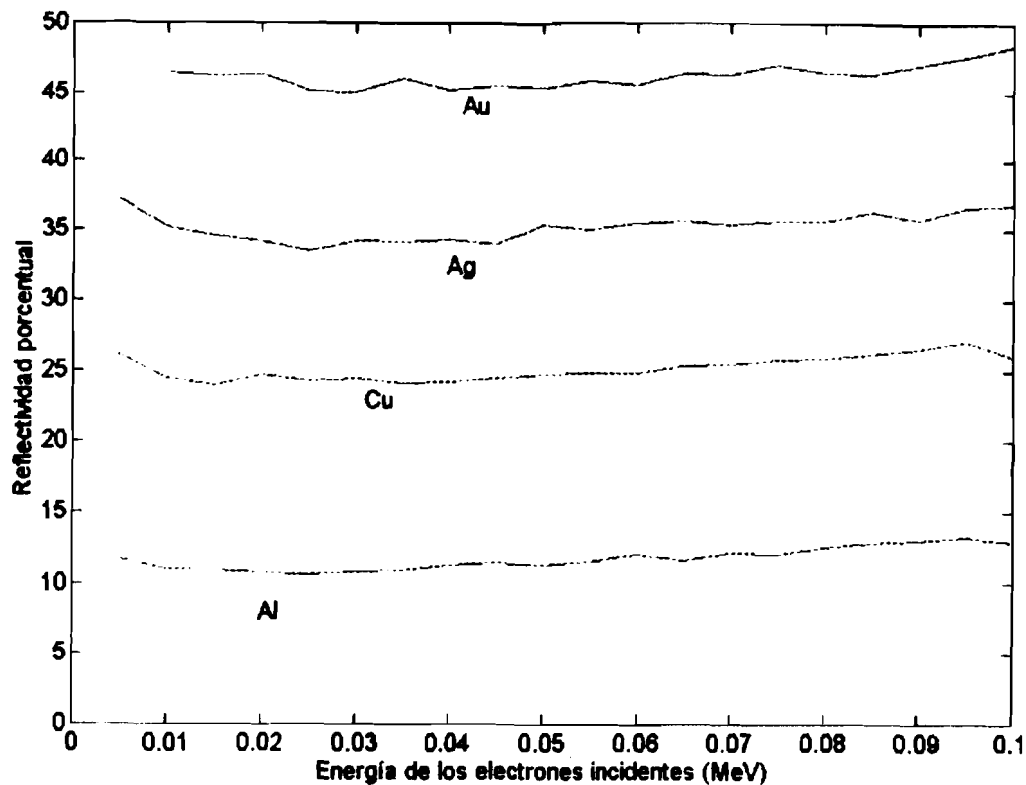


Figura 1: Coeficientes de retrodispersión calculados por el método de Monte Carlo, en función de la energía de los electrones incidentes, para varios elementos. Número de electrones: 50000.

Además se obtienen curvas de distribución de la energía en función de la profundidad, para varios materiales, como se muestran en la Figura 2. Los gráficos se presentan en función de la profundidad normalizada con el rango (espesor de penetración del haz de electrones) de modo de poder comparar los resultados obtenidos para varios materiales.

3 Problema térmico

Los resultados de la sección precedente nos permiten plantear ahora el problema puramente térmico en el material. Se resuelve un problema unidimensional, pues las dimensiones típicas de la zona irradiada son del orden del centímetro cuadrado, mientras que el espesor típico irradiado es del orden de 5 micrones.

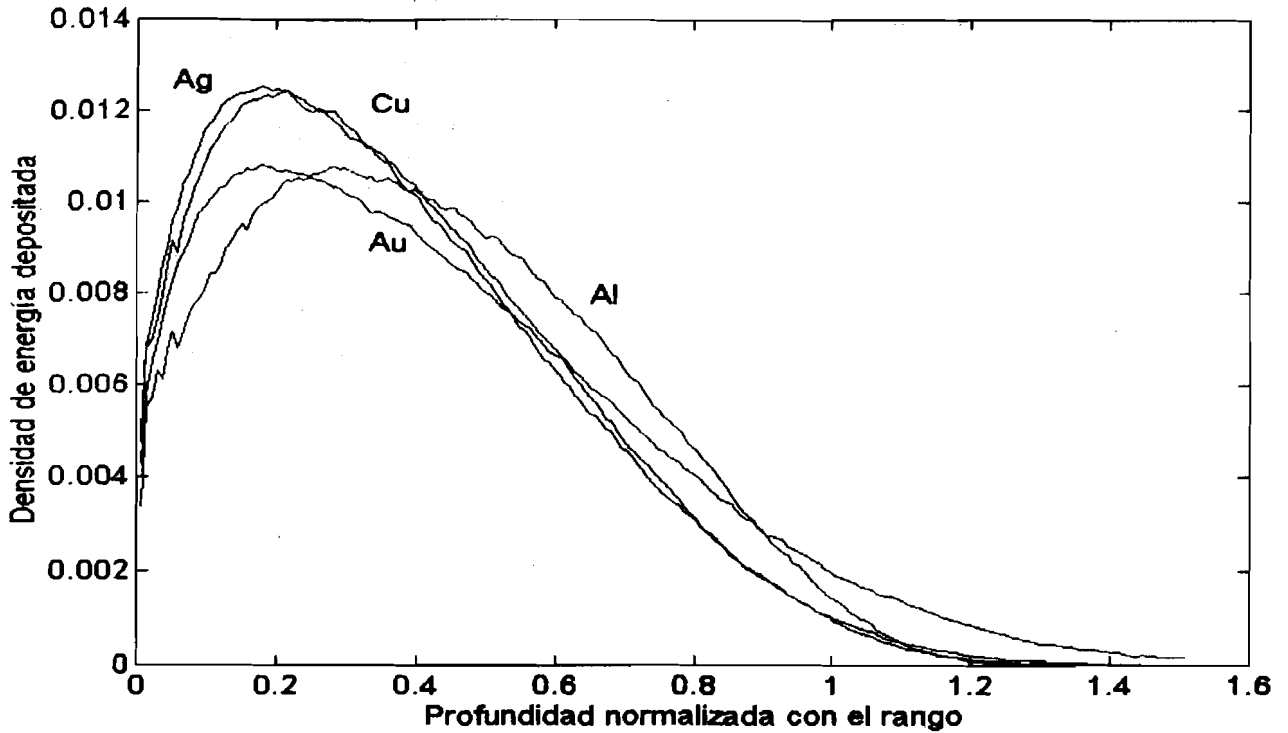


Figura 2: Densidad normalizada de energía depositada en función de la profundidad, para varios materiales. La profundidad está normalizada con el rango. Resultados obtenidos para un haz de 50 KeV. Número de electrones: 50000.

La evolución de la temperatura dentro del material se modeló utilizando la ecuación del calor, con un término de fuentes correspondiente a la densidad de flujo de energía aportado por el haz de electrones:

$$\rho c_p T_t = (k(T)T_x)_x + (1 - R)i(t)v(t)\phi(x/r(t))\frac{1}{S}$$

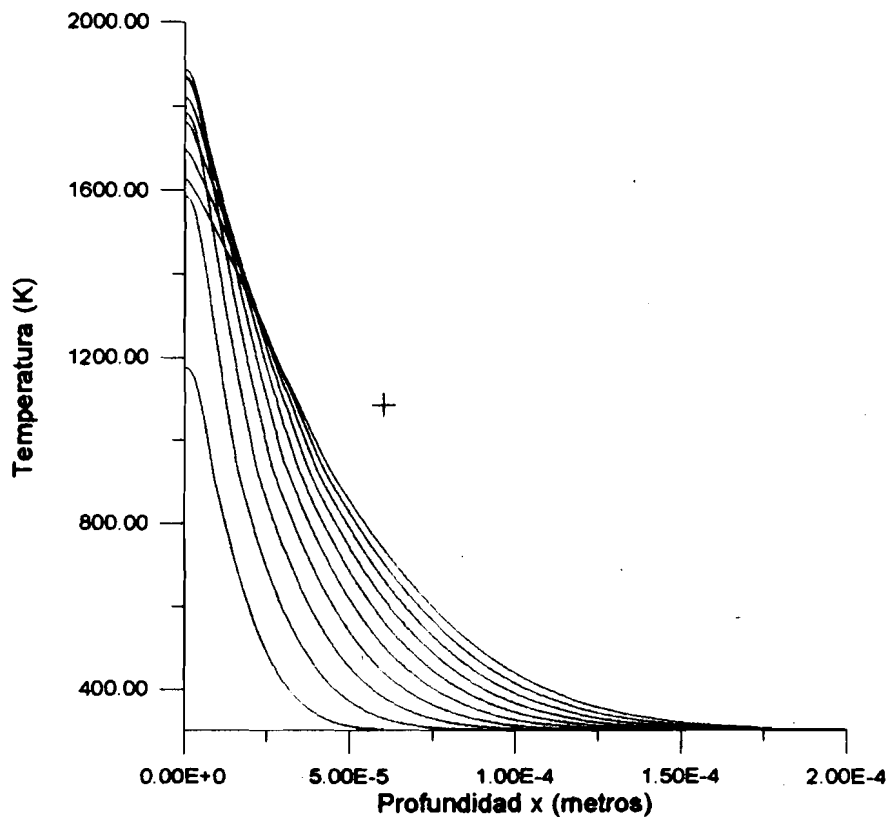
donde ρ es la densidad del material, c_p su capacidad calorífica, T la temperatura, $k(T)$ la conductividad térmica, y R la reflectividad. Consideramos que tanto la energía de los electrones ($v(t)$) como la corriente total del haz ($i(t)$) son funciones del tiempo. Se emplearon condiciones de contorno de flujo térmico nulo tanto en la superficie del material, como en el borde alejado de la zona calentada.

La forma espacial de la distribución está dada por $\phi(x/r(t))$, donde $r(t)$ es el rango de los electrones en el material (que depende de la energía, y por lo tanto del tiempo) y donde la expresión para ϕ se extrajo de las simulaciones de Monte Carlo. La superficie de la zona irradiada se designa con S .

Este modelo se resolvió numéricamente por el método de líneas, discretizando a segundo orden las derivadas espaciales, e integrando numéricamente en el tiempo el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias obtenido ([7]). Los calores latentes de cambio de fase se tuvieron en cuenta utilizando una expresión regularizada para la entalpía ([8]).

4 Resultados Numéricos

En la Figura 3 se muestran curvas típicas de temperatura en función del espesor, para una muestra de aluminio. La energía inicial de los electrones se



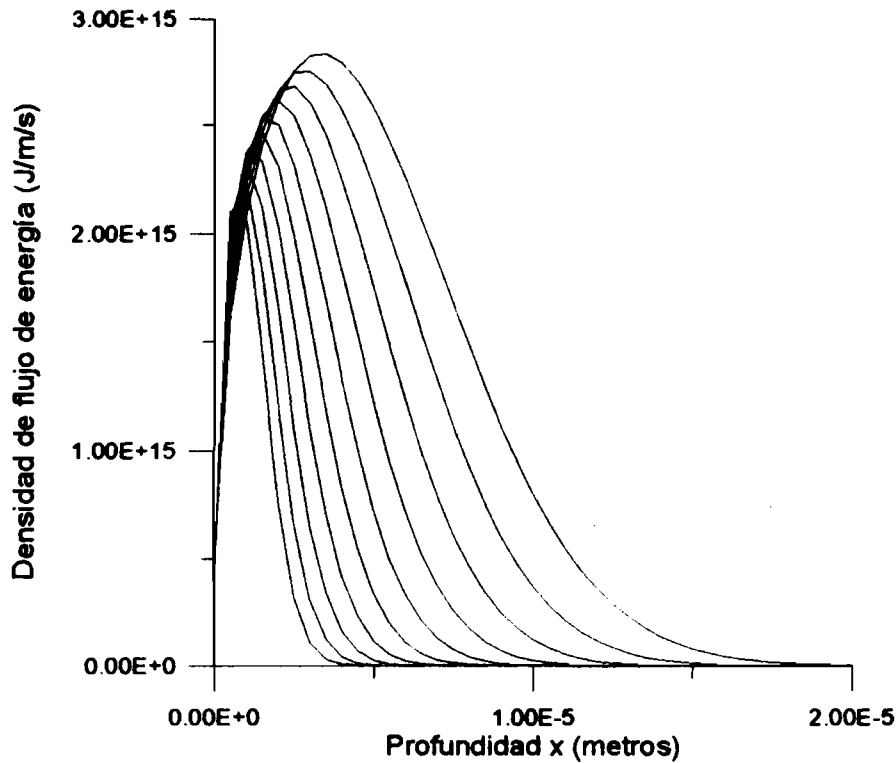
Temperatura para $t_i=2i$ us, $i=0,1...10$.
Tensión inicial de la descarga: 40 kV
Corriente inicial: 50 A
Duración de la descarga: 20 us
Diámetro del spot: 1 cm

Figura 3: Perfiles típicos de temperatura obtenidos para electrones de 40keV, y una corriente de 50 A. Duración: 20 μ s

tomó igual a 40 keV, y la corriente inicial a 50 A. Tanto la energía como la

corriente se supusieron exponenciales decrecientes en tiempo, con un tiempo característico de decaimiento $\tau = 20\mu s$. Estos parámetros permiten modelar aproximadamente las condiciones reales de una descarga de un cañón de electrones de cátodo frío.

En la Figura 4 se muestra la evolución del término de fuentes dentro del material. Notar que a medida que decrece la energía de los electrones el rango disminuye, y por lo tanto la distribución se hace cada vez más angosta lo que contrarresta en buena medida la disminución de intensidad del haz.



Densidad del flujo de Energía para $t_i=2i$ us, $i=0,1...10$.
Tensión Inicial de la descarga: 40 kV
Corriente inicial: 60 A
Duración de la descarga: 20 us
Diámetro del spot 1 cm

Figura 4: Forma espacial de la densidad de flujo de energía depositada para varios tiempos. Material del blanco: Al.

Finalmente en la Figura 5 se muestra la temperatura máxima alcanzada en función de la tensión inicial de la descarga. Se supone que la energía de los electrones y la corriente del haz son proporcionales, de modo que a una

energía de 40 KeV corresponde una corriente de 50 A (modelo aproximado de las condiciones de la descarga de un cañón de electrones). Este tipo de curvas

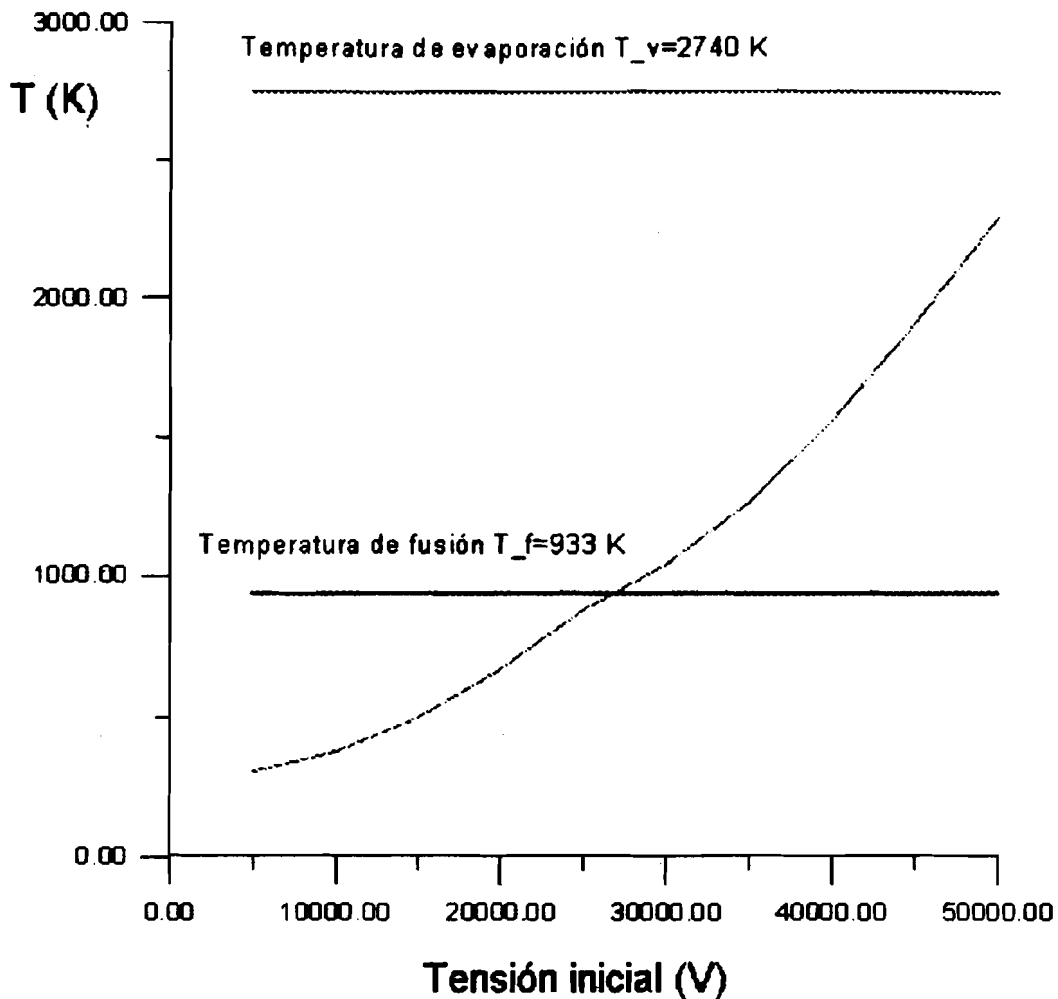


Figura 5: Temperatura máxima alcanzada durante la irradiación, en función de la energía inicial del haz. Duración del pulso: $20 \mu s$. La corriente se supone proporcional a la energía. Material del blanco: Al

permite identificar los umbrales de fusión y evaporación de la muestra. Esto es un dato importante a-priori, pues permite evitar el daño producido al cañón de electrones al ser operado a tensiones y/o corrientes demasiado elevadas.

Referencias

- [1] M. von Allmen. *Coupling of beam energy to solids*. Laser and electron beam processing of Materials, Academic Press, 1980.
- [2] K.Murata, T.Matsukawa, R.Shimizu. *Monte Carlo Calculations on electron scattering in a Solid Target*. Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 10, No. 6, June 1971.
- [3] M.Kotera, K. Murata, K. Nagami. *Monte Carlo simulation of 1-10 KeV electron scattering in a gold target*. J. Appl. Phys. 52 (2) Feb. 1981.
- [4] S. Valkealahti, J. Schou, R. M. Nieminen. *Energy deposition of keV electrons in light elements*. J. Appl. Phys. 65 (6), 15 March 1989.
- [5] Evans, R.D. *The Atomic Nucleus*. McGrawHill, New-York, 1972.
- [6] Tsoulfanidis. *Measurement and Detection of Radiation*, Mc GrawHill, NY. 1983.
- [7] C.A.J.Fletcher. *Computational Techinques for Fluid Dynamics*. Springer Verlag. Springer Series in Computational Physics. (2 Tomos) 1988.
- [8] J.I.Etcheverry. *Análisis de modelos de ablación de Polímeros*. Cuad. Inst. Mat. Beppo Levi, 23 (1993).

Dirección del autor: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, 1428, Buenos Aires, (Argentina).

SOLUCION EXACTA DE UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE DE FLUJOS EN UN MEDIO SATURADO-NO SATURADO CON DIFUSIVIDAD VARIABLE

Adriana C. BRIOZZO – Domingo A. TARZIA

ABSTRACT

In wetted soils, zones of saturation develop naturally in the vicinity of impermeable strata, surface ponds and subterranean cavities. Hydrology must be concerned with transient flow through coexisting unsaturated and saturated zones. Models of advancing saturated zones necessarily involve a nonlinear free boundary problem.

A closed-form analytic solution is presented for a nonlinear diffusion model under conditions of ponding at the surface. The soil water diffusivity is restricted to the special functional form $D(\theta) = \frac{a}{(b-\theta)^2}$, where θ is the water content field to be determined and, a and b are positive constants. The explicit solution depends on a parameter C (determined by the data of the problem), according to two cases : $1 < C < C_1$ or $C \geq C_1$, where C_1 is a constant which is obtained as the unique solution of an equation. This result complements the study given in P. Broadbridge, "Solution of a Nonlinear Absorption Model of Mixed Saturated-Unsaturated Flow", *Water Resources Research*, 26 (1990), 2435-2443.

KEY WORDS : Nonlinear diffusion equation, Free boundary problem, Moving boundary problem, Mixed saturated-unsaturated flow, Explicit solution, Solution in closed form, Flows in porous media, Stefan-like problem.

AMS Subject Clasification : 35R35, 35C05, 76S05, 80A20, 80A22.

RESUMEN

En terrenos húmedos, se desarrollan naturalmente zonas de saturación en la vecindad de estratos impermeables y cavidades subterráneas. Es importante el estudio de flujos transientes a través de la coexistencia de zonas saturadas y no saturadas. Los modelos de avance de zonas saturadas necesariamente involucran un problema de frontera libre no lineal.

En cualquier tiempo $t > 0$, la zona saturada se extiende de $x=0$ a $x=s(t)$ (la frontera libre), y la zona no saturada se encuentra para $x > s(t)$. En la zona saturada se tiene

$$\psi(x, t) = \psi_0 - \frac{\psi_0 - \psi_s}{s(t)} x ; \quad 0 < x < s(t) \quad ;$$

y, para la zona no saturada se tiene el siguiente problema de frontera libre :

$$\left. \begin{aligned} \theta(s(t)^+, t) &= \theta_s \quad , \quad t > 0 \quad , \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}] \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t)^+, t) &= K_s \frac{\psi_0 - \psi_s}{s(t)} \quad , \quad t > 0 \quad , \\ \theta(x, 0) &= \theta(+\infty, t) = \theta_n \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ s(0) &= 0 \quad , \end{aligned} \right\}$$

donde θ es el contenido de agua, ψ es el potencial de agua, D es la difusividad de agua, K es la conductividad hidráulica y, ψ_0 , ψ_s , K_s , θ_n y θ_s son constantes dadas.

Se presenta una solución exacta para un modelo de difusión no lineal con una difusividad de agua del terreno del tipo $D(\theta) = a (b-\theta)^{-2}$, donde a y b son constantes positivas. La solución explícita depende de un parámetro C (determinado por los datos del problema) de acuerdo a dos casos : si $1 < C < C_1$ ó $C \geq C_1$, donde C_1 es una constante obtenida como la única solución de una dada ecuación. Este resultado complementa el estudio dado en P. Broadbridge, "Solution of a nonlinear

absorption model of a mixed saturated–unsaturated flow”, Water Resources Research, 26 (1990), 2435–2443.

I. INTRODUCCION

Siguiendo [Br, Ph], se considera un terreno homogéneo con contenido inicial de agua θ_n . Al tiempo $t > 0$, se suministra agua en la superficie $x=0$ bajo una presión ψ_0 (pressure head), presentándose un problema de flujo mixto saturado – no saturado representado por la absorción de agua del terreno. La zona de saturación se extiende de $x=0$ a $x=s(t)$ (la frontera libre) y, la zona no saturada se extiende para $x > s(t)$. Si se omite la gravedad y se considera la ley de Darcy, el flujo de agua está dado por

$$v = -K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad (1)$$

donde ψ es el potencial mátrico de agua en el suelo (soil water matric potential) y K es la conductividad hidráulica (hydraulic conductivity).

En la zona saturada [Br] se tiene

$$\psi(x, t) = \psi_0 - \frac{\psi_0 - \psi_s}{s(t)} x \quad ; \quad 0 < x < s(t) \quad ; \quad (2)$$

y, para la zona no saturada se tiene el problema de frontera libre $(P_1)(3)-(7)$ [Ta]

$$\theta(s(t)^+, t) = \theta_s \quad , \quad t > 0 \quad , \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}] \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad (4)$$

$$-D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t)^+, t) = K_s \frac{\psi_0 - \psi_s}{s(t)} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad (5)$$

$$\theta(x, 0) = \theta(+\infty, t) = \theta_n \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad (6)$$

$$s(0) = 0 \quad . \quad (7)$$

donde

x : coordenada espacial , t : tiempo ,
 θ : contenido de agua , θ_n : contenido inicial de agua ,
 θ_s : contenido de agua en zona saturada ,
 ψ : potencial mátrico de agua en el suelo (soil water matric potential) ,
 ψ_0 : potencial de agua en $x=0$ (pond depth) ,
 ψ_s : potencial de agua del terreno en $x=s(t)$,
 K : conductividad hidráulica , K_s : conductividad hidráulica en saturación ,
 D : difusividad del agua en el terreno $\left(D = K \frac{d\psi}{d\theta} \right)$.

Se considera el problema de frontera libre (P_1), en el que deben determinarse el contenido de agua $\theta(x, t)$ y la frontera libre $s(t)$, para una difusividad de agua no lineal de la forma

$$D(\theta) = \frac{a}{(b - \theta)^2} \quad (8)$$

donde a y b son constantes positivas dadas. Con esta forma de difusividad, la ecuación de difusión no lineal (P_1)(4) puede linealizarse. Siguiendo [BrWh], se normaliza el contenido de agua definiendo una nueva variable

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_n}{\theta_s - \theta_n}, \quad (9)$$

y se considera

$$\left. \begin{aligned}
 C &= \frac{b - \theta_n}{\theta_s - \theta_n} > 1 \text{ parámetro ;} \\
 \lambda_s &= \frac{a}{(\theta_s - \theta_n) C (C - 1) K_s} \text{ escala de longitud ;} \\
 t_s &= \frac{a}{C (C - 1) K_s^2} \text{ escala de tiempo ;} \\
 x_* &= \frac{x}{\lambda_s} \text{ longitud adimensional ;} \quad t_* = \frac{t}{t_s} \text{ tiempo adimensional ;}
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$s_*(t_*) = \frac{s(t)}{\lambda_s} = \frac{s(t_s t_*)}{\lambda_s} \quad \text{posición de la frontera libre adimensional:}$$

$y_* = x_* - s_*(t_*)$ coordenada de profundidad adimensional que se mueve con la interfase saturada – no saturada ;

$$\psi_{o*} = \frac{\psi_o}{\lambda_s} \quad \text{potencial de agua del terreno sobre la frontera fija} \quad (10)$$

adimensionalizado ; (dimensionless pond depth) ;

$$\psi_{s*} = \frac{\psi_s}{\lambda_s} \quad \text{potencial de agua del terreno sobre la frontera libre}$$

saturada – no saturada adimensionalizado (dimensionless soil water potential at the moving saturated – unsaturated interfase).

Entonces, el problema (P₁) se transforma en el adimensionalizado problema de frontera libre (P₂)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial y_*} \left(\frac{C(C-1)}{(C-\Theta)^2} \frac{\partial \Theta}{\partial y_*} \right) + \frac{ds_*}{dt_*} \frac{\partial \Theta}{\partial y_*} \quad , \quad y_* > 0 \quad , \quad t_* > 0 \quad , \quad (11)$$

$$s_*(0) = 0 \quad , \quad (12)$$

$$(P_2) \quad \Theta(y_*, 0) = 0 = \Theta(+\infty, 0) \quad , \quad y_* > 0 \quad , \quad (13)$$

$$\Theta(0, t_*) = 1 \quad , \quad t_* > 0 \quad , \quad (14)$$

$$-\frac{C(C-1)}{(C-\Theta)^2} \frac{\partial \Theta}{\partial y_*} (0^+, t_*) = \frac{\psi_{o*} - \psi_{s*}}{s_*(t_*)} \quad , \quad t_* > 0 \quad , \quad (15)$$

El objetivo de este trabajo es presentar la solución del problema de frontera libre (P₂) (11) – (15) que fue obtenida en [BrTa]. Se muestra una solución explícita que depende de un parámetro C, de acuerdo a dos casos : $1 < C < C_1$ o $C \geq C_1$, donde C₁ es una dada constante.

II. SOLUCION EXACTA DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE (P₂).

Para que las dos condiciones de borde (P₁)(3) y (P₁)(5) sean compatibles, s(t) debe ser de la forma

$$s(t) = m \sqrt{t} \quad (16)$$

con m una constante desconocida. Por (2) y (P₁)(5) la incógnita m se relaciona con la incógnita S capacidad de absorción del terreno (sorptivity) a través de la siguiente expresión

$$m = \frac{2 K_s (\psi_o - \psi_s)}{S} \quad , \quad (17)$$

y S verifica que $v(s(t), t) = S/2\sqrt{t}$, siendo v la velocidad de infiltración, la cual está relacionada con ψ a través de la ecuación de Darcy (1).

Luego, en términos de variables adimensionales se tiene que

$$s_*(t_*) = m_* \sqrt{t_*} \quad (18)$$

donde

$$m_* = \frac{2 K_s (\psi_o - \psi_s) (\theta_s - \theta_n)}{S} \sqrt{\frac{C(C-1)}{a}} = \frac{m}{\lambda_s} \sqrt{t_s} \quad (19)$$

Para linealizar la ecuación de difusión (P1)(4), se definen las variables [KnPh]

$$\mu = \frac{C(C-1)}{C-\Theta} \quad , \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{C(C-1)}} \int_0^{y_*} (C - \Theta(\nu, t_*)) d\nu \quad , \quad \tau = t_* \quad ; \quad (20)$$

y se asume una solución de semejanza del tipo

$$\mu = g(\phi) \quad , \quad \phi = \frac{\chi}{\sqrt{\tau}} \quad (21)$$

Entonces el problema (P₂) se reduce al problem (P₃)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g'(\phi) (\phi + \gamma) + g''(\phi) = 0 \quad , \quad \phi > 0 \quad , & (22) \\ (P_3) \quad & g(+\infty) = C - 1 \quad , & (23) \\ & -\sqrt{C(C-1)} g'(0^+) = \frac{CS}{2} \sqrt{\frac{C(C-1)}{a}} \quad , & (24) \\ & g(0^+) = C \quad . & (25) \end{aligned}$$

donde

$$\gamma = \frac{S}{\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{a}}{CS} (\psi_{0*} - \psi_{s*}) \quad (26)$$

es un coeficiente desconocido.

La solución de (P₃) (22, 23, 24) está dada por

$$g(\phi) = C - 1 + \frac{SC}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\gamma^2/4) \operatorname{erfc}\left(\frac{\phi + \gamma}{2}\right) \quad , \quad \phi > 0 \quad . \quad (27)$$

La condición de borde extra (P₃)(25) es consistente con la solución si se cumple que

$$\frac{1}{C} = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\gamma^2/4) \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (28)$$

Como S y γ verifican la relación siguiente

$$S = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2(C)} \right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad (29)$$

donde

$$\begin{aligned} & \gamma_0^2(C) = \frac{8}{C} (\psi_{0*} - \psi_{s*}) = \delta^2 (C - 1) \quad , \\ & \delta = \sqrt{\frac{8K_s(\psi_0 - \psi_s)(\theta_s - \theta_{11})K_s}{a}} \end{aligned} \quad (30)$$

se tiene que la ecuación (28) en la variable $\gamma = \gamma(C)$ está dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0(C)}{\gamma} \right)^2} \right) Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) , C > 1 . \quad (31)$$

donde Q es la función real definida por

$$Q(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad , \quad x > 0 . \quad (32)$$

A continuación se estudia la ecuación (31), considerando el signo (+) y el signo (-) en dicha ecuación.

Caso 1: (signo + en la expresión de S como función de γ)

La ecuación (31) puede ser escrita como

$$\frac{1}{C} = H_1(\gamma, C) Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) , C > 1 , \quad (32)$$

donde H_1 está definida por

$$H_1(\gamma, C) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0(C)}{\gamma} \right)^2} \right) , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) , C > 1 . \quad (33)$$

La función H_1 satisface las siguientes propiedades:

- (i) $H_1(\gamma_0(C), C) = \frac{1}{2} \quad , \quad C > 1 \quad ,$
- (ii) $H_1(+\infty, C) = 1 \quad , \quad C > 1 \quad ,$
- (iii) $\frac{\partial H_1}{\partial \gamma}(\gamma, C) > 0 \quad , \quad \gamma > \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 .$

Se define ahora, la función real

$$F_1(\gamma, C) = \frac{1}{C H_1(\gamma, C)} \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad (35)$$

la cual satisface las siguientes propiedades

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad F_1(\gamma_0(C), C) = \frac{2}{C} \quad , \quad C > 1 \quad , \\ \text{(ii)} \quad F_1(+\infty, C) = \frac{1}{C} \quad , \quad C > 1 \quad , \\ \text{(iii)} \quad \frac{\partial F_1}{\partial \gamma}(\gamma, C) < 0 \quad , \quad \gamma > \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 . \end{array} \right\} \quad (36)$$

Entonces, se tiene que la ecuación (31) es equivalente a

$$F_1(\gamma, C) = Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad . \quad (37)$$

Como Q satisface las siguientes propiedades

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad Q(0) = 0 \quad , \\ \text{(ii)} \quad Q(+\infty) = 1 \quad , \\ \text{(iii)} \quad Q'(x) > 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \\ \text{(iv)} \quad Q''(x) < 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \end{array} \right\} \quad (38)$$

se concluye que la ecuación (36) admite una única solución en la variable γ si y sólo si

$$F_1(\gamma_0(C), C) = \frac{2}{C} \geq Q\left(\frac{\gamma_0(C)}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad M(C) \leq 2$$

donde la función real M está definida por

$$M(C) = C Q\left(\frac{\gamma_0(C)}{2}\right) = C Q\left(\frac{\delta}{2} \sqrt{C-1}\right) \quad , \quad C > 1 . \quad (39)$$

Como la función M satisface las propiedades siguientes

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad M'(C) > 0 \quad , \quad C > 1 \quad , \\ \text{(ii)} \quad M(1) = Q(0) = 0 \quad , \\ \text{(iii)} \quad M(+\infty) = +\infty \quad , \end{array} \right\} \quad (40)$$

entonces, se tiene que existe una única constante C_1 tal que

$$M(C_1) = C_1 Q\left(\frac{\delta}{2} \sqrt{C_1 - 1}\right) = 2 \quad (41)$$

y

$$M(C) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < C \leq C_1 .$$

Caso 2: (signo $-$ en la expresión de S como una función de γ)

La ecuación (30) puede ser escrita como

$$\frac{1}{C} = H_2(\gamma, C) Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad , \quad (42)$$

dónde H_2 está definida por

$$H_2(\gamma, C) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0(C)}{\gamma}\right)^2} \right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad , \quad (43)$$

la cual satisface las siguientes propiedades

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad H_2(\gamma_0(C), C) = \frac{1}{2} \quad , \quad C > 1 \quad , \\ \text{(ii)} \quad H_2(+\infty, C) = 0 \quad , \quad C > 1 \quad , \\ \text{(iii)} \quad \frac{\partial H_2}{\partial \gamma}(\gamma, C) < 0 \quad , \quad \gamma > \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad . \end{array} \right\} \quad (44)$$

Ahora se define la función real

$$F_2(\gamma, C) = \frac{1}{C H_2(\gamma, C)} \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad (45)$$

la cual satisface las propiedades siguientes

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & F_2(\gamma_0(C), C) = \frac{2}{C} \quad , \quad C > 1 \quad , \\ \text{(ii)} \quad & F_2(+\infty, C) = +\infty \quad , \quad C > 1 \quad , \\ \text{(iii)} \quad & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}(\gamma, C) > 0 \quad , \quad \gamma > \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad . \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Por otra parte, se tiene que la ecuación (42) es equivalente a :

$$F_2(\gamma, C) = Q\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad , \quad \gamma \geq \gamma_0(C) \quad , \quad C > 1 \quad . \quad (47)$$

Si se consideran las propiedades de las funciones Q and F_2 , (47) admite una única solución en la variable γ si y sólo si

$$F_2(\gamma_0(C), C) = \frac{2}{C} \leq Q\left(\frac{\gamma_0(C)}{2}\right) \Leftrightarrow M(C) \geq 2 \quad , \quad C > 1 \Leftrightarrow C \geq C_1 \quad .$$

Nota 1.— Para el caso $C = C_1$, $\gamma_0(C)$ satisface las dos ecuaciones (31) y (42) pues

$$H_1(\gamma_0(C), C) = H_2(\gamma_0(C), C) = \frac{1}{2} \quad . \quad \forall \quad C > 1 \quad .$$

Por lo tanto se ha demostrado el siguiente teorema :

Teorema.— Si los datos verifican la condición $C = \frac{b - \theta_n}{\theta_s - \theta_n} > 1$, y $C_1 = C_1(a, K_s, \psi_0 - \psi_s, \theta_s - \theta_n) > 1$ es la única solución de la ecuación (41), entonces se tienen :

I) Si $1 < C \leq C_1$:

$$\exists! \gamma_1(C) \geq \gamma_0(C) \quad / \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0(C)}{\gamma_1(C)} \right)^2} \right) Q \left(\frac{\gamma_1(C)}{2} \right) \quad , \quad (48)$$

y, la solución del problema (P₃) (22–24) está dada por

$$g_1(\phi) = C - 1 + \frac{S_1(C) C}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\gamma_1^2(C)/4) \operatorname{erfc} \left(\frac{\phi + \gamma_1(C)}{2} \right) \quad , \quad \phi > 0 \quad (49)$$

donde

$$S_1(C) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\gamma_1(C) + \sqrt{\gamma_1^2(C) - \gamma_0^2(C)} \right) . \quad (50)$$

II) If $C \geq C_1$:

$$\exists! \gamma_2(C) \geq \gamma_0(C) \quad / \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_0(C)}{\gamma_2(C)} \right)^2} \right) Q \left(\frac{\gamma_2(C)}{2} \right) \quad , \quad (51)$$

y, la solución del problema (P₃) (22–24) está dada por

$$g_2(\phi) = C - 1 + \frac{S_2(C) C}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\gamma_2^2(C)/4) \operatorname{erfc} \left(\frac{\phi + \gamma_2(C)}{2} \right) \quad , \quad \phi > 0 \quad (52)$$

donde

$$S_2(C) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\gamma_2(C) - \sqrt{\gamma_2^2(C) - \gamma_0^2(C)} \right) . \quad (53)$$

Nota 2.— Para $C = C_1$ ambas soluciones g_1 and g_2 coinciden.

Finalmente, se invierten las relaciones (21), (20), (10) and (9) y se obtiene la solución paramétrica del problema (P_1), la cual depende de C . Si se considera $i=1$ para el caso $1 < C \leq C_1$ e $i=2$ para el caso $C > C_1$, la solución paramétrica se expresa de la siguiente manera :

$$\theta_i(\chi, \tau) = (\theta_s - \theta_n) C \left(1 - \frac{(C-1)}{g_i(\chi/\sqrt{\tau})} \right) + \theta_n \quad (54)$$

$$x = \lambda_s y_{i*}(\chi, \tau) + m_i \sqrt{t_s \tau} \quad (55)$$

$$t = \tau t_s \quad (56)$$

$$s_i(\chi, \tau) = m_i \sqrt{t_s \tau} \quad (\text{la frontera libre}) \quad (57)$$

con

$$m_i = \frac{2 K_s (\psi_o - \psi_s) (\theta_s - \theta_n)}{S_i(C)} \sqrt{\frac{C(C-1)}{a}} \frac{\lambda_s}{\sqrt{t_s}} = \frac{2 K_s (\psi_o - \psi_s)}{S_i(C)}, \quad (58)$$

$$y_{i*}(\chi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{C(C-1)}} \int_0^\chi g_i(\nu/\sqrt{\tau}) d\nu =$$

$$= \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{C(C-1)}} \left((C-1) \frac{\chi}{\sqrt{\tau}} + \right. \quad (59)$$

$$+ S_i(C) C \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{\gamma_i^2(C)}{4}\right) \left[\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\gamma_i(C)}{2} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\gamma_i(C)}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\gamma_i(C)}{2}\right)^2\right) - \frac{\gamma_i(C)}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma_i(C)}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma_i^2(C)}{4}\right) \right] \quad (i=1, 2).$$

Nota 3.— Para el caso $C=C_1$, las dos soluciones paramétricas coinciden.

Referencias

[BrTa] A. C. Briozzo – D. A. Tarzia, "The explicit solution of a free boundary problem for a nonlinear absorption model of mixed saturated–unsaturated flow", to appear.

[Br] P. Broadbridge, "Solution of a nonlinear absorption model of mixed saturated–unsaturated flow", *Water Resources Research*, **26** (1990), 2435–2443.

[BrWh] P. Broadbridge – I. White, "Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model, 1, Analytic solutions", *Water Resources Research*, **24** (1988), 145–154.

[KnPh] J. H. Knight – J. R. Philip, "Exact solutions in nonlinear diffusion", *J. Eng. Math.*, **8** (1974), 219–227.

[Ph] J. R. Philip, "The theory of infiltration, 6, Effect of water depth over soil", *Soil Sci.*, **85** (1958), 278–286.

[Ta] D. A. Tarzia, "A bibliography on moving–free boundary problems for the heat–diffusion equation. The Stefan problem", *Progetto Nazionale M. P. I. Equazione di evoluzione e applicazioni fisico–matematiche*, Firenze, (1988) (with 2528 references).

A. C. BRIOZZO – D. A. TARZIA

Depto. de Matemática, F.C.E., Universidad Austral

Paraguay 1950, (2000) Rosario, ARGENTINA.

E – mail: TARZIA@UAUFCE.EDU.AR

EL PROBLEMA DE STEFAN SIMÉTRICO A DOS FASES CON SOBRE-ENFRIAMIENTO

PEDRO ROBERTO MARANGUNIC

1 Introducción

La solidificación de un líquido sobreenfriado (caso de *una fase*) ya fue considerada más de una vez en estos Seminarios (por ejemplo en [1] y [2]). Además del interés que pueda tener como fenómeno termodinámicamente metaestable, es un tema con el cual están asociados problemas de diversa índole, como: difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos; filtración de un líquido en un medio poroso parcialmente saturado (véase [3] al [7] y referencias citadas en estos trabajos, sobre todo en la interesante revisión [5]).

Nos proponemos aquí considerar un problema de Stefan *a dos fases* con sobreenfriamiento de la fase líquida, para el caso de simetría *cilíndrica* (o *esférica*) del dominio, temperatura de fusión constante y condiciones de flujo nulo en los bordes fijos. Para ser más específicos, dados los datos $0 < r_0 < a < r_1$, $\varphi \in C[r_0, a]$, $\psi \in C[a, r_1]$, donde ninguna de las dos funciones es idénticamente nula, llamaremos (P_1) al problema de encontrar una cuaterna $(T, s(t), u(r, t), v(r, t))$ tal que :

- a) $T > 0$;
- b) $s \in C[0, T]$, $s \in C^1(0, T)$, $r_0 < s(t) < r_1$ para $0 < t < T$;
- c) $u(r, t)$ es una función acotada en $r_0 \leq r \leq s(t)$, $0 \leq t \leq T$, continua en la misma región salvo tal vez en los puntos $(s(0), 0)$ y $(s(T), T)$, y tal que $u_r(r, t)$ es continua en $r_0 \leq r \leq s(t)$, $0 < t < T$, u_{rr} , u_t son continuas en $r_0 < r < s(t)$, $0 < t < T$;

d) $v(r, t)$ está definida en $s(t) \leq r \leq r_1$, $0 \leq t \leq T$, y satisface (con cambios obvios) las mismas condiciones impuestas a $u(r, t)$;

e) u, v, s satisfacen

$$Lu = 0 \quad \text{en } D_T^u = \{(r, t) : r_0 < r < s(t), 0 < t < T\} \quad (\text{fase líquida}) \quad (1.1)$$

$$Lv = 0 \quad \text{en } D_T^v = \{(r, t) : s(t) < r < r_1, 0 < t < T\} \quad (\text{fase sólida}) \quad (1.2)$$

$$s(0) = a \quad (1.3)$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad r_0 < r < a \quad (1.4) \quad v(r, 0) = \psi(r), \quad a < r < r_1 \quad (1.5)$$

$$u_r(r_0, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.6) \quad v_r(r_1, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.7)$$

$$u(s(t), t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.8) \quad v(s(t), t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.9)$$

$$v_r(s(t), t) - u_r(s(t), t) = \dot{s}(t), \quad 0 < t < T, \quad (1.10)$$

siendo L el operador del calor.

Observación 1: Hemos dado a la temperatura de fusión el habitual valor 0, lo cual no representa ninguna pérdida de generalidad.

Observación 2: Situaciones como $\varphi = 0$ o $\psi = 0$ corresponden al problema a una fase, de ahí su exclusión.

Observación 3: Si bien usamos una sola variable espacial r , estamos trabajando bajo apropiadas condiciones de simetría en una región de \mathbb{R}^3 caracterizada por $r_0 \leq r \leq r_1$.

La región recién mencionada, según el significado geométrico que tenga la variable r , será el espacio encerrado entre

- i) 2 planos paralelos (en este caso la condición $r_0 > 0$ se puede remover),
- ii) 2 superficies cilíndricas circulares de igual eje de simetría,
- iii) 2 superficies esféricas concéntricas,

en obvia correspondencia con los tres tipos usuales de simetría.

Las tres expresiones correspondientes del operador del calor L , son

$$Lu = u_{rr} - u_t,$$

$$Lu = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - u_t,$$

$$Lu = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - u_t,$$

las que se pueden escribir en forma unificada como

$$Lu = \Delta u - u_t = r^{-m}(r^m u_r)_r - u_t = u_{rr} + \frac{m}{r} u_r - u_t, \quad m = 0, 1, 2 \quad (1.11)$$

La expresión unificada para el operador adjunto L^* es

$$L^* u = u_{rr} - \left(\frac{m}{r} u\right)_r + u_t = u_{rr} - \frac{m}{r} u_r + u_t + \frac{m}{r^2} u, \quad m = 0, 1, 2 \quad (1.12)$$

Con estas notaciones, el Teorema de Green para un apropiado dominio D_t nos dice que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_t} \left[f g \, dr + \left(f_r g - f g_r + \frac{m}{r} f g \right) dt \right] = \\ = \iint_{D_t} (g Lf - f L^* g) \, dr \, dt, \quad m = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para nuestros fines, convendrá poner en los roles de f y g adecuadas soluciones de la ecuación del calor y de su ecuación adjunta, respectivamente.

Observación 4: Físicamente, la condición de Stefan (1.10) se interpreta como una conservación de energía. En el caso ordinario ($u \geq 0, v \leq 0$), la traducción de (1.10) a lenguaje intuitivo es que cada fase "intenta avanzar" sobre la otra, y que el signo de \dot{s} indica cuál fase "lo logra". En el caso del líquido sobreenfriado ($u \leq 0, v \leq 0$), el sólido continúa "empujando" pero el líquido ahora "tira", por lo que resulta $\dot{s}(t) \leq 0$ (esto, por cierto, se puede probar rigurosamente).

De ahora en más centraremos nuestra atención en el caso del líquido sobreenfriado, por lo que incorporamos a (P_1) las siguientes condiciones sobre los datos:

$$\begin{aligned} \varphi(r) \leq 0, \quad r_0 \leq r \leq a \\ \psi(r) \leq 0, \quad a \leq r \leq r_1. \end{aligned}$$

Bajo tales condiciones, si el problema (P_1) tiene solución pueden presentarse tres casos, a saber: A (existencia de solución para intervalos de tiempo arbitrariamente grandes), B (extinción de la fase líquida en tiempo finito) y C (conocido como *blow-up*, palabra que da idea de *estallido* o *explosión*). En el tercer caso la solución se interrumpe en tiempo finito por causas diferentes a las del segundo (en la Sección siguiente daremos mayores precisiones).

Así las cosas, es inevitable preguntarse *cómo están relacionados los datos del problema con la posibilidad de continuar la solución indefinidamente en el*

tiempo, con la obvia intención de lograr un criterio sencillo que permita predecir cuál de los tres tipos de solución tendremos.

El objetivo principal de esta exposición (Sección 3) es el de presentar resultados de [8], trabajo en el cual hemos procurado responder a estas preguntas, esencialmente a través de una integral interpretada físicamente como una energía. Sin embargo, dada la finalidad de estos Seminarios, creemos oportuno (e igualmente importante) consignar antes algunos de los antecedentes de este estudio, tanto a una como a dos fases, lo que se hará a continuación.

2 Antecedentes

A. Fasano y M. Primicerio consideraron en [4] el caso unidimensional (en esencia *simetría plana*) de un problema de Stefan a una fase con borde fijo aislado:

$$\begin{array}{l} z_{xx} - z_t = 0 \quad \text{en } D_T = \{(x,t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\} \quad (2.1) \\ s(0) = 1 \quad (2.2) \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad (2.3) \\ z_x(0, t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \quad (2.4) \\ z(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \quad (2.5) \\ z_x(s(t), t) = -\dot{s}(t) \quad , \quad 0 < t < T \quad (2.6) \end{array}$$

h continua en $[0,1]$, $h \neq 0$.

Si una terna $(T, s(t), z(x,t))$ es solución de (P_2) , se prueba fácilmente por medio del Teorema de Green (con $f = z$, $g = 1$) que :

$$s(t) + \int_0^{s(t)} z(x,t) dx = 1 + \int_0^1 h(x) dx \quad , \quad 0 < t < T. \quad (2.7)$$

Esto nos dice que la energía total es constante en el tiempo, lo que no puede sorprendernos ya que según (2.4) no hay intercambio con el exterior. El primer sumando en cada miembro de (2.7) da cuenta de la energía acumulada en el líquido por calor latente de fusión.

Recíprocamente, si una terna suficientemente regular satisface el problema (2.1) - (2.5) y (2.7), puede probarse que satisface (2.6) y por ende (P_2) . En resumen, (2.1) - (2.5) y (2.7) es otra versión de (P_2) . Esto suele expresarse diciendo que (2.7) es la *formulación integral* de la condición de Stefan (2.6).

En el caso clásico ($h \geq 0$), existe solución de (P_2) para todo tiempo, y $s(t)$ es creciente. Además

- s es acotada en $(0, \infty)$,
- $z(x, t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, uniformemente en x . (2.8)

O sea: al no haber aporte *extra* de energía, quedará parte del sólido sin derretirse jamás. Y toda la energía tenderá a convertirse en calor latente de fusión.

En cambio, si no se hace ninguna especificación sobre el signo de h y el problema admite alguna solución, hay exactamente tres posibilidades:

(A) El problema tiene solución para T arbitrario;

(B) Existe un tiempo T_0 tal que $\lim_{t \rightarrow T_0^-} s(t) = 0$;

(C) Existe un tiempo T_1 tal que $\lim_{t \rightarrow T_1^-} s(t) > 0$, $\liminf_{t \rightarrow T_1^-} \dot{s}(t) = -\infty$.

La demostración de esta tricotomía, bajo una condición de flujo más general que (2.4), puede verse en otro trabajo de los mismos autores ([9]). Nótese que, al no especificarse el signo de h , la función s puede no ser monótona. Sin embargo, ha sido probada la existencia de los límites de $s(t)$ que se mencionan en (B) y en (C). Más aún, en el caso (C) la función z es continua incluso hasta $t = T_1$, $0 < x < \lim_{t \rightarrow T_1^-} s(t)$.

Pero continuemos con [4]. Allí se muestra que (A) sigue implicando (2.8), pese a que ya no estamos en el caso clásico. Agregando dos apropiadas hipótesis sobre h , se demuestra después que, en caso de existencia de solución, la energía

$$Q = 1 + \int_0^1 h(x) dx$$

permite caracterizar a priori los tres casos, a saber:

$$(A) \Leftrightarrow Q > 0; \quad (B) \Leftrightarrow Q = 0; \quad (C) \Leftrightarrow Q < 0. \quad (2.9)$$

La más relevante de las hipótesis involucradas es: la ecuación $h(x) = -1$ tiene a lo sumo una raíz en $[0,1]$ (o una versión algo debilitada de esta condición). La otra es la que más adelante llamaremos (2.12).

Tales hipótesis permiten probar además que

$$(B) \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow T_0^-} \dot{s}(t) = -\infty,$$

lo que empieza a preanunciar alguna similitud entre (B) y (C).

Sin asumir las hipótesis adicionales sobre h que condujeron a (2.9), se prueba también allí que siguen siendo válidas:

$$\begin{aligned} (B) &\Rightarrow Q = 0, \\ (A) &\Rightarrow Q \geq 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

con lo que

$$Q < 0 \Rightarrow (C).$$

Además

$$(A) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = Q. \tag{2.11}$$

Observación 5: Se puede sacar mayor partido de la convergencia uniforme que aparece en (2.8), notando sencillamente que

$$(A) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\text{prom}_{x \in [0, s(t)]} z(x, t) \right] = 0.$$

Esto nos permite mejorar el resultado (2.10). En efecto:

$$Q = 0 \Rightarrow \text{prom}_{x \in [0, s(t)]} z(x, t) = -1 \quad \text{para cada } t > 0 \text{ con } s(t) > 0,$$

excluyendo el caso (A). Por ende, la implicación $(A) \Rightarrow Q > 0$ es válida en general. De (2.11) se deduce entonces que no puede haber extinción asintótica en el problema a una fase.

Destaquemos el valor de (2.9). Tenemos identificada una condición ($Q > 0$) que, para la clase de los problemas que verifican las dos hipótesis adicionales, es necesaria y suficiente para la existencia global de solución. Otro tanto para la existencia de un instante T_0 tal que $s(T_0^-) = 0$, o bien de un T_1 tal que

$$\liminf_{t \rightarrow T_1^-} \dot{s}(t) = -\infty. \quad \text{Para obtener tan interesante resultado, Fasano y Primi-$$

cerio hicieron jugar un papel clave a un lema (Lemma 2.4, p. 441) útil para descartar el caso (C). Como este lema no depende en nada de la condición (2.4), ha

sido adaptado por otros autores al abordar problemas con otras condiciones de

contorno (varios de estos trabajos están citados en [1] y [2]). Nuestra intención es aplicar las mismas ideas en el resto de esta exposición. Por eso, y para que estas notas tengan cierto grado de completitud, daremos ahora una versión del citado lema que incluye una generalización no esencial del enunciado y alguna pequeña variante en la demostración.

Sea, entonces, h continua en $[0,1]$ y con signo *sin prefijar*. Pidamos además que no exista $\delta \in (0,1)$ tal que

$$h(x) \leq -1, \quad 1 - \delta < x \leq 1,$$

lo cual es apenas una condición necesaria para la existencia de solución ([10]).

Lema 2.1: Supongamos que existe una constante $H > 0$ tal que

$$h(x) \geq H \cdot (x - 1), \quad x \in [0, 1], \quad (2.12)$$

y sea (T, s, z) una solución de (P_2) tal que

$$s_T \equiv \inf_{t \in (0, T)} s(t) > 0.$$

Si existen dos constantes $d \in (0, s_T)$, $z_0 \in (0, 1)$ tales que $Hd \leq z_0$

y $z(s(t) - d, t) \geq -z_0$, $t \in (0, T)$, entonces

$$\dot{s}(t) \geq \frac{1}{d} \ln(1 - z_0), \quad t \in (0, T).$$

Demostración. Definiendo $\sigma_\varepsilon = \inf_{t \in (0, T-\varepsilon)} \dot{s}(t)$ para cada $\varepsilon \in (0, T)$,

nos proponemos verificar que

$$\sigma_\varepsilon \geq \frac{1}{d} \ln(1 - z_0). \quad (2.13)$$

Fijemos un tal ε . Si $\sigma_\varepsilon \geq 0$, (2.13) es trivial. Si en cambio $\sigma_\varepsilon < 0$, recurrimos al artificio de considerar el dominio

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, t) : s(t) - d < x < s(t), \quad 0 < t < T - \varepsilon\}$$

y la función de comparación

$$w(x, t) = \frac{-z_0}{1 - e^{-ad}} [1 - e^{a(x-s(t))}],$$

donde a es una constante positiva a ajustar convenientemente.

Para cada t fijo (incluso $t = 0$), w es creciente y convexa como función de x . De la hipótesis $Hd \leq z_0$ y la convexidad de $w(x, 0)$, surge que

$$w(x, 0) \leq H \cdot (x - 1) \leq h(x), \quad 1 - d \leq x \leq 1$$

(más aún: $w(x, 0) < H \cdot (x - 1)$ en el interior).

Es inmediato además que

$$w(s(t), t) = 0 = z(s(t), t), \quad 0 < t < T - \varepsilon$$

$$w(s(t) - d, t) = -z_0 \leq z(s(t) - d, t), \quad 0 < t < T - \varepsilon.$$

Hasta aquí no hizo falta restringir el valor de la constante a . Tomando ahora $a \geq -\sigma_\varepsilon > 0$ resulta

$$Lw = w_{xx} - w_t \geq 0 \quad \text{en } \Omega_\varepsilon,$$

de lo cual por Principio de Máximo obtenemos

$$z(x, t) > w(x, t) \quad \text{en } \Omega_\varepsilon, \quad \text{y}$$

$$z_x(s(t), t) \leq w_x(s(t), t) = \frac{a z_0}{1 - e^{-ad}}, \quad 0 < t < T - \varepsilon. \quad (1)$$

Entonces

$$\sigma_\varepsilon \geq \frac{-a z_0}{1 - e^{-ad}}$$

de donde, eligiendo $a = -\sigma_\varepsilon$, se llega fácilmente a la tesis. ■

Observación 6: En caso de existir, la isoterma $z = -1$ tiene un papel destacado a lo largo de todo este tema. Interesa su mayor o menor distancia a la frontera libre (isoterma $z = 0$). En palabras sencillas, el Lema 2.1 nos dice que si estas dos isotermas están suficientemente separadas, no puede ocurrir el caso (C). Dicho de otro modo: si ocurre (C), la isoterma $z = -1$ existe y "alcanza" a la frontera libre en el instante T_1 .

Observación 7: La curiosa importancia del valor -1 se debe a que el problema (P_2) está *normalizado*. De lo contrario, la temperatura "crítica" del líquido sobreenfriado habría sido $-\frac{l}{c}$, donde c es el calor específico y l el calor latente de fusión por unidad de masa.

Observación 8: La hipótesis (2.12) no es vital. Puede eliminarse si trabajamos en el dominio

$$\Omega_{\alpha, \varepsilon} = \{(x, t) : s(t) - d < x < s(t), \quad \alpha < t < T - \varepsilon\},$$

con $\alpha \in (0, T)$ y $\varepsilon \in (0, T - \alpha)$. En tal caso la hipótesis $Hd \leq z_0$ se reemplaza por

$$d \max_{[0, s(\alpha)]} |z_x(x, \alpha)| \leq z_0.$$

Recordemos nuevamente que el problema (P_2) con sobreenfriamiento ($h \leq 0$) está relacionado con el problema de difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos. En lo que va de esta Sección hemos trabajado con simetría plana. Pero un modelo más realista para aplicar a un tejido que circunda a un vaso sanguíneo, debiera considerar dominios cilíndricos.

(1) Esta desigualdad es estricta por el Teorema de Vyborny-Friedman ([11], pág. 49)

Esa idea motivó a D. Andreucci a estudiar en [12] el correlato de (P_2) en *simetría cilíndrica*, es decir a trabajar en el caso *a una fase* reemplazando (2.1) por

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - u_t = 0 \quad \text{en } D_T = \{(r, t) : r_0 < r < s(t), 0 < t < T\},$$

por lo demás con cambios menores (por ejemplo $s(0) = b > r_0$ y $h(r)$ continua en $[r_0, b]$). Aplicando una vez más el Teorema de Green (ahora con $f = u$, $g = r$), llegó a la siguiente fórmula

$$s^2(t) - r_0^2 + 2 \int_{r_0}^{s(t)} r u(r, t) dr = b^2 - r_0^2 + 2 \int_{r_0}^b r h(r) dr, \quad 0 < t < T.$$

Basta multiplicar ambos miembros por π y por una variable que represente la altura en los cilindros, para comprender que esta fórmula también expresa una conservación de energía.

Andreucci extiende a esta situación el ya citado teorema de [9] sobre la tricotomía (A), (B), (C). Luego analiza la relación entre estos tres casos y el valor de

$$P = b^2 - r_0^2 + 2 \int_{r_0}^b r h(r) dr,$$

pasando por una variante del Lema 2.1 y siguiendo una línea argumental análoga a la usada por Fasano y Primicerio. Su conclusión, *también bajo apropiadas hipótesis sobre h* , es (2.9) con P en el rol de Q . (2)

Los resultados de [12] son apenas una parte de la *Tesi di Laurea* de Andreucci ([13]), donde además se obtienen conclusiones similares para *simetría esférica* (con demostraciones idénticas en lo esencial). Sólo transcribiremos aquí la fórmula de conservación de la energía correspondiente al caso esférico (si se prefiere, multiplíquese por $\frac{4}{3}\pi$):

$$s^3(t) - r_0^3 + 3 \int_{r_0}^{s(t)} r^2 u(r, t) dr = R = b^3 - r_0^3 + 3 \int_{r_0}^b r^2 h(r) dr, \quad 0 < t < T.$$

Luego vino la tarea de intentar extender técnicas y resultados al problema *a dos fases* con líquido sobreenfriado. En un trabajo que hicimos con C. V. Turner

(2) En general (B) $\Rightarrow P = 0$, (A) $\Rightarrow P \geq 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = (r_0^2 + P)^{1/2}$, y por ende $P < 0 \Rightarrow$ (C).

Acá también es aplicable un comentario del estilo de la Observación 5.

([14]) tratamos el caso simetría plana de (P_1) , bajo la forma de problema unidimensional en el intervalo $[0,1]$ con $\varphi \leq 0$, $\psi \leq 0$. Utilizando el Teorema de Green en los dominios D_t^u y D_t^v (y sumando miembro a miembro las igualdades halladas), obtuvimos la fórmula

$$s(t) + \int_0^{s(t)} u(x,t) dx + \int_{s(t)}^1 v(x,t) dx = Q = a + \int_0^a \varphi(x) dx + \int_a^1 \psi(x) dx, \quad 0 < t < T.$$

Se notaba fácilmente que el recorrido de Q coincidía con el intervalo $(-\infty, a)$, que las funciones u y v eran negativas, y que la frontera libre era una función decreciente (y siempre mayor que Q). Pero surgía una dificultad: al no estar más el sólido a temperatura constante, no era tan previsible si habría o no una partición de $(-\infty, a)$ al estilo de antes, o sea una descomposición en tres subconjuntos en correspondencia con (A), (B), (C). Finalmente, conseguimos poner de manifiesto que el rol ahora activo de la fase sólida se traduce en un cambio de resultados.

El papel de isoterma crítica correspondió, por cierto, a $u = -1$. Pero en virtud de la diferencia entre (1.10) y (2.6), la adaptación del Lema 2.1 nos llevó a considerar funciones de comparación *a ambos lados de la frontera libre*. En suma, imponiendo apropiadas hipótesis a φ y ψ (sobre todo a φ), probamos que:

- (A) $\Leftrightarrow 0 \leq Q < a$
- (B) $\Rightarrow Q < 0$
- (C) $\Rightarrow Q < 0$
- Para cada valor de $Q < 0$ existen dos configuraciones iniciales (φ_1, ψ_1) y (φ_2, ψ_2) , ambas correspondientes a dicho valor de Q , tales que para la primera la solución es del tipo (B), y para la restante ocurre (C).

En palabras sencillas, (B) y (C) "comparten" un mismo rango de valores de Q , el intervalo $(-\infty, 0)$.

Observación 9: Nótese el contraste con el problema a una fase. Antes habíamos señalado una pequeña similitud entre (B) y (C), pero el valor de Q los diferenciaba. Ahora, en cambio, dentro del intervalo $(-\infty, 0)$ es imposible caracterizar a uno u otro sólo por el valor de Q , pues estos casos dependen también del perfil inicial (φ, ψ) . Otra diferencia es que en el caso (A) puede haber ahora extinción asintótica del líquido ($Q = 0$).

En ese trabajo también analizamos el caso de un sólido sobrecalentado en contacto con un líquido "clásico" ($\varphi \geq 0$, $\psi \geq 0$). Sin entrar a analizar su

factibilidad física, es obvio que desde un punto de vista matemático este problema resulta completamente análogo al anterior. Ahora el recorrido de Q es (a, ∞) , u y v son funciones positivas, y la función s resulta creciente (y siempre menor que Q). La fase que puede extinguirse en tiempo finito es la sólida, y la isoterma crítica corresponde a dicha fase ($v = 1$). Naturalmente, las mayores hipótesis pasan a recaer sobre ψ , y los resultados expresan que (A) corresponde a $Q \in (a, 1]$, y que (B) y (C) comparten el intervalo $(1, \infty)$.

El caso de un líquido sobreenfriado en contacto con un sólido sobrecalentado ($\varphi \leq 0, \psi \geq 0$), es de una dificultad muy superior a la de los dos problemas anteriores, ya que:

- la frontera libre no necesariamente es monótona,
- son más de tres los posibles tipos de solución,
- ambas fases pueden tener isoterma crítica,
- Q puede tomar cualquier valor real.

Por tales motivos, si bien pudimos extender el Lema 2.1 y algún otro resultado técnico, sólo obtuvimos conclusiones parciales (esencialmente, *condiciones necesarias para algunos tipos de comportamiento de la solución*).

3 Análisis a priori del tipo de solución

Corresponde ahora exponer resultados referidos al problema (P_1) con simetría *cilíndrica* o *esférica*. Pero por obvias razones de comodidad notacional, nos restringiremos aquí al primer caso, puesto que las versiones de enunciados, demostraciones y cálculos correspondientes al caso esférico son, en lo sustancial, idénticas a las del caso cilíndrico.

Más aún, con un poco de cuidado es factible hacer un *tratamiento unificado* de (P_1) , empleando las expresiones (1.11) a (1.13). A título de ejemplo, valga observar que las diferentes g que utilizamos en el Teorema de Green respondían a la forma $g(r) = r^m$, con el m asociado al tipo de simetría (y la fórmula resultante siempre involucraba a s^{m+1}).

En simetría plana, el paso de una a dos fases requería de algunas mínimas precauciones, como la ya dicha de efectuar comparaciones a ambos lados de la frontera libre para poder adaptar el Lema 2.1. Ahora se agrega una pequeña dificultad: el término $\frac{m}{r}u_r$ de (1.11) ya no será nulo.

Consideremos, pues, el problema (P_1) con simetría cilíndrica (o sea, con $m = 1$), y recordemos las hipótesis $\varphi \leq 0$, $\psi \leq 0$, $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$. Vamos a asumir además que no existe $\delta \in (0, a)$ tal que $\varphi(x) \leq -1$, $a - \delta < x \leq a$.

Proposición 3.1: Si (T, s, u, v) es solución de (P_1) , entonces para cada $t \in (0, T)$ se verifica que

$$\begin{aligned} s^2(t) - r_0^2 + 2 \int_{r_0}^{s(t)} r u(r, t) dr + 2 \int_{s(t)}^{r_1} r v(r, t) dr = \\ = Q = a^2 - r_0^2 + 2 \int_{r_0}^a r \varphi(r) dr + 2 \int_a^{r_1} r \psi(r) dr. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Demostración. Basta aplicar (1.13) en los dominios D_t^u y D_t^v , y luego sumar miembro a miembro. ■

Proposición 3.2: Si (T, s, u, v) es solución de (P_1) , entonces

- i) $Q < a^2 - r_0^2$
- ii) $u < 0$ en D_T^u y $v < 0$ en D_T^v
- iii) s decrece estrictamente y $r_0 < s(t) < a$, $0 < t < T$
- iv) $s^2(t) > Q + r_0^2$, $0 < t < T$.

Demostración. Trivialmente $Q \leq a^2 - r_0^2$, pero $Q = a^2 - r_0^2 \Leftrightarrow \varphi = \psi = 0 \Leftrightarrow (s = a, u = v = 0)$. El resto sigue de usar Principio de Máximo junto con (1.10) y (3.1). ■

Para una fase habíamos comentado que, en el caso (C), z era continua hasta $t = T_1$. Para nuestro actual problema, al ser s decreciente, la existencia de límite de $s(t)$ está fuera de discusión. También puede obtenerse que:

$$(C) \Rightarrow u \text{ es continua hasta } t = T_1, \quad r_0 < r < \lim_{t \rightarrow T_1^-} s(t)$$

$$(C) \Rightarrow v \text{ es continua hasta } t = T_1, \quad \lim_{t \rightarrow T_1^-} s(t) < r < r_1$$

$$(B) \Rightarrow v \text{ es continua hasta } t = T_0, \quad r_0 < r < r_1.$$

Por brevedad omitiremos las pruebas correspondientes.

Proposición 3.3: Supongamos que (P_1) admite solución. Entonces:

- i) $(B) \Rightarrow Q < 0$

$$\text{ii) (A)} \Rightarrow 0 \leq Q < a^2 - r_0^2, \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = (r_0^2 + Q)^{1/2}$$

Demostración. Para i) basta aplicar a (3.1) el Teorema de Lebesgue para $t \rightarrow T_0$. Para ii) se prueba (empleando, como a una fase, un apropiado lema de comparación) que u y v tienden uniformemente a 0 para $t \rightarrow \infty$. De allí surgen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s^2(t) = Q + r_0^2 \quad \text{y} \quad Q \geq 0 \quad \blacksquare$$

Para intentar la recíproca de la Prop. 3.3.ii), agregaremos hipótesis, principalmente a la fase líquida.

Lema 3.4: Supongamos que φ satisface:

(H) la ecuación $\varphi(r) = -1$ tiene a lo sumo una raíz en $[r_0, a]$;

o bien algo más débil:

(H') no existen tres valores r_1^*, r', r_2^* en (r_0, a) con $r_1^* < r' < r_2^*$, tales que
 $\varphi(r') < -1$ (respectivamente > -1),
 $\varphi(r_i^*) \geq -1$ (resp. ≤ -1) para $i = 1, 2$,
 $\varphi(r_1^*) \cdot \varphi(r_2^*) < 1$ (resp. > 1).

Si además $Q \geq 0$ y (T, s, u, v) es solución de (P_2) , entonces $u(r, t) > -1$ en todo punto de D_7^u , o bien la isoterma $u = -1$ está separada por una distancia positiva de $r = s(t)$, para todo $t \in [0, T]$ tal que $s(t) > r_0$.

Demostración. Primero notamos que $a^2 - r_0^2 + 2 \int_{r_0}^a r \varphi(r) dr > 0$, y de aquí se si-

gue como en el caso de una fase, considerando un promedio de temperaturas (en este caso en una corona circular):

$$\frac{1}{\pi (a^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^a 2\pi r \varphi(r) dr > -1, \text{ etc. } \blacksquare$$

Damos a continuación el análogo del Lema 2.1, en una versión deliberadamente cómoda en hipótesis y siguiendo la idea de la Observación 8. Nótese, sin embargo, que no se usan (H) ni (H').

Lema 3.5: Sea (T, s, u, v) solución de (P_1) tal que $s(T^-) > r_0$. Sean: $d > 0$ tal que $d \leq \min \{s(T^-) - r_0, r_1 - a\}$, $z_1 \in (0, 1)$, $z_2 > 0$, $\alpha > 0$ tales que $u(r, t) > -z_1$ y $v(r, t) > -z_2$ en las partes respectivas de una región

$$E_\alpha = \{(r, t) : \alpha \leq t \leq T, s(t) - d \leq r \leq s(t) + d\}.$$

Disminuyendo d si fuese necesario, suponemos también que

$$d \cdot \max_{[r_0, s(\alpha)]} |\mu_r(r, \alpha)| < z_1 \quad \text{y} \quad d \cdot \max_{[s(\alpha), r_1]} |\nu_r(r, \alpha)| < z_2.$$

Entonces existe una constante $K > 0$ tal que

$$\dot{s}(t) \geq -K, \quad \alpha < t < T.$$

Demostración. Para la fase líquida hacemos una comparación de u con $w_1 = -z_1(1 - e^{-cd})^{-1} [1 - e^{c(r-s(t))}]$, con $c > 0$ a determinar (y todo sigue como en el Lema 2.1, pues el término adicional que hay en Lw_1 juega a nuestro favor). Para la fase sólida, en cambio, dicho término adicional agrega dificultades, las que se salvan al menos de dos maneras distintas, a saber:

a) comparar v con $w_2 = z_2 d^{-2} (r - s(t))(r - s(t) - 2d)$

b) si z_1 y z_2 satisfacen además $z_1 + z_2 < 1$, comparar v con

$$w_2 = -z_2(1 - e^{cd})^{-1}(1 - e^{c(r-s(t))}), \text{ ahora con } c < 0 \text{ apropiada. } \blacksquare$$

Observación 10: Si ocurre (C), la isoterma $u = -1$ existe y alcanza la frontera libre. Si $\varphi \geq -1$ (pero $\varphi \neq -1$), es $u > -1$ y no puede ocurrir (C).

Proposición 3.6: Si φ satisface (H), entonces $(C) \Rightarrow Q < 0$.

Demostración. Si $Q \geq 0$, por Lema 3.4 la isoterma $u = -1$ no existe o bien está separada de la frontera libre. Entonces se puede aplicar el Lema 3.5, excluyendo (C). \blacksquare

Reuniendo algunos de los resultados anteriores, queda probado el:

Teorema 3.7: Si se verifica (H), entonces

$$(A) \Leftrightarrow 0 \leq Q < a^2 - r_0^2.$$

Resta ver que es imposible distinguir (B) de (C) por medio del valor de Q .

Proposición 3.8: Para cada $Q < 0$ existe un perfil inicial (φ, ψ) tal que sucede (B).

Demostración. Dado $Q < 0$, basta elegir $\varphi \leq 0$, $\psi \leq 0$ de modo que $\varphi \geq -1$

en $[r_0, a]$ y $Q = a^2 - r_0^2 + 2 \int_{r_0}^a r \varphi(r) dr + 2 \int_a^{r_1} r \psi(r) dr$. Por ejemplo

$$a = \frac{r_0 + r_1}{2}, \quad \varphi(r) = \frac{r - a}{a - r_0}, \quad \psi(r) = -M(r - a)$$

con $M > 0$ adecuada. \blacksquare

El resto ya es sencillo, y omitimos los detalles.

Lema 3.9: Si $\psi(r) > -Mr$ en $[a, r_1]$, y $Q \leq -2M(r_1^3 - r_0^3)$, entonces ocurre (C).

Análogamente si $\psi(r) > -K$ y $Q \leq -K(r_1^2 - r_0^2)$, también ocurre (C).

Proposición 3.10: Para cada $Q < 0$ existe un par (φ, ψ) tal que sucede (C).

REFERENCIAS

- [1] C. V. TURNER, *El problema de Stefan unidimensional para el líquido sobreenfriado*, CUADERNOS Inst. Mat. Beppo Levi, **24** (1993), 37 - 49.
- [2] D. A. TARZIA - C. V. TURNER, *El problema de Stefan a una fase para el líquido sobreenfriado con una condición de contorno convectiva*, CUADERNOS Inst. Mat. Beppo Levi, **25** (1995), 35 - 45.
- [3] D. A. TARZIA, *Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones*, CUADERNOS Inst. Mat. Beppo Levi, **11** (1984), 5 - 32.
- [4] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *New results on some classical parabolic free - boundary problems*, Quarterly of Applied Mathematics, **38** (1981), 439 - 460.
- [5] M. PRIMICERIO, *Problemi di diffusione a frontiera libera*, Bollettino U. M. I., (5) **18 A** (1981), 11 - 68.
- [6] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *Blow-up and regularization for the Hele-Shaw problem*, en Variational and Free Boundary Problems, A. Friedman - J. Spruck (Editors), IMA Volumes, **53** (1993), Springer, 73 - 85.
- [7] E. DI BENEDETTO - A. FRIEDMAN, *The ill-posed Hele-Shaw model and the Stefan problem for supercooled water*, Trans. A.M.S., **282** (1984), 183 - 204.
- [8] P. R. MARANGUNIC, *A symmetrical two-phase Stefan problem with overcooling*, por aparecer.
- [9] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *General free-boundary problems for the heat equation, Part I*, J. Math. Anal. Appl., **57** (1977), 694 - 723.
- [10] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *A critical case for the solvability of Stefan-like problems*, Math. Meth. in the Appl. Sci., **5** (1983), 84 - 96.

- [11] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
- [12] D. ANDREUCCL, *Continuation of the solution of a free boundary problem in cylindrical symmetry*, *Meccanica*, 19 (1984), 91 - 97.
- [13] D. ANDREUCCL, *Casi di non esistenza globale per problemi a frontiera libera in simmetria cilindrica o sferica*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Firenze, 1982.
- [14] P. R. MARANGUNIC - C. V. TURNER, *The behavior of the solutions of the two-phase Stefan problem and the value of an energy integral*, *Fisica Matematica, Suppl. Boll. U.M.I.*, 5 (1986), 215 - 227.

PROMAR (CONICET-UNR)
Instituto de Matemática "Beppo Levi"
Av. Pellegrini 250
(2000) Rosario
ARGENTINA
E-Mail: pmarangu@unrctu.edu.ar
pmarangu@bibfei.edu.ar

SOBRE EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN-SIGNORINI CON CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS

Domingo Alberto TARZIA

ABSTRACT: We consider a steady-state heat conduction problem in a multidimensional bounded and convex domain Ω which has a regular boundary Γ composed by the union of three parts $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ with $\text{meas}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$, $|\Gamma_2| > 0$ and $|\Gamma_3| \geq 0$. We assume, without loss of generality, that the melting temperature is zero degree centigrade. The boundary Γ_1 is composed by the union of two parts $\Gamma_1 = \Gamma_{1_t} \cup \Gamma_{1_s}$ with $|\Gamma_{1_t}| > 0$ and $|\Gamma_{1_s}| \geq 0$. We consider a temperature $b = \text{Const.} > 0$ on Γ_{1_t} and on Γ_{1_s} we have a Signorini type condition with a bull (exterior) temperature b . On the boundary Γ_2 we have a positive heat flux q and the boundary Γ_3 is impermeable to the heat (heat flux null). We consider a source term g in the domain Ω .

We obtain sufficient conditions on data q , g , b to obtain a change of phase (steady-state, two-phase, Stefan-Signorini problem) in Ω , that is a temperature of non-constant sign in Ω . We use the elliptic variational inequalities theory. We also find that the solution of the corresponding elliptic variational inequality is differentiable with respect to the Neumann datum q on Γ_2 . Several properties already obtained for variational equalities can also be generalized for variational inequalities.

RESUMEN: Se considera un material $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ que ocupa un dominio acotado, convexo, con frontera regular compuesta por la unión disjunta $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ con

$\text{med}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$, $|\Gamma_2| > 0$ y $|\Gamma_3| \geq 0$. Se asume, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase es 0°C . La frontera Γ_1 está compuesta de dos partes $\Gamma_1 = \Gamma_{1_t} \cup \Gamma_{1_s}$ con $|\Gamma_{1_t}| > 0$ y $|\Gamma_{1_s}| \geq 0$. Se considera una temperatura $b = \text{Const.} > 0$ sobre Γ_{1_t} y una temperatura exterior b sobre Γ_{1_s} que se presenta como una pared semi-permeable al calor (que deja entrar calor e impide su salida) con condiciones de contorno tipo Signorini. Se considera además un flujo de calor $q = \text{Const.} > 0$ sobre Γ_2 y que la porción de frontera Γ_3 es una pared impermeable al calor. Se estudia el problema estacionario de conducción del calor en Ω , en cuyo interior se presenta una fuente de energía g .

Se estudian condiciones suficientes para el flujo de calor q sobre Γ_2 , la temperatura b sobre Γ_{1_t} y la fuente de energía g en Ω , para obtener una temperatura de signo no constante en Ω (i.e. un problema estacionario de Stefan-Signorini a dos fases). Se obtienen también relaciones entre este problema y el correspondiente problema de conducción del calor estacionario en Ω sin las condiciones tipo Signorini sobre la porción de frontera Γ_{1_s} .

Para este estudio, se utiliza la teoría de las inecuaciones variacionales y su relación con principios de mínimos. Se encuentra también que la solución de la correspondiente inecuación variacional es derivable respecto respecto del dato de Neumann sobre Γ_2 . Algunas propiedades ya válidas para ecuaciones variacionales se generalizan también para inecuaciones variacionales.

KEY WORDS : Stefan problem, Signorini conditions, free boundary problems, phase-change problems, variational inequalities, Mixed elliptic problem.

AMS Subject Classification : 35R35, 80A22, 35J85, 49J40, 35R45.

I. INTRODUCCION

Se considera un material conductor del calor que ocupa un conjunto Ω ,

dominio y acotado de \mathbb{R}^n ($n=1, 2, 3$ para las aplicaciones), con una frontera suficientemente regular Γ compuesta por la unión disjunta $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ con $\text{med}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$, $|\Gamma_2| > 0$ y $|\Gamma_3| \geq 0$. Sin pérdida de generalidad, se supone que la temperatura de cambio de fase es 0°C . Sobre la porción de frontera Γ_2 se impone un flujo de calor constante (saliente) $q > 0$; se supone también que la porción de frontera Γ_3 (cuando existe) es una pared impermeable al calor, es decir que el flujo de calor sobre Γ_3 es nulo. La frontera Γ_1 está compuesta de dos partes Γ_{1t} y Γ_{1s} con

$$\Gamma_1 = \Gamma_{1t} \cup \Gamma_{1s} \text{ (con } \overset{\circ}{\Gamma}_{1t} \cap \overset{\circ}{\Gamma}_{1s} = \emptyset \text{)}, \quad |\Gamma_{1t}| > 0 \text{ y } |\Gamma_{1s}| \geq 0$$

de manera que sobre Γ_{1t} se impone una temperatura $b > 0$ y que Γ_{1s} se comporta como una pared semi-permeable al calor, es decir que deja entrar calor pero impide su salida [DuLi], siendo su temperatura exterior b . Las condiciones que caracterizan a la porción de frontera Γ_{1s} se denominan condiciones de Signorini. Se considera en Ω un problema estacionario de conducción del calor, con una fuente de calor g en su interior. Por otra parte, el caso $\Gamma_{1s} = \emptyset$ (es decir $\Gamma_1 = \Gamma_{1t}$) sin condiciones de Signorini fue analizado en [GaTa] con lo cual el presente estudio se restringirá al problema con $|\Gamma_{1s}| > 0$.

El objetivo de la presente charla es el de obtener condiciones suficientes para el flujo de calor q sobre Γ_2 , la temperatura b sobre Γ_{1t} y la fuente de energía g en Ω , para obtener una temperatura de signo no constante en Ω , es decir un problema estacionario de Stefan-Signorini a dos fases. Se generalizan, además, resultados ya obtenidos para ecuaciones variacionales a inecuaciones variacionales.

Estos tipos de problemas fueron originalmente planteados en [Ta3] a través de ecuaciones variacionales. Sin embargo, problemas más elementales fueron resueltos en [Ta1]. Otros problemas relacionados se dan en [BoShTa, GoTa, Ta4].

Siguiendo [Du, Ta1] se estudia la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida para $x \in \Omega$. El conjunto Ω puede expresarse en la forma

$$(1) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$$

donde

$$(2) \quad \Omega_1 = \{ x \in \Omega / \theta(x) < 0 \}, \quad \Omega_2 = \{ x \in \Omega / \theta(x) > 0 \}$$

$$\mathcal{L} = \{ x \in \Omega / \theta(x) = 0 \},$$

representan respectivamente la fase sólida, la fase líquida y la frontera libre que las separa. La temperatura θ puede representarse en Ω de la siguiente manera :

$$(3) \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{L}, \\ \theta_2(x) > 0 & \text{si } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

y satisface las siguientes condiciones :

$$(4) \quad \begin{aligned} & \text{(i) } -k_i \Delta \theta_i = g \text{ en } \Omega_i \text{ (} i = 1, 2 \text{) ,} \\ & \text{(ii) } \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \text{ sobre } \mathcal{L} \\ & \text{(iii) } \theta_2 / \Gamma_{1_t} = b, \quad \text{(iv) } \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \\ & \text{(v) } \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{1_s}} \geq 0, \quad \theta_2 \Big|_{\Gamma_{1_s}} \geq b, \quad (\theta_2 - b) \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{1_s}} = 0 \\ & \text{(vi) } \left\{ \begin{array}{l} -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q \text{ si } \theta \Big|_{\Gamma_2} > 0, \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q \text{ si } \theta \Big|_{\Gamma_2} < 0, \end{array} \right. \end{aligned}$$

donde $k_i > 0$ ($i = 1, 2$) es la conductividad térmica de la fase i ($i = 2$: líquida, $i=1$: sólida), $b > 0$ es la temperatura dada sobre Γ_{1_t} , $q > 0$ es el flujo de calor dado sobre Γ_2 y $g = g(x)$ es un aporte de energía dado en Ω .

El problema en estudio puede presentar dos fronteras libres, a saber :

(i) la superficie \mathcal{L} que separa las fases líquida y sólida del material,

(ii) la porción de frontera Γ_{1s} puede estar compuesta de dos partes, no conocidas a priori, en las cuales la temperatura es igual o es superior a la temperatura exterior b .

II. FORMULACION VARIACIONAL Y PROPIEDADES

A continuación se transformará el problema (4) a través de un cambio de función incógnita, con el objeto de eliminar la frontera libre \mathcal{L} , escribir las ecuaciones en el sentido de las distribuciones en Ω y hallar la correspondiente formulación variacional. Sea

$$(5) \quad u = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- \text{ en } \Omega$$

donde θ^+ y θ^- representan la parte positiva y negativa de la función θ . Entonces la nueva función incógnita u satisface las siguientes relaciones :

$$(6) \quad \begin{aligned} & -\Delta u = g \text{ en } D'(\Omega), \\ & u|_{\Gamma_{1t}} = B, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{1s}} \geq 0, \quad u|_{\Gamma_{1s}} \geq B, \quad (u_2 - B) \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{1s}} = 0 \end{aligned}$$

donde

$$(7) \quad B = k_2 b > 0.$$

TEOREMA 1. – (i) La formulación variacional del problema (6) está dada por la inecuación variacional elíptica siguiente :

$$(8) \quad a(u, v - u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in K_B, \quad u \in K_B,$$

donde

$$V = H^1(\Omega) , \quad V_0 = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = 0 \right\} , \quad H = L^2(\Omega) ,$$

$$K_B = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = B , v|_{\Gamma_{1s}} \geq B \right\} = B + K_0 ,$$

$$(9) \quad K_0 = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = 0 , v|_{\Gamma_{1s}} \geq 0 \right\} , \quad (u,v) = \int_{\Omega} uv \, dx ,$$

$$W_0 = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = v|_{\Gamma_{1s}} = 0 \right\} \subseteq V_0 \cap K_0$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx , \quad L(v) = L_{qg}(v) = (g,v) - \int_{\Gamma_2} q v \, d\gamma .$$

(ii) Si $g \in H$ entonces existe una única solución de la inecuación variacional (8).

(iii) La solución de la inecuación variacional (8) está caracterizada por el problema de mínimo siguiente:

$$(10) \quad J(u) \leq J(v) , \quad \forall v \in K_B , \quad u \in K_B ,$$

donde

$$(11) \quad J(v) = J_{qg}(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L_{qg}(v) , \quad v \in V .$$

Demostración. – Se utilizan resultados clásicos [BaCa, DuLi, Gl, KiSt, Ro, Ta2].

LEMA 2. – (i) Si $u_i = u_{q_i}$ es la solución de (8) para q_i ($i = 1, 2$), entonces se tiene las siguientes desigualdades :

$$(12) \quad \alpha_0 \|u_2 - u_1\|_V^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) \, d\gamma ,$$

donde $\alpha_0 > 0$ es la constante de coercividad de la forma bilineal a sobre V_0 , es decir

$$(13) \quad a(v,v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2 , \quad \forall v \in V_0 .$$

(ii) Se tienen las siguientes propiedades : Si $q_2 \leq q_1$ entonces

$$(14) \quad (a) \ u_1 \leq u_2 \text{ en } \bar{\Omega} \ , \quad (b) \ \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma \leq \int_{\Gamma_2} u_2 \, d\gamma \ .$$

Además, las funciones $q \rightarrow u_q$ y $q \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma$ son monótonas estrictamente decrecientes.

Demostración. – La desigualdad (12) se obtiene de (13) y de sumar las inecuaciones (8) correspondiente a la solución u_1 tomando $v = u_2$ y la correspondiente a u_2 tomando $v = u_1$. La desigualdad (14b) se deduce directamente de (12). La desigualdad (14a) se obtiene eligiendo adecuadas funciones test v en la inecuación variacional (8) para obtener que $(u_1 - u_2)^+ = 0$ en Ω .

III. CONDICION SUFICIENTE PARA EL FLUJO DE CALOR q

Sea la función real $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ definida de la siguiente manera :

$$(15) \quad f(q) = J_{qg}(u_q) = \frac{1}{2} a(u_q, u_q) + q \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma - (g, u_q)$$

donde u_q es la única solución de la inecuación variacional (8).

LEMA 3. – Para todo $q > 0$ y δ , de manera que $q + \delta > 0$, se tienen las siguientes estimaciones :

$$(16) \quad \left\| \frac{1}{\delta} (u_{q+\delta} - u_q) \right\|_V \leq C_1 = \frac{\|\gamma_0\|}{\alpha_0} |\Gamma_2|^{1/2} \ ,$$

$$(17) \quad \left\| \frac{1}{\delta} (u_q - u_{q+\delta}) \right\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_2 = C_1 \|\gamma_0\| \ ,$$

donde γ_0 es el operador traza (lineal y continuo, definido sobre V). Mas aún, para todo $q > 0$ y $\delta > 0$ se tiene :

$$(18) \quad 0 < \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma - \int_{\Gamma_2} u_{q+\delta} \, d\gamma \leq C_3 \delta \quad (C_3 = C_2 |\Gamma_2|^{1/2} > 0),$$

con lo cual la función $q > 0 \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma$ es continua.

Demostración. — Teniendo en cuenta (13) y (12) con $q_1 = q + \delta$, y $q_2 = q$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la continuidad de γ_0 se obtiene (16) y (17). Por otra parte, de (17) surge (18).

TEOREMA 4. — Para todo $g \in L^2(\Omega)$, existe un elemento $u'_q \in V_0$ de manera que

$$(19) \quad \frac{1}{\delta} (u_q - u_{q+\delta}) \rightarrow u'_q \text{ en } V \text{ débil cuando } \delta \rightarrow 0,$$

$$(20) \quad \frac{1}{\delta} (u_q - u_{q+\delta}) \rightarrow u'_q \text{ en } L^2(\Gamma_2) \text{ débil cuando } \delta \rightarrow 0,$$

y que satisface la igualdad

$$(21) \quad a(u_q, u'_q) = L(u'_q) = (g, u'_q) - \int_{\Gamma_2} q u'_q \, d\gamma.$$

Demostración. — Las condiciones (19) y (20) se deducen de (16) y (17). Para obtener la igualdad (21) se procede de la siguiente manera:

(i) si en la inecuación variacional (8) para u_q se toma $v = u_q + \delta$, se divide por δ y se pasa al límite $\delta \rightarrow 0$, se obtiene

$$(22) \quad a(u_q, u'_q) \geq L(u'_q).$$

(ii) si en la inecuación variacional (8) para $u_{q+\delta}$ se toma $v = u_q$, se divide por δ y se pasa al límite $\delta \rightarrow 0$, se obtiene

$$(23) \quad a(u_q, u'_q) \leq L(u'_q) .$$

con lo cual resulta (21).

Observación. — La igualdad (21) será muy importante para obtener la derivabilidad de la función real f , definida por (15). Este resultado es el que permite obtener para inecuaciones variacionales elípticas conclusiones análogas obtenidas para ecuaciones variacionales elípticas [GaTa, Ta3].

TEOREMA 5. — (i) La función f es derivable. Mas aún, f' es continua y estrictamente decreciente, dada por la siguiente expresión :

$$(24) \quad f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma .$$

(ii) Se obtienen las siguientes propiedades :

$$(25) \quad \frac{d}{dq} (g, u_q) = (g, u'_q) ,$$

$$(26) \quad \frac{d}{dq} a(u_q, u_q) = 2 a(u_q, u'_q) ,$$

$$(27) \quad f''(q) = \int_{\Gamma_2} u'_q \, d\gamma .$$

Demostración. — (i) De (24) se obtiene

$$(28) \quad \frac{f(q+\delta) - f(q)}{\delta} = \frac{1}{2} a(u_{q+\delta} + u_q, \frac{u_{q+\delta} - u_q}{\delta}) - (g, \frac{u_{q+\delta} - u_q}{\delta}) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_{q+\delta} \, d\gamma + q \int_{\Gamma_2} \frac{u_{q+\delta} - u_q}{\delta} \, d\gamma .$$

Pasando al límite $\delta \rightarrow 0$, utilizando la igualdad (21), se deduce que

$$(29) \quad f'(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(q + \delta) - f(q)}{\delta} = \frac{1}{2} a(2u_q, u'_q) - (g, u'_q) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma + \int_{\Gamma_2} q u'_q d\gamma = \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma ,$$

es decir (24).

(ii) Las propiedades (25) a (27) se obtienen derivando las expresiones (15) y (24).

TEOREMA 6. – Se tienen las siguientes propiedades :

(i) El elemento u_q puede ser escrito como

$$(30) \quad u_q = u_{qg} B = B + U_g + q \eta$$

donde U_g es la única solución de la ecuación variacional elíptica siguiente

$$(31) \quad a(U_g, v) = (g, v), \quad \forall v \in W_0, \quad U_g \in W_0,$$

y η es la única solución de la inecuación variacional elíptica siguiente

$$(32) \quad a(\eta, v - \eta) \geq - \int_{\Gamma_2} (v - \eta) d\gamma, \quad \forall v \in K_0, \quad \eta \in K_0,$$

que satisface $\eta/\Gamma_2 \leq 0$ con

$$(33) \quad - \int_{\Gamma_2} \eta d\gamma \geq a(\eta, \eta) \geq \alpha \|\eta\|_V^2 > 0.$$

(ii) El elemento u'_q no depende de q y viene dado por $u'_q = \eta$.

(iii) Se tiene

$$(34) \quad f'(q) = (B |\Gamma_2| + C_g) - Dq, \quad f''(q) = -D,$$

donde

$$(35) \quad C_g = \int_{\Gamma_2} U_g \, d\gamma, \quad D = - \int_{\Gamma_2} \eta \, d\gamma > 0.$$

Se define la función real $R = R(B, g)$ de la siguiente manera :

$$(36) \quad R(B, g) = \frac{B |\Gamma_2| + C_g}{D}.$$

TEOREMA 7. – Si $B > 0$ y $g \in L^2(\Omega)$, entonces se tiene que

$$(37) \quad q > R(B, g) \Rightarrow u_{qgB} \text{ es de signo no-constante en } \Omega,$$

es decir que existe un problema estacionario de Stefan-Signorini a dos fases.

Demostración. – El resultado (37) se obtiene considerando la siguiente equivalencia :

$$(38) \quad q > R(B, g) \Leftrightarrow f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma < 0.$$

IV. RELACION CON EL PROBLEMA SIN PARED SEMI-PERMEABLE

Se considerará el mismo problema desarrollado anteriormente excepto que se impone la temperatura b sobre la frontera Γ_1 (es decir que sobre la porción de frontera Γ_{1s} se tiene la temperatura b en lugar de imponer las condiciones de Signorini) que fue estudiado en [GaTa]. Sea z la solución del siguiente problema diferencial

$$(39) \quad -\Delta z = g \text{ en } D'(\Omega),$$

$$z|_{\Gamma_1} = B, \quad -\frac{\partial z}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q, \quad \frac{\partial z}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0,$$

cuya formulación variacional está dada por la ecuación variacional elíptica siguiente:

$$(40) \quad a(z, v) = L(v), \quad \forall v \in W_0, \quad u \in K,$$

donde

$$(41) \quad K = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = B \right\} \subseteq K_B.$$

LEMA 8. - (i) La solución z de (40) viene dada por

$$(42) \quad z = B + U_g - q u_3$$

donde $u_3 > 0$ es la solución ecuación variacional

$$(43) \quad a(u_3, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma, \quad \forall v \in W_0, \quad u_3 \in W_0.$$

(ii) Si

$$(44) \quad q > q_0(B) + \frac{C_g}{C},$$

entonces el problema (39) (o su correspondiente ecuación variacional (40)) es a dos fases en Ω (i.e. z es una función de signo no-constant en Ω), donde

$$(45) \quad q_0(B) = \frac{B |\Gamma_2|}{C},$$

y las constantes $C = C(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) > 0$ y C_g vienen dadas por las siguientes expresiones

$$(46) \quad C = a(u_3, u_3) = \int_{\Gamma_2} u_3 \, d\gamma ,$$

$$(47) \quad C_g = a(u_3, u_g) = \int_{\Gamma_2} u_g \, d\gamma = \int_{\Omega} g u_3 \, dx .$$

Demostración. — Se utiliza adecuadamente la ecuación variacional (40), siguiendo las ideas desarrolladas en [Ta3]. Ver [GaTa].

TEOREMA 9. — (i) Las funciones u y z están relacionadas de la siguiente manera:

$$(48) \quad \eta \geq -u_3 \quad , \quad u \geq z \quad \text{en } \bar{\Omega} .$$

(ii) Si $B |\Gamma_2| + C_g > 0$ se tiene que si el problema (6) es a dos fases entonces el problema (39) es también a dos fases.

Demostración. — (i) Las desigualdades (48) surgen relacionando las formulaciones variacionales para η , u_3 , u y z dadas respectivamente por (32), (43), (8) y (40).

(ii) Se obtiene utilizando (37) y (44) .

AGRADECIMIENTO. — Este trabajo se ha realizado a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Aplicaciones de Problemas de Frontera Libre", PID – BID # 221 del CONICET, Rosario.

REFERENCIAS

[BaCa] C. BAIOCCHI – A. CAPELO, "Diseguazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariazionali, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, N 4, 7, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[BoShTa] J.E. BOUILLET – M. SHILLOR – D.A. TARZIA, "Critical

outflow for a steady-state Stefan problem", *Applicable Analysis*, 32 (1989), 31 – 51.

[Du] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", *Rapport de Recherche N° 185, LABORIA - IRIA, Rocquencourt* (1976).

[DuLi] G. DUVAUT – J.L. LIONS, "Les inéquations en mécanique et en physique", *Dunod, Paris* (1972).

[GaTa] G.G. GARGUICHEVICH – D.A. TARZIA, "The steady-state two-phase Stefan problem with an internal energy and some related problems", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 39 (1991), 615 – 634.

[Gl] R. GLOWINSKI, "Numerical methods for nonlinear variational problems", *Springer Verlag, New York* (1984).

[GoTa] R.L.V. GONZALEZ – D.A. TARZIA, "Optimization of the heat flux in domain with with temperature constrains", *J. Optimization Th. Appl.*, 65 (1990), 245 – 256.

[KiSt] D. KINDERLEHRER – G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", *Academic Press, New York* (1980).

[Ro] J.F. RODRIGUES, "Obstacle problems in mathematical physics", *North-Holland Mathematics Studies Vol. 134, North-Holland, Amsterdam* (1987).

[Ta1] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", *C.R. Acad. Sc. Paris*, 288A (1979), 941 – 944. See also *Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Mars 1979)*; *Math. Notae*, 27(1979/80), 145 – 156.

[Ta2] D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", *Reuniões em Matemática Aplicada e Computação Científica, Vol. 5, SBMAC, Gramado* (1987). See also "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", *Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI - CONICET, No. 5, Buenos Aires* (1981).

[Ta3] D.A. TARZIA, "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", *Engineering Analysis*, 5 (1988), 177 – 181.

[Ta4] D.A. TARZIA, "Mixed elliptic problems with solutions of non-constant sign", *Revista Unión Matemática Argentina*, 34 (1988), 31 – 55.

Depto Matemática, FCE, Univ. Austral,
Paraguay 1950, (2000) Rosario, Argentina.

E – mail : TARZIA@UAUFCE.EDU.AR

Y

PROMAR (CONICET-UNR),

Instituto de Matemática "Beppo Levi",

Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.

Serie : CUADERNOS del Inst. de Matemática "B. Levi"

Coordinador: Domingo Alberto TARZIA , Secretaria: María Cristina SANZIEL

NUMEROS APARECIDOS :

1. **G. STAMPACCHIA, "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales".**
2. **C. PROCESI, "Teoría de Galois elemental".**
3. **U. MOSCO, "Transformada de Fourier y distribuciones".**
4. **P. BERNHARD, "Introducción a la teoría de Control Optimo".**
5. **P. FAURRE, "Teoría de Control. Filtrado estadístico e Introducción al Control Estocástico".**
6. **"Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", E. Rofman (Ed.), Rosario, 2-7 de julio de 1973 :**
U. D'AMBROSIO, "Superficies generalizadas no cálculo das variacoes", p. 5-24.
L.A. MEDEIROS, "Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales", p. 25-58.
E. ROFMAN, "Desigualdades variacionales. Existencia y aproximación numérica de soluciones", p. 59-86.
7. **A. BENSOUSSAN, "Teoría moderna de Control Optimo".**
8. **C. BAIOCCHI, "Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi-variacional y numérico".**
9. **R. GLOWINSKI, "Introducción a la aproximación de inecuaciones variacionales elípticas".**
10. **H. SAMARA, "Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Formulación variacional del método TAU".**
11. **"Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarsia (Ed.), Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1 :**
D.A.TARZIA, "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", p. 5-32.
D.A.TARZIA, "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", p. 33-61.
J.E. BOUILLET, "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", p. 63-74.
J.E. BOUILLET, "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", p. 75-104.
L.T. VILLA, "El problema inverso de Stefan", p. 105-131.

L.T. VILLA, "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase", p. 133-142.

R.H. NOCHETTO, "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", p. 143-166.

G.G. GARGUICHEVICH - M.C. SANZIEL, "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", p. 167-177.

12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2 :
- D.A. TARZIA, "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", p. 5-36.
- D.A. TARZIA, "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", p. 37-85.
- P.R. MARANGUNIC, "Algunos conceptos básicos del análisis funcional", p. 87-118.
- H.R. BERTORELLO, "Sobre la solidificación de aleaciones binarias", p. 119-142.
- L. CRIVELLI - S. IDELSOHN - C. BAIGORRIA, "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales", p. 143-170.
- E.E. ALANIS, "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar", p. 171-177.
- M.B. STAMPELLA, "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase", p. 179-193.
13. A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", en "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 1.
14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2 :
- H. BERTORELLO, "Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido", p. 9-27.
- J.E. BOUILLET, "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas", p. 29-44.
- D.A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases", p. 45-75.
- D.A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", p. 77-99.
- L.T. VILLA, "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre", p. 101-116.
- N. AGUILERA, "El método de Alt para el problema del dique poroso", p. 117-128.
- G.G. GARGUICHEVICH, "Las inecuaciones variacionales elípticas", p. 129-138.
- P.R. MARANGUNIC, "Distribuciones y espacios de Sobolev", p. 139-165.
- E. ZARANTONELLO, "Teoría espectral cónica", p. 167-169.

15. P.L. GEORGE, "Introducción a la utilización del Software Científico MODULEF".
16. J.L. MENALDI, "Programación dinámica estocástica".
17. "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 11–15 de octubre de 1988, Volumen 1 :
 - J.E. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas", p. 7–13.
 - C. CORTAZAR – M. ELGUETA, "Sobre localización de soluciones de la ecuación de medios porosos", p. 15–27.
 - G.G. GARGUICHEVICH – D.A. TARZIA, "Sobre un problema de Stefan a dos fases con fuente de energía interna", p. 29–44.
 - M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas", p. 45–53.
 - R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos", p. 55–71.
 - D.A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción", p. 73–86.
 - C.V. TURNER, "Difusión de un solvente en un polímero no homogéneo", p. 87–104.
 - K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic and stochastic approach", p. 105–119.
 - L.T. VILLA, "Problemas de frontera libre y móvil en procesos de ingeniería química", p. 121–132.
 - D.A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados", p. 133–151.
18. M. PRIMICERIO – R. GIANNI, "La filtración en medios porosos", en "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 11–15 de octubre de 1988, Volumen 2.
19. J.C. CESCO, "Economía matemática", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11–14 de octubre de 1989.
20. L. QUINTAS, "Teoría de juegos", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11–14 de octubre de 1989.
21. E. GENTILE, "Forma Normal de Jordan", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11–14 de octubre de 1989.
22. M. UGHI, "On the porous media equation with either source or absorption".
23. "IV Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 14–18 de diciembre de 1992, Volumen 1 :
 - J.C. REGINATO – D.A. TARZIA, "Free boundary models for root growth of

crops", p. 1–26.

E. PARDO, "Modelado térmico de soldaduras GMA", p. 27–33.

M.K. KORTEN, "Fronteras libres en soluciones de la ecuación $u_t = \Delta(u-1)_+$ ", p. 35–37.

M.C. SANZIEL – D.A. TARZIA, "Problemas con multifases", p. 39–51.

L.T. VILLA, "Modelos de Frontera Libre–Móvil en sistemas de difusión reacción química gas–sólido", p. 53–71.

L.R. BERRONE – G.G. GARGUICHEVICH, "Sobre un problema estacionario de Stefan con fuente de energía", p. 73–80.

J.I. ETCHEVERRY, "Análisis de Modelos de Ablación de Polímeros", p. 81–92.

V.A. KUZ, "Dynamic study of evaporation of droplets", p. 93–102.

D.F. DELMASTRO – A. CLAUSSE, "Oscilaciones de frontera de entalpía en flujos de dos fases", p. 103–119.

24. "IV Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 14–18 de diciembre de 1992, Volumen 2:
- L.R. BERRONE, "Rango temporal de validez de modelos que involucran a la ecuación del calor–difusión", p. 1–36.
- C.V. TURNER, "El problema de Stefan unidimensional para el líquido sobreenfriado", p. 37–49.
- R.H. MASCHERONI, "Transferencia de calor con cambio de fase en sistemas multidimensionales: uso de factores de forma en métodos aproximados", p. 51–66.
- M. STORTI, "Numerical modeling of ablation phenomena as two–phase Stefan problems", p. 67–88.
- C.B. LEDERMAN, "Un problema de frontera libre en elasticidad", p. 89–96.
- J.E. BOUILLET, "Fronteras libres en ecuaciones de conducción con coeficientes discontinuos", p. 97–102.
- D.A. TARZIA, "Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem with solution of non–constant sign", p. 103–120.
25. J.C. REGINATO – D.A. TARZIA, "Toma de agua y crecimiento de raíces de cultivos", p. 1–13.
- R.H. MASCHERONI, "Dos problemas de frontera libre acoplados: solidificación con simultánea sublimación", p. 15–26.
- J.I. ETCHEVERRY, "On a numerical method for solving a boundary value problem for $u_t = \alpha(u)_{xx}$ ", p. 27–34.
- D.A. TARZIA – C.V. TURNER, "El problema de Stefan a una fase para el líquido sobreenfriado con una condición de contorno convectiva", p. 35–45.
- L.T. VILLA – O.D. QUIROGA, "Modelos de frontera libre en transformaciones fluido – sólido reactivo", p. 47–62.
- V.A. KUZ, "One–dimension model for dynamic condensation of a vapor", p. 63–73.
- A. BOUCIGUEZ – L. SARAVIA, "Análisis térmico y solución numérica al problema de transferencia de calor en dos fases", p. 75–84.
- D.A. TARZIA – C.V. TURNER, "El comportamiento asintótico para un problema de Stefan a una fase con una condición de contorno convectivo", p. 85–92.

26. C. LEDERMAN – N. WOLANSKI, "Un problema de frontera libre de la teoría de combustión I", p. 1–13.
- C. LEDERMAN – N. WOLANSKI, "Un problema de frontera libre de la teoría de combustión II", p. 15–25.
- A.R. GONZALEZ – D.A. TARZIA, "Determination of thermal coefficients in semi-infinite materials with mushy zone in phase-change process", p. 27–48.
- J.I. ETCHEVERRY, "Modelado numérico de la fusión y evaporación de materiales mediante haces de electrones", p. 49–58.
- A.C. BRIOZZO – D.A. TARZIA, "Solución exacta de un problema de frontera libre de flujos en un medio saturado-no saturado con difusividad variable", p. 59–72.
- P.R. MARANGUNIC, "El problema de Stefan simétrico a dos fases con sobre-enfriamiento", p. 73–88.
- D.A. TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan-Signorini con condiciones de contorno mixtas", p. 89–102.

**Esta publicación se terminó de imprimir en el mes de Abril de 1996 en el CERIDER, BV
27 de Febrero 210 bis 2000 Rosario, Pcia. de Santa Fe**

Nota : Para intercambiar esta serie con publicaciones similares, dirigirse a:

**CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas , Ingeniería y Agr.,
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.**

Note : To exchange this serie with similar publications, please write to:

**CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas , Ingeniería y Agr.,
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.**