

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

IV SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 14 al 18 de diciembre de 1992

24

Rosario - República Argentina
1993

INDICE

PREFACIO	pág. ii-x
L.R. BERRONE, "Rango temporal de validez de modelos que involucran a la ecuación del calor-difusión"	pág. 1-36
C.V. TURNER, "El problema de Stefan unidimensional para el liquido sobreenfriado"	pág. 37-49
R.H. MASCHERONI, "Transferencia de calor con cambio de fase en sistemas multidimensionales: uso de factores de forma en métodos aproximados"	pág. 51-66
M. STORTI, "Numerical modeling of ablation phenomena as two-phase Stefan problems"	pág. 67-88
C.B. LEDERMAN, "Un problema de frontera libre en elasticidad"	pág. 89-96
J.E. BOUILLET, "Fronteras libres en ecuaciones de conducción con coeficientes discontinuos"	pág. 97-102
D.A. TARZIA, "Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem with solution of non-constant sign"	pág. 103-120
CONTENIDO de la Serie Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi	pág. 121

PREFACIO

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años (ver Anexo I), el *Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral* y el *Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario, PROMAR (CONICET—UNR)*, que se desarrolla en el *Instituto de Matemática "Beppo Levi"* de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, emprendieron, a través del proyecto de investigación y desarrollo "*Problemas de Frontera Libre de la Física Matemática*", la organización del interdisciplinario *IV Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones*, realizado en la ciudad de Rosario (Argentina) durante el período del 14 al 18 de diciembre de 1992.

El Comité Organizador estuvo compuesto por H. R. BERTORELLO (FAMAF, Córdoba), J. E. BOUILLET (IAM y UBA, Buenos Aires), E. A. GARCIA (CNEA, Buenos Aires), D. A. TARZIA (UA y PROMAR, Rosario) (Coordinador) y L. T. VILLA (UNSa, Salta).

La Secretaría estuvo a cargo de L. R. BERRONE (Coordinador), A. BRIOZZO, G. G. GARGUICHEVICH, P. R. MARANGUNIC, M. F. NATALE y M. C. SANZIEL.

Este Seminario ha sido realizado, en parte, gracias a un subsidio que a tal efecto otorgó el CONICET y la Fundación Antorchas. Además, se contó con la ayuda de las siguientes Instituciones Auspiciantes : AMCA (Asociación Argentina de Mecánica Computacional) y CAMAT (Comité Argentino de Transferencia de Calor y Materia).

Además colaboraron las siguientes entidades : CIDCA (CIC—CONICET—UNLP), La Plata; CNEA (Centro Atómico Bariloche), Bariloche; CNEA (sede Constituyentes), Buenos Aires; Courant Institute of Mathematics, New York; FAMAF (UNC), Córdoba; FCEFQ (UNRC), Río Cuarto; FCEyN (UBA), Buenos Aires; IAM (CONICET), Buenos Aires; IFLYSIB (UNLP—CONICET—CIC); INIQUI (CONICET—UNSa), Salta; INTEC (CONICET—UNL), Santa Fe; INTEMA (UNMP), Mar del Plata; Princeton Institute for Advanced Study, Princeton; Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile.

En el Seminario participaron 46 personas provenientes de 12 ciudades argentinas y 4 extranjeras (ver Anexo II — Lista de Participantes).

Los objetivos del Seminario fueron :

- 1) Gestar un *encuentro bianual/trianual* de las personas y grupos que trabajan en problemas de frontera libre, en particular, en el problema de Stefan (cambio de fase) en el país, a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos.
- 2) Despertar el interés y el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*, no limitando el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia.

Esta cuarta edición del Seminario estuvo constituida por conferencias sobre aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones (ver Anexo III—Programa). En años sucesivos, los temas versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numérico (no tratados en Seminarios anteriores) y los principios teóricos irán paulatinamente dando lugar a las aplicaciones.

Para finalizar, quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a los profesores encargados de la redacción de estas notas como asimismo a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA

Compilador

Rosario, Agosto 1993.

ANEXO I

PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Los problemas de frontera libre son aquellos problemas de contorno donde interviene además una incógnita (la "frontera libre") que separa dos o más regiones, y sobre la cual se conocen datos que dependen del modelo analizado. Según el número de dimensiones del espacio, en lugar de una superficie de separación se podrá tener una curva o un número finito de puntos.

Un ejemplo típico es el problema de Stefan (o problema de cambio de fase), que estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida (por ej. hielo y agua en procesos de fusión o solidificación). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. Sobre la superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, se impone una condición adicional que surge del principio de conservación de la energía. El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha frontera libre, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Otros ejemplos son :

- problemas de hidráulica, por ej. el del dique poroso, donde una superficie desconocida separa la zona seca de la zona húmeda;
- el problema del obstáculo, donde hay una zona de contacto entre el obstáculo y la configuración de equilibrio de la cuerda o membrana elástica;
- problemas de difusión-reacción gas-sólido en Ingeniería Química, donde la superficie incógnita separa la región del sólido ya atacada de la todavía no atacada;
- problemas de elasto-plasticidad, problemas térmicos con pared semi-permeable, semiconductores bajo una unión P-N, problemas en medios porosos, problemas de mecánica de los fluidos, etc.

Entre las múltiples aplicaciones de estos problemas se pueden mencionar :

electropintura; envenenamiento y regeneración de catalizadores; combustión de sólidos; solidificación de aleaciones binarias; soldadura de metales; colada continua del acero; congelación de alimentos en la industria frigorífica; almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase; oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares, en caso de accidentes; procesos de ablación térmica; difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos, para el tratamiento médico de tumores mediante la aplicación de radiaciones; problemas de control óptimo ligados a procesos con cambio de fase; solidificación de suelos húmedos; derretimiento de glaciares; crecimiento de raíces de cultivo; etc.

El avance considerable que se ha obtenido en el desarrollo teórico de estos temas a nivel nacional, y sus variadas aplicaciones industriales que se encuentran en etapa inicial, impulsan la realización de este IV Seminario, prosiguiendo la línea de los ya concretados I y II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones (Rosario, 4-8/7/83 y 13-17/10/86, respectivamente) y III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones (Rosario, 11-15/10/1988). El material correspondiente a los tres Seminarios anteriores ha sido publicado en la colección CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", números 11, 12, 13, 14, 17 y 18.

ANEXO II

LISTA DE PARTICIPANTES

- Carlos M. ALMIRON, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. Nac. del Nordeste, 9 de julio 1949, 3400 Corrientes (Argentina).
- Laura ARAGONE, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Oscar ARES, Fac. de Ingeniería y Ciencias Económico-Sociales, Av. 25 de Mayo 384, 5730 Villa Mercedes (Argentina).

- Lucio R. BERRONE, PROMAR (CONICET—UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Mónica BOCCO, FCA, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaíso y R. Martínez, Casilla de Correo 509, 5000 Córdoba (Argentina).
- Julio E. BOUILLET, Instituto Argentino de Matemática, Viamonte 1636, 1er Cuerpo, 1055 Buenos Aires (Argentina).
- Dirce BRACCIALARGHE, Depto Matemática, Fac. de Ciencias Exactas, Ing. y Agrim., Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Adriana BRIOZZO, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina).
- Carlos CABEZAS, Depto Matemática, Univ. de Concepción de Chile, Casilla 3—C, Concepción (Chile).
- Luis A. CAFFARELLI, Princeton Institute for Advanced Study, School of Mathematics, Olden Line, Princeton, N. J. 08540 (U.S.A.).
- Darío F. DELMASTRO, Centro Atómico Bariloche, 8400 San Carlos de Bariloche (Argentina).
- Silvia DI MARCO, PROMAR (CONICET—UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Rodolfo M. DUELLI, Fac. de Ingeniería, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Ruta 36, km 601, 5800 Río Cuarto (Argentina).
- María DZIOBA, Depto Matemática, Fac. Cs. Ex. Fco. Qcas., Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Enlace rutas 8 y 36, km 603, 5800 Río Cuarto (Argentina).
- Manuel ELGUETA, Univ. Católica de Chile, Cardenal Neumann 1016, Santiago de Chile (Chile).
- Javier ETCHEVERRY, Instituto Argentino de Matemática, Viamonte 1636, 1er Cuerpo, 1055 Buenos Aires (Argentina).
- Daniel FELIZZIA, Fac. de Ingeniería y Ciencias Económico-Sociales, Av. 25 de Mayo 384, 5730 Villa Mercedes (Argentina).
- Mónica A. FUSTER, Depto Matemática, Univ. Nac. del Sur, Av. Alem 1253, 8000

Bahía Blanca (Argentina).

- Irene MARTINEZ GAMBA, Courant Institute of Mathematics, New York University, 251 Mercer Street, 10012 New York (U.S.A.).
- Eduardo E. GARCIA, Depto Combustibles Nucleares, CNEA, Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (Argentina).
- Graciela G. GARGUICHEVICH, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina); y PROMAR (CONICET–UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Adriana GONZALEZ, Depto Matemática, Fac. Cs. Ex. Fco. Qcas., Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Enlace rutas 8 y 36, km 603, 5800 Río Cuarto (Argentina).
- Roberto GONZALEZ, PROMAR (CONICET–UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Marianne KORTEN, Instituto Argentino de Matemática, Viamonte 1636, 1er Cuerpo, 1055 Buenos Aires (Argentina).
- Víctor A. KUZ, IFLYSIB (UNLP–CONICET–CIC), Calle 59 No. 789, Casilla de Correo 565, 1900 La Plata (Argentina).
- Enrique LAMI DOZO, Instituto Argentino de Matemática, Viamonte 1636, 1er Cuerpo, 1055 Buenos Aires (Argentina).
- Claudia LEDERMAN, Instituto Argentino de Matemática, Viamonte 1636, 1er Cuerpo, 1055 Buenos Aires (Argentina).
- René LETELIER ALBORNOZ, Depto Matemática, Univ. de Concepción de Chile, Casilla 3–C, Concepción (Chile).
- Pedro R. MARANGUNIC, PROMAR (CONICET–UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Rodolfo H. MASCHERONI, CIDCA, Calle 47 y 116, 1900 La Plata (Argentina).
- Ma. Fernanda NATALE, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina).
- Javier OCHOA, PINMATE, Depto de Industrias, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Buenos Aires

(Argentina).

- Enrique PARDO, INTEMA, Fac. de Ingeniería, Univ. Nac. de Mar del Plata, Av. Juan B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata (Argentina).
- Ricardo J. PIGNOL, Depto Matemática, Univ. Nac. del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca (Argentina).
- Elvio A. PILOTTA, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaíso y R. Martínez, 5000 Córdoba (Argentina).
- Rosa PIOTRKOWSKI, Depto Combustibles Nucleares, CNEA, Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (Argentina).
- Juan C. REGINATO, Depto Física, Fac. Cs. Ex. Fco. Qcas., Univ. Nac. de Río Cuarto, Ciudad Universitaria, Enlace rutas 8 y 36, km 603, 5800 Río Cuarto (Argentina).
- Julio ROSSI, Depto Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Univ. de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón 1, 1428 Buenos Aires (Argentina).
- Ma. Cristina SANZIEL, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Mario STORTI, INTEC, Guemes 3450, 3000 Santa Fe (Argentina).
- Domingo A. TARZIA, Depto Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario (Argentina); y PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Mabel TIDBALL, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Cristina V. TURNER, FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, Valparaíso y R. Martínez, 5000 Córdoba (Argentina).
- Ma. Alejandra VALENZUELA, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (Argentina).
- Francisco E. VARELA, INIFTA, Diagonal 113 y 64, Suc. 4 Casilla de Correo 16, 1900 La Plata (Argentina).
- Luis T. VILLA, INIQUI (CONICET-UNSa), Fac. de Ciencias Tecnológicas, Univ. Nac. de Salta, Buenos Aires 177, 4400 Salta (Argentina).

ANEXO III

PROGRAMA DEL SEMINARIO

Lunes 14 de Diciembre

- J. C. Reginato " Modelos de frontera libre para el crecimiento de raíces de cultivo ".
- D. A. Tarzia " Aspectos matemáticos de modelos de frontera libre para el crecimiento de raíces de cultivo ".
- E. Pardo " Modelado térmico de soldaduras GMA ".

Martes 15 de Diciembre

- L. R. Berrone " Rango temporal de validez de modelos que involucran a la ecuación del calor-difusión ".
- M. K. Kortan " Fronteras Libres en soluciones de la ecuación $v_t = \Delta(v - 1)_+$ ".
- I. Martinez Gamba " Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que admiten ondas de choque ".
- L. T. Villa " Modelos de frontera libre-móvil en sistemas de difusión-reacción química gas-sólido ".
- J. E. Bouillet " Fronteras libres en ecuaciones de conducción con coeficientes discontinuos ".
- L. A. Caffarelli " Problemas de frontera libre de evolución ".

Miércoles 16 de Diciembre

- D. A. Tarzia "Análisis numérico de problemas elípticos mixtos para obtener un caso estacionario del problema de Stefan a dos fases".
- G. G. Garguichevich "Sobre un problema estacionario de Stefan con fuente de energía".
- M. Elgueta "Localización de soluciones de un problema de Stefan a una fase".
- C. Lederman "Un problema de frontera libre de elasticidad".

Jueves 17 de Diciembre

- J. J. Etcheverry "Ablación de polímeros mediante láser".
- M. Storti "Modelización numérica de fenómenos de ablación como un problema de Stefan a dos fases".
- C. V. Turner "El problema de Stefan para un líquido sobreenfriado".
- M. C. Sanziel "Problemas con multifases".
- E. García "Interacción de materiales durante transitorios a altas temperaturas: argumentos en contra del uso de la constante de velocidad parabólica".
- R. Piotrkowski "Modelización de interacciones eutécticas sólido-sólido. Aplicación de los sistemas Zry-Inconel y Zry-acero inoxidable".

Viernes 18 de Diciembre

- E. Lami Dozo "Sobre la plasticidad con endurecimiento".
- R. Mascheroni "Transferencia de calor con cambio de fase en sistemas multidimensionales: Uso de factores de forma- Métodos aproximados".
- V. Kuz "Fluido-dinámica de la evaporación de gotas".
- D. F. Delmastro "Oscilaciones de frontera de entalpía en flujos a dos fases".

RANGO TEMPORAL DE VALIDEZ DE MODELOS QUE INVOLUCRAN A
LA ECUACION DEL CALOR-DIFUSION

Lucio R. Eerrone

PROMAR (CONICET-UNR)

Inst. de Matemática "B. Levi"

Av. Pellegrini 250 - (2000) Rosario - Argentina

Resumen: Se estudian problemas de valor inicial y con condiciones mixtas de contorno para la ecuación unidimensional del calor-difusión con el fin de obtener estimaciones del tiempo durante el cual la solución se mantiene entre constantes prefijadas. Interpretando dichas constantes como temperaturas de cambio de fase, ello corresponde a determinar el rango temporal de validez de ciertos modelos de conducción del calor en medios materiales. Se exponen resultados existentes sobre el tema y se desarrollan métodos de aplicación general para atacar estos problemas.

1_ Introducción

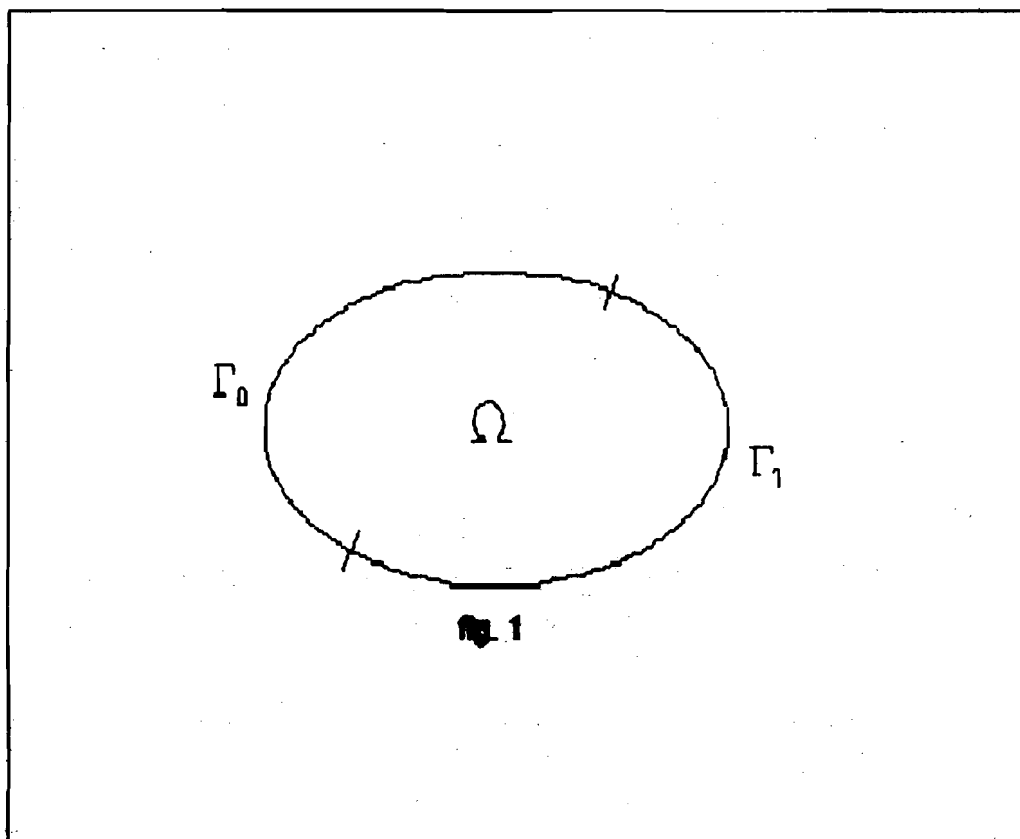
En las páginas que siguen focalizaremos nuestra atención en problemas como los descriptos a continuación:

Problema 1: Imaginemos un cuerpo homogéneo e isótropo Ω sujeto a una distribución inicial de temperatura $\theta_0(x)$. Sean Γ_0 y Γ_1 dos porciones de la superficie de Ω tales que $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $|\Gamma_0 \cap \Gamma_1| = 0$, $|\Gamma_0|, |\Gamma_1| \neq 0$ (véase la fig. 1). Indicamos con T_f y T_v respectivamente a las temperaturas de fusión y de vaporización a presión constante del material constitutivo de Ω y suponemos que el cuerpo se encuentra inicialmente en la fase determinada por $T_f < \theta_0 < T_v$. En esta situación, si imponemos ciertas condiciones de contorno sobre Γ_0 y Γ_1 (por ejemplo, mantenemos Γ_0 a temperatura

constante b_0 y establecemos un flujo de calor saliente de magnitud q_0 sobre Γ_1) y asumimos que en el interior de Ω actúa una fuente de energía $f(x,t)$, cabe la posibilidad de que el material empiece a solidificarse o a vaporizarse o ambas cosas, después de transcurrido cierto tiempo. Desde el punto de vista de la modelización matemática del proceso, sucede que el modelo de conducción del calor en Ω

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) & , \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) = \theta_0(x) & , \quad x \in \Omega \\ CC0 & , \quad x \in \Gamma_0, t > 0 \\ CC1 & , \quad x \in \Gamma_1, t > 0; \end{cases}$$

donde CC0 y CC1 indican las condiciones de contorno, conservará su validez solo hasta cierto instante t_0 en el que Ω comience a experimentar un cambio de fase. Después del tiempo t_0 deberá contemplarse en la modelización la aparición de fronteras libres o regiones pastosas en Ω .



El problema consiste entonces en predecir, en función de los datos iniciales y de contorno, si el cuerpo va a experimentar alguna vez un cambio de fase y si es así, estimar el tiempo t_0 en el que un

cambio de esa naturaleza se produce por primera vez.

Desde una perspectiva matemática, se trata de investigar el lapso de tiempo durante el cuál la solución $u(x,t)$ del modelo de conducción (I) verifica

$$T_f < u(x,t) < T_v, \quad x \in \Omega.$$

Problema 2: Consideremos un reactor químico R en donde difunde cierta sustancia cuya concentración química inicial está dada por $c_0(x)$. En los bordes del reactor tenemos condiciones de contorno, indicadas con CC0 y CC1 (véase la fig. 2), que pueden incluir intercambio difusivo de la sustancia con el medio externo, reacciones químicas, etc. Supongamos además que en una zona S del reactor vale $c_1 < c_0(x) < c_2, x \in S, (0 \leq c_1 < c_2)$. Esta situación puede modelizarse a través de

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & , \quad x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = c_0(x) & , \quad x \in R \\ CC0 & , \quad x \in \Gamma_0, t > 0 \\ CC1 & , \quad x \in \Gamma_1, t > 0; \end{array} \right.$$

donde $u(x,t)$ designa la concentración química de la sustancia en el punto x del reactor en el instante $t > 0$.

Bajo estas condiciones interesa estimar el tiempo t_0 para el que se cumple

$$c_1 < u(x,t) < c_2, \quad x \in S, 0 < t \leq t_0.$$

Las constantes c_1 y c_2 podrían, por ejemplo, indicar valores de la concentración química de la sustancia entre los cuales algún otro proceso evoluciona de manera óptima dentro del reactor R .

Si bien los problemas 1 y 2 tienen que ver con sistemas gobernados por ecuaciones de tipo parabólico; esto es, sistemas que evolucionan temporalmente, también es de interés estudiar problemas de tipo elíptico. Por ejemplo, con la misma notación utilizada en el problema 1, tenemos el modelo

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x) = f(x) & , \quad x \in \Omega \\ CC0 & , \quad x \in \Gamma_0 \\ CC1 & , \quad x \in \Gamma_1, \end{array} \right.$$

que describe la distribución estacionaria de temperatura en un cuerpo Ω en el que se observan condiciones de contorno CC0 sobre cierta porción Γ_0 de su frontera y CC1 sobre la porción restante

Γ_1 . Si el material constitutivo cambia de fase a las temperaturas T_f y T_v , ($T_f < T_v$), cabe preguntarse si el modelo de conducción ha sido bien planteado; es decir, si puede o no descartarse la posibilidad de que, para algún $x \in \Omega$, la solución $u(x)$ verifique $u(x) < T_f$ ó $u(x) > T_v$. Como veremos en la sección 2, estos problemas han sido recientemente motivo de varios trabajos de investigación.

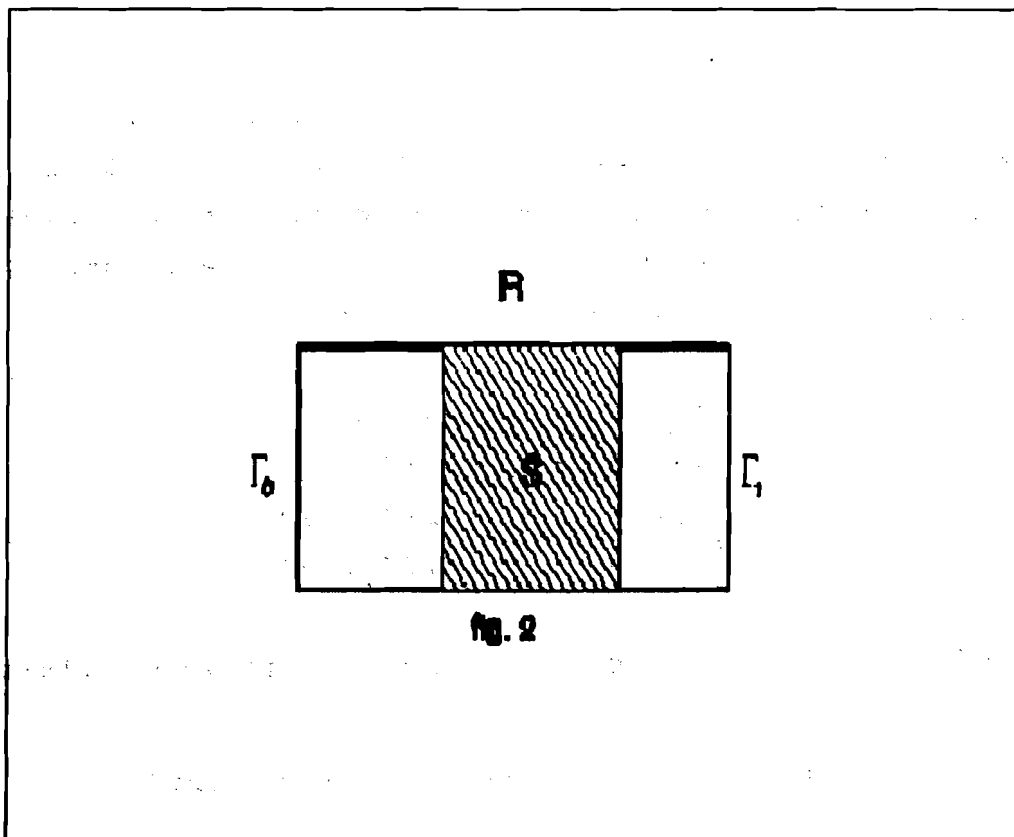


fig. 2

Relacionadas íntimamente con los problemas 1 y 2 existen cuestiones de control en lazo abierto de sistemas descritos por modelos como (I) y (II). De hecho, una vez que se ha determinado alguna condición sobre los datos inicial y de contorno del sistema, suficiente para que la temperatura se conserve entre dos valores prefijados durante cierto intervalo de tiempo, estamos en situación de controlar la evolución de nuestro sistema durante ese intervalo. Tomemos como ejemplo el problema 2: el tiempo t_0 para el que la concentración química $u(x,t)$ verifica

$$c_1 < u(x,t) < c_2, \quad 0 < t \leq t_0,$$

es una función $t_0(c_0, CC0, CC1, c_1, c_2)$ de los datos del problema. Supongamos que por algún medio hemos resuelto el problema de estimar t_0 , de manera que disponemos de una función $t_1(c_0, CC0, CC1, c_1, c_2)$ que satisface las condiciones

$$0 < t_1(c_0, CC0, CC1, c_1, c_2) \leq t_0(c_0, CC0, CC1, c_1, c_2),$$

$$t_1(c_0, CC0, CC1, c_1, c_2) \approx t_0(c_0, CC0, CC1, c_1, c_2).$$

Sabemos además, que en las condiciones de contorno generalmente intervienen parámetros que dependen del sistema mismo y su entorno. Asumiendo que podemos especificar a voluntad alguno de estos parámetros, digamos λ , en la condición de borde CC0, tendremos $CC0 = CC0(\lambda)$, y si las restantes condiciones están determinadas, los tiempos t_0 y t_1 serán funciones solo de λ . Podemos entonces ajustar el parámetro de control λ para obtener, por ejemplo,

$$t_0(\lambda) \geq t^*;$$

donde t^* ha sido prefijado. En efecto, como $t_0(\lambda) \geq t_1(\lambda)$ bastará encontrar λ de manera que $t_1(\lambda) \geq t^*$. El ajuste del parámetro de control λ ha sido hecho en el instante inicial, de modo que estamos controlando en lazo abierto la evolución del sistema modelizado por las ecuaciones (II) hasta el tiempo t^* .

Para finalizar, comentaremos brevemente el contenido de las secciones subsiguientes y fijaremos alguna notación que será repetidamente utilizada. En la sección 2 pasamos revista de ciertos antecedentes bibliográficos de los problemas 1 y 2. En las secciones 3 y 4 discutimos algunas instancias particulares de estos problemas y desarrollamos a propósito dos útiles métodos de solución: el estudio de la "formulación integral" de los problemas y el empleo de transformadas integrales.

Frecuentemente haremos uso del núcleo unidimensional del calor

$$K(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi t}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t,$$

así como de las funciones de Green y de Neumann para $x > 0$, definidas respectivamente por

$$G(x,\xi;t,\tau) = K(x-\xi,t-\tau) - K(x+\xi,t-\tau), \quad N(x,\xi;t,\tau) = K(x-\xi,t-\tau) + K(x+\xi,t-\tau).$$

Emplearemos además la función de error

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} dx, \quad x \in \mathbb{R},$$

la función de error complementaria $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, y la función theta definida por

$$\theta(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K(x+2m,t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\pi^2 m^2 t} \cos(m\pi x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

2_ Antecedentes

Como hemos dicho en la Introducción, el caso estacionario de los problemas 1 y 2; i.e., asociados al problema de tipo elíptico (III), ha merecido atención en los últimos años. Al respecto pueden citarse los trabajos [6], [9], [19] y [20], donde podrá hallarse una bibliografía más extensa.

A diferencia del caso estacionario, problemas de evolución como 1 y 2 no han sido prácticamente tratados, hasta donde sabemos, en la literatura. En el artículo [18] se considera una barra semi-infinita, representada por el intervalo $(0, +\infty)$, con una temperatura inicial $-c < 0$ y sometida a un flujo del tipo $-h_0/\sqrt{t}$, ($h_0 > 0$), en su extremo $x = 0$. Asumiendo que la temperatura de cambio de fase es de 0°C , se demuestra que el modelo de conducción subsiste si y solo si se cumple la condición $h_0 < ck_1/\sqrt{\pi\alpha_1}$, donde k_1 es la conductividad y α_1 es la difusividad térmica del material constitutivo. En el trabajo [21], se abordan problemas unidimensionales del tipo (I) con condiciones de contorno lineales. A continuación indicamos de manera sucinta el contenido de dicho trabajo. Propiamente, allí se abordan los problemas siguientes (escritos en nuestra notación)

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < x_0 \quad , \quad 0 < t; \\ u(x,0) = \theta_0(x) \quad , \quad 0 < x < x_0; \\ u(0,t) = b(t) \quad , \quad 0 < t; \\ u_x(x_0,t) = -q(t) \quad , \quad 0 < t, \end{array} \right.$$

con $\theta_0 > 0$, $b > 0$, $q > 0$; y

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < x_0 \quad , \quad 0 < t; \\ u(x,0) = \theta_0(x) \quad , \quad 0 < x < x_0; \\ u_x(0,t) + \alpha u(0,t) = \beta \quad , \quad 0 < t, \\ u(x_0,t) = b(t) \quad , \quad 0 < t, \end{array} \right.$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta_0 > 0$, $b > 0$.

En ambos problemas es $0 < x_0 \leq +\infty$. Tratándose de problemas lineales se supone, sin pérdida de generalidad, que el material cambia de fase a la temperatura de 0°C . Parafraseando la terminología utilizada en el estudio de la ecuación de medios porosos, se denomina tiempo de espera t^* al tiempo que debe transcurrir antes de que el material cambie de fase. Dependiendo de las condiciones inicial y de contorno, para los problemas (IV) y (V) pueden presentarse los casos

a) $0 < t^* < +\infty$,

$$b) \quad t^* = 0 ,$$

$$c) \quad t^* = +\infty .$$

Entre otros resultados de interés, los autores prueban el

Teor. 2.1 Si los datos del problema (IV) satisfacen las condiciones

$$i) \quad 0 < q(t) \leq q_0 \text{ para } 0 < t \leq \sigma ;$$

$$ii) \quad \theta'_0(x) \geq 0 , \quad 0 \leq \beta_0 \leq \theta_0(x) \leq \beta_1 \text{ para } 0 \leq x \leq x_0 ;$$

$$iii) \quad \dot{b}(t) \geq 0 , \quad b(t) \geq \beta_1 \text{ para } 0 < t \leq \sigma ;$$

entonces el tiempo de espera t^* hasta la ocurrencia de un cambio de fase verifica la desigualdad

$$t^* \geq \min \left\{ \sigma ; \frac{\pi}{4} \left(\frac{\beta_0}{q_0} \right)^2 \right\} .$$

Respecto de las técnicas empleadas en la demostración de este resultado y de otros similares para el problema (V), diremos que esencialmente consisten en comparaciones, efectuadas mediante los principios de máximo para la ecuación del calor, entre las soluciones de estos problemas y las de problemas con solución exacta.

3_ Estudio de las "formulación integral" de los problemas

Con el título un tanto desprovisto de significado que hemos dado a la sección, intentamos dar nombre a un potente método para atacar problemas como 1 y 2 de la Introducción. Como es sabido, después de adecuadas manipulaciones, las soluciones de problemas como (IV) y (V) de la sección 2 y aún otros más complejos (v.g. problemas con condiciones de contorno no lineales), pueden expresarse como soluciones de ecuaciones integrales de Volterra (crf. [7], [10]); es decir, ecuaciones integrales de la forma

$$u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \frac{k(t,s)}{(t-s)^\gamma} u(x,s) ds , \quad 0 < t < +\infty ,$$

donde $0 \leq \gamma < 1$, f y k son continuas; o de manera más general

$$u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t F(t,s,u(x,s)) ds , \quad 0 < t < +\infty , \quad (3.1)$$

con f continua en $[0, +\infty)$ y F sujeta a ciertas restricciones que no interesan por ahora. Nótese que en realidad, para cada valor de $x \in \Omega$ se tiene una ecuación distinta, de modo que la coordenada espacial actúa en ellas como un parámetro.

Recordando que buscamos estimaciones del tiempo t_0 tal que $T_f < u(x,t) < T_v$, $0 < t \leq t_0$, podemos ahora plantear este mismo problema no ya para el problema de condiciones iniciales y de contorno original sino para su "formulación integral" dada por la familia de ecuaciones integrales (3.1) parametrizada por la coordenada espacial $x \in \Omega$. Afortunadamente existen en la literatura resultados sobre estos problemas (cfr. [17], [22]). El teorema que enunciamos a continuación puede considerarse buen representante de la clase de estos resultados y contribuirá a formarnos una idea sobre ella.

Consideremos la ecuación

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \frac{k(t,s)}{(t-s)^\gamma} u(s) ds, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (3.2)$$

donde $0 \leq \gamma \leq 1$, f y k son continuas con k de signo constante para $0 \leq s \leq t \leq t_0$. Bajo estas hipótesis, (3.2) admite una única solución $u(t)$ continua en $(0, +\infty)$ (cfr. [10], [25]). Se cumple entonces el

Teor. 3.1 Sean $v(t)$ y $w(t)$ dos funciones continuas en $[0, t_0]$ que cumplan, si $k \geq 0$, las desigualdades

$$v(t) < f(t) + \int_0^t \frac{k(t,s)}{(t-s)^\gamma} v(s) ds, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (3.3)$$

$$w(t) > f(t) + \int_0^t \frac{k(t,s)}{(t-s)^\gamma} w(s) ds, \quad 0 \leq t \leq t_0;$$

o bien, si $k \leq 0$, las desigualdades

$$v(t) < f(t) + \int_0^t \frac{k(t,s)}{(t-s)^\gamma} w(s) ds, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (3.4)$$

$$w(t) > f(t) + \int_0^t \frac{k(t,s)}{(t-s)^\gamma} v(s) ds, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Entonces la solución u de la ecuación (3.2) satisface

$$v(t) < u(t) < w(t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (3.5)$$

Si las desigualdades (3.3) (o bien (3.4)) se verifican de manera no estricta, lo mismo ocurre con

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [3]. Debe notarse que podemos muy bien elegir $v(t) \equiv T_f$, $w(t) \equiv T_v$ e investigar si es que las desigualdades (3.3) (ó (3.4)) son satisfechas en algún intervalo $[0, t_0]$.

De manera esquemática, el método que hemos llamado "estudio de la formulación integral" consiste en

- i) Conducir el problema de condiciones inicial y de contorno a una ecuación integral de Volterra (o a una familia de dichas ecuaciones).
- ii) Aplicar a la ecuación así obtenida resultados como el Teor. 3.1.

Con la esperanza de aclarar en algo estas ideas, desarrollaremos a continuación una serie de ejemplos. El primero de ellos será explicado con algún detalle, mientras que en los restantes nos limitaremos prácticamente a exhibir resultados señalando dónde puede encontrarse más información.

Ejemplo 1

Consideremos el problema

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t; \\ u(x, 0) = \theta_0(x) \quad , \quad 0 < x < 1; \\ u(0, t) = b(t) \quad , \quad 0 < t; \\ u_x(1, t) = -q(t) \quad , \quad 0 < t, \end{array} \right.$$

donde θ_0 es continua y b , q son funciones seccionalmente continuas. El problema (VI) modeliza (después de una normalización de los coeficientes térmicos del material, así como de la longitud de la barra) el fenómeno de conducción de calor en una barra homogénea con una distribución inicial de temperatura dada por θ_0 , con una temperatura $b(t)$ prescrita en uno de sus extremos y soportando en el otro un flujo de calor de magnitud $q(t)$.

Vale la siguiente representación para la solución $u(x, t)$ de (VI) (cfr. [7])

$$u(x, t) = v(x, t) - 2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau) \phi_1(\tau) d\tau + 2 \int_0^t K(x-1, t-\tau) \phi_2(\tau) d\tau, \quad (3.6)$$

donde

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t) \theta(\xi) d\xi, \quad (3.7)$$

siendo θ una extensión continua y acotada de θ_0 a \mathbb{R} , y ϕ_1, ϕ_2 soluciones seccionalmente continuas del sistema de ecuaciones integrales de Volterra

$$b(t) = v(0,t) + \phi_1(t) + 2 \int_0^t K(-1,t-\tau) \phi_2(\tau) d\tau, \quad (3.8)$$

$$q(t) = -v_x(1,t) + 2 \int_0^t \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(1,t-\tau) \phi_1(\tau) d\tau - \phi_2(t) \quad ; \quad t > 0.$$

Si con el objeto de mantener al material constitutivo en una fase, imponemos las obvias restricciones

$$T_f < \theta_0(x) < T_v, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (3.9)$$

$$T_f < b(t) < T_v, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (3.10)$$

y controlamos la temperatura en el extremo derecho de la barra de modo que

$$T_f < u(1,t) < T_v, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (3.11)$$

donde T_f y T_v designan las temperaturas de fusión y ebullición del material constitutivo de la barra, el principio de máximo débil (cfr. [7], [15]) permitirá concluir

$$T_f < u(x,t) < T_v, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq t_0.$$

Poniendo por simplicidad $u(t) = u(1,t)$, mediante algunas manipulaciones podemos obtener de (3.6) y (3.8) una única ecuación integral para $u(t)$ de la forma

$$u(t) = F(t) + \int_0^t k(t-s) u(s) ds, \quad t > 0; \quad (3.12)$$

donde se ha puesto, para $t > 0$,

$$k(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{t}}; \quad (3.13)$$

$$F(t) = v(1,t) - (k_1 \star v(1, \cdot))(t) + (k_1 \star (b - v(0, \cdot)))(t) - (k_2 \star (q + v_x(1, \cdot)))(t). \quad (3.14)$$

En (3.14) las funciones k_1 y k_2 están dadas por

$$k_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4t}} ; k_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-\frac{1}{t}}) , \quad (3.15)$$

y el signo "★" indica la operación de convolución.

Como $k(t) \leq 0$ para cada $t \geq 0$ (ponemos $k(0) = 0$ por definición), una aplicación del Teor. 3.1 conduce al

Teor. 3.2 Sea $t_0 > 0$ y supongamos que, además de las condiciones (3.9) y (3.10), los datos del problema (VI) verifican

$$T_f - T_v \int_0^t k(s) ds \leq F(t) \leq T_v - T_f \int_0^t k(s) ds , \quad 0 < t \leq t_0 ; \quad (3.16)$$

entonces el modelo conserva su validez para $0 < t \leq t_0$. Dicho con los términos empleados en [21], existe un tiempo de espera $t^* > t_0$.

Dem.: Como consecuencia del principio de máximo débil, de las condiciones (3.9) y (3.10) surge que bastará probar que $u(1,t) = u(t)$ verifica (3.11). En la discusión precedente se encontró que $u(t)$ satisface la ecuación integral de Volterra dada por (3.12-15). El núcleo $k(t)$ de dicha ecuación es negativo con lo que, utilizando la condición (3.16), puede aplicarse el Teor. 3.1 para obtener el resultado enunciado. \square

En adelante asumiremos que $T_f = 0$. El siguiente corolario muestra el modo en que puede aplicarse el Teor. 3.1 a problemas con datos que cumplen restricciones como las impuestas en el Teor. 2.1.

Corolario 3.3 Supongamos que para cierto $\sigma > 0$ los datos del problema (VI) satisfacen las condiciones

- i) $0 < q(t) \leq q_0$, $0 < t < \sigma$;
- ii) $\theta_0(x) \geq \beta_0 > 0$, $0 \leq x \leq 1$;
- iii) $b(t) \geq \beta_0$, $0 < t < \sigma$.

Entonces si $\beta_0 \geq 2q_0$ la solución $u(x,t)$ verifica

$$u(x,t) \geq 0 , \quad 0 \leq x \leq 1 , \quad 0 < t \leq \sigma , \quad (3.17)$$

mientras que si $\beta_0 < 2q_0$ vale

$$u(x,t) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq \min\{\sigma, t_0\}, \quad (3.18)$$

donde

$$t_0 = \phi^{-1}\left(\frac{\beta_0}{2q_0} - 1\right),$$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} (1 - e^{-\frac{1}{x}}) - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x > 0.$$

Dem. El principio de máximo débil junto al teorema sobre el signo de la derivada conormal en un punto de máximo (cfr. [15]), muestra que la solución $u(x,t)$ del problema (V) con datos que cumplen las restricciones i) - ii) y iii) está acotada inferiormente, para $0 < t < \sigma$, por la solución del mismo problema con datos dados por $q(t) = q_0$, $\theta_0(x) = \beta_0$, $b(t) = \beta_0$. Después de algunos cálculos que involucran el uso de la transformación de Laplace, la función $F(t)$ del Teor. 3.2 correspondiente a este último problema puede escribirse en la forma

$$F(t) = 2(\beta_0 - q_0) + (2q_0 - \beta_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_0 \sqrt{t} (1 - e^{-\frac{1}{t}}),$$

Además tenemos que

$$\int_0^t k(s) ds = -\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

de manera que será suficiente probar que si $\beta_0 \geq 2q_0$ se cumple

$$2(\beta_0 - q_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq F(t) \leq 2(\beta_0 - q_0), \quad 0 < t, \quad (3.19)$$

en tanto que si $\beta_0 < 2q_0$ vale

$$\beta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq F(t) \leq \beta_0, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (3.20)$$

Con tal fin notemos que la función

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1 - e^{-\frac{1}{t}}) - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

verifica

$$\phi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} (1 - e^{-\frac{1}{t}}) > 0, \quad t > 0,$$

con lo que, para cada $t > 0$, debe tenerse

$$-1 = \phi(0^+) < \phi(t) < \phi(+\infty) = 0.$$

Estudiemos en primer lugar (3.19). Como

$$F(t) = 2(\beta_0 - \alpha_0) - \beta_0 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 2\alpha_0 \phi(t),$$

y como $\beta_0 \geq 2\alpha_0$ resulta, para $t > 0$,

$$2(\beta_0 - \alpha_0) - F(t) = \beta_0 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + 2\alpha_0 \phi(t) \geq 2\alpha_0 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + \phi(t) \right) = 2\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} (1 - e^{-\frac{1}{t}}) \geq 0.$$

Esto prueba la segunda desigualdad en (3.19) en tanto que para la primera tenemos, para $t > 0$,

$$F(t) - 2(\beta_0 - \alpha_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \beta_0 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha_0 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + \phi(t) \right) \geq -2\alpha_0 \phi(t) \geq 0.$$

Respecto de las desigualdades (3.20), notemos ante todo que puede escribirse

$$F(t) = \beta_0 + \beta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 2\alpha_0 (1 + \phi(t)),$$

y como $\beta_0 < 2\alpha_0$, para $t > 0$ se tiene

$$\beta_0 - F(t) = 2\alpha_0 (1 + \phi(t)) - \beta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \geq 2\alpha_0 \left(1 + \phi(t) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right) = 2\alpha_0 \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1 - e^{-\frac{1}{t}}) \geq 0,$$

y también, para $0 < t \leq t_0$,

$$F(t) - \beta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \beta_0 - 2\alpha_0 (1 + \phi(t)) \geq 0.$$

Esto completa la demostración. □

El Corolario 3.3 se compara favorablemente con el Teor. 2.1 (Theor. 1 de [21]). De hecho, las hipótesis del Teor. 2.1 son menos restrictivas y es más precisa la estimación del tiempo de espera. En efecto, si para $t > 0$ definimos

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} - 1,$$

resulta

$$(\psi - \phi)'(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{2\sqrt{\pi t}} > 0, \quad t > 0,$$

de donde, para $t > 0$, se obtiene

$$\psi(t) - \phi(t) > \psi(0^+) - \phi(0^+) = -1 - (-1) = 0,$$

y en consecuencia

$$\psi^{-1}(t) - \phi^{-1}(t) < 0, \quad t > -1.$$

En particular,

$$\frac{\pi(\beta_0)^2}{4(\alpha_0)^2} = \psi^{-1}\left(\frac{\beta_0}{2\alpha_0} - 1\right) < \phi^{-1}\left(\frac{\beta_0}{2\alpha_0} - 1\right).$$

Ejemplo 2

Estudiaremos ahora la instancia del problema 2 de la Introducción en donde el reactor químico R está representado por el semieje positivo. Suponemos que tenemos inicialmente en R una concentración química dada por $c_0(x)$, y que en el extremo $x = 0$ tiene lugar cierta reacción química de primer orden junto al transporte difusivo de material. En términos matemáticos, puede escribirse

$$(VII) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & , \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t; \\ u(x, 0) = c_0(x) & , \quad 0 < x < +\infty; \\ u_t(0, t) + \alpha(t) u_x(0, t) + \beta(t) u(0, t) = g(t) & , \quad 0 < t, \\ |u(x, t)| \leq m_1 e^{m_2 x^2} & , \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t; \quad (m_1, m_2 > 0), \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in C^0(0, +\infty)$, g seccionalmente continua para $t > 0$, y $c_0 \in C^2[0, +\infty)$, $|c_0(x)| \leq m_1 e^{m_2 x^2}$, $x \geq 0$. Como hemos dicho, la condición $u_t(0, t) + \alpha(t) u_x(0, t) + \beta(t) u(0, t) = g(t)$ modeliza alguna especie de reacción química en el contorno donde el término $\alpha(t) u_x(0, t)$ representa el transporte difusivo de material. Como es sabido, la condición $|u(x, t)| \leq m_1 e^{m_2 x^2}$, $0 < x < +\infty$, $0 < t$; $(m_1, m_2 > 0)$, se agrega al modelo con el objetivo de obtener un problema bien planteado (cfr. [7], [12]).

Para el problema (VII) determinaremos condiciones suficientes sobre los datos c_0, α, β y g de manera que, para $0 < t \leq t_0$, la concentración $u(x, t)$ se mantenga entre las cotas c_1, c_2 , ($c_1 < c_2$), en cierta porción $x_1 \leq x \leq x_2$ del reactor.

La única solución acotada del problema (VII) puede expresarse (cfr. [7]) en la forma

$$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) c_0(\xi) d\xi - 2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau) (c_0(0) + \phi(\tau)) d\tau, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (3.21)$$

con ϕ solución de la ecuación integral de Volterra con núcleo singular (a menos que $\alpha(t) \equiv 0$!)

$$\phi(t) = f(t) + \int_0^t (2\alpha(t) K(0, t-\tau) - \beta(t)) \phi(\tau) d\tau, \quad t > 0; \quad (3.22)$$

en la que hemos puesto

$$f(t) = g(t) - \alpha(t) \int_0^{\infty} N(0, \xi, t) c_0'(\xi) d\xi - c_0(0) \beta(t) \quad (3.23)$$

Haciendo $k(t, \tau) = 2 \alpha(t) K(0, \tau) - \beta(t)$, manipulaciones como las empleadas en el ejemplo previo conducen a la siguiente familia de ecuaciones integrales para u

$$u(x, t) = F(x, t) + \left(k(t, \cdot) \star u(x, \cdot) \right)(t), \quad t > 0, \quad (x > 0); \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} F(x, t) = & \int_0^{\infty} G(x, \xi, t) c_0(\xi) d\xi - 2 c_0(0) \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, \tau) d\tau - \\ & - \left(k(t, \cdot) \star \left(\int_0^{\infty} G(x, \xi, \cdot) c_0(\xi) d\xi - 2 c_0(0) \int_0^{\cdot} \frac{\partial K}{\partial x}(x, \tau) d\tau \right) \right)(t) - \\ & - 2 \left(\frac{\partial K}{\partial x}(x, \cdot) \star \left(g - \alpha \int_0^{\infty} N(0, \xi, \cdot) c_0'(\xi) d\xi - c_0(0) \beta \right) \right)(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hemos reducido el problema (VII) a la familia de ecuaciones integrales de Volterra (3.24)-(3.25), parametrizada por la coordenada espacial x . Estamos pues en situación de aplicar el Teor. 3.1 para obtener el

Teor. 3.4 Sean $x_i, u_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2$), tales que $0 \leq x_1 < x_2$, $0 \leq c_1 < c_2$. Asumiendo que los datos del problema (VII) cumplen las condiciones de regularidad y crecimiento estipuladas arriba y que, para algún $t_0 > 0$, satisfacen además de

$$i) \quad c_1 \leq c_0(x) \leq c_2, \quad x_1 \leq x \leq x_2;$$

las condiciones

$$ii) \quad \beta(t) \geq 0 \text{ y } \alpha(t) \geq \sqrt{\pi t} \beta(t), \quad 0 < t \leq t_0;$$

$$\left(\text{o bien } \beta(t) \leq 0 \text{ y } \alpha(t) \geq 0, \quad 0 < t \leq t_0 \right);$$

$$iii) \quad c_1 \left(1 - \int_0^t k(t, s) ds \right) \leq F(x_i, t) \leq c_2 \left(1 - \int_0^t k(t, s) ds \right), \quad 0 < t \leq t_0, \quad (i = 1, 2);$$

o bien

$$\text{ii')} \quad \beta(t) \leq 0 \quad \text{y} \quad \alpha(t) \leq \sqrt{\pi t} \beta(t) \quad , \quad 0 < t \leq t_0 ;$$

$$\left(\text{o bien} \quad \beta(t) \geq 0 \quad \text{y} \quad \alpha(t) \leq 0 \quad , \quad 0 < t \leq t_0 \right);$$

$$\text{iii')} \quad c_1 - c_2 \int_0^t k(t,s) ds \leq F(x_i, t) \leq c_2 - c_1 \int_0^t k(t,s) ds \quad , \quad 0 < t \leq t_0 \quad , \quad (i = 1, 2) ;$$

donde $F(t, x)$ viene dada por (3.25); entonces la solución u verifica

$$c_1 \leq u(x, t) \leq c_2 \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad , \quad 0 < t \leq t_0 \quad . \quad (3.26)$$

Si i) y iii) (ó iii')) se satisfacen con desigualdad estricta, entonces así también lo hace (3.26).

Dem.: En virtud de la condición i) y el principio de máximo débil, para demostrar que la solución u del problema (VII) satisface (3.26), bastará probar que

$$c_1 \leq u(x_i, t) \leq c_2 \quad , \quad 0 < t \leq t_0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad . \quad (3.27)$$

Teniendo en cuenta que $u(x_i, t)$ es solución de la ecuación (3.24) con $x = x_i$, $i = 1, 2$, y que la condición ii) [ii')] asegura la positividad [negatividad] del núcleo $k(t, \tau)$ de dicha ecuación, puede aplicarse el Teor. 3.1 a la condición iii) [iii')] para obtener (3.27). □

Detalles sobre los desarrollos que hemos realizado hasta aquí pueden consultarse en [3].

Ejemplo 3

Trataremos ahora de manera sucinta la aplicación de estas técnicas a problemas no lineales. En [4] se estudia el problema

$$\text{(VIII)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = 0 & , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t; \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < 1; \\ u_x(0, t) = R(t, u(0, t)) & , \quad 0 < t; \\ u(1, t) = b(t) & , \quad 0 < t, \end{array} \right.$$

donde $f(x)$ es una función continua en $0 \leq x \leq 1$, $b(t)$ es seccionalmente continua para $t > 0$, y $R(t, u)$ es continua para $t > 0$, $-\infty < u < +\infty$, y localmente lipschitz-continua en u , i.e. para cada $B \subseteq \mathbb{R}$

acotado, existe una función positiva y localmente acotada $C_B(t)$, $t > 0$, tal que

$$|R(t, u_1) - R(t, u_2)| \leq C_B(t) |u_1 - u_2|, \quad t \geq 0; u_1, u_2 \in B.$$

El problema (VIII) modeliza el fenómeno de conducción del calor en una barra homogénea (después de una normalización de los coeficientes térmicos del material constitutivo y de la longitud de la barra) con una distribución inicial de temperatura $f(x)$ y con su cara derecha mantenida a temperatura $b(t)$. En la cara izquierda se impone una ley general de radiación dada por $R(t, u)$. Asumimos que el material experimenta un cambio de fase cuando su temperatura está por debajo de T_f o por encima de T_v .

Con las mismas técnicas, en dicho trabajo se abordan también problemas como el problema 1 para el modelo con ecuación cuasi-lineal

$$(IX) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = h(x, t, u) & , \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < 1; \\ u_x(0, t) = q_1(t) & , \quad 0 < t \leq T; \\ u_x(1, t) = q_2(t) & , \quad 0 < t \leq T, \end{cases}$$

donde $f(x)$ es una función continua para $0 \leq x \leq 1$, $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son seccionalmente continuas para $t > 0$, y h satisface adecuadas restricciones de modo que (IX) admita solución cualquiera sea $T > 0$ (cfr. [7]). Aquí la función h representa una fuente de energía interna que puede depender de la temperatura, en tanto que se imponen condiciones de contorno de Neumann.

Dejando de lado el problema (IX) vamos a ocuparnos en lo que sigue del problema con condiciones de contorno no lineales (VIII).

La solución del problema (VIII) puede representarse (cfr. [7]) en la forma

$$u(x, t) = w(x, t) - 2 \int_0^t \theta(x, t-\tau) R(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau + 2 \int_0^t \theta(x-1, t-\tau) \phi_2(\tau) d\tau, \quad (3.28)$$

donde la función θ ha sido definida en la Introducción y donde

$$w(x, t) = \int_0^1 (\theta(x-\xi, t) + \theta(x+\xi, t)) f(\xi) d\xi. \quad (3.29)$$

Las funciones ϕ_1 y ϕ_2 que aparecen en (3.28) son soluciones seccionalmente continuas del sistema de ecuaciones integrales

$$\phi_1(t) = w(0,t) - 2 \int_0^t \theta(0,t-\tau) R(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau + 2 \int_0^t \theta(-1,t-\tau) \phi_2(\tau) d\tau, \quad (3.30)$$

$$b(t) = w(1,t) - 2 \int_0^t \theta(1,t-\tau) R(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau + 2 \int_0^t \theta(0,t-\tau) \phi_2(\tau) d\tau,$$

para $t > 0$. La unicidad de la solución u está garantizada por la local Lipschitz-continuidad que hemos exigido a R (cfr. [7]).

Si definimos

$$p_1(t) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2 t}, \quad (3.31)$$

$$p_2(t) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2 t}, \quad (3.32)$$

después de algunas manipulaciones arrivamos a la siguiente ecuación integral de Volterra para $u(0,t) = \phi_1(t)$

$$\phi_1(t) = r(t) + \int_0^t p_2(t-\tau) R(\tau, \phi_1(\tau)) d\tau, \quad (3.33)$$

donde hemos puesto

$$r(t) = w(0,t) + (p_1 * (b - w(1, \cdot))) (t). \quad (3.34)$$

Por lo general, la ley de radiación $R(t,u)$ será una función no lineal de u y en consecuencia, la ecuación (3.33) resultará una ecuación no lineal de Volterra similar a la ecuación (3.1). Como hemos dicho al comienzo de esta sección, existen teoremas semejantes al Teor. 3.1 para estas ecuaciones (cfr. [17], [22]). En ellos, la condición de invariancia del signo del núcleo exigida en el Teor. 3.1 es sustituida por la monotonía de la función $u \mapsto F(t,s,u)$ para cada $0 \leq s < t$. En el caso de (3.33), dado que $p_2 \leq 0$, corresponde suponer que, para todo $t > 0$, $u \mapsto R(t,u)$ es una función monótona. Respecto de este requisito digamos que las leyes de radiación empleadas en la práctica normalmente lo satisfacen (cfr. [14]), de manera que no resulta tan restrictivo como a primera vista parece.

Tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [4].

Teor. 3.5 Supongamos que además de las condiciones

$$T_f < f(x) < T_v, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (3.35)$$

$$T_f < b(t) < T_v, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (3.36)$$

la función R verifica

$$\forall t > 0, \quad u_1 \leq u_2 \Rightarrow R(t, u_1) \geq R(t, u_2) \quad (3.37)$$

Más aún, supongamos que

$$T_f - \int_0^t p_2(t-\tau) R(\tau, T_v) d\tau < r(t) < T_v - \int_0^t p_2(t-\tau) R(\tau, T_f) d\tau, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (3.38)$$

Entonces la solución u del problema (VIII) satisface

$$T_f < u(x, t) < T_v, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (3.39)$$

Si en lugar de (3.37) y (3.38) se cumplen

$$\forall t > 0, \quad u_1 \leq u_2 \Rightarrow R(t, u_1) \leq R(t, u_2), \quad (3.40)$$

y

$$T_f - \int_0^t p_2(t-\tau) R(\tau, T_f) d\tau < r(t) < T_v - \int_0^t p_2(t-\tau) R(\tau, T_v) d\tau, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (3.41)$$

entonces las desigualdades (3.39) son todavía válidas.

En adición, si permitimos signos de igualdad en las desigualdades (3.35), (3.36) y (3.38) (ó (3.41)), entonces las desigualdades (3.39) se cumplen de manera no estricta. \square

Veamos ahora el importante caso particular del Teor. 3.5 en que la ley de radiación es la de Stefan-Boltzman. La ley de radiación de Stefan-Boltzman prescribe una función R de la forma

$$R(t, u) = \alpha(u^4 - T_0^4), \quad (3.42)$$

donde T_0 es la temperatura del medio externo y $\alpha > 0$ es una constante que depende de las propiedades radiativas del material. Debe notarse que R definida por (3.42) es independiente del tiempo y que es una función creciente de la temperatura.

Corolario 3.6 Supongamos que la ley de radiación viene dada por (3.42) y que se cumplen las condiciones

$$T_f < f(x) < T_v, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (3.43)$$

$$T_f < b(t) < T_v, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (3.44)$$

$$T_f - \alpha(T_v^4 - T_0^4) \int_0^t P_2(\tau) d\tau < r(t) < T_v - \alpha(T_f^4 - T_0^4) \int_0^t P_2(\tau) d\tau, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (3.45)$$

entonces la solución u satisface

$$T_f < u(x,t) < T_v, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (3.46)$$

es decir, el modelo de conducción (VIII) con $R(t,u)$ dada por (3.42) es válido por lo menos hasta el tiempo t_0 . Más aún, si las desigualdades en (3.43), (3.44) y (3.45) son no estrictas, entonces las desigualdades en (3.46) son no estrictas también.

Dem.: Es una aplicación inmediata del Teor. 3.5 al caso de la ley de radiación dada por (3.42). \square

Señalamos por fin que el método que hemos explicado en esta sección puede, en principio, aplicarse a problemas multidimensionales que admitan una reformulación en términos de ecuaciones integrales de Volterra.

4. Condiciones necesarias y suficientes para la subsistencia de modelos lineales: Transformaciones integrales

En esta sección daremos cuenta de otro método útil para atacar nuestros problemas: el uso de las transformaciones integrales. El estudio de las formulaciones integrales solo proporcionaba condiciones suficientes para la subsistencia de los modelos. A diferencia, este método permite la obtención de condiciones que son también necesarias.

Las transformaciones integrales (v.g. Fourier, Laplace, Hankel, etc) son empleadas clásicamente en la resolución de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales. Indicando con \mathcal{F} a una transformación genérica, el procedimiento consiste en transformar el problema de contorno original (P) en otro (P') = $\mathcal{F}(P)$ cuya solución v es conocida. La solución del problema (P) será entonces $u = \mathcal{F}^{-1}(v)$, donde \mathcal{F}^{-1} es la transformación inversa de \mathcal{F} (cfr. [8], [23]).

Nosotros haremos un uso levemente distinto de las transformaciones integrales. Para estudiar el signo de la solución de un problema de contorno (P) para cierta ecuación diferencial en derivadas parciales, vía una transformación integral \mathcal{F} se conduce (P) a un problema (P') (generalmente un problema de contorno para una nueva ecuación en derivadas parciales). Suponiendo que se ha caracterizado de alguna manera a $\mathcal{F}(C)$, la imagen por \mathcal{F} del cono C de las funciones no-negativas (ver

fig. 3), resulta que la solución de (P) será no-negativa si y sólo si la solución de (P') pertenece a $\mathfrak{F}(C)$. Para nuestro método es entonces esencial disponer de buenas representaciones de

- i) el cono $\mathfrak{F}(C)$
- ii) las soluciones de (P').

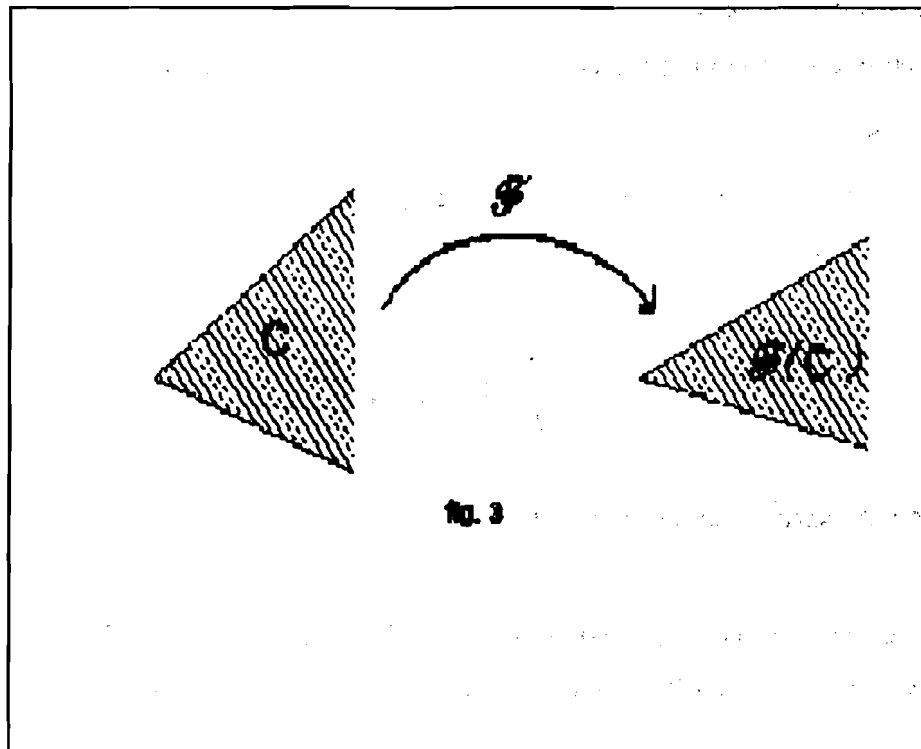


fig. 3

En cuanto al requisito i) sabemos que, obra de matemáticos como L. Fejér, C. Carathéodory, G. Herglotz, E. Fisher, F. Riesz, F. Hausdorff, S. Bernstein y D.V. Widder (cfr. Cap. 3 y 4 de [24]), en las primeras décadas de este siglo fueron probados importantes teoremas en relación a las transformaciones utilizadas más frecuentemente. A continuación enunciamos dos de dichos teoremas que nos serán particularmente útiles. El primero de ellos se relaciona con la transformación de Laplace en tanto que el segundo tiene que ver con la transformación de Fourier finita. Las integrales que aparecen en ambos deben interpretarse en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Teor. 4.1 (F. Hausdorff-S. Bernstein)

Una función $f \in C^\infty(0, +\infty)$ verifica $(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0$, ($t > 0$), para cada $n = 0, 1, 2, \dots$; si y sólo si

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-ts} d\alpha(t),$$

donde $\alpha(t)$ es una función real no-decreciente y la integral converge para $0 < t < \infty$. □

Las funciones $f \in C^\infty(0, +\infty)$ que cumplen $(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0$ para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, y $t > 0$, se llaman completamente monótonas en $(0, +\infty)$ y son en realidad analíticas para $t > 0$. Un estudio detallado de estas funciones así como también distintas pruebas del Teor. 1.1 pueden encontrarse en el capítulo IV de [24].

Teor. 4.2 (G. Herglotz - F. Riesz)

Condición necesaria y suficiente para que la sucesión de números complejos $\{c_n: n \in \mathbb{Z}\}$ verifique

i) $c_{-n} = \overline{c_n}$, $n = 0, 1, \dots$

ii) para cada $n = 1, 2, \dots$, y para cada conjunto de números complejos $\{z_i: 1 \leq i \leq n\}$ se cumple

$$\sum_{j,k=1}^n c_{j-k} z_j \overline{z_k} \geq 0;$$

es que

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\alpha(\theta), \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

donde $\alpha(\theta)$ es una función real no-decreciente. □

Una sucesión compleja que satisface las condiciones i) y ii) del Teor. 4.2 se dice definida positiva. Nótese que estas condiciones establecen precisamente que la forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i-j} z_i \overline{z_j},$$

es una forma hermitiana no-negativa. Una prueba de este resultado puede encontrarse en el clásico libro [16].

Ahora bien, del Teor. 4.1 se deduce fácilmente una caracterización de la imagen por la transformación de Laplace del cono de las funciones no-negativas. En efecto, es bien conocido que las funciones del espacio

$\mathfrak{R} = \left\{ f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ secc. continua; } f(t) = O(e^{-\alpha t}) \text{ cuando } t \rightarrow +\infty; \lim_{t \downarrow 0} t^\alpha f(t) = 0 \text{ p. a. } 0 < \alpha < 1 \right\}$,
 admiten transformada de Laplace. Una función $f \in \mathfrak{R}$ se dice no-negativa, y se indica $f \geq 0$, cuando f es no-negativa en cada uno de sus intervalos de continuidad. Con \mathfrak{R}^+ indicamos el cono de las funciones no-negativas de \mathfrak{R} ; es decir

$$\mathfrak{R}^+ = \{ f \in \mathfrak{R} : f \geq 0 \}.$$

Tenemos entonces el siguiente

Corolario 4.3 Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, es condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+)$ que f sea una función completamente monótona en $(s_0, +\infty)$. □

Por otra parte, del Teor. 4.2 derivamos una caracterización de la imagen por la transformación de Fourier finita del cono positivo \mathfrak{F}^+ del espacio

$$\mathfrak{F} = \left\{ f: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ secc. continua} \right\}.$$

Propiamente, vale el siguiente

Corolario 4.4 Sea $f \in \mathfrak{F}$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ definamos $c_n = \int_0^{2\pi} e^{ins} f(x) dx$. Es condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathfrak{F}^+$, que se cumpla

$$\sum_{j,k=1}^m c_{j-k} z_j \bar{z}_k \geq 0,$$

para todo conjunto de números complejos $\{z_i : 1 \leq i \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Demostraciones de los Corolarios 4.3 y 4.4 pueden encontrarse en [5].

Veamos ahora cómo funciona en la práctica el método que hemos diseñado. En [5] se consideran problemas como

$$(X) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = h(x,t) & , \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t; & (i) \\ u(x,0) = \theta_0(x) & , \quad 0 < x < 1; & (ii) \\ \alpha_0 u(0,t) + \alpha_1 u_x(0,t) = a(t) & , \quad 0 < t; & (iii) \\ \beta_0 u(1,t) + \beta_1 u_x(1,t) = b(t) & , \quad 0 < t; & (iv) \end{array} \right.$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ son tales que $|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$.

Como es sabido, (X) constituye un modelo normalizado del fenómeno de conducción de calor en una barra que inicialmente se encuentra a temperatura $\theta_0(x)$ y está sujeta a la acción de la fuente de energía interna $h(x,t)$, en tanto que se imponen en sus extremos condiciones dadas por (i-iii) y (i-iv). Asumiendo, sin pérdida de generalidad, que el material constitutivo de la barra cambia de fase a una temperatura de 0°C . investigaremos el problema de determinar, en función de los datos, el

intervalo de tiempo en que subsiste el modelo de conducción (X).

En lo que sigue consideraremos la aplicación de las transformaciones de Laplace y de Fourier finita al problema (X). La primera arrojará condiciones necesarias y suficientes para la subsistencia indefinida del modelo de conducción, mientras que la segunda también proporcionará similares condiciones para la subsistencia en un intervalo temporal finito.

Transformación en la variable temporal

Supongamos que $a(t), b(t) \in \mathcal{L}$ y que $t \mapsto g(x,t) \in \mathcal{L}$ para cada $0 < x < 1$. Supongamos además que $\theta_0 \in C^0[0,1]$. En estas condiciones, si

$$U_s(x) = (\mathcal{L}u)(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t) dt,$$

el problema (X) se convierte en la familia de problemas de contorno regulares y autoadjuntos

$$(X)_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U_s}{dx^2} - s U_s = -(H(x,s) + \theta_0(x)), \quad 0 < x < 1; \quad (i) \\ \alpha_0 U_s(0) + \alpha_1 \frac{dU_s(0)}{dx} = A(s); \quad (ii) \\ \beta_0 U_s(1) + \beta_1 \frac{dU_s(1)}{dx} = B(s); \quad (iii) \end{array} \right.$$

donde $H = \mathcal{L}(h)$, $A = \mathcal{L}(a)$, $B = \mathcal{L}(b)$ y $s > s_0$.

Suponiendo que la familia de problemas homogéneos asociados a $(X)_s$; es decir

$$(X-h)_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U_s}{dx^2} - s U_s = 0, \quad 0 < x < 1; \quad (i) \\ \alpha_0 U_s(0) + \alpha_1 \frac{dU_s(0)}{dx} = 0; \quad (ii) \\ \beta_0 U_s(1) + \beta_1 \frac{dU_s(1)}{dx} = 0; \quad (iii) \end{array} \right.$$

tiene a $U_s \equiv 0$ como única solución (lo que ocurre si y solo si para cada $s > s_0$ es

$$(\alpha_1 \beta_1 s^2 - \alpha_0 \beta_0) \tanh s + (\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1) s \neq 0, \quad (4.1)$$

condición que es satisfecha por la generalidad de los casos de interés), resulta que la unicidad de la solución de la familia $(X)_s$ queda garantizada por el Teor. de la alternativa de Fredholm. Es conocido que en estas circunstancias, la solución de $(X)_s$ puede expresarse como

$$U_s(x) = A(s) G_s^1(x) + B(s) G_s^2(x) - \int_0^1 G_s(x,y) (H(y,s) + \theta_0(y)) dy, \quad 0 < x < 1, \quad s_0 < s, \quad (4.2)$$

donde G_s es la función de Green de $(X-h)_s$, G_s^1 es solución del problema

$$(X')_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 V_s}{dx^2} - s V_s = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 ; \quad (i) \\ \alpha_0 V_s(0) + \alpha_1 \frac{dV_s(0)}{dx} = 1 ; \quad (ii) \\ \beta_0 V_s(1) + \beta_1 \frac{dV_s(1)}{dx} = 0 ; \quad (iii) \end{array} \right.$$

y G_s^2 es solución de

$$(X'')_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 V_s}{dx^2} - s V_s = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 ; \quad (i) \\ \alpha_0 V_s(0) + \alpha_1 \frac{dV_s(0)}{dx} = 0 ; \quad (ii) \\ \beta_0 V_s(1) + \beta_1 \frac{dV_s(1)}{dx} = 1 ; \quad (iii) \end{array} \right.$$

Hemos conseguido así cumplimentar los requisitos i) y ii) exigidos por nuestro método; es decir, contamos con una representación de la imagen por la transformación de Laplace del cono de las funciones no-negativas dada por el Corolario 4.3 y a la vez disponemos de la representación (4.2) de la solución del problema transformado. Estamos pues en situación de enunciar el siguiente

Teor. 4.5 Suponiendo que se cumple (4.1), es condición necesaria y suficiente para que el problema de conducción (X) subsista en todo tiempo $t > 0$ que, para cada $0 < x < 1$, la función

$$s \mapsto U_s(x) = A(s) G_s^1(x) + B(s) G_s^2(x) - \int_0^1 G_s(x,y) (H(y,s) + \theta_0(y)) dy ,$$

sea completamente monótona en $(s_0, +\infty)$.

Dem.: Basta fijar $0 < x < 1$ y aplicar el Corolario 4.3 a la representación (4.2). □

Observemos, antes de finalizar este párrafo, que en ausencia de fuentes de energía interna cobra validez el principio de máximo débil para la ecuación del calor. De este modo, cuando en (X) es $h(x,t) \equiv 0$, puede simplificarse la condición establecida en el Teor. 4.5., y se cumple el

Teor. 4.6 Suponiendo satisfecha la ecuación (4.1) y además $h(x,t) \equiv 0$, $\theta_0(x) \geq 0$, $0 < x < 1$, es

condición necesaria y suficiente para la subsistencia del problema (X) en todo tiempo $t > 0$ que las funciones $s \mapsto U_s(0)$ y $s \mapsto U_s(1)$ sean completamente monótonas en $(s_0, +\infty)$ \square

La transformación de Laplace es útil en contextos diferentes al presente. Siguiendo los lineamientos trazados hasta aquí pueden encontrarse condiciones necesarias y suficiente de cambio de fase para cuerpos homogéneos multidimensionales con cierta simetría (cfr. [8]), así como para ciertos casos con condiciones no lineales de contorno.

Para las transformaciones integrales de tipo convolutorio $\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-t) d\alpha(t)$, existen teoremas de representación de la clase de funciones $s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-t) d\alpha(t)$ con $\alpha(t)$ no-decreciente análogos al Teor. de Hausdorff-Bernstein para la transformación de Laplace (cfr. Chap. VII de [11]). Argumentos como los que se utilizan para probar los Corolarios 4.3 y 4.4 conducen entonces a caracterizaciones del cono $\mathcal{F}(C)$. Particularmente, en [24] puede encontrarse esta clase de resultados para la transformación bilátera de Laplace y en [5] para la transformación de Mellin.

Transformación en la variable espacial

Paralelamente al procedimiento empleado en el párrafo anterior, consideramos en este las transformadas

$$W_n(t) = \int_0^{2\pi} e^{inx} u\left(\frac{x}{2\pi}, t\right) dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Debido a que las funciones $x \mapsto e^{inx}$, ($n \in \mathbb{Z}$), no cumplen generalmente las condiciones de contorno

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_0 \phi(0) + \alpha_1 \frac{d\phi(0)}{dx} = 0 \\ \beta_0 \phi(1) + \beta_1 \frac{d\phi(1)}{dx} = 0 \end{array} \right. ,$$

a fin de obtener una representación adecuada para $W_n(t)$ es inconducente transformar directamente las ecuaciones (X, i-iv). En lugar de ello obtendremos una representación adecuada de la solución del problema (X) a través del método de expansión en autofunciones (cfr [13], [23]). Sean para ello θ_0 y $x \mapsto h(x,t)$, ($t > 0$), funciones de $L^2(0,1)$. Sean además a y b funciones seccionalmente continuas para $t > 0$, y consideremos el problema homogéneo y autoadjunto de autovalores

$$\begin{array}{l}
 \text{(X-a)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda^2 \phi = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 ; \quad \text{(i)} \\
 \alpha_0 \phi(0) + \alpha_1 \frac{d\phi(0)}{dx} = 0 ; \quad \text{(ii)} \\
 \beta_0 \phi(1) + \beta_1 \frac{d\phi(1)}{dx} = 0 . \quad \text{(iii)}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Si $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ son los autovalores y $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ las autofunciones normalizadas de (X-a), entonces, como es conocido, la solución de (X) puede representarse en la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x) \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < t \quad , \quad (4.3)$$

donde $c_n(t)$ satisface el problema de valores iniciales

$$\text{(X-pvi)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dc_n(t)}{dt} + \lambda_n^2 c_n(t) = h_n(t) + A_n(t) + B_n(t) \quad , \quad 0 < t ; \\
 c_n(0) = \Theta_n \quad ,
 \end{array} \right.$$

en el que se ha puesto

$$h_n(t) = \int_0^1 h(x,t) \phi_n(x) dx \quad , \quad \Theta_n = \int_0^1 \theta_0(x) \phi_n(x) dx \quad ,$$

$$A_n(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_0} \frac{d\phi_n(0)}{dx} a(t) & \text{si } \alpha_0 \neq 0 \\ \frac{1}{\alpha_1} \phi_n(0) a(t) & \text{si } \alpha_1 \neq 0 \end{cases} \quad , \quad B_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_0} \frac{d\phi_n(1)}{dx} b(t) & \text{si } \beta_0 \neq 0 \\ -\frac{1}{\beta_1} \phi_n(1) b(t) & \text{si } \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

La solución de (X-pvi) puede expresarse de la siguiente manera:

$$c_n(t) = \Theta_n e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-s)} (h_n(s) + A_n(s) + B_n(s)) ds \quad , \quad n \in \mathbb{N} . \quad (4.4)$$

Hemos obtenido así, para cada $n \in \mathbb{Z}$, la siguiente representación de W_n

$$W_n(t) = \int_0^{2\pi} e^{inx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \phi_n\left(\frac{x}{2\pi}\right) \right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \int_0^{2\pi} e^{inx} \phi_m\left(\frac{x}{2\pi}\right) dx ; \quad (4.5)$$

donde, para cada $t > 0$, el intercambio entre los signos de sumatoria e integral queda justificado por la convergencia uniforme para $0 \leq x \leq 1$ de la serie del segundo miembro de (4.5)

Nuevamente hemos conseguido, esta vez para la transformación de Fourier finita, cumplimentar los requisitos i) y ii) del método, por lo que podemos establecer el siguiente resultado:

Teor. 4.7 Supongamos que se verifiquen las restricciones impuestas arriba sobre los datos del problema (X), y sea $0 < t_0 \leq +\infty$. Entonces, condición necesaria y suficiente para que el problema de conducción (X) subsista en el intervalo temporal $[0, t_0]$ es que, para cada $0 < t \leq t_0$, las formas hermitianas

$$\Omega_n(t; z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{j,k=1}^n W_{j-k}(t) z_j \bar{z}_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.6)$$

con $W_n(t)$ dado por (4.5), sean no-negativas.

Dem.: Basta aplicar el Corolario 4.4 a la sucesión $\{ W_n(t) : n \in \mathbb{Z} \}$. □

Puede parecer que las condiciones necesarias y suficientes de subsistencia expresadas en los Teoremas 4.5 y 4.7 son poco intuitivas, bastante técnicas y poco operativas. Ello es estrictamente cierto: no es sencillo determinar cuándo una función es completamente monótona, y el problema de establecer la no-negatividad de una familia infinita de formas hermitianas es desalentador. Aún así podemos utilizarlas provechosamente, como los siguientes ejemplos intentan mostrar.

Ejemplos de aplicación

En este párrafo ejemplificaremos el uso de las técnicas de transformaciones integrales considerando con algún detalle el caso particular del problema (X) dado por (VI)

1) Un cálculo rutinario permite expresar la función $U_s(x)$ del Teor. 4.5 en la forma

$$U_s(x) = B(s) G_s^1(x) - Q(s) G_s^2(x) - \int_0^1 G_s(x, y) \theta_0(y) dy, \quad 0 < x < 1, \quad s_0 < s, \quad (4.7)$$

donde

$$G_s(x,y) = \begin{cases} -\frac{\sinh(\sqrt{s}x) \cosh(\sqrt{s}(1-y))}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})}, & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ -\frac{\sinh(\sqrt{s}y) \cosh(\sqrt{s}(1-x))}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})}, & \text{si } y \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (4.8)$$

$$G_s^1(x) = \frac{\cosh(\sqrt{s}(1-x))}{\cosh(\sqrt{s})}; \quad G_s^2(x) = \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})}; \quad (4.9)$$

y $B = \mathcal{L}(b)$, $Q = \mathcal{L}(q)$.

Exigiendo que $b \geq 0$ y $\theta_0 \geq 0$, el principio de máximo débil permite simplificar las condiciones del Teor. 4.5. De hecho, vale el

Corolario 4.8 Suponiendo que $b, q \in \mathcal{R}$; $b \geq 0$ y $\theta_0 \geq 0$, el problema (VI) admite una solución no negativa en todo tiempo si y solo si la función

$$s \mapsto \frac{\sqrt{s} B(s) - \sinh(\sqrt{s}) Q(s) + \int_0^1 \sinh(\sqrt{s}y) \theta_0(y) dy}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})}$$

es completamente monótona en $(s_0, +\infty)$.

Dem.: De (4.8) y (4.9) se obtiene $G_s^1(1) = \frac{1}{\cosh(\sqrt{s})}$, $G_s^2(1) = \frac{\tanh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$, y

$$\int_0^1 G_s(1,y) \theta_0(y) dy = -\frac{1}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})} \int_0^1 \sinh(\sqrt{s}y) \theta_0(y) dy.$$

La expresión de $U_s(1)$ dada por (4.7) coincide entonces con la función del enunciado, y puede ahora aplicarse un razonamiento similar al que conduce del Teor. 4.5 al Teor. 4.6. \square

El Cor. 4.8 puede utilizarse para demostrar un resultado análogo al Theor. 3 de [21]:

Teor. 4.9 Sean $\theta_0 \geq 0$, $q \in \mathcal{R}$, $q \geq 0$, y supongamos que para $0 < t < \delta$, ($\delta > 0$), sea $q(t) \geq \frac{q_0}{t^\beta}$ con $q_0 > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$. Entonces en los casos en que

- i) $\beta > \frac{1}{2}$,
- ii) $\beta = \frac{1}{2}$ y $\sqrt{\pi} q_0 > b_0$.

existe un cambio de fase después de un tiempo finito, cualquiera sea la temperatura $b \in \mathcal{R}$.

Dem.: Si para cierta $b \in \mathcal{R}$ la solución de (VI) fuese no-negativa para todo tiempo $t > 0$, por el Cor.

4.8 la función

$$s \mapsto \frac{\sqrt{s} B(s) - \sinh(\sqrt{s}) Q(s) + \int_0^1 \sinh(\sqrt{s} y) \theta_0(y) dy}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})}$$

sería completamente monótona en $(s_0, +\infty)$. En particular, para cada $s > s_0$ se tendría

$$\sqrt{s} B(s) - \sinh(\sqrt{s}) Q(s) + \int_0^1 \sinh(\sqrt{s} y) \theta_0(y) dy \geq 0$$

y por tanto

$$B(s) \geq \frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} Q(s) - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^1 \sinh(\sqrt{s} y) \theta_0(y) dy .$$

Por otra parte, dado que \mathcal{L} es un operador positivo, de la hipótesis sobre q se deriva que

$$Q(s) \geq \frac{q_0}{s^{1-\beta}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\beta} du = \frac{\Gamma(1-\beta) q_0}{s^{1-\beta}}, \quad s > 0 ;$$

y como $\theta_0 \in C^0[0,1]$, existe $b_0 \geq 0$ tal que $0 \leq \theta_0(x) \leq b_0$, $0 \leq x \leq 1$. De este modo, tenemos que para $s > s_0$ es

$$B(s) \geq \frac{\sinh(\sqrt{s})}{s} \frac{\Gamma(1-\beta) q_0}{s^{1-\beta}} - \frac{b_0}{s} (\cosh(\sqrt{s}) - 1) \geq \frac{\sinh(\sqrt{s})}{s} \left(\Gamma(1-\beta) q_0 s^{\beta-\frac{1}{2}} - b_0 \right) + \frac{b_0}{s} . \quad (4.10)$$

Ahora bien, si $\beta > \frac{1}{2}$, (4.5) muestra que $\liminf_{s \uparrow +\infty} B(s) = +\infty$; y si $\beta = \frac{1}{2}$ es

$$\liminf_{s \uparrow +\infty} B(s) \geq \sqrt{\pi} q_0 - b_0 > 0 ,$$

absurdo en ambos casos pues para toda $b \in \mathcal{R}$ es $\lim_{s \uparrow +\infty} B(s) = 0$. □

Nota 4.10 En el caso en que $\beta = \frac{1}{2}$ y $\sqrt{\pi} q_0 \leq b_0$, puede no presentarse un cambio de fase. En efecto,

eligiendo $q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, ($t > 0$), $\theta_0(x) = 1$, ($0 \leq x \leq 1$), y $b(t) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$, ($t > 0$), resulta que la

función

$$\frac{\sqrt{s} B(s) - \sinh(\sqrt{s}) Q(s) + \int_0^1 \sinh(\sqrt{s} y) \theta_0(y) dy}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})} =$$

$$= \frac{\sqrt{s} \frac{1 - e^{-\sqrt{s}}}{s} - \sinh(\sqrt{s}) \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} (\cosh(\sqrt{s}) - 1)}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})} \equiv 0$$

es completamente monótona en $(0, +\infty)$, y el corolario (4.8) muestra entonces que la solución u de (VI) es no negativa para todo tiempo $t > 0$.

2) Con la notación empleada previamente, para el problema (VI) encontramos

$$\lambda_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad \phi_n(x) = \sqrt{2} \sin\left((2n - 1) \frac{\pi}{2} x\right), \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\Theta_n = \sqrt{2} \int_0^1 \theta_0(x) \sin\left((2n - 1) \frac{\pi}{2} x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$A_n(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi (2n - 1) b(t), \quad B_n(t) = (-1)^{n-1} \sqrt{2} q(t), \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ins} \phi_m\left(\frac{x}{2\pi}\right) dx = \frac{4\sqrt{2} ((2m - 1) - (-1)^m 4ni)}{(2m - 1)^2 - 16n^2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$W_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \int_0^{2\pi} e^{ins} \phi_m\left(\frac{x}{2\pi}\right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{2} ((2m - 1) - (-1)^m 4ni)}{(2m - 1)^2 - 16n^2} c_m(t), \quad (4.11)$$

donde, para cada $m \in \mathbb{N}$ es

$$c_m(t) = \Theta_m e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} - \sqrt{2} \int_0^t e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 (t-s)} \left(\frac{\pi}{2} (2m-1) b(s) + (-1)^m q(s) \right) ds. \quad (4.12)$$

Restringiremos el análisis al caso en que los datos del problema son constantes:

$$\theta_0(x) \equiv b_0 \geq 0, \quad b(t) \equiv b_1 \geq 0, \quad q(t) \equiv q_0 \geq 0.$$

Si $q_0 > b_1$, puede emplearse el Cor. 4.8 para concluir que existirá un cambio de fase en un tiempo finito t_0 . Igual resultado se alcanza considerando la solución estacionaria $u_{\infty}(x) = -q_0 x + b_1$. Interesa estimar el tiempo t_0 en que ocurre el cambio de fase.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación (cfr. [1])

$$\beta(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \lambda(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Como aplicación del Teor. 4.7 probamos a continuación el

Teor. 4.11 Si los datos del problema (VI) son constantes y se cumple $q_0 > 2b_1$, existe un cambio de fase en un tiempo finito t_0 . Más aún, t_0 verifica la desigualdad

$$t_0 < \frac{4}{\pi^2} \ln \left(\frac{\lambda(2) b_0 + \frac{1}{\pi} (\beta(3) + \lambda(3)) q_0}{\frac{2}{\pi} \beta(3) q_0 - \lambda(2) b_1} \right)$$

Dem.: Consideremos la forma hermitiana $\Omega_1(t; z)$ para el problema (VI) con datos constantes. Según (4.5), (4.11) y (4.12) tenemos $\Omega_1(t; z) = W_0(t) |z|^2$, donde

$$\begin{aligned} W_0(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{2}}{2m-1} \left(\sqrt{2} b_0 e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(2m-1)x\right) dx - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2} \int_0^1 e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2(t-s)} \left(\frac{\pi}{2}(2m-1) b_1 + (-1)^m q_0 \right) ds \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{2}}{2m-1} \left(\frac{2\sqrt{2} b_0 e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t}}{\pi(2m-1)} + \frac{4\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2}(2m-1) b_1 + (-1)^m q_0 \right)}{\pi^2(2m-1)^2} \left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} \right) \right) \\ &= \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \left(b_0 e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} + \left(b_1 + \frac{(-1)^m 2}{\pi(2m-1)} q_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} \right) \right). \end{aligned}$$

Como para $t > 0$ es $e^{-\frac{\pi^2}{4}t} = \delta < 1$, para cada $m \in \mathbb{N}$ valen las acotaciones

$$e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} \leq \delta^{(2m-1)^2} \leq \delta \quad (< \delta \text{ si } m > 1);$$

$$(-1)^m \left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} \right) \leq \begin{cases} \delta - 1, & \text{si } m \text{ es impar} \\ 1, & \text{si } m \text{ es par}; \end{cases}$$

$W_0(t)$ puede mayorarse como sigue

$$W_0(t) < \frac{16}{\pi} \left(\left(b_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} + \frac{2}{\pi} q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m-3)^3} \right) \delta + b_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} - \frac{2}{\pi} q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^3} \right)$$

$$= \frac{16}{\pi} \left(\left(\lambda(2) b_0 + \frac{1}{\pi} (\beta(3) + \lambda(3)) q_0 \right) \delta + \lambda(2) b_1 - \frac{2}{\pi} \beta(3) q_0 \right). \quad (4.13)$$

Es conocido (cfr. [1]) que $\lambda(2) = \frac{\pi^2}{8}$ y $\beta(3) = \frac{\pi^3}{32}$, luego de la hipótesis hecha sobre b_1 y q_0 resulta

$$\lambda(2) b_1 - \frac{2}{\pi} \beta(3) q_0 = \frac{\pi^2}{16} (2 b_1 - q_0) < 0,$$

con lo que el último miembro de (4.13) se anula para $\delta = e^{-\frac{\pi^2}{4} t_0}$ donde t_0 satisface la ecuación

$$e^{-\frac{\pi^2}{4} t_0} = \frac{\frac{2}{\pi} \beta(3) q_0 - \lambda(2) b_1}{\lambda(2) b_0 + \frac{1}{\pi} (\beta(3) + \lambda(3)) q_0}. \quad (4.14)$$

En virtud del Teor. 4.7, debe presentarse un cambio de fase antes del tiempo t_0 dado por (4.14). □

Mediante el uso del principio de máximo, probamos ahora el

Cor. 4.12. Suponiendo que los datos del problema (VI) satisfagan las condiciones

- i) $0 \leq \theta_0(x) \leq b_0$, $(0 \leq x \leq 1)$;
- ii) $0 \leq b(t) \leq b_1$, $(t > 0)$;
- iii) $2 b_1 < q_0 \leq q(t)$, $(t > 0)$;

existe un cambio de fase en un tiempo finito t_0 que verifica la desigualdad

$$t_0 < \frac{4}{\pi^2} \ln \left(\frac{\lambda(2) b_0 + \frac{1}{\pi} (\beta(3) + \lambda(3)) q_0}{\frac{2}{\pi} \beta(3) q_0 - \lambda(2) b_1} \right).$$

Dem.: Dado que los datos q , θ_0 y b satisfacen respectivamente las condiciones i) , ii) y iii), el principio de máximo débil garantiza que la solución de (VI) no es mayor que la del mismo problema con datos constantes q_0 , b_0 y b_1 . Como este último problema presenta por el Teor. 4.11 un cambio de fase en el intervalo temporal indicado, con mayor razón ello debe ocurrir para el problema original. □

Nota 4.13 A fin de estimar la bondad de la cota obtenida para t_0 en el Corolario 4.12 puede calcularse explícitamente la temperatura en el extremo derecho $u(1,t)$ (cfr. [8]). Para ello, notamos que de la ecuación (4.7) resulta que

$$U_s(1) = \mathcal{L}(u(1, \cdot)) = \frac{b_1}{s \cosh(\sqrt{s})} - \frac{\tanh(\sqrt{s})}{s\sqrt{s}} q_0 + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s \cosh(\sqrt{s})} \right) b_0 = \frac{b_1}{s} - \frac{\tanh(\sqrt{s})}{s\sqrt{s}} q_0,$$

ecuación en cuyo último miembro por simplicidad hemos puesto $b_0 = b_1$. En cualquier tabla de transformadas de Laplace (por ejemplo [1]) se encuentra entonces

$$u(1, t) = b_1 - q_0 + \frac{8}{\pi^2} q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 t} \quad (4.15)$$

Si como en la prueba del Teor. 4.11 ponemos $\delta = e^{-\frac{\pi^2}{4}t}$, (4.15) puede dominarse como sigue

$$u(1, t) < b_1 - q_0 + \frac{8}{\pi^2} q_0 \delta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = b_1 - q_0 + q_0 \delta,$$

por lo que, si $b_1 = b_0 < q_0$, existe un cambio de fase para cierto $0 < t_0^* < \frac{4}{\pi^2} \ln \left(\frac{q_0}{q_0 - b_1} \right) = t_1$.

Suponiendo además que $2b_1 < q_0$, la cota dada por el Corolario 4.12 es en este caso

$$t_0 < \frac{4}{\pi^2} \ln \left(\frac{\lambda(2) b_1 + \frac{1}{\pi} (\beta(3) + \lambda(3)) q_0}{\frac{2}{\pi} \beta(3) q_0 - \lambda(2) b_1} \right) \sim \frac{4}{\pi^2} \ln \left(\frac{2b_1 + 1.04 q_0}{q_0 - 2b_1} \right) = t_2.$$

Como para $0 < x < \frac{1}{2}$ se cumple

$$\frac{\ln \left(\frac{2x + 1.04}{1 - 2x} \right)}{\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)} > 3.9,$$

resulta $t_2 > 3.9 t_1$.

Agradecimientos: Quiero expresar mi agradecimiento al Proyecto "Problemas de Frontera Libre de la Física Matemática" (CONICET-UNR, Rosario, Argentina), que ha financiado parcialmente este trabajo.

5_ Referencias.

- [1] – M. Abramowitz - I.A. Stegun, (Eds.), "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, (1972).
- [2]_ E.F. Beckenbach - R. Bellman, "Inequalities", Springer, Berlin, (1983).
- [3]_ L.R. Berrone, "Temporary Range of Validity for Some One-dimensional Heat Conduction Models", (1992), (To appear in Quart. Appl. Math.).
- [4]_ L.R. Berrone, "Rango Temporal de Validez de Algunos Modelos Unidimensionales de Conducción del Calor: Problemas No-Lineales", (1992), (a aparecer).
- [5]_ L.R. Berrone, "Condiciones Necesarias y Suficientes para la Subsistencia de Modelos Lineales Unidimensionales de Conducción del Calor", (1992), (a aparecer).
- [6]_ J.E. Bouillet - M. Shillor - D.A. Tarzia, "Critical Outflow for a Steady-State Stefan Problem", Appl. Analysis 32, (1989), pp. 31-51.
- [7]_ J.R. Cannon, "The One-Dimensional Heat Equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California, (1984).
- [8]_ H.S. Carslaw - J.C. Jaeger, "Conduction of Heat in Solids", Oxford Univ. Press, London, (1959).
- [9]_ R.L.V. González - D.A. Tarzia, "Optimization of Heat Flux in Domains with Temperature Constraint", J. Opt. Theory and Appl. 65, N° 2, (1990), pp. 245-256.
- [10]_ E. Goursat, "Cours d'Analyse Mathématique", Tome III, Gauthier-Villars, Paris, (1923).
- [11]_ I.I. Hirschman - D.V. Widder, "The Convolution Transform", Princeton Univ. Press, Princeton, (1955).
- [12]_ M.M. Laurentiev - V.G. Romanov - S.P. Shishat'skii, "Ill Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis", Translations of Mathematical Monograph, Vol. 64, Amer. Math. Soc., Rhode Island, (1986).
- [13]_ M.D. Mikhailov - M.N. Özişik, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", J. Wiley & Sons, New York, (1984).
- [14]_ C.T. O'Sullivan, "Newton's Law of Cooling – A Critical Assessment", Am. J. Phys. 58 (10), (1990), p. 956-960.
- [15]_ M.H. Protter - H.F. Weinberger, "Maximum Principles in Differential Equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1967).
- [16]_ F. Riesz - B. Nagy, "Functional Analysis", F. Ungar, New York, (1955).
- [17]_ T.L. Saaty, "Modern Nonlinear Equations", Dover, New York, (1981).
- [18]_ D.A. Tarzia, "An Inequality for the Coefficient σ of the Free Boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann Solution for the Two-Phase Stefan Problem", Quart. Appl. Math. 39, N° 4, (1981), 491-497.
- [19]_ D.A. Tarzia, "An Inequality for the Constant Heat Flux to Obtain a Steady-State Two-Phase

- Stefan Problem.", *Engineering Analysis*, 5, (1988), p. 177-181.
- [20]_ D.A. Tarzia, "Mixed Elliptic and Parabolic Free Boundary Problems Related to the Two-Phase Stefan Problem.", *Istituto di Analisi Numerica del CNR, Pavia, Pubbl. N° 728*, (1989).
- [21]_ D.A. Tarzia, C.V. Turner, "A Note on the Existence of a Waiting-Time for a Two-Phase Stefan Problem.", *Quart. of Appl. Math.* Vol. L, N° 1, (1992), p. 1-10.
- [22]_ W. Walter, "Differential and Integral Inequalities", Springer, Berlin, (1970).
- [23]_ H.F. Weinberger, "Partial Differential Equations", Blaisdell, New York, (1965).
- [24]_ D.V. Widder, "The Laplace Transform", Princeton Univ. Press, Princeton, (1946).
- [25]_ K. Yosida, "Lectures on Differential and Integral Equations", Interscience, New York, (1960).

El problema de Stefan unidimensional para el líquido sobreenfriado

Cristina Vilma Turner

1 Introducción

El problema clásico de Stefan unidimensional a una fase (caso fusión), consiste en hallar la temperatura $\theta = \theta(y, \tau)$ y la frontera libre $r = r(\tau)$ solución del siguiente sistema :

$$\begin{aligned}\theta_\tau &= \alpha \theta_{yy}, & 0 < y < r(\tau), & 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(r(\tau), \tau) &= 0, & 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(r(\tau), \tau) &= -\rho l r'(\tau), & 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(0, \tau) &= \Psi(\tau), & 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(y, 0) &= \phi(y), & 0 < y < b \\ r(0) &= b\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde:

k es la conductividad térmica.

ρ es la densidad de masa.

c es el calor específico.

l es el calor latente de fusión.

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ es la difusividad térmica.

ϕ es la temperatura inicial.

Ψ es el flujo de calor en el borde fijo $y = 0$.

Realizando el siguiente cambio de variables:

$$x = \frac{y}{b} \quad t = \frac{k}{\rho c b^2} \tau$$

$$z(x, t) = \frac{c}{l} \theta(y, \tau) \quad s(t) = \frac{\tau(\tau)}{b}$$

El problema (1.1) se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_t, & 0 < x < s(t), & & 0 < t < T \\ z(s(t), t) &= 0, & 0 < t < T \\ z_x(s(t), t) &= -j(t), & 0 < t < T \\ z_x(0, t) &= g(t), & 0 < t < T \\ z(x, 0) &= h(x), & 0 < x < 1 \\ s(0) &= 1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde:

$$g(t) = \frac{bc}{lk} \Psi(\tau), \quad h(x) = \frac{c}{l} \phi(y)$$

$$T = \frac{k}{\rho c b^2} \tau_0$$

$$D_T = \{(x, t) / 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$$

Observemos que las nuevas variables independientes x, t y las nuevas variables dependientes $z(x, t), s(t)$ son adimensionales.

Además, la condición de flujo sobre el borde fijo $y = 0$ puede ser reemplazado por una condición de temperatura, es decir:

$$\phi(0, \tau) = \Psi_0(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_0$$

la cual se transforma en

$$z(0, t) = g_0(t), \quad 0 < t < T$$

$$\text{con } g_0(t) = \frac{c}{l} \Psi_0(\tau)$$

Diremos que el triplete (T, s, z) es una solución clásica de problema de frontera libre (1.2) si y sólo si.

i) $T > 0$.

ii) $s \in C[0, T]$, $\dot{s} \in C(0, T)$, $s(t) > 0$ en $[0, T)$.

iii) La función $z = z(x, t)$ es continua y acotada en $0 \leq x \leq s(t)$, $0 \leq t \leq T$, la función $z_x(x, t)$ es acotada en dicho dominio y continua en el mismo salvo un eventual número finito de puntos sobre la frontera parabólica; las funciones $z_{xx}(x, t)$ y $z_t(x, t)$ son continuas en $0 < x < s(t)$, $0 < t < T$.

iv) Se satisfacen las condiciones de (1.2).

El problema de Stefan ordinario ($h \geq 0$, $g \leq 0$) ha sido ampliamente estudiado. La existencia de solución está probada para todo T y $\dot{s}(t) \geq 0$.

En [1] y [2] se puede encontrar bibliografía sobre el tema.

El propósito de este trabajo es analizar el problema de Stefan unidimensional correspondiente al líquido sobreenfriado, es decir el caso $h \leq 0$, $g \geq 0$. Este problema difiere sustancialmente del problema de Stefan ordinario.

2 Análisis de los distintos tipos de solución

En esta sección y en las subsiguientes consideraremos el problema de Stefan para el líquido sobreenfriado con una condición de contorno en la cara fija $x = 0$ de temperatura. Por lo cual se requiere que la función g_0 sea una función no positiva y continua a trozos en cada intervalo $(0, t)$ $t > 0$ y h sea una función continua no positiva en el $[0, 1]$, $h(1) = 0$ y $h(x)$ Hölder continua en $x = 1$.

Entonces si la solución del problema (1.2) existe, tres diferentes tipos de comportamientos de la solución (T, s, z) se observan:

(A) El problema tiene solución para T arbitrario.

(B) Existe una constante $T_B > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T_B^-} s(t) = 0$.

(C) Existe una constante $T_C > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T_C^-} s(t) > 0$ y $\lim_{t \rightarrow T_C^-} \dot{s}(t) = -\infty$.

La demostración se puede ver en [3] y [4].

Como veremos, cualquiera de estos tres casos puede ocurrir con una apropiada elección de las funciones $h = h(x)$ y $g_0 = g_0(t)$ en el problema (1.2).

Una manera apropiada de analizar cuáles datos iniciales y de contorno (h, g_0) generan soluciones de tipo A, B y C es a través de las denominadas integrales de energía, éstas son simplemente representaciones integrales del problema.

Por ejemplo, se puede probar fácilmente que si (T, s, z) es solución del problema (1.2) entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones integrales

$$s(t) = 1 + \int_0^1 h(x) dx - \int_0^t z_x(0, \tau) d\tau - \int_0^{s(t)} z(x, t) dx \quad (2.3)$$

$$\frac{s^2(t)}{2} = \frac{1}{2} + \int_0^1 x h(x) dx + \int_0^t g_0(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} x z(x, t) dx \quad (2.4)$$

$$\frac{s^2(t)}{3} = \frac{1}{3} + 2 \int_0^t d\tau \int_0^{s(t)} z(x, t) dx - \int_0^{s(t)} z(x, t) x^2 dx + \int_0^1 h(x) x^2 dx \quad (2.5)$$

Las cuales se obtienen usando la identidad de Green

$$\int \int_{D_t} (uLz - zL^*u) dx d\tau = \int_{\partial D_t} (z_x u - z u_x) d\tau + uz dx$$

donde L representa el operador del calor y L^* el operador del calor adjunto.

Las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5) se obtienen tomando z solución del problema (1.2) y $u = 1$, $u = x$ y $u = x^2$ respectivamente.

Otras relaciones del mismo tipo se pueden obtener usando polinomios de mayor orden para $u(x, t)$.

Las propiedades más importantes del problema (1.2) son enunciadas en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Si (T, s, z) es solución del problema (1.2), entonces:*

- (i) $z \leq 0$ en D_T .
- (ii) $s(t)$ es una función decreciente en $(0, T)$.
- (iii) Si $h'(x) \geq 0$ y $\dot{g}_0(t) \leq 0$, luego $z_x(x, t) \geq 0$ en D_T .

(iv) Si $h(x) = c - 1$, con $c = \text{constante}$, para $0 \leq x \leq 1$, y $g_0(t) > c - 1$ para $t > 0$, entonces el problema (1.2) no tiene solución.

Demostración 2.1 (i), (ii) y (iii) se obtienen de la aplicación del Principio del máximo.

(iv) Para cualquier solución (T, s, z) de problema (1.2), se satisface $0 \leq s(t) \leq 1$ y $0 \leq t \leq T$, y por el principio del máximo resulta $z(x, t) > c - 1$ en D_T , luego de (2.4) se obtiene

$$\frac{s^2(t) - 1}{2} < \frac{c - 1}{2} - (c - 1) \frac{s^2(t)}{2}$$

es decir, $\frac{(s^2(t)-1)}{2} c < 0$, lo que es una contradicción junto a $c < 0$ y $s(t) \leq 1$.

Observación:

Un resultado general de no existencia se puede ver en [5]. Una condición suficiente de no existencia está dada por $h \leq -1$ en el entorno izquierdo de $x = 1$, independientemente del comportamiento de la temperatura de contorno $g = g_0(t)$ en $x = 0$.

Proposición 2.2 Si (T, s, z) es solución del problema (1.2) y

$$h(x) \geq m(g_0)(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.6)$$

luego

$$z(x, t) \geq m(g_0)(1 - x) \text{ en } D_T \quad (2.7)$$

$$\frac{s^2(t)}{2} [1 + m(g_0)] - m(g_0) \frac{s^3(t)}{3} \leq \frac{1}{2} + \int_0^t g_0(\tau) d\tau + \int_0^1 x h(x) dx \quad 0 < t < T \quad (2.8)$$

donde $m(g_0) = \min_{0 \leq t \leq T} g_0(t)$.

Demostración 2.2 (i) Definimos la función

$$W(x, t) = m(g_0)(x - 1) \text{ en } D = \{(x, t) / 0 < x < 1, 0 < t < T\}$$

comparando W con z y usando el Principio del máximo se obtiene (2.7). Usando (2.4) se obtiene (2.8).

En lo que sigue procederemos a caracterizar los casos (A), (B) y (C) dependiendo de los valores de $R(t)$ donde

$$R(t) = \frac{1}{2} + \int_0^1 x h(x) dx + \int_0^t g_0(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

observamos que $\dot{R}(t) = g_0(t)$.

Proposición 2.3 *Se tienen las siguientes implicaciones:*

$$(i) \text{ caso (B)} \Rightarrow R(T_B) = 0$$

$$(ii) \text{ caso (B)} \Rightarrow \int_0^{T_B} z_x(0, \tau) d\tau = 1 + \int_0^1 h(x) dx$$

$$(iii) \text{ caso (B)} \Rightarrow 2 \int \int_{D_{T_B}} z(x, \tau) dx d\tau = -\frac{1}{3} - \int_0^1 x^2 h(x) dx$$

Demostración 2.3 *Debido a la Proposición (2.2) podemos tomar límite para $t \rightarrow T_B$ en (2.3), (2.4) y (2.5) y obtener las tres relaciones de arriba.*

Proposición 2.4 *Asumiendo que $h(x)$ satisface:*

Existe una constante positiva H tal que

$$h(x) \geq H(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.10)$$

y sea (T, s, z) una solución del problema (1.2) tal que

$$s_T = \inf_{t \in (0, T)} s(t) > 0.$$

Además que existan dos constantes $d \in (0, s_T)$, $z_0 \in (0, 1)$ tal que $Hd \leq z_0 \ln 2$ y $z(s(t) - d, t) \geq -z_0$, $0 \leq t \leq T$; luego

$$s(t) \geq \min \left[\frac{-H}{z_0}, \frac{\ln(1-z_0)}{d} \right] \quad (2.11)$$

Demostración 2.4 *Es del mismo tipo que la del Lema (2.4) en [3].*

Corolario 2.1 Si ocurre caso (C), entonces la isoterma $z = -1$ existe y alcanza la frontera libre en $t = T_C$.

Proposición 2.5 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2).

Si $R(T_B) = 0$ y $-1 \leq m(g_0) \leq 0$, entonces la solución pertenece al caso (B).

Demostración 2.5 Reemplazamos $R(T_B) = 0$ en (2.8) de la Proposición (2.2), luego obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{s^2(T_B)}{2} (1 + m(g_0)) - m(g_0) \frac{s^3(T_B)}{2} \leq 0.$$

Como $1 + m(g_0) \geq 0$ y $m(g_0) \leq 0$, resulta $s(T_B) = 0$ lo que implica caso (B).

Proposición 2.6 Si (T, s, z) es solución del problema (1.2), con $g_0 \in L^1(0, \infty)$, h verifica la inecuación (2.6) y la solución pertenece al caso A, entonces:

$$R(t) \geq 0, \quad t > 0 \tag{2.12}$$

Demostración 2.6 Usando la inecuación (2.4) y las hipótesis se obtiene la siguiente

inecuación:

$$-\int_0^{s(t)} x z(x, t) dx \leq \|g_0\|_1 + m(g_0) \int_0^1 x(x-1) dx = \|g_0\|_1 - \frac{1}{6} m(g_0) \equiv C,$$

donde $C \geq 0$.

De las inecuaciones anteriores se concluye

$$\int_0^{s(t)} x^2 (-z(x, t)) dx \leq \int_0^{s(t)} x (-z(x, t)) dx \leq C.$$

Reemplazando la inecuación anterior en (2.5) obtenemos:

$$2 \int_0^t d\tau \int_0^{s(\tau)} z(x, \tau) dx d\tau \geq -C - \frac{1}{3}, \quad t \geq 0 \tag{2.13}$$

Supongamos entonces que exista un T_0 tal que $R(T_0) < 0$, luego de (2.4), se sigue que

$$\int_0^{s(t)} -z(x, t) dx \geq \int_0^{s(t)} -x z(x, t) dx = \frac{s^2(t)}{2} - R(t) \geq -R(T_0) > 0, \quad t \geq T_0.$$

Si integramos con respecto al tiempo la última inecuación, resulta

$$\int \int_{D_t} z(x, t) dx d\tau \leq R(T_0) t, \quad t \geq T_0$$

lo que contradice (2.13).

Proposición 2.7 Si (T, s, z) es una solución del problema (1.2) y la función h y g_0 satisfacen las siguientes hipótesis

- (i) $h = h(x) \leq 0$ es una función creciente en $[0, 1]$;
- (ii) $g_0 = g_0(t) \leq 0$ es una función decreciente, $t \geq 0$;

entonces si la solución pertenece al caso (C), luego $R(T_C) \leq 0$.

Demostración 2.7 De la Proposición (2.1) tenemos $z_x(x, t) \geq 0$ en D_T . Del Corolario (2.1), la isoterma $z = -1$ debe alcanzar la frontera libre en $t = T_C$, luego el dominio D_T queda dividido en dos regiones y $z(x, t) \leq -1$ a la izquierda de la isoterma $z = -1$.

Reemplazando esta estimación en (2.4) obtenemos

$$\frac{s^2(T_C) - 1}{2} \geq \int_0^1 x h(x) dx + \int_0^{T_C} g_0(\tau) d\tau + \int_0^{s(T_C)} x dx$$

es decir
$$\frac{s^2(T_C)}{2} \geq R(T_C) + \frac{s^2(T_C)}{2}.$$

Luego
$$R(T_C) \leq 0.$$

Observación:

Las hipótesis de la Proposición anterior pueden ser debilitadas, ver Corolario (2.9) en [6].

Corolario 2.2 Si $R(t) > 0$ para todo $t > 0$, entonces la solución (T, s, z) pertenece al caso (A).

Observación:

De la misma manera hecha en esta sección, se pueden obtener resultados análogos para la fase del sólido sobrecalentado.

3 El caso $g_0(t) = \text{constante}$

En esta sección vamos a considerar el caso en el cual la temperatura $z(0, t)$ es constante para todo tiempo, digamos $g_0(t) = -B$, con $B > 0$ y temperatura inicial $h = h(x) \equiv 0$.

Observación 1:

Recordemos que en el cambio de variables hecho en el problema (1.1) para obtener el problema (1.2) adimensionalizado

$$g_0(t) = \frac{c}{l} \Psi(t) \quad \text{donde } c \text{ es el calor específico y } l \text{ el calor latente de fusión.}$$

Con lo cual si estamos en el caso de temperatura constante en el borde $x = 0$

$$B = \frac{c}{l} \Psi_0 \quad \text{donde } \Psi_0 = \text{constante}$$

al coeficiente B se lo denomina número de Stefan.

Observación 2:

Como consecuencia de la Proposición (2.7) en este caso no existe solución global, con lo cual solamente se observará comportamiento del tipo caso (B) o caso (C).

Más aún, uno puede probar fácilmente que la solución para un dado $B > 0$, existe para todo $t \leq T$ con $T \geq \frac{1}{2B}$.

Proposición 3.1 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2). Si $0 \leq B \leq 1$, entonces la solución pertenece al caso (B).

Demostración 3.1 Usando el Principio del máximo se sigue $z(x, t) \geq -1$. De la Proposición (2.4) el caso (C) es excluido, luego sólo el caso (B) es posible.

Proposición 3.2 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2) luego

$$z(x, t) \geq -B \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right), \quad \text{en } D_T \quad (3.14)$$

Demostración 3.2 Se sigue del Principio del máximo aplicado a $z(x, t) = -W(x, t)$, aquí W es la solución de la ecuación del calor en el primer cuadrante $x > 0$, $t > 0$, con las siguientes condiciones de contorno: $W(x, 0) = 0$, $x > 0$ y $W(0, t) = -B$, $t > 0$.

La solución $W(x, t)$ tiene la siguiente forma:

$$W(x, t) = -B \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right), \quad x \geq 0, t \geq 0.$$

Como consecuencia de la Proposición (3.2), se obtienen las siguientes estimaciones sobre B para el caso (C).

Proposición 3.3 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2). Luego, $B \leq \frac{\pi}{2}$ es una condición necesaria para que la solución pertenezca al caso (B).

Demostración 3.3 De la Proposición (3.2) se deduce

$$z_x(0, t) \geq W_x(0, t) = \frac{B}{\sqrt{\pi t}} \quad (3.15)$$

Si reemplazamos la estimación anterior en (2.4) se obtiene

$$1 \geq \frac{B}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/2B} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = \sqrt{\frac{2B}{\pi}}.$$

Proposición 3.4 La frontera libre satisface las siguientes inecuaciones:

$$s(t) \geq \sqrt{1 - 2Bt}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2B}$$

$$s(t) \leq \frac{1 - 2B\sqrt{(t/\pi)}}{1 - B}, \quad t \geq 0 \quad 0 < B < 1$$

$$s(t) \leq \frac{\sqrt{1 - 2Bt}}{\sqrt{1 - B}}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2B}, \quad 0 < B < 1$$

Demostración 3.4 La primera y la última inecuación se obtienen reemplazando $z \leq 0$ y $z \geq -B$, respectivamente en (2.4); la segunda se obtiene reemplazando $z \geq -B$ y (3.15) en (2.3).

4 Solución explícita

Denominaremos problema P_B al problema (1.2) para $g_0(t) = -B$, B constante $B > 0$ y temperatura inicial $h = h(x)$.

Vamos a dar una solución explícita al problema cuando $\dot{s}(0) < 0$.

Proposición 4.1 El triplete (T, s, z) definido por $z(x, t) = \phi\left(\frac{x}{s(t)}\right)$, $0 < x < s(t)$,

$0 < t < T$, es solución del problema P_B si y sólo si ϕ satisface

$$\phi(\zeta) = -B + \frac{B}{F(\zeta)} F(\eta\zeta)$$

donde $\eta > 0$ es una solución de la ecuación

$$G(x) = \frac{B}{2}, \quad x > 0$$

$$G(x) = x \exp(-x^2) F(x) \quad \text{con} \quad F(x) = \int_0^x e^{\tau^2} d\tau$$

Más aún, en este caso tenemos

$$s(t) = \sqrt{1 - 4\eta^2 t} = 2\eta\sqrt{T - t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$T = \frac{1}{4\eta^2}$$

$$\dot{s}(0) = -2\eta^2 < 0$$

$$h(x) = \phi(x), \quad 0 < x < 1$$

Demostración 4.1 La función $\phi = \phi(\zeta)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$\phi''(\zeta) + \dot{s}(0)\zeta\phi'(\zeta) = 0, \quad \phi(0) = -B, \quad \phi(1) = 0$$

Observaciones:

La ecuación $G(x) = \frac{-B}{2}$, $x > 0$, tiene solución si y sólo si,

$$0 < B \leq 2G_M \cong 1.29 = 2 \max_{x>0} G(x).$$

Si $0 < B \leq 1$, el número x es único.

Si $1 < B < 2G_M$ existen dos soluciones (ver Gráfico 1).

Proposición 4.2 Si elegimos un parámetro $\eta \geq 0$, podemos definir la siguiente familia de funciones:

$$z(x,t) = -2G(\eta) \left[1 - \frac{F\left(\eta \frac{x}{s(t)}\right)}{F(\eta)} \right], \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T$$

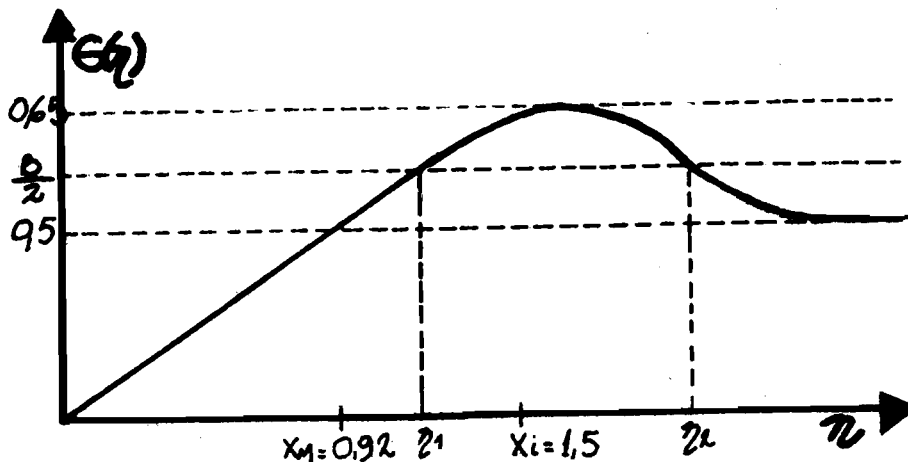
$$s(t) = \sqrt{1 - 4\eta^2 t}, \quad 0 < t < T = \frac{1}{4\eta^2}$$

$$B = 2G(\eta)$$

$$h(x) = -2G(\eta) \left[1 - \frac{F(\eta x)}{F(\eta)} \right], \quad 0 < x < 1$$

que es solución del problema de Stefan para el líquido sobreenfriado (P_B).
Más aún, la solución pertenece al caso (B).

Gráfico 1:



5 Referencias

- [1] M. Primicerio 'Problemi di diffusione a frontiera libera' Bolletino UMI, (5) 18-A (1981), 11-68.
- [2] D. Tarzia 'A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation', Firenze 1988.
- [3] A. Fasano - M. Primicerio 'New results on some classical parabolic free-boundary problems' Quart. Appl. Math., 38 (1981), 439-460.
- [4] B. Sherman 'General one-phase Stefan problems and free-boundary problems for the heat equation with Cauchy data prescribed on the free-boundary" SIAM Jour. Appl. Math., 20 (1971), 555-570.
- [5] A. Fasano - M. Primicerio 'A critical case for the solvability of Stefan-like problems' Math. Meth. Appl. Sci., 5 (1983), 84-96.
- [6] A. Petrova - D. Tarzia - C. Turner 'The one-phase supercooled Stefan problem with temperature boundary condition' (por aparecer en Advance Science Math. Appl.)

Los resultados enunciados en este trabajo forman parte de la publicación [6] en conjunto con D. Tarzia y A. Petrova.

Cristina Vilma Turner
Fa.M.A.F
U.N.C

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent and reliable data collection processes to support informed decision-making.

3. The third part of the document describes the different types of reports and dashboards that are generated from the data. It explains how these tools provide valuable insights into the organization's performance and trends over time.

4. The fourth part of the document discusses the challenges and risks associated with data management and analysis. It identifies common pitfalls and offers strategies to mitigate these risks, such as implementing robust security measures and ensuring data integrity.

5. The fifth part of the document provides a summary of the key findings and conclusions. It reiterates the importance of a data-driven approach and offers recommendations for future improvements and best practices.

TRANSFERENCIA DE CALOR CON CAMBIO DE FASE EN SISTEMAS MULTIDIMENSIONALES: USO DE FACTORES DE FORMA EN METODOS APROXIMADOS

R.H. MASCHERONI

INTRODUCCION

En los dos seminarios anteriores se presentó el problema de la transferencia de calor con cambio de fase en la congelación y descongelación de alimentos. En el II Seminario se vieron los métodos de solución numéricos (Conferencia no publicada) y en el III Seminario los métodos de solución aproximados (1). En ambos casos se centró el enfoque sobre sistemas con geometrías simples (placa plana, cilindro infinito, esfera, cilindro finito, varilla rectangular infinita y prisma rectangular).

El sistema físico en sí es del tipo con rango de fusión, con la existencia de una zona pastosa. La transformación agua-hielo comienza por debajo de la temperatura de congelación del agua pura (0°C) y sigue una curva de equilibrio que depende (en una forma difícil de predecir) de la composición del alimento (ver (1) para más detalles). Las propiedades físicas, capacidad calorífica C_p , conductividad térmica k y densidad ρ varían fuertemente en ese rango de temperatura. El sistema es no lineal; además es difícil medir o predecir los valores de las propiedades que dependen de la composición, estructura y temperatura.

Ante estas dificultades ha tenido un gran avance el desarrollo de métodos aproximados de predicción de tiempos de congelación y descongelación, los que necesitan mucha menor información sobre valores de propiedades y su variación con la temperatura.

En (1) se discutió largamente sobre los métodos más adecuados para geometrías simples. La realidad es que una gran proporción de los alimentos que se congelan no pueden asimilarse a esas geometrías (cortes de carne, pescados enteros,

frutas u hortalizas enteras, etc). Para estas situaciones se deben desarrollar métodos aproximados de predicción específicos o, más habitualmente, adaptar los de los casos unidimensionales por algún tipo de corrección que tenga en cuenta la forma. Estos aspectos son los que se discuten a continuación:

FORMAS MULTIDIMENSIONALES

1. METODOS ESPECIFICOS

Valen para productos de una forma determinada. Pueden llegar a ser muy precisos porque fueron deducidos para esa forma en particular. Su desventaja es que no se los puede generalizar y, en algunos casos, son de uso muy complejo.

Veremos brevemente algunos ejemplos característicos:

a) Hayakawa y colaboradores en distintos trabajos (2), (3), (4), (5) y (6) obtienen regresiones basadas en resultados de métodos numéricos. Cubren las geometrías de:

- Cilindro finito
- Varilla rectangular "infinita"
- Esferoides

Obtienen métodos aproximados para predecir tiempos de congelación (t_c) y de descongelación (t_d). Son regresiones con 7 u 8 parámetros adimensionales y de hasta 32 términos, muy difíciles de emplear.

b) Lin, Kwok, Ni y Dai (7) obtienen soluciones aproximadas para cubos y varillas cuadradas de longitud "infinita"

Usan la solución para formas simples con un "radio equivalente" Req .

Para cubo: $Req = 1.126 R$ (R = radio de la esfera inscrita) y la solución para esferas

Para varilla cuadrada infinita: $Req = 1.066 R$ (R = radio del cilindro infinito inscripto)

y la solución para cilindro infinito.

Comparando con casos teóricos idealizados les dá error máximo de $\pm 21 \%$ para cubos y $\pm 12 \%$ para varillas.

c) Chung y Merritt (8) calculan t_c para cilindros finitos según:

$t_c = t_p + t_f + t_a$ t_p = tiempo de preenfriamiento

t_f = tiempo de cambio de fase

t_a = tiempo de atemperado

Usan t_p y t_a para un cilindro finito (con propiedades constantes) y t_f por una ecuación de Plank (1) modificada. Para 49 datos experimentales propios les dá un error de entre -9.3% y $+ 14.9 \%$.

2. METODOS GENERALES

Todos se basan en "corregir" el t_c o t_d de una forma simple (generalmente placa plana) por uno o más factores.

Esos factores = función (forma, B_i , St_e , P_k) ($B_i = h L/k$, con h = coeficiente de transferencia de calor; L = longitud característica. $St_e = \rho_c C_{pc} (T_{cr} - T_a)/\Delta H$, con ρ_c y C_{pc} de la fase congelada, T_{cr} : temperatura de inicio de congelación, T_a : temperatura ambiente (externa) y ΔH : entalpía de cambio de fase entre T_{cr} y T_c , T_c : temperatura final en el centro térmico. $P_k = \rho_o C_{po} (T_i - T_{cr})/\Delta H$, con ρ_o y C_{po} del producto sin congelar y T_i : temperatura inicial).

Para el t_c o t_d de la forma simple se utiliza una fórmula aproximada de precisión comprobada, tal las citadas en (1) de Cleland y Earle (ec. (3)), Pham o Salvadori et al. (ecs. (4) o (5)), entre otras.

Origen de los factores de forma: La idea no es nueva y se basa en estudios de transferencia de calor por conducción en sólidos sin cambio de fase (calentamiento o

enfriamiento).

En esos casos, si se tiene un sistema con $Bi \rightarrow 0$, no hay perfil interno de temperatura. Se puede hacer un balance macroscópico que dá:

$$\rho C_p V \frac{dT}{dt} = -hA(T-T_a)$$

Con T = temperatura

t = tiempo

V = volumen

A = área superficial

L = longitud característica

$$\frac{dT}{dt} = - \left(\frac{AL}{V} \right) \left(\frac{h}{\rho C_p L} \right) (T-T_a)$$

La velocidad de enfriamiento dT/dt es proporcional a la relación área/volumen dada por AL/V . El tiempo de proceso es inversamente proporcional a la velocidad de enfriamiento y a la relación área/volumen.

Se obtiene: $t_{placa} : t_{cilindro} \infty : t_{esfera} = 6 : 3 : 2 = 3 : 1.5 : 1$

pues es:

$$\left(\frac{AL}{V} \right)_{placa} : \left(\frac{AL}{V} \right)_{cil.\infty} : \left(\frac{AL}{V} \right)_{esfera} = 1 : 1/2 : 1/3$$

Las relaciones para otras formas regulares (paralelepípedo, cilindro finito) también pueden obtenerse fácilmente.

Pero para $Bi \rightarrow \infty$ la relación vista varía a $1 : 1/2.24 : 1/4$.

O sea que dependen del Bi . Además en sistemas con cambio de fase, al haber propiedades fuertemente variables, también depende algo de Ste y Pk . La idea es sistematizar esas relaciones como factores de corrección explicitando su dependencia con la forma, Bi y, en algunos casos, Ste y Pk

Hay 3 enfoques, en esencia no muy diferentes, que cubren la mayoría de las formas habituales y que dan resultados de precisión comprobada testeándolos contra la mayor parte de la información teórica y experimental existente

A. Enfoque de Cleland y Earle. R.L. Earle, junto con A.C. Cleland y posteriormente D.J. Cleland a lo largo de varios trabajos fueron perfeccionando el concepto de EHTD (equivalent heat transfer dimensions), o más simplemente E (9), (10), (11), (12).

Partiendo de la relación 6:3:2 para placa: cil.∞: esfera que vale para $Bi = 0$, definen que para $Bi \neq 0$ es:

$$\frac{t_c}{t_{cpl}} = \frac{1}{E}$$

t_c = el de la forma en estudio

t_{cpl} = el de la placa plana

$E = f(\text{forma}, Bi, Ste, Pk)$. El E implica aproximadamente a "cuantas superficies de placa plana" se puede asimilar la forma del alimento.

En etapas posteriores simplificaron a una relación (levemente menos precisa pero más simple) del tipo:

$E = f(\text{forma}, Bi)$. En estos casos la regresionaron para valores medios de Ste y Pk, para Bi entre 0.1 y 100 y para β_1 y β_2 entre 1 y 10 (β_1 y β_2 son las relaciones de las longitudes del 2do. y/o 3er. lado (eje) respecto del menor que da el L; $\beta_1 = L_2/L_1$; $\beta_2 = L_3/L_1$).

La forma que les dio definitiva, después de distintas mejoras es:

1) Para formas regulares:

$$E = G_1 + G_2 E_1 + G_3 E_2$$

$$E_1 = \frac{X\left(\frac{2.32}{\beta_1^{1.77}}\right)}{\beta_1} + \frac{\left[1 - X\left(\frac{2.32}{\beta_1^{1.77}}\right)\right]0.73}{\beta_1^{2.50}}$$

$$E_2 = \frac{X\left(\frac{2.32}{\beta_2^{1.77}}\right)}{\beta_2} + \frac{\left[1 - X\left(\frac{2.32}{\beta_2^{1.77}}\right)\right]0.50}{\beta_2^{3.69}}$$

donde $X(\text{arg.}) = \text{arg.}/(\text{Bi}^{1.34}/\text{arg.})$

Forma	G1	G2	G3
Placa plana infinita	1	0	0
Cilindro infinito	2	0	0
Esfera	3	0	0
Cilindro finito chato	1	2	0
Cilindro finito alargado	2	0	1
Varilla rectangular infinita Paralelepípedo	1	1	0
rectángulo	1	1	1
Formas bidimensionales	1	1	0
Formas tridimensionales	1	1	1

II) **Para formas irregulares:** Vieron que el enfoque anterior no alcanzaba a definir bien las situaciones de formas irregulares. Llegaron a la conclusión que cualquier caso se puede caracterizar con D, V, A, Bi y uno o dos descriptores de forma.

D se puede definir: 1) Como el menor espesor medido a lo largo de una recta que pasa por el centro termodinámico; o

2) Dos veces la distancia más corta entre el centro termodinámico y la superficie.

A veces ni se puede hallar bien la posición del centro y ésta cambia durante el proceso. Para cuerpos poco distorsionados ambas definiciones son casi equivalentes. Los descriptores de forma reemplazan a β_1 y β_2 . De todos los posibles eligen P1 y P2 que son los perímetros de 2 secciones transversales al cuerpo, perpendiculares entre sí y cuya intersección pasa por el centro termodinámico y es D (la longitud característica). Estos perímetros deben ser el menor y el mayor posibles de obtener bajo estas condiciones. Los planos así definidos por estos perímetros tienen áreas S1 y S2; de aquí se obtienen los descriptores de forma:

$$\nabla_1 = \frac{4 S_1}{(\pi D^2)} \quad \nabla_2 = \frac{4 S_2}{(\pi D^2)}$$

Lo que hacen estos descriptores es comparar S1 y S2 con el área de un círculo de diámetro D y dan una idea cuantificada de la distorsión respecto a una esfera.

Sigue valiendo que $E = G_1 + G_2 E_1 + G_3 E_2$, con los mismos valores para G1, G2, G3 y X(arg) y con:

$$E_1 = \left[\frac{L_1 D}{2 S_1} - 1 \right] \left[X \left(\frac{3.56}{\nabla_1^{1.77}} \right) + \left(1 - X \left(\frac{3.56}{\nabla_1^{1.77}} \right) \right) / \nabla_1^{1.47} \right]$$

$$E_2 = \left[\frac{L_2 D}{2 S_2} - 1 \right] \left[X \left(\frac{3.56}{\nabla_2^{1.77}} \right) + \left(1 - X \left(\frac{3.56}{\nabla_2^{1.77}} \right) \right) / \nabla_2^{2.75} \right]$$

B. Enfoque de Pham

En 2 trabajos (13), (14), Q.T. Pham presenta la idea del MCP (mean conducting path = camino conductivo medio). Se trata de un "espesor promedio ponderado" o "espesor equivalente" D_m que debe reemplazarse en las fórmulas para placa plana en lugar del D (por ej.: en la de (1) ya citada, u otra similar) para representar la conducta

del cuerpo multidimensional.

Encuentra el valor exacto de D_m/D para formas muy simples. Para otros casos obtiene en forma aproximada como $r = D_m/D = f(Bi, \beta_1, \beta_2)$, probando distintas combinaciones lineales de funciones de β_1 y β_2 . Los resultados no son muy precisos. Pero en los trabajos ya citados (10), (11) se deducen las relaciones exactas entre E y r a través de G_1, G_2, G_3, ∇_1 y ∇_2 (o sea que ambos enfoques son equivalentes).

$$r = D_m/D = 1 + (2 - G_1)M_1 + G_2M_2 + M_3$$

$$M_1 = X \left(3.08 \frac{G_2}{\nabla_1^{1.90}} \right) 0.65 Bi^{0.39} (\nabla_1^{1.39} - 1)$$

$$M_2 = X \left(3.08 \frac{G_3}{\nabla_1^{1.90}} \right) 0.65 Bi^{0.39} (\nabla_2^{1.26} - 1)$$

$$M_3 = \left(1 - X \left[3.08 \left(\frac{G_2}{\nabla_1^{1.90}} + \frac{G_3}{\nabla_2^{1.90}} \right) / (G_2 G_3 + 1) \right] \right)$$

$$\left[\frac{AD / (2V)}{G_1 + G_2 \left[\frac{L_1 D}{2S_1} - 1 \right] / \nabla_1^{1.47} + G_3 \left[\frac{L_2 D}{2S_2} - 1 \right] / \nabla_2^{1.75}} - 1 \right]$$

C. Enfoque de Arroyo y Mascheroni

Utilizan dos coeficientes de forma siguiendo un enfoque similar al de Cleland y Earle, aunque realizando la corrección de distinta manera (15), (16), (17).

Partiendo de cualquier método aproximado de predicción de t_c o t_d de la forma: lo corrigen según:

$$t_{pl} = f(T_i, T_a, T_c, h, L) \left(\frac{B}{B_i} + C \right)^D$$

$$t = V^* f(T_i, T_a, T_c, h, L) \left(\frac{B}{B_i} + A^* C \right)^D$$

donde V^* corrige sólo por la forma (su influencia es independiente de los parámetros del sistema). A^* , aunque también depende sólo de la forma, está dentro de un factor que incluye al B_i . Su influencia es distinta según el valor de B_i , siendo el factor de corrección para altos B_i (cuando $B/B_i \ll 1$).

$V^* = \text{volumen adimensional} = V/(A'L)$, donde

$$A' = L \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{L_i} \right)$$

Los A_i y L_i son los correspondientes a cada una de las n caras del cuerpo.

El V^* es una versión levemente modificada de la relación volumen/área tradicional y da más peso en la transferencia a las caras de menor espesor.

A^* = factor de corrección para altos B_i . Se obtiene por consideraciones puramente geométricas (15).

Ambos coeficientes tienen valores exactos o pueden calcularse con muy poco error para los alimentos de las formas más usuales, tal cual se presenta en la tabla de la página siguiente:

FORMA	V*	A*
Placa plana infinita	1	1
Cilindro infinito	1/2	1
Esfera	1/3	1
Cilindro largo ($L_1 > 2R$) finito chato ($L_1 < 2R$)	$1/[(2R/L_1)^2 + 2]$	$(4R^2/L_1^2 + 1)^{1/2}$
	$1/[1 + (L_1/R)^2/2]$	1
Varilla rectangular ∞ o placa rectangular aislada	$1/[1 + (L_1/L_2)^2]$	1
Varilla elíptica infinita	$1/[2 L_1^2/L_2^2 + 2]^{1/2}$	1
Cilindros distorsionados infinitos de (18)	$(1 + L_2/L_1)/[2 + (2 + 2L_2^2/L_1^2)^{1/2}]$	1
Forma 4 de (18)	0.719 ⁺	1
Forma 8 de (18)	0.843 ⁺	1
Manzana	0.335 ⁺	1
Pera	0.360 - 0.385 ⁺	1
Frutilla	0.434 ⁺	1
Huevo de (18)	0.4002 ⁺	1
Pirámide rectangular truncada de (18)	0.528 ⁺	1.19
Paralelepípedo rectángulo	$1/[(L_1/L_3)^2 + (L_1/L_2)^2 + 1]$	$(L_2^2 + L_3^2)^{1/2}/L_3$
oblató	$\frac{4}{6 + 3(L_1/L_2)^2 \ln[(1+e)/(1-e)]/e}$	1
Esferoide prolato	$2/[3(L_1/L_2 + (1/e)\sin^{-1}(e))]^2$	1

+ valores aproximados; ++ e = excentricidad = $[1 - (L_1/L_2)^2]^{1/2}$; $L_1 < L_2 < L_3$

D. Corrección de Hossain, Cleland y Cleland al caso A.

En tres trabajos muy recientes (19), (20), (21) presentan el fundamento teórico a los valores de E, basándose en estudios de calentamiento o refrigeración sin cambio de fase y obtienen nuevas ecuaciones para su predicción.

I. Para formas regulares (19) tratan sobre

- varilla rectangular infinita
- cilindro finito alargado
- cilindro finito chato
- paralelepípedo rectángulo

Para cada caso dan un desarrollo completo y uno asintótico para $Bi < 1/6$.

Como ejemplo, para paralelepípedo rectángulo es:

$$E = \left(1 + \frac{2}{Bi}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{Bi}\right)^{-4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \lambda_n}{\left(\lambda_n^3 \left(1 + \frac{\sin^2 \lambda_n}{Bi}\right) \left[\frac{\lambda_n}{Bi} \sinh(\lambda_n \beta_1) + \cosh(\lambda_n \beta_1) \right] \right)} \right]}{1 - 8\beta_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sin \lambda_n \sin \lambda_m \left(\cosh \lambda_{nm} + \frac{\lambda_{nm}}{Bi\beta_2} \sinh \lambda_{nm} \right) \lambda_n \lambda_m \lambda_{nm}^2 \left(1 + \frac{1}{Bi} \sin^2 \lambda_n\right) \left(1 + \frac{\sin^2 \lambda_m}{Bi\beta_1}\right) \right]}$$

con λ_n y λ_m raíces de $Bi = \lambda_n \tan(\lambda_n)$ y $Bi \beta_1 = \lambda_m \tan(\lambda_m)$ y

$$\lambda_{nm}^2 = \lambda_n^2 \beta_2^2 + \lambda_m^2 (\beta_2/\beta_1)^2.$$

Da resultados algo más precisos que el E original de (11).

Para el caso asintótico es:

$$E_{as} = \left(1 + \frac{2}{Bi}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right) \left[\frac{2}{Bi} + \frac{2}{3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)} + \frac{1 + \beta_1 + \beta_2}{3} \right]^{-1}$$

II. Para formas irregulares bidimensionales (20) suponen una elipse equivalente de igual área transversal e igual longitud característica. Dan 2 opciones de cálculo.

Fórmula variacional (supone perfil cuadrático de temperatura)

$$E_{VM} = \frac{1 + \frac{Bi}{2}}{\frac{V}{AL} + \frac{Bi}{2} \left(\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right)}$$

Pseudo elipse para la cual hay solución exacta para el problema de Plank. Su forma varía con el Bi. Para $Bi \rightarrow \infty \rightarrow$ elipse verdadera. Para $Bi \rightarrow 0 \rightarrow$ varilla rectangular ∞ .

$$E_{PE} = 1 + \frac{1 + \frac{2}{Bi}}{\beta^2 + 2 \frac{\beta}{Bi}}$$

Da más preciso el segundo método que el primero y aún que el original de (11).

III. Para formas irregulares tridimensionales en (21) proponen una extensión del caso bidimensional. Usan la forma de un esferoide equivalente, de igual longitud característica, igual volumen e igual sección transversal menor (que incluye a la dimensión característica).

Fórmula variacional

$$E_{VM} = \frac{1 + \frac{Bi}{2}}{\frac{V}{AL} + \frac{\frac{Bi}{2}}{1 + \frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2}}}$$

Fórmula pseudoelipsoidal (tiende a elipsoide con $Bi \rightarrow \infty$ y a paralelepípedo rectángulo a $Bi \rightarrow 0$)

$$E_{PE} = 1 + \frac{1 + \frac{2}{Bi}}{\beta_1^2 + 2\beta_1/Bi} + \frac{1 + \frac{2}{Bi}}{\beta_2^2 + 2\beta_2/Bi}$$

De ambas la E_{PE} es más precisa respecto de datos numéricos, y también mejor que el E original.

CONCLUSIONES

Los tres métodos generales de predicción seleccionados: tipos A (y su extensión D), B y C presentan la mejor precisión de todos los métodos aproximados conocidos. Cualquiera de ellos puede utilizarse con buena precisión en casi todo el rango de variables de proceso habituales en congelación y descongelación. Su elección deberá hacerse principalmente en función de la mayor simplicidad de cálculo para la forma particular con la que se trabaje.

REFERENCIAS

1. Mascheroni, R.H. Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y de descongelación de alimentos. Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi" Nro. 17, pag. 55 (1989)
2. Hayakawa, K.I., Nonino, C., Succar, J. Two-dimensional heat conduction in food undergoing freezing: predicting freezing time of rectangular or finitely cylindrical food. J. Food Sci. 48, pag. 1841 (1983)
3. Succar, J., Hayakawa, K.I. Parametric analysis for predicting freezing time of infinitely slab-shaped food. J. Food Sci. 49, pag. 468 (1984)
4. Nonino, C., Hayakawa, K.I. Thawing time of frozen food of a rectangular or finitely cylindrical shape. J. Food Sci. 51, pag. 116 (1986)
5. Sheen, S., Hayakawa, K.I. Parametric analysis for the freezing of spheroidal and finitely cylindrical foods with volumetric change. J. Food Sci. 56, pag. 543 (1991)
6. Sheen, S., Hayakawa, K.I. Parametric analysis for thawing frozen spheroidal (prolate and oblate) or finitely cylindrical food. J. Food Sci. 57, pag. 236 (1992)
7. Lin, S., Kwok, C.K., Ni, S.M., Dai, W.L. A one-dimensional approach for solving freezing and melting processes in cubes and long square bars. ASHRAE Trans. 92-1A, pag. 3 (1986)
8. Chung, S.L., Merritt, J.H. Freezing time modeling for small finite cylindrical shaped foodstuff. J. Food Sci. 56, pag. 1072 (1991)
9. Cleland, A.C., Earle, R.L. A simple method for prediction of heating and cooling rates in solids of various shapes. Int. J. Refrig. 5, pag. 98 (1982)
10. Cleland, D.J., Cleland, A.C., Earle, R.L. Prediction of freezing and thawing times for multi-dimensional shapes by simple formulae. Part 1: regular shapes. Int. J. Refrig. 10, pag. 156 (1987)
11. Cleland, D.J., Cleland, A.C., Earle, R.L. Prediction of freezing and thawing times for multi-dimensional shapes by simple formulae. Part 2: irregular shapes. Int. J. Refrig.

- 10, pag. 234 (1987)
12. Cleland, A.C. Food refrigeration processes. Elsevier Appl. Sci. (1990)
13. Pham, Q.T. Analytical method for predicting freezing times of rectangular blocks of foodstuffs. Int. J. Refrig. 8, pag. 43 (1985)
14. Pham, Q.T. Simplified equation for predicting the freezing time of foodstuffs. J. Food Technol. 21, pag. 209 (1986)
15. Arroyo, J.G., Mascheroni, R.H. A generalized method for the prediction of freezing times of regular or irregular foods. Progress in the Science and Technology of Refrigeration in Food Engineering, IIR, Dresden, pag. 643 (1990)
16. Mascheroni, R.H. Predicción de tiempos de descongelación de alimentos. La Técnica del Frío y del Calor. 40 (430), pag. 32 (1992)
17. Mascheroni, R.H. The use of shape factors to model multidimensional heat conduction. Their application to the prediction of thawing times of foods. Proposals for the Generation and Use of Refrigeration in the 21 st. Century, IIR, Buenos Aires, pag. 248 (1993)
18. Cleland, D.J., Cleland, A.C., Earle, R.L., Byrne, S.J. Experimental data for freezing and thawing of multidimensional shapes. Int. J. Refrig. 10, pag. 22 (1987)
19. Hossain, Md.M., Cleland, D.J., Cleland, A.C. Prediction of freezing and thawing times for foods of regular multidimensional shape by using an analytically derived geometric factor. Int. J. Refrig. 15, pag. 227 (1992)
20. Hossain, Md.M., Cleland, D.J., Cleland, A.C. Prediction of freezing and thawing times for foods of two-dimensional irregular shape by using a semi-analytical geometric factor. Int. J. Refrig. 15, pag. 235 (1992)
21. Hossain, Md.M., Cleland, D.J., Cleland, A.C. Prediction of freezing and thawing times for foods of three-dimensional irregular shape by using a semi-analytical geometric factor. Int. J. Refrig. 15, pag. 241 (1992)

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET por subsidiar esta presentación.

**Centro de Investigación y Desarrollo en
Criotecnología de Alimentos (CIDCA).
47 y 116 (1900) La Plata y
Facultad de Ingeniería, UNLP.**

**Numerical modeling of ablation phenomena as
two-phase Stefan problems**

by *M. Storti**

*Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC
Universidad Nacional del Litoral and CONICET
Güemes 3450, 3000 - Santa Fe, Argentina*

Tel: 54-42-55.91.81, Fax: 54-42-55.09.44, e-mail: rngtm@arcride.edu.ar

Abstract

A fixed domain numerical scheme based on the enthalpy formulation and with temperature as the main dependent variable is presented. A fictitious material which occupies the region where the material has been removed is introduced, and its material properties are: null specific heat and any value for the conductivity, preferably that of the lower temperature phase. The ablating surface is transformed on an internal interphase and the thermal load there is represented as a concentrated internal heat source on the interphase. The resulting two phase Stefan problem is discretized with the scheme presented in a series of previous papers [1,3,4,5]. Finally, several numerical examples are presented.

Index

- 0. Introduction
- 1. Problem description
- 2. Two-phase equivalent formulation
 - 2.1 A two-phase formulation for the 1D problem
 - 2.2 The multidimensional problem
- 3. Discretization scheme
- 4. Numerical examples
 - 4.1 One-dimensional example with exact solution by truncation of the Neumann solution
 - 4.1.1 Problem description
 - 4.1.2 Numerical results
 - 4.2 Asymptotic solution for the constant load problem
 - 4.2.1 Problem description
 - 4.2.2 Numerical results
 - 4.3 Ablation of a thermal protection
- 5. Conclusions
- A. Notation and Symbols
- B. References

0. Introduction

Thermal ablation is a very important problem in aerospace industry [2] (thermal protection of space vehicles during the reentry stage and in rocket nozzles) and laser welding. A severe heat flux, typically coming from radiation or convection, is applied to the body, which is initially in "virgin" phase. As the temperature rises it can experiment one or several chemical transformations. In the case of thermal protection for the aerospace industry these are, typically, pyrolysis with gas emission and melting. For the thermal protection to be effective all these reactions must be strongly endothermic. The material exposed to the thermal load is removed by several effects: mechanical (high shear stresses in the aerodynamic boundary layer) or chemical. In the case of a phase change to a phase with very low mechanical strength, the material is removed immediately after it reaches the phase change temperature. This is the Stefan-type or phase-change ablation and it will be the physical model adopted in what follows.

Ablation problems, as well as one or two phase Stefan problems, are moving boundary problems. The enthalpy balance equation for the two phase Stefan problem is a single equation which includes the heat equation in each phase and the energy balance equation at the interphase. Discretization of this single equation leads to the enthalpy formulation which allows the use of fixed meshes. The phase change is present as a singularity in the enthalpy/temperature relationship and the interphase is "captured" by the algorithm, rather than being "tracked". In a series of papers we presented a discretization scheme based on the enthalpy formulation for two (or more) phase Stefan problems. The scheme has the temperature as the main unknown without regularization parameters. The most important difficulties present are: the accurate integration of a discontinuous quantity, namely the enthalpy, over the partially melted elements [3] and the efficient solution of the non-linear resulting system, described in [4].

The basic idea of the present work is to put the one-phase ablation problem in the context of the two-phase Stefan one by means of the introduction of a fictitious phase occupying the region where material has been removed. This fictitious phase exists at temperatures above the phase change one and it has null specific heat so that eventual variations of temperature does not contribute to the energy balance. Furthermore its conductivity is specified as the same of the low temperature phase, so that its thermal diffusivity is infinitely higher than that of the low temperature phase. As a consequence, the fictitious phase is always in quasi-steady state and, due to the particular boundary condition (null flux at initial boundaries and temperature equal to the melting one at the interphase), it has a uniform temperature infinitesimally higher than the melting one.

1. Problem description

For simplicity we will assume no intermediate transformation so that as the virgin material is heated and its temperature exceeds the melting temperature T_m it transforms to the low mechanical strength phase and is instantaneously removed. Initially, the virgin material occupies the domain Ω with boundary Γ . Due to thermal loads \bar{q} over certain part of the boundary $\Gamma_q(t = 0) \subset \Gamma$, the

temperature rises and once the T_m is reached at some time $t = t_0$ at some point of the boundary, material begins to be removed. For $t > t_0$ we have the domain Ω partitioned in two: $\Omega = \Omega_v \cup \Omega_{rem}$ (from virgin and removed, see figure 1). Due to the remotion of some part of the material, the surface exposed to the thermal load is no longer $\Gamma_q(t = 0)$, but it is composed by part of it and the moving boundary. If the thermal load is no longer applied after certain moment, the temperature of the moving boundary could descend below T_m and the front ceases to advance.

All this cases are included in the following governing equations:

Given $T_i(\mathbf{x})$ for \mathbf{x} in Ω , $\bar{q}(t, T(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ for $t > 0$ and \mathbf{x} in $\Gamma_q(t)$, and $\bar{T}(\mathbf{x}) < T_m$ for \mathbf{x} in Γ_T , find $\Omega_v(t)$ and $T(\mathbf{x}, t)$ for $t > 0$ and $\mathbf{x} \in \Omega_v(t)$ such that:

$$\rho c_p \dot{T} = \nabla \cdot (k \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega_v(t), t > 0 \quad (1)$$

$$Lv - k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_q(t)} = \bar{q}(T|_{\Gamma_q}), \quad \text{in } \Gamma_q(t) \quad (2)$$

$$T = \bar{T}, \quad \text{in } \Gamma_T \quad (3)$$

$$\partial \Omega_v = \Gamma_q(t) \cup \Gamma_T \quad (4)$$

where v is the normal advance speed of the moving front, which is restricted by the following complementary conditions:

$$T < T_m, \quad v = 0, \quad (\text{steady front}) \quad (5)$$

$$T = T_m, \quad v \geq 0, \quad (\text{moving front}), \quad (6)$$

and initial conditions:

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7)$$

$$\Omega_v(t = 0) = \Omega, \quad \Omega_{rem}(t = 0) = \emptyset \quad (8)$$

Here k is the thermal conductivity, and L the latent heat of the phase change. Expression (2) is the usual energy balance at the interphase for moving boundary problems. The expression for \bar{q} is often more complicated, since, in general, it involves a boundary layer calculation over the surface of the body abd, then, results in a non-local function, depending on the global shape of the ablating surface $\Gamma_q(t)$. However, this complex dependence is treated in an explicit form and, then, the presented representation is quite sufficient to explain the algorithm.

2. Two-phase equivalent formulation

2.1 A two-phase formulation for the 1D problem

For the one-dimensional semi-infinite problem equations (1-8) reduces to:

Given $T_i(x)$ for $x > 0$ and $\bar{q}(t)$ for $t > 0$, find $s(t)$ for $t > 0$ and $T(x, t)$ for $t > 0$, $x > s(t)$ such that:

$$\rho c_p \dot{T} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > s(t), t > 0 \quad (9)$$

with boundary conditions:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} + L \dot{s} = q(t), \quad \text{in } x = s(t) \quad (10)$$

$$T(s(t)) = T_m \quad \text{and } \dot{s} > 0 \quad \text{or} \quad T < T_m \quad \text{and } \dot{s} = 0 \quad (11)$$

and initial conditions:

$$s(0) = 0, \quad T(x, 0) = T_i(x) \quad (12)$$

For simplicity suppose $k, \rho c_p$ constants and \bar{q} depending only on time, i.e. not on surface temperature as in the case of radiation or convection. A possible extension to a two-phase Stefan problem is the following: the fictitious phase exists for $T > T_m$ and $k_{\text{fic}} = k_v, \rho c_{p_{\text{fic}}} = 0$. The thermal load $q(t)$ is applied on $x = 0$ (see figure 2). In detail:

Given $T_i(x)$ for $x > 0$ and $\bar{q}(t)$ for $t > 0$ find $T(x, t)$ such that for $x > 0, t > 0$:

$$\dot{h} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (13)$$

with boundary conditions:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q(t), \quad \text{in } x = 0, t > 0 \quad (14)$$

and initial conditions:

$$T(x, 0) = T_i(x), \quad \text{para } t = 0 \quad (15)$$

The enthalpy function is (see figure 3 for the general case $c_{p_v} = c_{p_v}(T)$):

$$h(T) = \begin{cases} \rho c_{p_v}(T - T_m); & T < T_m \\ L; & T \geq T_m \end{cases} \quad (16)$$

($h(T_m^-) = 0$ has been taken as the reference enthalpy).

In the following we will show how this formulation reduces to the original one (9-12). The non-trivial part of the demonstration consists in showing how the energy balance at the interphase (10) is enforced for $t > t_0$. The specific heat is null in the fictitious phase $0 \leq x \leq s(t)$ so that it is in steady state:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0, \quad \text{in } 0 \leq x < s(t) \quad (17)$$

and then:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x(t)} = k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_0} - q(t) \quad (18)$$

but, by the energy balance at the interphase for the two-phase problem:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s(t)^+} + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s(t)^-} = L\dot{s} \quad \text{in } x = s(t), t > t_0 \quad (19)$$

From (18) and (19) we obtain the desired energy balance at the surface:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s^+} + L\dot{s} = \bar{q}(t) \quad \text{in } x = s(t) \quad (20)$$

This formulation is very well suited to apply all the theory from the two-phase problem (the resulting system is symmetric and positive definite). However it can not be extended to the multidimensional case: in 1D all the heat flux imposed at $x = 0$ is transmitted to the free boundary through the fictitious phase without inertia. In the multidimensional case the heat flux applied at the original surface of the body is redistributed in the fictitious phase and there is no control on the density of flux at each point of the interphase.

To overcome this difficulty, the formulation is slightly modified as follows: the thermal load \bar{q} is no longer applied at $x = 0$ but is represented as a concentrated heat source in the interphase (see figure 4). The properties for the fictitious phase are the same as in the previous model:

Given $T_i(x)$ for $x > 0$ and $\bar{q}(t)$ for $t > 0$, find $T(x, t)$ for $t > 0$, $x > 0$
such that:

$$\dot{h} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q(x, t), \quad \text{in } x > 0 \quad (21)$$

with boundary conditions:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = \begin{cases} \bar{q}(t) & \text{if } T(x=0) < T_m \\ 0 & \text{if } T(x=0) \geq T_m \end{cases} \quad \text{at } x = 0 \quad (22)$$

and initial conditions:

$$T(x, 0) = T_i(x) \quad (23)$$

The heat source $Q(x, t)$ is proportional to a Dirac's δ distribution at the moving front $T = T_m$, with a total amount of heat delivered per unit time given by the thermal load $\bar{q}(t)$:

$$\int_0^\infty Q(x, t) \phi(x) dx = \bar{q}(t) \phi(s(t)) \quad (24)$$

where ϕ is a test function. Now, we will show how this formulation is equivalent to the original one. As in the previous formulation, the fictitious phase is in the steady state and, then, the heat flux is constant throughout:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s^-} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_0 = 0 \quad (25)$$

The energy balance at the interphase, taking account of the concentrated source Q , is:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s^-} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s^+} + L\dot{s} - \int_{s^-}^{s^+} Q(x, t) dx \quad (26)$$

Now, using (24) and ():

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_v + L\dot{s} = \bar{q}(t), \quad (27)$$

and the desired energy balance is enforced.

2.2 The multidimensional problem

The extension to the multidimensional case is now obvious:

Given $T_i(\mathbf{x})$ for \mathbf{x} in Ω , $\bar{q}(t, \mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$ for $t > 0$ and \mathbf{x} in Ω , find $T(\mathbf{x}, t)$ for \mathbf{x} in Ω , $t > 0$ such that:

$$\dot{h} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q(\mathbf{x}, t), \quad \text{in } \Omega, t > 0 \quad (28)$$

with boundary conditions:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \begin{cases} \bar{q}(t); & \text{if } T < T_m; \\ 0; & \text{if } T \geq T_m; \end{cases} \quad \text{in } \Gamma_q(t=0) \quad (29)$$

$$T = \bar{T}, \quad \text{in } \Gamma_T \quad (30)$$

where \hat{n} is the unit normal exterior to Ω_{fic} , and initial conditions:

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_i(\mathbf{x}), \quad \text{for } t = 0 \quad (31)$$

$h(T)$ is defined always by (17) and the generalization of the definition of Q (24) is:

$$\int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma_m} \bar{q}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dS \quad (32)$$

To show the equivalence with the original ablation problem (1-8), we note first that, as the specific heat of the fictitious phase is null, we have:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0, \quad \text{in } \Omega_{\text{fic}} \quad (33)$$

with boundary conditions:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \text{in } \Gamma_q(t=0), \quad \text{and} \quad T = T_m \quad \text{in } \Gamma_m \quad (\text{moving front}) \quad (34)$$

The solution to this steady problem is trivial:

$$T \equiv T_m, \quad \text{in } \Omega_{\text{fic}} \quad (35)$$

But this implies that the heat flux coming to the interphase from the fictitious

phase is null:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{fic}} = 0 \quad (36)$$

Writing down an energy balance over a small “pillbox” shaped control-volume of thickness δ enclosing an elementary portion of surface dS of the interphase, we arrive to:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{fic}} dS + k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{v}} dS + Q dS \delta = Lv_n dS \quad (37)$$

where $\hat{\mathbf{n}}$ is the unit normal exterior to Ω_{fic} . But, from the definition of Q , equation (32):

$$Q d\Omega = Q dS \delta = \bar{q} dS \quad (38)$$

replacing (38) and (36) in (37) we arrive to the desired energy balance at the interphase:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{v}} + Lv_n = \bar{q} \quad \text{in } \Gamma_m \quad (39)$$

3. Discretization scheme

Once the ablation problem has been cast in the form of an equivalent two-phase Stefan problem, any discretization scheme for this last, simpler, problem can be applied. Certainly, the equivalent two-phase problem is harder than typical two-phase Stefan problems due to the null specific heat for the fictitious phase, and some degree of robustness of the scheme is advisable. In the following we will review briefly the discretization scheme which has been presented in previous papers [1,3,4,5], and has been used successfully in the numerical experiments presented in section §4.

First we recall the variational formulation of the Stefan problem:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot k \nabla T d\Omega - \int_{\Gamma_q} \phi \bar{q} dS - \int_{\Omega} \phi Q d\Omega = 0, \quad (40)$$

where ϕ is a test function such that it vanishes at the Dirichlet boundary. As usual in the finite element method (FEM) the temperature field is approximated by:

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mu=1}^N T_{\mu}(t) N_{\mu}(\mathbf{x}) \quad (41)$$

where μ is node index and the $\{N_{\mu}(\mathbf{x})\}$ are FEM interpolation functions. Also, the interpolation functions corresponding to those nodes which do not belong to the Dirichlet part of the boundary are taken as test functions. Replacing (41) in (40) and ϕ by each of the interpolation functions we obtain a nonlinear ODE's system of the form:

$$\dot{\mathbf{h}}(\mathbf{T}) = \mathbf{f}(\mathbf{T}) + \mathbf{g}(t) \quad (42)$$

where \mathbf{h} , \mathbf{f} and \mathbf{g} are column vectors of length $N =$ number of nodes, with entries:

$$h_\mu = \int_{\Omega} N_\mu h(T(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad (\text{nodal enthalpies}) \quad (43)$$

$$f_\mu = - \int_{\Omega} \nabla N_\mu \cdot k \nabla T(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (\text{nodal conductive fluxes}) \quad (44)$$

$$g_\mu = \int_{\Omega} N_\mu Q(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_\mu \bar{q} dS \quad (\text{nodal external thermal loads}) \quad (45)$$

The difficulty comes from the fact that the relation between \mathbf{T} and \mathbf{h} is not one-to-one. The ODE's system is discretized in time according to a generalized trapezoidal rule as:

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{h}(\mathbf{T}(t + \Delta t)) - \mathbf{h}(\mathbf{T}(t))) = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{T}(t + \Delta t)) + (1 - \alpha) \mathbf{f}(\mathbf{T}(t)) + \mathbf{g}(t + \alpha \Delta t) \quad (46)$$

This scheme reduces to: forward Euler, Crank-Nicholson, Galerkin and backward Euler for $\alpha = 0, 1/2, 2/3$ and 1 , respectively. For a given temperature vector \mathbf{T} at time t , equation (46) is a nonlinear equation for $\mathbf{T}(t + \Delta t)$. Non-linearity comes from the dependence of k and ρc_p on temperature and also from the change of phase which, as a matter of fact, could be viewed as a δ -type singularity in the $\rho c_p(T)$ relationship. The expression for the nodal enthalpies (43) involves the integral over the element of the enthalpy which is discontinuous at the interphase. This integral must be evaluated very carefully, mainly by a reason of conditioning of the non-linear system than by a reason of accuracy [3-4]. For instance, the classical numerical quadrature by Gauss points, so familiar in the FEM, gives nodal enthalpies with jumps at those nodal temperatures where the interphase passes through a Gauss point.

For the implicit schemes ($\alpha \geq 1/2$), the non-linear system is solved by Newton-Raphson iteration, and a correct evaluation of the jacobian is the key feature to obtain good convergence properties. Besides the usual terms in the jacobian, like the conductivity matrix and the capacity matrix corresponding to sensible heat, there is a term coming from the latent heat which dominates at small Stefan numbers (high latent heat), and whose expression is [4]:

$$M_{\mu\nu}^L = \frac{\partial h_\mu^L}{\partial T_\nu} = \int_{T=T_m} N_\mu(\mathbf{x}) \frac{L}{|\nabla T|} N_\nu(\mathbf{x}) dS \quad (47)$$

where h^L is that part of the enthalpy coming from the latent heat. The integral is calculated over the interphase $T = T_m$, and its physical significance shows up if the factor $L/|\nabla T|$ is interpreted as the specific heat per unit area of the interphase. In numerical experiments at low Stefan numbers (high latent heat) the full Newton-Raphson method has been proved to be much more efficient and robust than secant methods, i.e. methods which do not include this interphase capacity matrix.

There is a point to be clarified, regarding the character of the thermal load

vector coming from the heat source $Q(x, t)$. In fact, this is not a standard heat source, since it depends on the temperature vector through the position of the interphase, besides the explicit dependence of the flux density on the temperature of the ablating surface. Then, it contributes also with a term to the jacobian of the system, whose expression is rather complicated: it has one term coming from a change in the interpolation function at the interphase due to its movement and another coming from a change in the curvature of the interphase [6]. We have not included this term in the iteration matrix, but no instability has been observed, as it could be expected.

4. Numerical examples

4.1 One-dimensional example with exact solution by truncation of the Neumann solution

4.1.1 Problem description

Consider the following standard unsteady heat-conduction problem with constant coefficients in a semi-infinite medium:

$$\rho c_p \dot{T} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{para } x > 0, t > 0 \quad (48.a)$$

$$T(0, t) = T_w, \quad (48.b)$$

$$T(x, 0) = T_i. \quad (48.c)$$

with $T_i < T_w$. The so-called Neumann solution is obtained by similarity arguments in terms of the error function:

$$T(x, t) = T_w - (T_w - T_i) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right). \quad (49)$$

where $D = k/\rho c_p [=] \text{m}^2/\text{seg}$ is the diffusivity, and the error function is defined as:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x'^2} dx' \quad (50.a)$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \quad \operatorname{erf}(+\infty) = 1 \quad (50.b)$$

The ablation problem is constructed choosing some phase change temperature T_m , $T_i < T_m < T_w$, a latent heat $L > 0$ and an initial surface position $s_0 > 0$, and selecting the heat flux history $\bar{q}(t)$ such that the resulting temperature field is given by (49).

The position of the interphase is obtained from:

$$T(s(t), t) = T_m \quad (51)$$

$$\frac{s(t)}{\sqrt{4Dt}} = \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{T_w - T_m}{T_w - T_i} \right) = s^*, \quad \dot{s} = s^* \sqrt{\frac{D}{t}} \quad (52)$$

and, the preheating time t_0 is given by:

$$\frac{s_0}{\sqrt{4Dt_0}} = s^* \quad (53)$$

For $t < t_0$ the heat to be applied at s_0 is given by:

$$\bar{q}(t) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s_0}, \quad t < t_0 \quad (54)$$

and for $t > t_0$ the latent heat delivered must be taken account:

$$\bar{q}(t) = L\dot{s} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s(t)^+}, \quad t > t_0 \quad (55)$$

Replacing the expression for the temperature field from (49) and the advance speed from (52) the explicit expression for the thermal load is:

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{\sqrt{4Dt}} (T_w - T_i) \exp\left(-\frac{s_0^2}{4Dt}\right); & \text{for } t < t_0 \\ \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \left(2Ls^*D + \frac{2}{\sqrt{\pi}} k(T_w - T_i)e^{-s^{*2}} \right); & \text{for } t > t_0 \end{cases} \quad (56)$$

(see figure 5). The thermal load is discontinuous at $t = t_0$, and the magnitude of the jump is:

$$\bar{q}(t_0 + 0) - \bar{q}(t_0 - 0) = \frac{2Ls^*D}{\sqrt{4Dt_0}} \quad (57)$$

4.1.2 Numerical results

The problem was solved numerically for the following values:

$$\begin{aligned} T_w &= 2, & T_m &= 1, & T_i &= 0, \\ \rho c_p &= k = 1, & L &= 5, & s_0 &= 0.5 \end{aligned}$$

from which:

$$\begin{aligned} Ste &= \frac{\rho c_p (T_m - T_i)}{L} = 0.2, & D &= 1, \\ s^* &= 0.477, & t_0 &= 0.275 \end{aligned}$$

The heat flux history is (see figure 5):

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} \frac{1.128}{\sqrt{t}} e^{-0.0625/t}; & t < 0.275 \\ \frac{3.283}{\sqrt{t}}; & t > 0.275 \end{cases}$$

The interval $0.5 \leq x \leq 7$ has been discretized with 50 elements with the following distribution:

$$\begin{aligned}
& 10 \text{ elements in } 0.5 \leq x \leq 1 \quad (\Delta x = 0.05), \\
& 20 \text{ elements in } 1 \leq x \leq 3 \quad (\Delta x = 0.1), \\
& 20 \text{ elements in } 3 \leq x \leq 7 \quad (\Delta x = 0.2).
\end{aligned}$$

In figures 6-7 we compare the numerical solution and the exact one for $t = 1.5$ and $t = 5$, and in both cases they agree very well. There is a little difference in the left at $t = 5$ since temperatures are significant there, and the null flux condition imposed at $x = 7$ is no longer valid. Finally, the temperature profile in the fictitious phase is not exactly T_m , but a little higher, as is expected. We remember that this does not affect the energy balance equation, since the specific heat is null in that zone. This effect is caused by the heat delivered by that portion of the material ablated during the last time step, and, then, can be reduced choosing a smaller time step.

4.2 Asymptotic solution for the constant load problem

4.2.1 Problem description

Consider now the typical case of a semi-infinite ($x > 0$) constant-coefficients problem with a constant heat load $\bar{q} \neq \bar{q}(t)$. For $t \rightarrow \infty$ the solution approaches asymptotically a steady profile moving at constant speed:

$$\dot{s} \rightarrow v_\infty, \quad T(x, t) = f(x - s(t))(T_m - T_i) + T_m \quad (58)$$

where v_∞ is the limit advancing speed and f is the normalized profile satisfying $f(0) = 0$ and $f(\infty) = 1$. As is typical in thermal transients, the approach to the limit solution is exponential, and we can put:

$$s(t) = -s_0 + v_\infty t + O(e^{-t/\tau}) \quad (59)$$

where s_0 is a limit shift produced by the transient and τ a characteristic decay time. v_∞ is easily obtained from a power balance:

$$(L + \rho c_p (T_m - T_i))v_\infty = \bar{q} \quad (60)$$

Replacing (58) in the heat conduction equation, and changing to a coordinate system attached to the moving profile, a simple ODE for f is obtained, whose solution is an exponential function. The resulting temperature profile is:

$$T(x, t) = T_m - (T_m - T_i) \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{x - v_\infty t + s_0}{l} \right) \right\}, \quad \text{for } x > v_\infty t - s_0 \quad (61)$$

where the characteristic decay length of the profile in the medium is: $l = D/v_\infty$. Finally, the limit shift is obtained from a balance of the total energy applied to the body:

$$\bar{q}t = [L + \rho c_p (T_m - T_i)](v_\infty t - s_0) + \rho c_p (T_m - T_i)l \int_0^\infty e^{-\xi} d\xi \quad (62)$$

and results in:

$$s_{\infty} = \frac{l}{1 + \text{Ste}^{-1}} \quad (63)$$

This asymptotic solution is known as the "evaporation-controlled limit".

4.2.2 Numerical results

We have solved this problem for the following physical data

$$T_i = 0, \quad T_m = 1, \quad \rho c_p = k = \mathcal{D} = 1$$

$$L = 5, \quad \bar{q} = 6$$

from which:

$$v_{\infty} = 1, \quad l = \tau = 1$$

$$\text{Ste} = 0.2, \quad s_{\infty} = 0.1666\dots$$

The grid is the same as that used in the previous example for $0.5 \leq x \leq 7$, and 10 elements have been added in $0 \leq x \leq 0.5$. In figures 8-9 we can see the numerical results for $t = 2$ and $t = 3$. The coincidence is very good, being better for $t = 3$, when the asymptotic approximation is expected to be better. It is worth to note that the algorithm predicts the advance speed exactly as a consequence that it satisfies exactly a discrete energy balance equation. In contrast, a numerical error is expected in the position of the moving front, related to the s_0 , since it is balanced in the energy equation with the energy contained in the profile, which has a numerical error. From the example, it can be seen that this error is not perceptible, even for small Stefan numbers.

The temperature in the fictitious phase exceeds the phase-change temperature in, at most, 6% of $(T_m - T_i)$.

4.3 Ablation of a thermal protection

The geometry (see figure 10) is a 180° sector of circular annulus $BCDAD'C'B$, with $R_{\text{ext}} = 1$, $R_{\text{int}} = 0.3$. The thermal load at a point P of the boundary CB depends of the incidence angle with respect to a point F over the symmetry plane AB at a distance of 2 unit lengths from the point B to the right:

$$\bar{q} = 5 \max\{\cos \theta, 0\}$$

where the incidence angle θ is given by:

$$\cos \theta = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_F}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_F\|}$$

and $\hat{\mathbf{n}}$ is the exterior unit normal to the domain. This kind of angular distribution is similar to that caused by aerodynamic heating. The remaining boundaries CD , DA and AB area adiabatic. The material properties are:

$$k = \rho c_p = 1, \quad L = 1, \quad T_m = 1$$

Initially the body is at temperature $T_i = 0$ and at $t = 0$ the thermal load is applied.

The Stefan number for the problem is:

$$\text{Ste} = \frac{\rho c_p (T_m - T_i)}{L} = 1$$

This value is similar to those found in standard problems with char as thermal protection [2].

The characteristic length, in the evaporation-controlled limit, for an equivalent one-dimensional problem is:

$$v_\infty = 2.5, \quad l = 0.4, \quad \tau = 0.16$$

We have chosen a time step of $\Delta t = 0.02$ and an implicit scheme with $\alpha = 1$. The FEM-mesh of 15×15 elements is shown in figure 10. By symmetry, only one half (90°) of the circular sector has been modeled. The isotherms at $t = 0.08, 0.10$ and 0.12 are shown in figures 11-13, respectively.

In figures 14-16 we can see the temperature as a 3D elevation surface for $t = 0, 0.1, 0.12$ and 0.16 . Note the temperature plateau in the removed part, near the nose of the protection at B . The temperature there is only slightly above the ablation temperature: 5% of $(T_m - T_i)$, at most. The temperature decays strongly in the interior, what is expected since the characteristic length of the thermal problem is nearly one half the characteristic length of the geometry, taken as R_{ext} .

5. Conclusions

An equivalent two-phase formulation for ablation problems is presented, which allows the modeling of ablation problems by means of a robust solver for the two-phase problem. The removed part is replaced by a fictitious material with null specific heat and the thermal load at the interphase is added as a strongly localized heat source. The advance speed of the moving front is predicted exactly for the one-dimensional constant-load problem. The temperature in the fictitious phase is almost constant, higher than the melting temperature.

A. Notation and Symbols

- c_p = specific heat
- \mathcal{D} = thermal diffusivity
- $\text{erf}(x)$ = error function
- f = scaled temperature profile
- \mathbf{f} = vector of conductive fluxes
- $()_{\text{fic}}$ = refers to the fictitious material
- \mathbf{g} = vector of thermal loads
- $h(T)$ = enthalpy
- \mathbf{h} = vector of nodal enthalpies
- k = thermal conductivity
- l = characteristic decay length of the temperature profile (see §4.2)
- L = latent heat
- $()^L$ = term coming from the latent heat contribution to the enthalpy
- \mathbf{M}^L = interphase capacity matrix

- \hat{n} = unit normal
- N_μ = FEM-interpolation function
- Q = volume heat source
- \bar{q} = thermal load at the boundary
- $()_{rem}$ = refers to the removed zone
- $s(t)$ = ablating surface position in one-dimensional problems
- dS = elementary portion of the interphase
- s_0 = initial position of the interphase (see §4.1)
- Ste = Stefan number
- t = time
- t_0 = preheating time
- Δt = time step
- T = temperature
- T_i = initial temperature field
- T_m = melting temperature
- \bar{T} = prescribed temperature on the Dirichlet boundary
- \mathbf{T} = vector of nodal temperatures
- v = advance speed of the ablating surface
- $()_v$ = refers to the virgin material
- v_∞ = limit advance speed
- x = one-dimensional coordinate
- \mathbf{x} = vector of spatial coordinates
- α = temporal discretization parameter
- ϕ = test function
- Γ = boundary
- Γ_m = interphase
- θ = incidence angle in the definition of the fluxes
- $\Gamma_q(t)$ = boundary of $\Omega_v(t)$ where thermal loads are applied
- Γ_T = Dirichlet part of the boundary
- ν, ν = node indices
- ρ = density
- Ω = domain of resolution
- \emptyset = empty set

B. References

- [1] Crivelli, L. A. y Idelsohn, S. R. "A temperature based finite element solution for phase-change problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 23, pp. 99-119, (1986)
- [2] Gerrekens, P. "Modelisation par elements finis des phenomenes d'ablation thermique avec pyrolyse", PhD Thesis, Liège University, Belgium, (1987)
- [3] Storti, M. A., Crivelli, L. A. e Idelsohn, S. R. "Making curved interfaces straight in phase change-problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 24, pp. 375-392, (1987)
- [4] M. Storti, L. Crivelli y S. Idelsohn "An Efficient Tangent Scheme for Phase Change Problems", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, vol 66, pp. 65-86,

(1988)

- [5] M. Storti, L. Crivelli y S. Idelsohn, "Application of the general trapezoidal rule to the heat transmission problem with phase change", *Rev. Int. Mét. Num. para Cál. y Dis. Ing.*, vol 7, pp. 13-30, (1991) (in spanish)
- [6] M. Storti, "Numerical modeling of ablation phenomena", GTM-Internal Report 11/90 (in spanish).

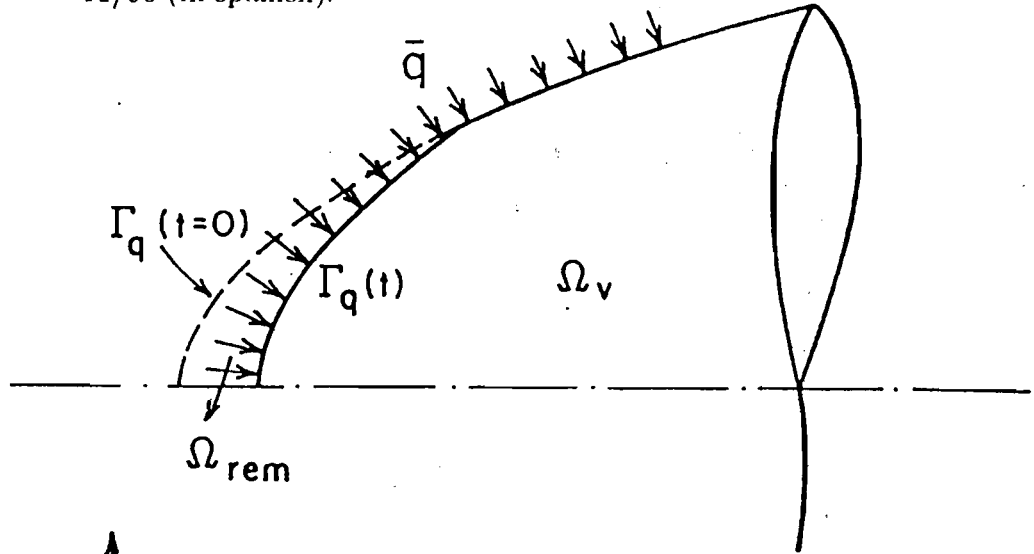


Figure 1: Description of a typical ablation problem

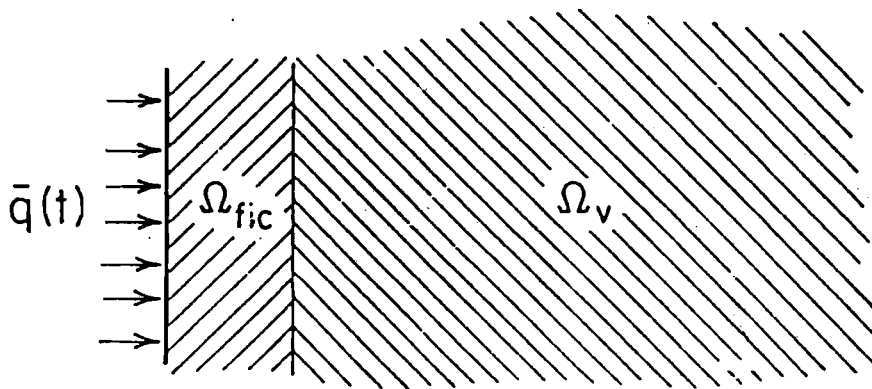
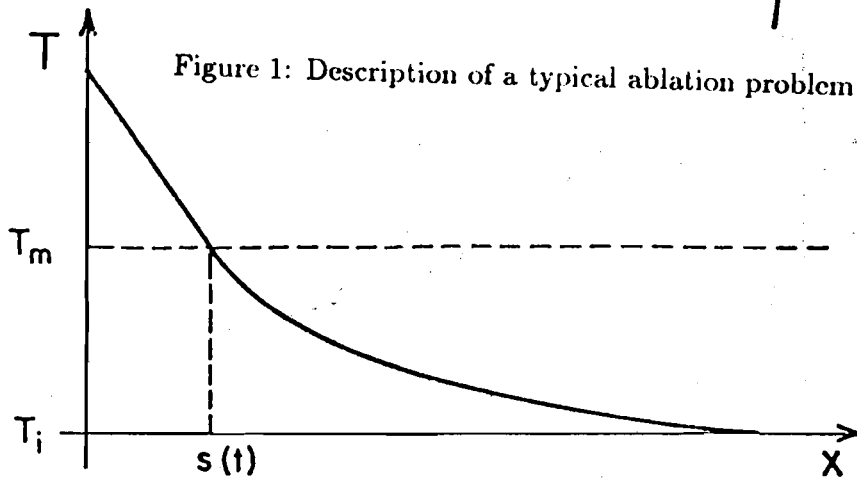


Figure 2: Two-phase formulation of the one-dimensional problem. First version: the thermal load is applied at the surface and is transmitted without inertia through the fictitious material.

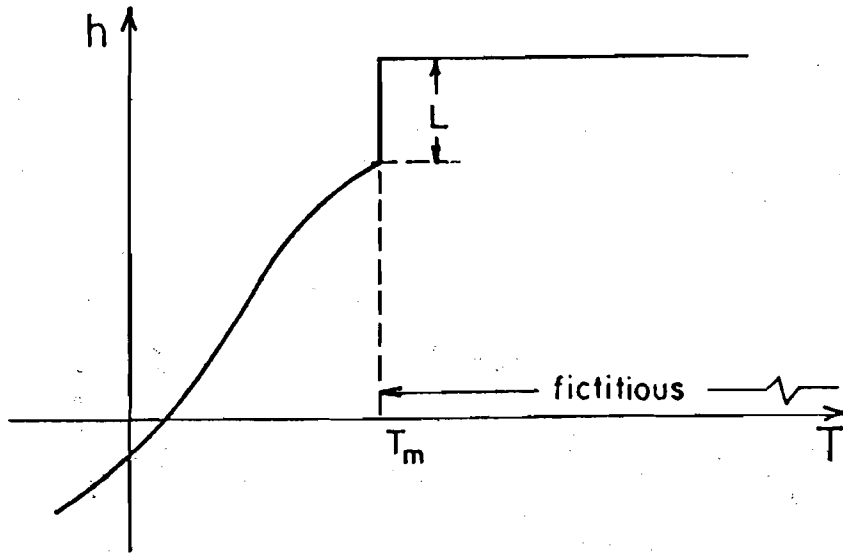


Figure 3: enthalpy function for the two-phase formulation.

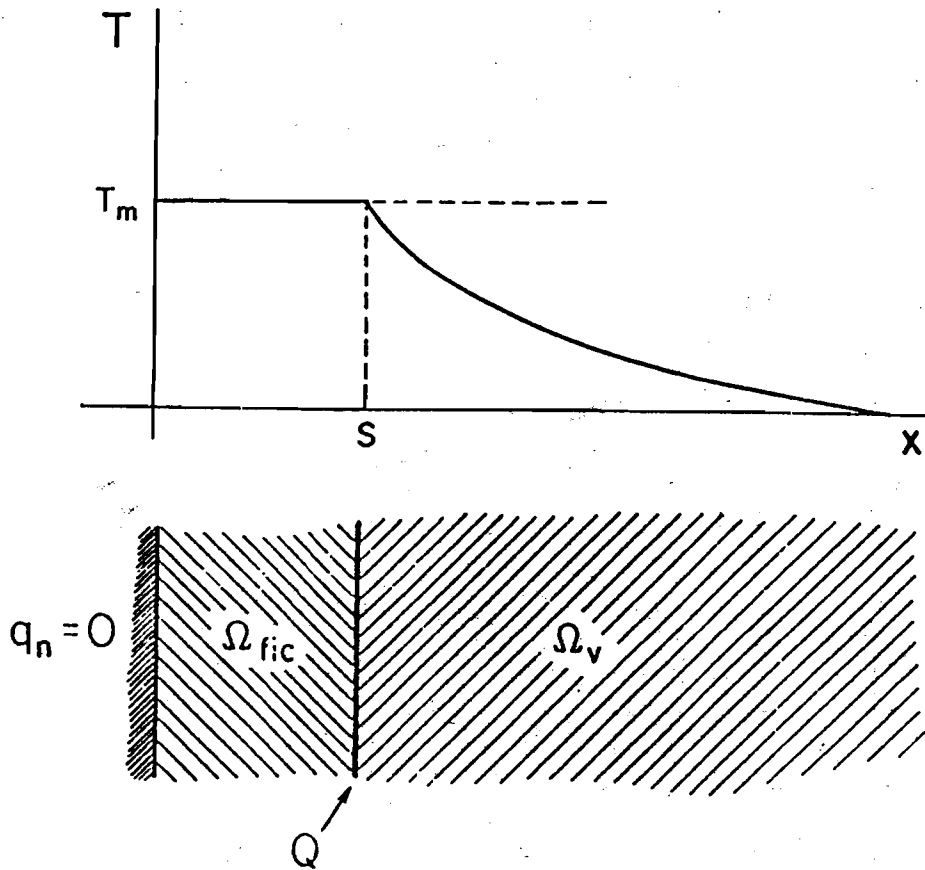


Figure 4: Two-phase formulation of the one-dimensional problem. Second version: the thermal load is added as a heat source strongly localized at the interphase. Temperature in the fictitious phase is constant and equal to T_m^+ .

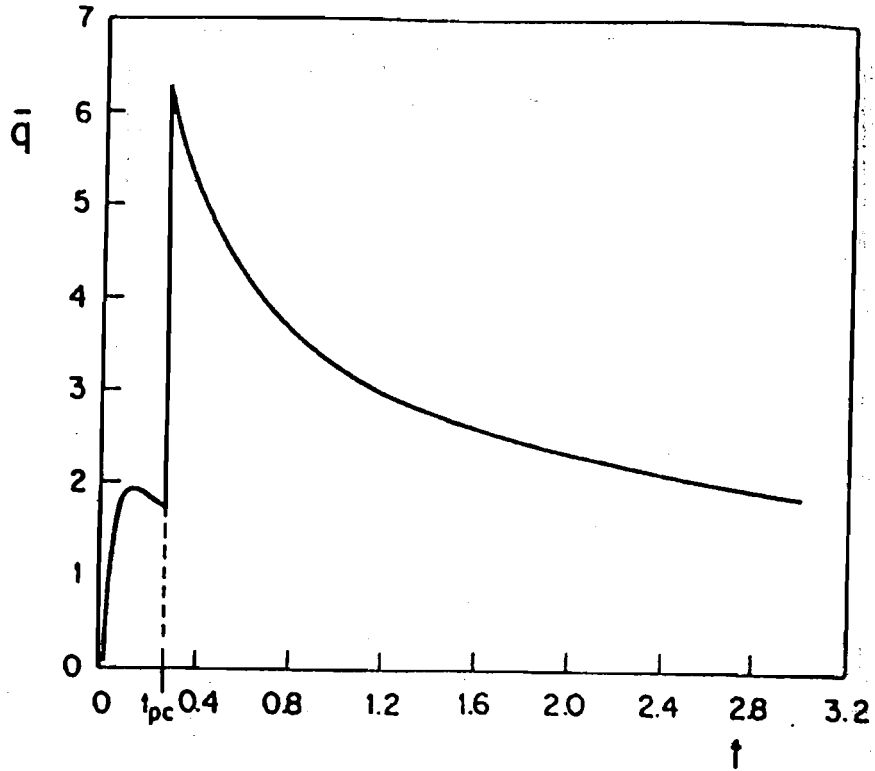


Figure 5: Thermal load for the one-dimensional ablation problem with exact solution.

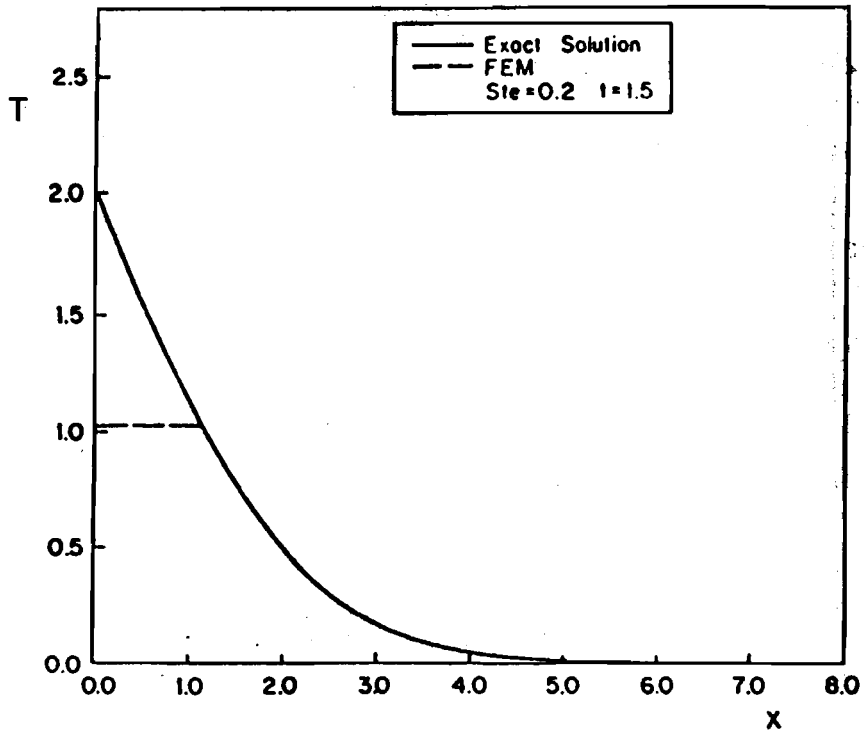


Figure 6: Comparison between exact and numerical solutions at $t = 1.5$.

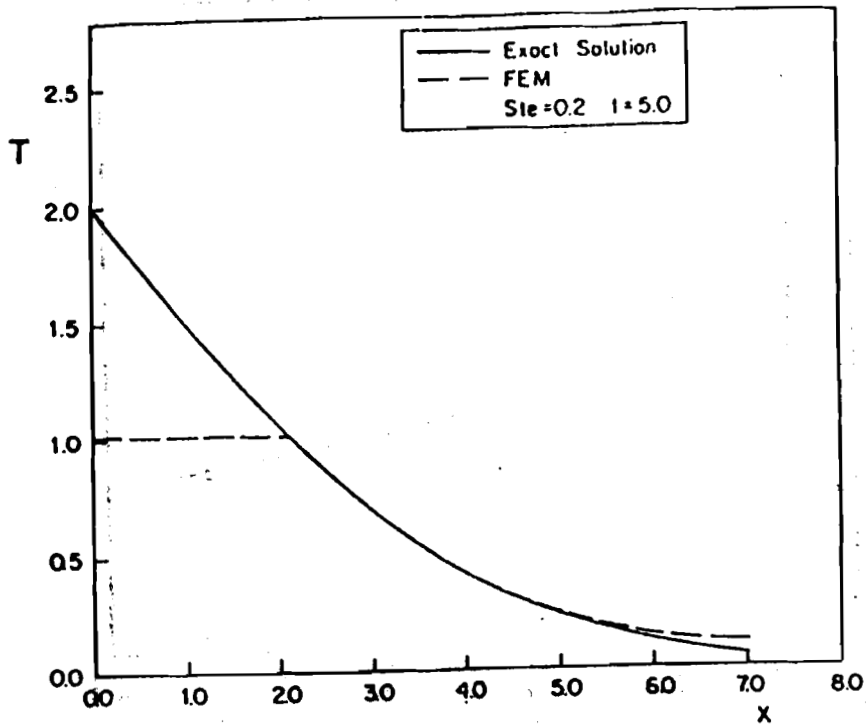


Figure 7: Comparison between exact and numerical solutions at $t = 5$.

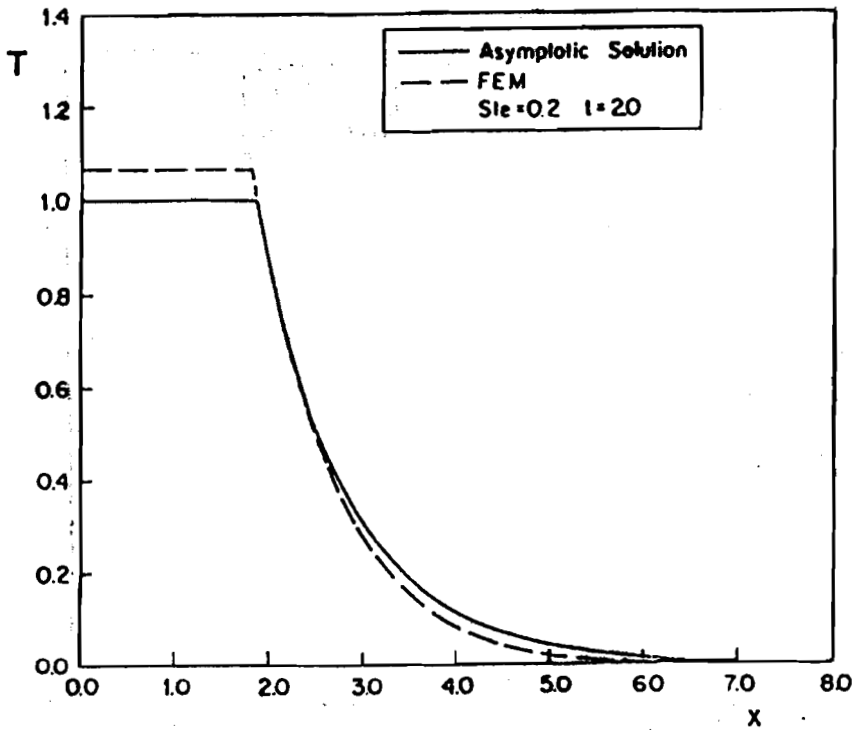


Figure 8: Numerical and asymptotic solution for the evaporation-controlled limit at $t = 2$

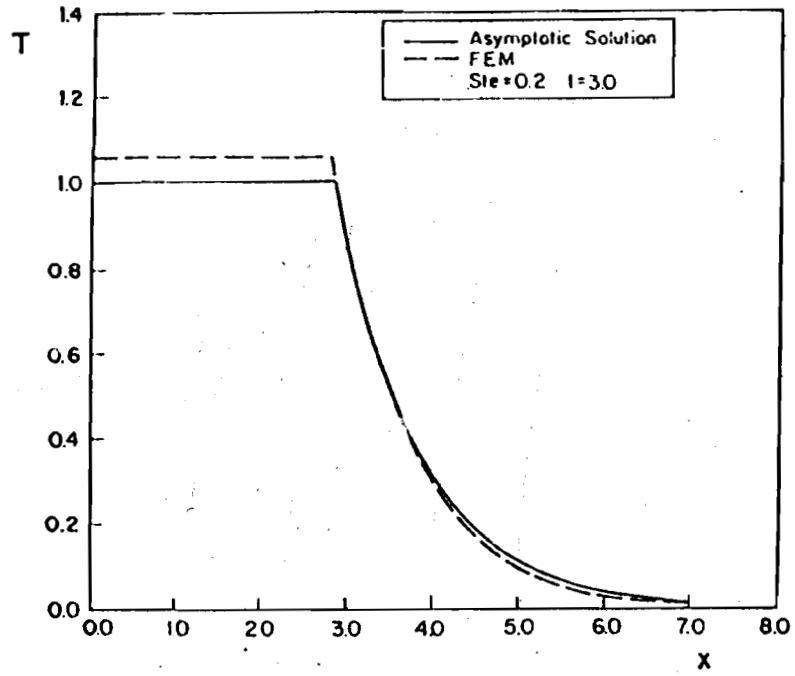


Figure 9: Numerical and asymptotic solution for the evaporation-controlled limit at $t = 3$

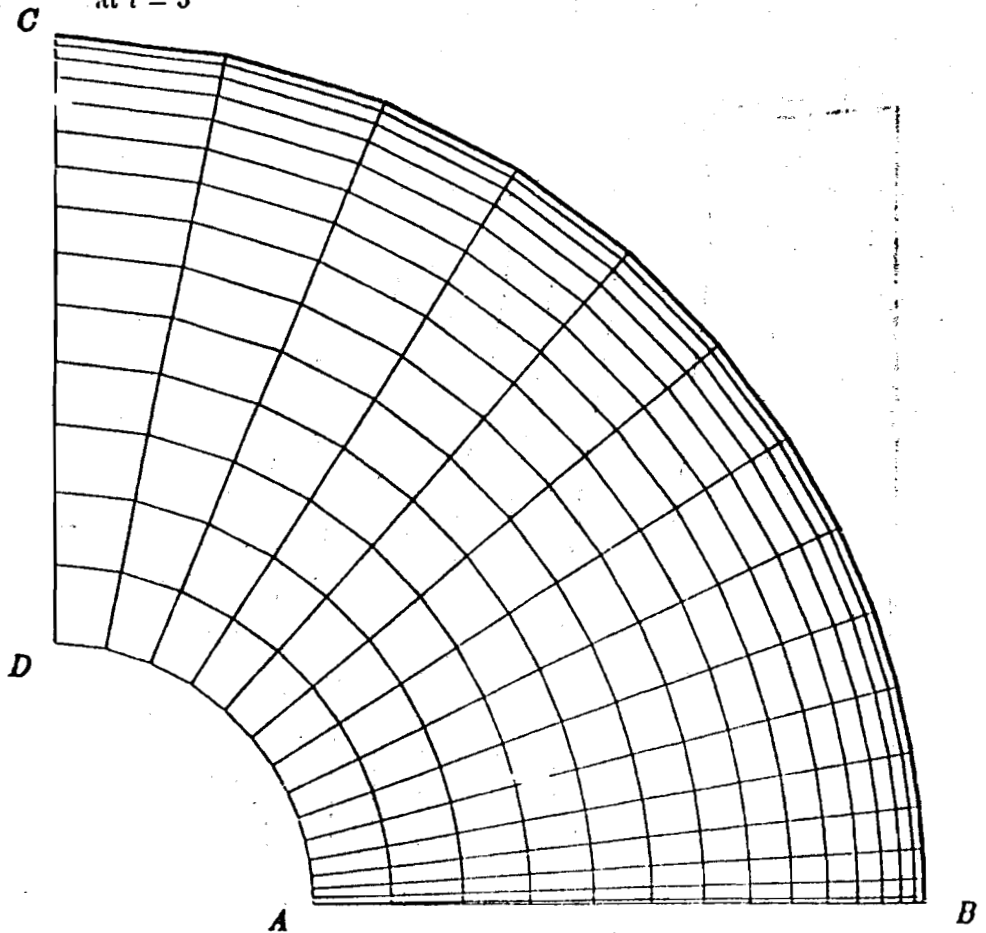


Figure 10: Geometry description and FEM-mesh for the bidimensional problem

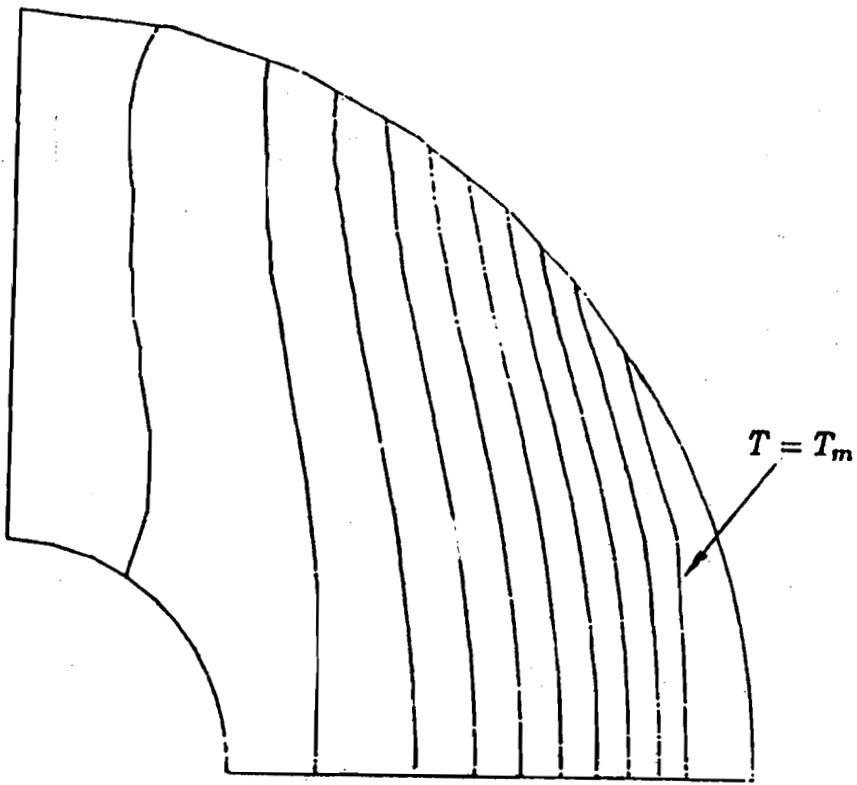


Figure 11: Isotherms for $t = 0.08$.

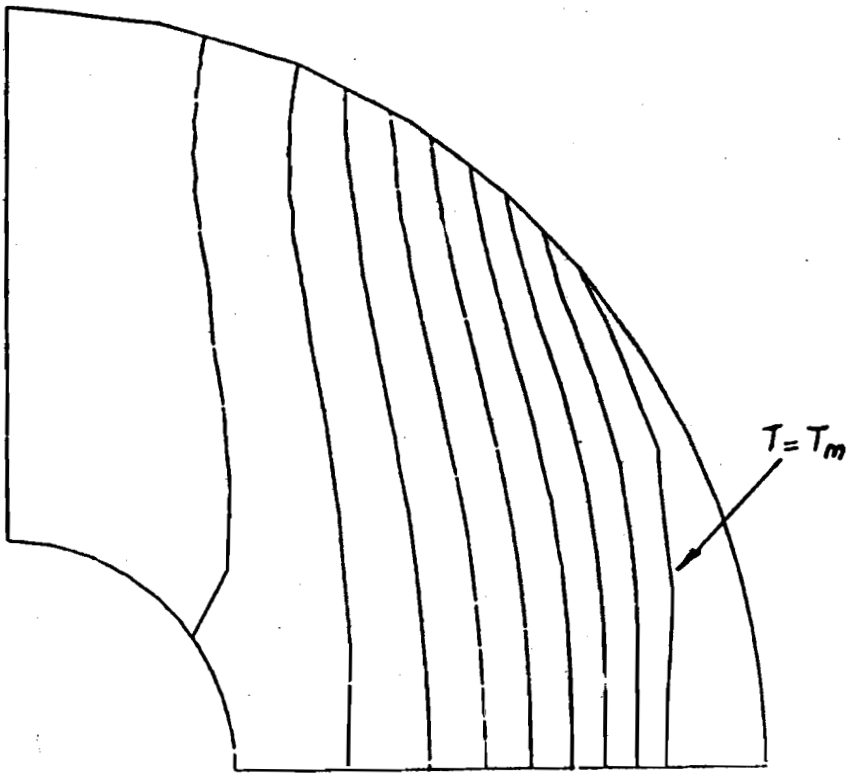


Figure 12: Isotherms for $t = 0.10$.

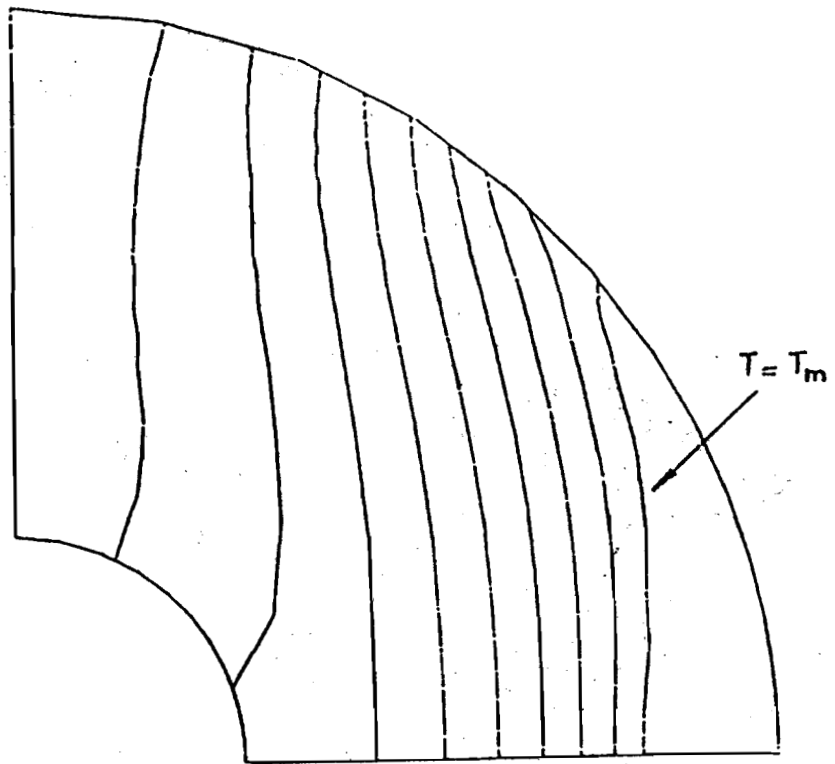


Figure 13: Isotherms for $t = 0.12$.

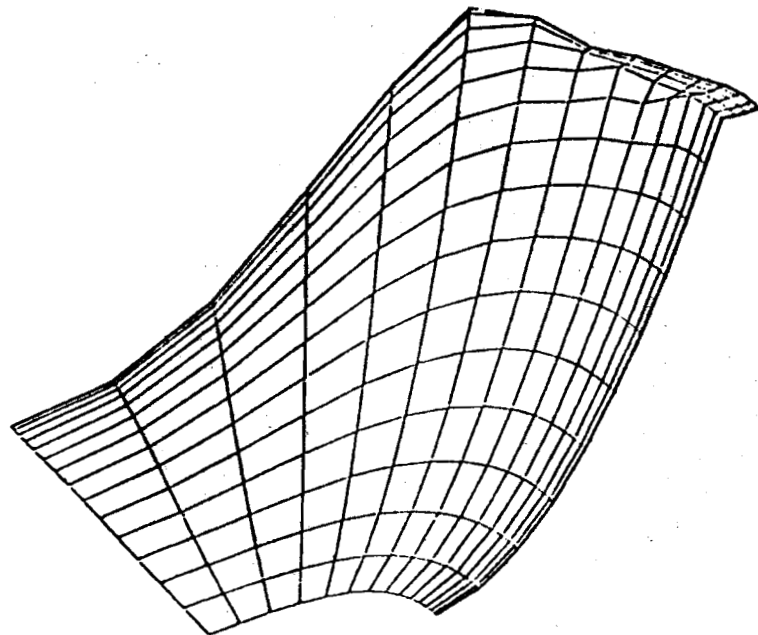


Figure 14: Temperature elevation at $t = 0.10$.

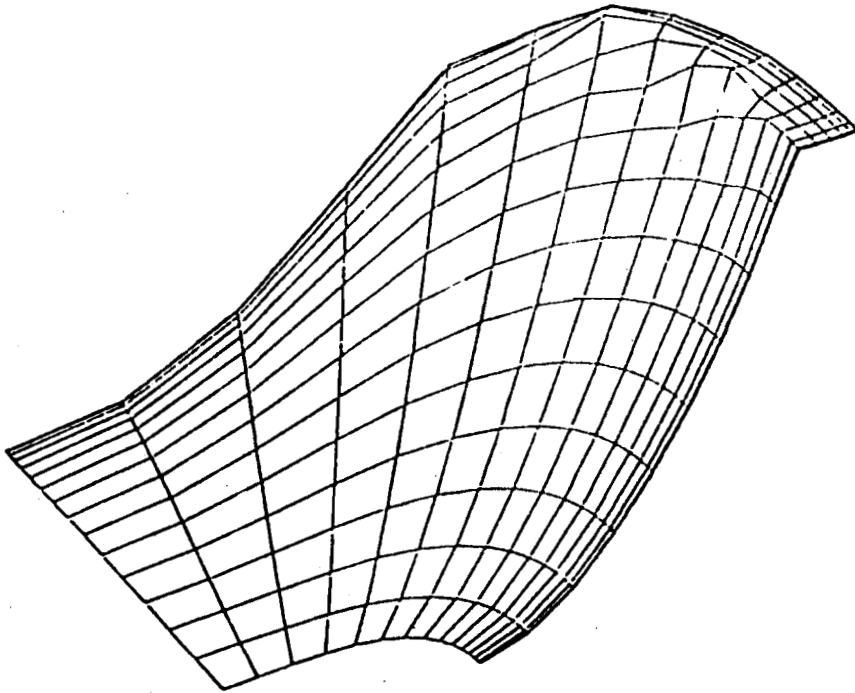


Figure 15: Temperature elevation at $t = 0.12$.

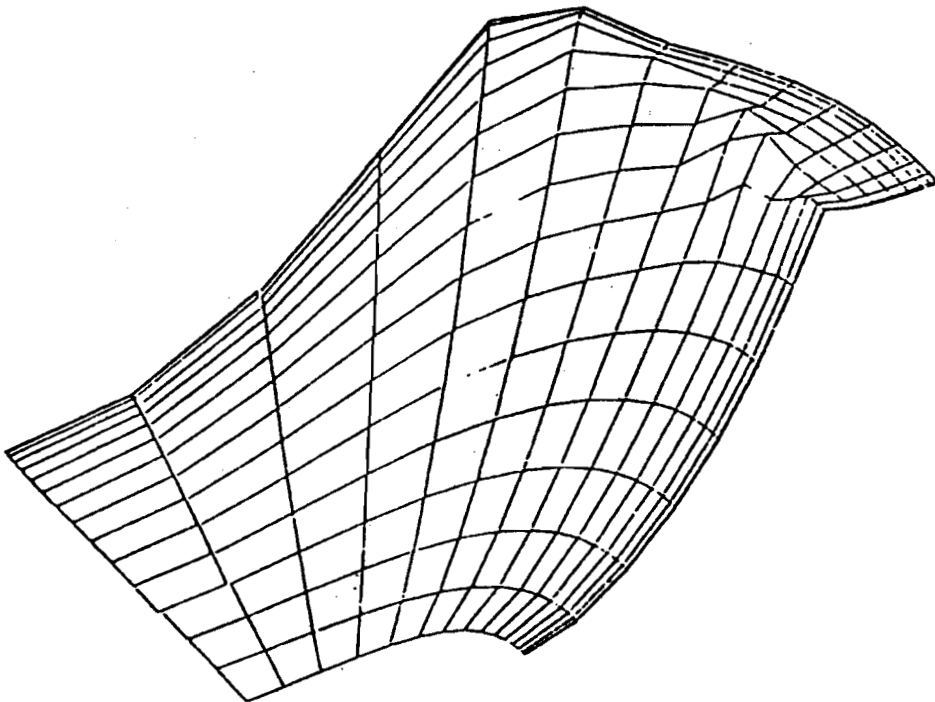


Figure 16: Temperature elevation at $t = 0.16$.

UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE EN ELASTICIDAD

CLAUDIA B. LEDERMAN

1. Introducción

La torsión elástica de una barra

Se considera una barra cilíndrica en \mathbb{R}^3 de material elástico, de sección transversal uniforme. Se supone que el material del cilindro es homogéneo e isotrópico, y que la sección transversal del mismo es perpendicular a su eje.

El problema de la torsión es el siguiente: un extremo de la barra se mantiene fijo y en el otro extremo se aplica una fuerza (torque) que lo hace rotar un ángulo dado.

La teoría de la torsión elástica indica, que si la barra es larga en relación a las dimensiones de su sección, y en ausencia de otras fuerzas, cada una de las secciones de la misma efectúa un movimiento rígido de rotación en su propio plano (de ángulo proporcional a la distancia al extremo fijo), y a su vez se deforma en la dirección perpendicular.

Por su simetría, puede pensarse como un problema plano.

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la sección de la barra (antes de deformarse). Si la barra es maciza, es decir, si D es simplemente conexo, su energía una vez deformada, viene dada por

$$E(D) = \min_{v \in H_0^1(D)} \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 - 2 \int_D v.$$

La función que alcanza dicho mínimo, llamada función de torsión, permite conocer las tensiones en el interior de la barra en su estado deformado.

Por otra parte, se define la rigidez torsional de la barra $T(D)$, como la fuerza (torque) requerida para rotar la barra en un ángulo $\theta = 1$ por unidad

de longitud. Se cumple que $E(D) = -\frac{T(D)}{2}$, lo cual indica que cuanto menos energía tenga una barra, mayor será su resistencia a la torsión.

Si la barra es hueca, es decir, si la sección transversal de la misma es múltiplemente conexa, con agujeros H_1, \dots, H_n , $\bigcup_{i=1}^n \bar{H}_i \subset D$, donde $D \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{H}_i$ es la región ocupada por material, la energía viene dada por

$$E(D \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{H}_i) = \min_{\substack{v \in H_0^1(D) \\ v=c_i \text{ en } H_i}} \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 - 2 \int_D v, \quad c_i \text{ constantes,}$$

y su interpretación es la misma que en el caso anterior.

Una descripción detallada del modelo puede hallarse por ejemplo en [4], [5], [8].

La conjetura de Saint Venant

Podemos citar dos problemas clásicos vinculados a la torsión elástica de barras:

El más antiguo de ellos es la conjetura de Saint Venant (1856): Entre todas las barras cilíndricas de material elástico, con sección transversal de la misma área, hallar la más resistente a la torsión.

Matemáticamente, el problema es

$$\begin{aligned} \min E(D) \\ |D| = \omega_0 \\ D \text{ simplem. conexo} \end{aligned}$$

Este problema fue resuelto por Polya en 1948 (ver [6]), mediante técnicas de simetrización, y la sección de la barra óptima es un círculo del área dada.

El segundo problema, que generaliza al anterior, es el siguiente: Entre todas las barras cilíndricas de material elástico, que tienen su sección transversal de la misma área, y misma área conjunta de sus agujeros, hallar la más resistente a la torsión.

Matemáticamente, el problema es

$$\begin{aligned} \min E(D \setminus \bigcup_i \bar{H}_i) \\ \bigcup_i \bar{H}_i \subset D \\ |D \setminus \bigcup_i \bar{H}_i| = \omega_0, \quad |\bigcup_i \bar{H}_i| = \omega_1 \\ D \text{ simplem. conexo} \end{aligned}$$

Polya y Weinstein resolvieron este problema en 1949 (ver [7]), y la barra óptima es aquella cuya sección es un anillo bordeado por círculos concéntricos.

Se observa que si se fija la cantidad de material w_0 , la barra óptima de este último problema será más resistente a la torsión cuanto mayor sea el área de su agujero interior.

2. Planteo del problema

El problema que discutiremos en estas notas es el siguiente (para más detalles ver [3]):

Entre todas las barras cilíndricas huecas, de material elástico, que tienen su sección transversal de la misma área y un mismo agujero H dado, se busca aquella que sea más resistente a la torsión.

En otras palabras, se supone dada una superficie cilíndrica, y una cantidad fija de material elástico, y se quiere saber de que forma rodear a la superficie, de modo tal de obtener un cilindro hueco de material elástico de sección uniforme, que resulte más rígido para la torsión.

Comencemos observando que cuando H es un círculo, podemos razonar como arriba y concluir que la solución es la barra cuya sección es un anillo bordeado por dos círculos concéntricos.

Por otra parte, se puede ver que el problema con un agujero fijo H , no tiene solución si se permiten otros agujeros arbitrarios (en este caso no existirá una barra óptima ya que podremos obtener barras cada vez más resistentes). Por lo tanto impondremos que las barras admisibles no tengan otros agujeros además del que se fija.

En consecuencia, si llamamos D a la sección transversal, H al agujero, $D \setminus \overline{H}$ a la región ocupada por el material y w_0 su área, matemáticamente, el problema considerado es el siguiente:

Dado $H \subset \mathbb{R}^2$, un dominio acotado de clase C^2 , con $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}$ conexo, y dado $0 < w_0 < +\infty$, se quiere hallar entre todos los abiertos $D \subset \mathbb{R}^2$ tales que $D \supset \overline{H}$, con $\mathbb{R}^2 \setminus D$ conexo, y $|D \setminus \overline{H}| = w_0$, aquel que tenga energía elástica mínima, es decir

$$P_F(H) : \min_{\substack{D \supset \overline{H} \\ \mathbb{R}^2 \setminus D \text{ conexo} \\ |D \setminus \overline{H}| = w_0}} \min_{\substack{v \in H_0^1(D) \\ v = \text{const. en } H}} \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 - 2 \int_D v.$$

3. Problema variacional

Nuestra manera de atacar $P_F(H)$ es la siguiente. Fijado un dominio admisible D , observamos que el segundo mínimo en $P_F(H)$ se alcanza en una función v que satisface $D = \{v > 0\}$. Pensamos a v como elemento del conjunto

$$K(H) = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2), v = \text{const. en } H, |\{x \notin H / v(x) > 0\}| = w_0\}$$

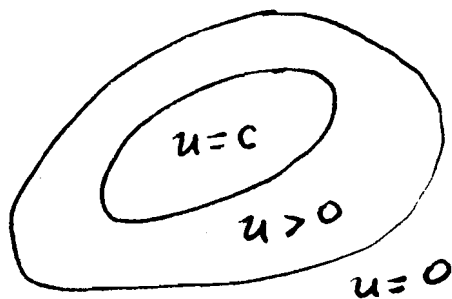
y proponemos el problema variacional auxiliar

$$P(H): \min_{v \in K(H)} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^2} v.$$

Comencemos observando que si el problema $P(H)$ tuviera una solución u , sería $u \geq 0$ en \mathbb{R}^2 y por lo tanto $u = c \geq 0$ en H . Si además u fuera suficientemente regular y $c > 0$, u sería solución del problema de frontera libre

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \Delta u = -2 & \text{en } \overline{H}^c \cap \{u > 0\}, \\ u = 0, \partial_{-\nu} u = \lambda & \text{sobre } \partial\{u > 0\} \quad (\lambda > 0, \text{ constante}) \\ u = c > 0 & \text{en } H \end{array}$$

De ese modo, una solución u del problema variacional $P(H)$ determinaría tres regiones sobre el plano:



- 1) Una región donde u es una constante positiva c , que representa la zona donde está el agujero H ,
- 2) Una región donde $u > 0$ y $\Delta u = -2$, que representa la zona ocupada por material (es decir, la sección de la barra óptima),

- 3) Una región donde $u = 0$ que representa la zona donde no hay material (el exterior del cilindro).

Estas tres regiones están claramente delimitadas por dos fronteras: una frontera fija y conocida, que es la frontera del agujero H y la frontera libre $\partial\{u > 0\}$, que no conocemos y de la cual queremos estudiar sus propiedades.

Volviendo al problema variacional $P(H)$ observamos que al intentar resolverlo se presentan los siguientes inconvenientes:

- Las funciones de $K(H)$ están definidas en todo \mathbb{R}^2 , con lo cual, en principio, las sucesiones minimizantes no tienen por que converger a un mínimo del problema .
- La condición $v = \text{const.}$ en H , cumple el papel de condición de contorno, y ésta es variable, ya que el valor de la constante en H es una de las incógnitas del problema.
- El hecho de fijar la medida de $\{x \notin H / v(x) > 0\}$ para las v admisibles, complica el problema variacional.

4. Problema penalizado

La complejidad de $P(H)$ nos lleva a resolverlo en varios pasos. Tomamos primero las funciones de $K(H)$ que valen una constante fija $c > 0$ en H . Luego penalizamos el funcional de modo de eliminar la restricción sobre el volumen de $\{v > 0\}$, de la siguiente manera

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{H}} |\nabla v|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{H}} v + f_\epsilon(|\{x \notin H / v(x) > 0\}|)$$

donde

$$f_\epsilon(s) = \begin{cases} \epsilon(s - w_0) & s \leq w_0, \\ \frac{1}{\epsilon}((s - w_0) + (s - w_0)^2) & s \geq w_0, \end{cases}$$

y notamos $P_\epsilon^c(H)$ al problema de minimización asociado. Como el dominio de las funciones admisibles es no acotado, resolvemos el problema minimizando primero el funcional penalizado con la restricción suplementaria de que las funciones tengan soporte en una bola de radio R .

Esto nos permite probar (mediante técnicas en el estilo de [1] y [2]):

Teorema 1

Existe una solución u al problema $P_\varepsilon^c(H)$. Además, si u es solución de $P_\varepsilon^c(H)$, u satisface

- i) $u \geq 0$, u es lipschitz
- ii) $\{u > 0\}$ es conexo y acotado
- iii) $\partial\{u > 0\}$ es localmente analítica
- iv) si ε es chico, $|\{u > 0\} \cap \overline{H}^c| = \omega_0$
- v) u satisface (1)

Observemos que las propiedades i) y ii) son muy importantes pues el conjunto $\{u > 0\}$ será un candidato a solución del problema $P_F(H)$ (donde buscábamos la sección de la barra óptima). Cabe destacar además la propiedad iv), es decir, que no es necesario pasar al límite en ε para que la medida de $\{u > 0\} \cap \overline{H}^c$ se ajuste al valor deseado.

5. Solución del problema original

El teorema anterior permite probar que el problema $P(H)$ tiene solución. Además se puede ver que si el valor c de la solución u en H es positivo, entonces u resuelve $P_\varepsilon^c(H)$ para ε pequeño, y por lo tanto hereda las propiedades ya establecidas. Ahora sí, estamos en condiciones de volver al problema $P_F(H)$. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2

Si existe una solución u de $P(H)$ que satisface $c \equiv u|_H > 0$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{u > 0\}$ es conexo, entonces $D = \{u > 0\}$ es solución del problema físico original $P_F(H)$.

En conclusión, hemos resuelto el problema P para cualquier agujero H , y hemos encontrado condiciones bajo las cuales las soluciones de P permiten obtener soluciones de P_F . Dichas condiciones resultan naturales para el problema físico que queremos resolver: la condición $u|_H > 0$ indica que H es efectivamente un agujero en la sección de la barra, es decir, H queda rodeado por material. La condición $\mathbb{R}^2 \setminus \{u > 0\}$ es conexo, indica que en la sección de la barra no hay otros agujeros además de H .

Por otra parte, si para un H dado se tiene que $u|_H = 0$ para toda solución u de $P(H)$, se está en la siguiente situación: la barra de sección circular (sin

agujero) es más resistente a la torsión que cualquier barra que tenga en su sección al agujero H dado.

Sin embargo, cuando el agujero interior es circular o bien, cuando tenemos un agujero con área no muy chica en relación a su perímetro, la situación recién descrita no ocurre, es decir, en estos casos, existe una barra con agujero interior H , que es más resistente que la barra sin agujero. Además se puede probar que si un agujero tiene esta propiedad, también la tendrá todo agujero cercano.

Un análisis de distintos ejemplos lleva a pensar que las condiciones del teorema 2 podrían no cumplirse en ciertos casos: por ejemplo para agujeros con área muy chica en relación a su perímetro (donde fallaría $u|_H > 0$) o bien para agujeros altamente no convexos (donde fallaría $\mathbb{R}^2 \setminus \{u > 0\}$ es conexo). Por último, se puede ver que existe una clase \mathcal{F} de dominios regulares H (agujeros) para los cuales $P_{\mathcal{F}}(H)$ tiene solución y donde además, tenemos estabilidad: si H está en la clase \mathcal{F} , todo \tilde{H} cercano también está, y además sus energías son cercanas y sus soluciones también.

Los resultados comentados en estas notas forman parte de la Tesis Doctoral de la autora ([3]).

6. Referencias

- [1] H. ALT, L. CAFFARELLI, *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **325** (1981), pp. 105-144.
- [2] N. AGUILERA, H. ALT, L. CAFFARELLI, *An Optimization problem with volume constraint*, Siam J. Control and Optimization, Vol 24, N° 2, march 1986.
- [3] C. LEDERMAN, *Diseño Optimo para la Torsión Elástica. Resolución mediante un problema de mínimo con frontera libre*, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, 1993.
- [4] N. MUSKHELISHVILI, *Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Groningen-Holland, 1953.
- [5] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity*, London, Pergamon Press, 1959.

- [6] G. POLYA, *Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization*, Quarterly of Applied Mathematics 6 (1948), pp. 267-277.
- [7] G. POLYA, A. WEINSTEIN, *On the Torsional Rigidity of Multiply connected cross sections*, Annals of Mathematics, Vol. 52, N° 1, July 1950.
- [8] G. DUVAUT, J. LIONS, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.

Claudia B. Lederman

Instituto Argentino de Matemática

CONICET

Viamonte 1634, 1er. cuerpo, 1er. piso

1055 - Buenos Aires - Argentina

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.

Fronteras Libres en Ecuaciones de Conducción con Coeficientes Discontinuos

Julio E. Bouillet

En esta conferencia nos referiremos a ecuaciones de tipo conducción-difusión de la forma

$$u_t = (\alpha(u))_{xx}$$

Sabemos que las soluciones *autosemejantes*, funciones $u(x, t) = u(x/t^{1/2})$, evolucionan a partir de datos iniciales en $t = 0$, o datos iniciales y de contorno en $x = 0$, que constan de dos valores, eg. 0 y 1. En otras palabras, evolucionan a partir de un dato escalonado.

Sabemos que, en este caso, la ecuación se reduce a una ecuación ordinaria, y que es posible hallar en forma implícita, mediante una ecuación integral, esa solución $u(x/t^{1/2})$, y ello no importa cuál fuera la función monótona y acotada α definida en $0 \leq u \leq 1$ (cf.[1]).

Nos proponemos mostrar que, cuando α es una *función escalón no decreciente* que toma los valores 0 y 1, y para datos iniciales muy generales, por ejemplo, continuos por trozos, se puede obtener la solución mediante un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Es más, el método se extiende al caso en que α es una *función escalera no decreciente*, dando lugar a una forma de aproximar numéricamente soluciones de problemas de datos iniciales para coeficientes α generales, de los que surgen naturalmente al estudiar problemas de cambio de fase en una dimensión espacial si se emplean variables entálpicas.

Sea $H(r)$ el *gráfico* de Heaviside, es decir,

$$\begin{aligned} H(r) &= 0, & \text{si } r \leq 0, \\ H(r) &= \text{el segmento } [0, 1], & \text{si } r = 0, \\ H(r) &= 1, & \text{si } r > 0. \end{aligned}$$

Comenzaremos estudiando el problema de valores iniciales que llamaremos (H):

$$(H) \quad \begin{aligned} u_t &= (H(u-1))_{xx}, \text{ en } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_I(x), \end{aligned}$$

donde el dato inicial u_I , es, por ejemplo, no negativo y estrictamente decreciente alrededor de $x = x_0$ y tal que $u_I(x_0) = 1$.

Nos convendrá hacer algunas consideraciones heurísticas sobre las soluciones de la ecuación, que aclararán el significado de las deducciones que sigan

1) La ecuación puede pensarse como una ecuación de difusión no lineal cuya difusividad, dependiente de u , está concentrada alrededor del valor $u = 1$: en efecto, si H fuera derivable en u , tendríamos

$$u_t = (H'(u-1)u_x)_x,$$

y deberíamos pensar a $H'(u-1)$ como tomando valores muy grandes cerca de $u = 1$, y valor *cero* cuando u difiere de uno. Entonces, para aquellos (x, t) con $u(x, t) \neq 1$, $u_t = 0$, es decir, u permanece constante en el tiempo.

2) Sin embargo, la región donde la función alcanza el valor *uno* debería aumentar en tamaño, debido a la elevada difusividad H' , sugiriendo la aparición de zonas donde $u(x, t) = 1$.

3) Combinando lo dicho en los dos puntos anteriores pareciera que, si la solución que deseamos no resultara constante, tendría que ser discontinua, y zonas del plano (x, t) donde $u < 1$ estarían separadas de zonas donde $u > 1$ por zonas donde $u \equiv 1$. Las curvas que bordean estas zonas son *a priori* desconocidas, y deberán ser halladas junto con la solución $u(x, t)$: son, por lo tanto, *fronteras libres*.

En vista de las observaciones que anteceden debemos dar un sentido a la solución del problema (H): uno podría pensar en definir soluciones generalizadas, no necesariamente continuas, empleando directamente la *función discontinua* $H(u-1)$: diríamos que la función localmente integrable $u(x, t)$, definida en el semiplano $t > 0$, es solución de la ecuación, cuando,

Para toda $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times (0, \infty))$,

$$\int (u\varphi_t + H(u-1)\varphi_{xx}) dx dt = 0.$$

Pero esta definición nos conduciría necesariamente a las soluciones $u \equiv \text{constante}$. En efecto, supongamos que $H(0) = 0$: entonces, si un arco suave γ separara dos regiones donde $u > 1$ y $u \leq 1$,

$$\int_{\text{soporte } \varphi} u\varphi_t - \oint_{\gamma \cap \text{soporte } \varphi} \varphi_x = 0.$$

De aquí, haciendo que φ aproxime a la función característica de un rectángulo (por ejemplo), es fácil llegar a que $u \equiv \text{constante}$.

Puede verse que no importa qué valor se de a $H(0)$, esta forma ya clásica de definir soluciones discontinuas de una ecuación, "en el sentido de las distribuciones", conduce a casos triviales si se insiste en introducir dentro de las integrales a la función discontinua $H(u-1)$. En cambio, si adjuntamos a la función de Heaviside el segmento vertical, como se ha hecho al definir el gráfico, podemos reformular la definición de la siguiente manera:

Definición. Diremos que la función integrable $u(x, t)$, definida en el semiplano $t > 0$, es solución de la ecuación $u_t = (H(u-1))_{xx}$, cuando existe una función medible $U(x, t) \in H(u(x, t) - 1)$, a.e. $x, t > 0$, tal que

para toda $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times (0, \infty))$,

$$\int (u\varphi_t + U\varphi_{xx}) dx dt = 0.$$

Con esta definición podemos construir la evolución de u_I en un entorno de $x = x_0$, para tiempos pequeños. En efecto, definiremos a $u(x, t)$ y a $U(x, t)$ de la siguiente manera:

obtendremos dos curvas $s(t)$ y $d(t)$ como se indicará más abajo, y pondremos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_I(x), & \text{si } x < s(t), \\ &= 1, & \text{si } s(t) < x < d(t), \\ &= u_I(x), & \text{si } d(t) < x, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= 1, & \text{si } x < s(t), \\
&= \frac{x - s(t)}{s(t) - d(t)}, & \text{si } s(t) < x < d(t), \\
&= 0 & \text{si } d(t) < x.
\end{aligned}$$

Las curvas $s(t)$, $d(t)$ están definidas mediante el sistema de ecuaciones ordinarias siguiente:

$$\begin{aligned}
s'(t) &= \frac{1}{d(t) - s(t)} \frac{1}{1 - u_I(s(t))} (\leq 0), & s(0) &= x_0, \\
d'(t) &= \frac{1}{d(t) - s(t)} \frac{1}{1 - u_I(d(t))} (\geq 0), & d(0) &= x_0,
\end{aligned}$$

donde puede verse que $s'(t) = [-U_x]/[u]$, cociente del salto de $-U_x$ al cruzar $s(t)$ con el correspondiente salto de $u(x, t)$, y análogamente con $d'(t)$.

Es decir, las fronteras libres $s(t)$, $d(t)$, bordes de la región donde $u \equiv 1$, satisfacen a una condición parecida a la de Stefan, para la ecuación del calor, o a la de Rankine-Hugoniot, cuando la ecuación diferencial es una ley de conservación de primer orden ([2],[3],[4]).

Así, para cada punto $x_0 < x_1 < \dots$ donde el dato inicial cruce el valor $u = 1$, suponiendo, claro está, que son puntos aislados, tendremos definida una región donde $u \equiv 1$ mediante dos curvas $s_j < d_j$, $j = 1, 2, \dots$ que comienzan en x_j , y que terminan en puntos donde $d_j = s_{j+1}$, que deben existir debido al sistema de ecuaciones para $s(t)$, $d(t)$. Entre valores $d_j < s_{j+1}$, ó, por ejemplo, a la izquierda de s_0 , la solución coincide con $u_I(x)$.

De esta manera, si el dato inicial tiene soporte compacto, llegará un instante t_c para el cual la solución coincide con la función característica de un intervalo cuya longitud es el valor de $\int u_I dx$, y que está centrado en el *baricentro* del dato inicial: $\int x u_I dx / \int u_I dx$. Para $t \geq t_c$, la solución permanece constante en el tiempo, e idéntica a esa función característica (cf.[4]).

Nos interesa desarrollar el siguiente ejemplo: sea

$$u_I^\epsilon(x) = (1/\epsilon)\chi_{[-\epsilon/2, \epsilon/2]}(x).$$

Vamos a interpretar a u_I^ϵ como aproximante de la masa puntual unitaria $\delta(x)$ localizada en el origen, hallaremos su evolución bajo la ecuación (H), y haremos $\epsilon \rightarrow 0$:

Por lo dicho anteriormente, resulta

$$s'(t) = \frac{1}{d(t) - s(t)} \frac{1}{1 - 1/\epsilon},$$

$$d'(t) = \frac{1}{d(t) - s(t)}.$$

de aquí obtenemos,

$$(d - s)' = \frac{1}{d - s} \left(1 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\right), \text{ ó sea } d(t) = s(t) + \sqrt{\frac{2t}{1 - \epsilon}},$$

$$s'(t) = \frac{-\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Entonces la solución será u^ϵ , U^ϵ donde

$$u^\epsilon(x, t) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{si } |x| \leq s(t), \\ 1, & \text{si } s(t) < |x| < d(t), \\ 0, & \text{si } d(t) \leq |x|, \end{cases}$$

mientras que $U^\epsilon(x, t)$ es una poligonal continua que vale cero para $|x| > d(t)$, y vale 1 para $|x| < s(t)$. Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, en el límite es $s(t) \equiv 0$, $d(t) = \sqrt{2t}$, y la solución del problema (H) con $u_I(x) = \delta(x)$ es:

$$u(x, t) = (1 - 2\sqrt{2t})\delta(x) + \chi_{[-\sqrt{2t}, \sqrt{2t}]}(x), \text{ si } t \leq 1/8,$$

$$U(x, t) = \begin{cases} (1 + x/\sqrt{2t})_+, & x \leq 0, t \leq 1/8, \\ (1 - x/\sqrt{2t})_+, & 0 \leq x, t \leq 1/8. \end{cases}$$

En las últimas dos fórmulas indicamos $(\cdot)_+ = \max(0, \cdot)$.

Es instructivo comprobar que, así definidas, u , U cumplen con la definición de solución de (H) dada más arriba, aunque los valores de $u(x, t)$ incluyan un término singular (la medida $\delta(x)$, que no es una función); en este caso $t_c = 1/8$. Además, el dato inicial $u_I = \delta$ es alcanzado en el sentido de las medidas sobre \mathbf{R} :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \int u(x, t)\varphi(x)dx \rightarrow \int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), t \rightarrow 0$$

Así hemos obtenido la evolución de datos iniciales "simples" bajo la ecuación de evolución con función constitutiva $H(u - 1)$. Si en su lugar tuviéramos una *combinación lineal* de funciones $H(u - u_i)$, a cada u_i correspondería una región, separada por dos curvas, donde $u \equiv u_i$. Pero ahora las ecuaciones de estas curvas estarán acopladas, pues importa la ubicación de la curva contigua, correspondiente a la región $u \equiv u_{i-1}$, ó $u \equiv u_{i+1}$.

Puede verse que, aproximando funciones $\alpha(u)$ monótonas mediante combinaciones lineales de escalones, se llega al método numérico expuesto en [5].

En el caso en que el dato inicial es una medida $\delta(x)$, tal como lo tratamos más arriba, puede verse que el paso al límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ sólo afecta a la región donde $u \equiv 1/\epsilon$, y la solución se obtiene resolviendo un sistema parecido al del caso en que $u_I(x)$ es una función acotada.

Referencias:

[1].J.E.Bouillet, Soluciones autosemejantes con cambio de fase, en " Seminario sobre el teorema de Stefan y sus aplicaciones", D.A. Tarzia, editor, Cuadernos del Instituto de Matemática Beppo Levi N0. 11, 75-104, U.N.Rosario, 1984.

[2].D.A.Tarzia, Estudios teóricos básicos sobre el problema de Stefan unidimensional a dos fases, en " II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", D.A.Tarzia, editor, Cuadernos del Instituto de Matemática Beppo Levi N0. 14, U.N.Rosario, 1987.

[3].J.E.Bouillet, Propiedades hiperbólicas de soluciones de ciertas ecuaciones parabólicas, Revista de la Unión Matemática Argentina vol.34, 1988, 21-30.

[4].J.E.Bouillet, M.K.Korten, V.Márquez, Singular limits and the "mesa" problem, Trabajos de Matemática N0. 133, IAM (CONICET), 1988.

[5].J.E.Bouillet, J.I.Etcheverry, Numerical experiments with $u_t = \alpha(u)_{xx}$, en "Encuentros de ecuaciones diferenciales II", Trabajos de Matemática N0. 190, IAM (CONICET), 1992.

NUMERICAL ANALYSIS FOR THE HEAT FLUX IN A MIXED ELLIPTIC PROBLEM WITH SOLUTION OF NON-CONSTANT SIGN

Domingo Alberto TARZIA

Depto. de Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, (2000) Rosario,
Argentina ;

and

PROMAR (CONICET–UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Avda.
Pellegrini 250, (2000) Rosario , Argentina.

ABSTRACT: A discretized mixed elliptic differential problem with solutions of non-constant sign, as functions of the Dirichlet and Neumann data, are studied in a convex polygonal bounded domain Ω of \mathbf{R}^n . An inequality for the heat flux is given in order to obtain a continuous and a discrete change of phase, that is, a continuous or discrete solution of non-constant sign in Ω (steady-state, two-phase, continuous or discretized Stefan problem). A convergence for the two inequalities, as function of the parameter h of the finite element method, is also obtained.

KEY WORDS: Steady-state Stefan problem, free boundary problems, phase-change problems, variational inequalities, Mixed elliptic problems, Numerical Analysis, Finite Element Method, Error bounds.

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: 35R35, 35J85, 65N15, 65N30.

I. INTRODUCTION

The present talk can be considered as a review of the two papers [12,13]. We consider a heat conducting material occupying Ω , a convex polygonal bounded domain of \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$ in practice), with a sufficiently regular boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (with $\text{meas}(\Gamma_1) \equiv |\Gamma_1| > 0, |\Gamma_2| > 0$). We assume, without loss of generality, that the phase-change temperature is 0°C . We impose a temperature $b > 0$ on Γ_1 and an outgoing heat flux $q > 0$ on Γ_2 . If we consider in Ω a steady-state heat conduction problem, then we are interested in finding sufficient and/or necessary conditions for the heat flux q on Γ_2 to obtain a change of phase in Ω , that is, a steady-state two-phase Stefan problem in Ω (i.e. the temperature is a function of non-constant sign in Ω) [10].

Following [9] we study the temperature $\theta = \theta(x)$, defined for $x \in \Omega$. The set Ω can be expressed in the form

$$(1) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L} .$$

where

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} \Omega_1 = \{ x \in \Omega / \theta(x) < 0 \} , \\ \Omega_2 = \{ x \in \Omega / \theta(x) > 0 \} , \\ \mathcal{L} = \{ x \in \Omega / \theta(x) = 0 \} , \end{array} \right.$$

are, respectively, the solid phase, the liquid phase, and the free boundary (e.g. a surface in \mathbb{R}^3) that separates them. The temperature θ can be represented in Ω in the following way :

$$(3) \quad \theta(x) = \left| \begin{array}{l} \theta_1(x) < 0 , \quad x \in \Omega_1 , \\ 0 , \quad x \in \mathcal{L} , \\ \theta_2(x) > 0 , \quad x \in \Omega_2 , \end{array} \right.$$

and satisfies the conditions below :

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} \text{i) } \Delta \theta_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \quad (i = 1, 2) \quad , \\ \text{ii) } \theta_1 = \theta_2 = 0 \quad , \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \quad \text{on } \mathcal{L} \quad , \\ \text{iii) } \theta_2 |_{\Gamma_1} = b \quad , \\ \text{iv) } \left. \begin{array}{l} -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} |_{\Gamma_2} = q \quad \text{if } \theta |_{\Gamma_2} > 0 \quad , \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} |_{\Gamma_2} = q \quad \text{if } \theta |_{\Gamma_2} < 0 \quad , \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

where $k_i > 0$ is the thermal conductivity of phase i ($i = 1$: solid phase, $i = 2$: liquid phase), $b > 0$ is the temperature given on Γ_1 , and $q > 0$ is the heat flux given on Γ_2 .

Problem (4) represents a free boundary elliptic problem (when $\mathcal{L} \neq \emptyset$) where the free boundary \mathcal{L} (unknown a priori) is characterized by the three conditions (4ii). Following the idea of [1, 3, 4, 9] we shall transform (4) into a new elliptic problem but now without a free boundary. If we define the function u in Ω as follows

$$(5) \quad u = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- \quad \left(\theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^- \right) \quad \text{in } \Omega \quad ,$$

where θ^+ and θ^- represent the positive and the negative parts of the function θ respectively, then problem (4) is transformed into

$$(6) \quad \left. \begin{array}{l} \text{i) } \Delta u = 0 \quad \text{in } D'(\Omega), \\ \text{ii) } u |_{\Gamma_1} = B \quad , \quad B = k_2 b > 0 \quad , \\ \text{iii) } -\frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_2} = q \quad , \end{array} \right\}$$

whose variational formulation is given by

$$(7) \quad u \in K, \quad a(u, v-u) = L(v-u), \quad \forall v \in K,$$

where

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = H^1(\Omega), \quad V_0 = \{v \in V / v|_{\Gamma_1} = 0\}, \\ K = K_B = \{v \in V / v|_{\Gamma_1} = B\}, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad L(v) = L_q(v) = - \int_{\Gamma_2} q v \, d\gamma. \end{array} \right.$$

Under the hypotheses $L \in V_0'$ (e.g. $q \in L^2(\Gamma_2)$) and $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, there exists a unique solution of (7) which is characterized by the following minimization problem [1, 6]

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K, \\ u \in K, \end{array} \right.$$

where

$$(10) \quad J(v) = J_q(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \int_{\Gamma_2} q v \, d\gamma.$$

LEMMA 1.— If $u = u_{qB}$ is the unique solution of problem (7) for data q on Γ_2 and $B > 0$ on Γ_1 , then we have the monotony property :

$$(11) \quad B_1 \leq B_2 \text{ on } \Gamma_1 \text{ and } q_2 \leq q_1 \text{ on } \Gamma_2 \Rightarrow u_{q_1 B_1} \leq u_{q_2 B_2} \text{ in } \bar{\Omega}.$$

Moreover,

$$(12) \quad q > 0 \text{ on } \Gamma_2 \Rightarrow u_{qB} \leq \text{Max}_{\Gamma_1} B \text{ in } \bar{\Omega},$$

and function $u = u_{qB}$ satisfies the equality

$$(13) \quad a(u^-, u^-) = \int_{\Gamma_2} q u^- d\gamma .$$

COROLLARY 2.— From (13), we deduce

$$(14) \quad u^- \neq 0 \text{ in } \bar{\Omega} \Leftrightarrow u^- \neq 0 \text{ on } \Gamma_2 ,$$

where $q > 0$ and $B > 0$.

NOTE 1.— We shall denote by (N-n) the formula (n) of Section N and we shall omit N in the same paragraph. Idem for theorems, lemmas, corollaries, remarks and notes. We shall also omit the space variable $x \in \Omega$ for every function defined in Ω .

II. MIXED ELLIPTIC PROBLEMS WITH OR WITHOUT PHASE CHANGE.

We shall give a problem which are related to the mixed elliptic partial differential equations (I-6) or (I-7).

Problem P : For the constant case $B > 0$ and $q > 0$, find a constant $q_0 = q_0(B) > 0$ such that for $q > q_0(B)$ we have a steady-state, two-phase Stefan problem in Ω , that is the solution u of (I-7) is a function of non-constant sign in Ω .

REMARK 1.— From (I-14) we deduce that an answer to problem P is the element q for which u takes negative values on the boundary Γ_2 .

LEMMA 1.— Let $u = u_q$ be the unique solution of the variational equality (I-7) for $q > 0$ (for a given $B > 0$). Then

(i) The mappings

$$(1) \quad q > 0 \rightarrow u_q \in V \quad \text{and} \quad q > 0 \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma \in \mathbb{R}$$

are strictly decreasing functions.

(ii) For all $q > 0$ and $\delta > 0$ we have the following estimates :

$$(2) \quad \left\| \frac{1}{\delta} (u_{q+\delta} - u_q) \right\|_V \leq C_1 = \frac{\|\gamma_0\|}{\alpha_0} |\Gamma_2|^{1/2},$$

$$(3) \quad \left\| \frac{1}{\delta} (u_q - u_{q+\delta}) \right\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_2 = C_1 \|\gamma_0\|,$$

where γ_0 is the trace operator (linear and continuous, defined on V), and $\alpha > 0$ is the coercivity constant on V_0 of the bilinear a , i.e. :

$$(4) \quad \exists \alpha > 0 / a(v, v) = \|v\|_{V_0}^2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V_0.$$

(iii) For all $q > 0$ and $\delta > 0$ we have

$$(5) \quad 0 < \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma - \int_{\Gamma_2} u_{q+\delta} \, d\gamma \leq C_3 \delta \quad (C_3 = C_2 |\Gamma_2|^{1/2} > 0)$$

and therefore the function $q > 0 \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma$ is continuous.

PROOF.— If $u_i = u_{q_i}$ is the solution of (I-7) for $q_i > 0$ ($i = 1, 2$), then we have the following equalities :

$$(6) \quad a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) \, d\gamma,$$

$$(7) \quad a(u_2, u_2) - a(u_1, u_1) = a(u_2 + u_1, u_2 - u_1) = (q_1 + q_2) \int_{\Gamma_2} (u_1 - u_2) \, d\gamma,$$

because we take $v = u_2 \in K$ in the variational equality corresponding to u_1 , and $v = u_1 \in K$ in the one corresponding to u_2 , and we add up and subtract both equalities. From (6) and (7) we obtain (2) and (3) [12].

Let $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ be the real function defined by

$$(8) \quad f(q) = J(u_q) = \frac{1}{2} a(u_q, u_q) + q \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma .$$

REMARK 2.— To solve Problem P it is sufficient to find a value $q > 0$ for which we have $f(q) < 0$. We shall further see that this technique can still be improved.

THEOREM 2.— (i) The function f is differentiable. Moreover, f' is a continuous and strictly decreasing function, and it is given by the following expression

$$(9) \quad f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma .$$

(ii) There exists a geometric constant $C > 0$ such that

$$(10) \quad a(u_q, u_q) = C q^2 ,$$

$$(11) \quad f(q) = -\frac{C}{2} q^2 + B |\Gamma_2| q .$$

(iii) If

$$(12) \quad q > q_0(B) ,$$

then we obtain a two-phase, steady-state Stefan problem in Ω (i.e. u_q is a function of non-constant sign in Ω), where

$$(13) \quad q_0(B) = \frac{B |\Gamma_2|}{C} .$$

(iv) Constant $C = C(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) > 0$ is given by

$$(14) \quad C = a(u_3, u_3) = \int_{\Gamma_2} u_3 \, d\gamma ,$$

where u_3 is the solution of the variational equality

$$(15) \quad u_3 \in V_0 , \quad a(u_3, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma , \quad \forall v \in V_0 ,$$

PROOF.— See [12]

REMARK 3.— The sufficient condition $f(q) < 0$, to solve Problem P, was improved by the condition $f'(q) < 0$, which is optimal (see examples more later). In the case where, because of symmetry, we find that the function u_q is constant on Γ_2 , the sufficient condition, given by (12), is also necessary to have a steady-state, two-phase Stefan problem.

III. NUMERICAL ANALYSIS OF MIXED ELLIPTIC PROBLEMS WITH OR WITHOUT PHASE CHANGE

Now, we consider τ_h , a regular triangulation of the polygonal domain Ω with Lagrange triangles of type 1, constituted by affine-equivalent finite element of class C^0 , where $h > 0$ is a parameter which goes to zero. We can take h equal to the longest side of the triangles $T \in \tau_h$ and we can approximate V_0 by [2] :

$$(1) \quad V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h, v_h|_{\Gamma_1} = 0 \right\} ,$$

where P_1 is the set of the polynomials of degree less than or equal to 1. Let Π_h be the corresponding linear interpolation operator. Then, we can consider that there exists a constant $C_0 > 0$ (independent of the parameter h) such that

$$(2) \quad \|v - \Pi_h v\|_V \leq C_0 h^{r-1} \|v\|_{r,\Omega}, \quad \forall v \in H^r(\Omega), \text{ with } 1 < r \leq 2.$$

We consider the following finite dimensional approximate variational problem, corresponding to the continuous variational problem (I-7), given by :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ u_h \in K_h = B + V_h, \end{array} \right.$$

and we can obtain the following results.

LEMMA 1 .- We have

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \|u_h - u\|_V = 0,$$

where u is the unique solution of the variational equality (I-7).

PROOF .- Since $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$, we have that the bilinear form a is coercive over V_0 and therefore $\|\cdot\|_{V_0}$ and $\|\cdot\|_V$ are two equivalent norms in V_0 . We conclude the proof by following a method similar to the one developed in [2].

COROLLARY 2 .- If we define

$$(5) \quad \theta_h = \frac{1}{k_2} u_h^+ - \frac{1}{k_1} u_h^- \in V, \quad \theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^- \in V,$$

then, we have

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \|\theta_h - \theta\|_H = 0 ,$$

where $H = L^2(\Omega)$.

PROOF .— See [13]

The goal of this part is to consider the discrete equivalent of the inequality (II-12). We study sufficient (and/or necessary) conditions on the constant heat flux q on Γ_2 to obtain a change of phase (steady-state, two-phase, discretized Stefan problem) in the corresponding discretized domain, that is a discrete temperature of non-constant sign in Ω . We obtain that (similarly to the continuous problem) :

(i) there exists a constant $C_h > 0$ (which depends only of the geometry of the domain Ω for each $h > 0$, and which is characterized by a variational problem) such that, if $q > q_{0h}(B) = B|\Gamma_2|/C_h$ then the steady-state discretized problem presents two phases.

(ii) we have the estimations $C_h < C$ and $q_0(B) < q_{0h}(B)$, where C and $q_0(B)$ are given for the continuous problem respectively by (II-14) and (II-13) .

(iii) we deduce error bounds for $C - C_h$ and $q_{0h}(B) - q_0(B)$ as functions of the parameter h .

In other words, we obtain for the mixed elliptic discretized problem, defined by u_h , analogous conditions to the ones obtained for the corresponding continuous problem [12], defined by u .

For each $q > 0$ we consider the functions $u(q) \in K$ and $u_h(q) \in K_h$, respectively, as the unique solution of the variational equalities (I-7) (continuous problem) and (3) (discrete problem). For each $h > 0$, we define the real function $f_h : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, in the following way

$$(7) \quad f_h(q) = J_q(u_h(q)) = \frac{1}{2} a(u_h(q), u_h(q)) + q \int_{\Gamma_2} u_h(q) d\gamma , \quad q > 0 .$$

We obtain the following properties :

THEOREM 3.— (i) If $u_i = u_h(q_i)$ is the solution of (3) for $q_i > 0$ ($i = 1, 2$), then we have the following relations:

$$(8) \quad a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) d\gamma,$$

$$(9) \quad a(u_2, u_2) - a(u_1, u_1) = a(u_2 + u_1, u_2 - u_1) = (q_1 + q_2) \int_{\Gamma_2} (u_1 - u_2) d\gamma.$$

(ii) For all real numbers $q > 0$ and δ such that $(q + \delta) > 0$, we obtain the following estimations :

$$(10) \quad \left\| \frac{1}{\delta} [u_h(q) - u_h(q + \delta)] \right\|_V \leq D_1 = \frac{|\gamma_0|}{\alpha} |\Gamma_2|^{1/2},$$

$$(11) \quad \left\| \frac{1}{\delta} [u_h(q) - u_h(q + \delta)] \right\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq D_2 = D_1 |\gamma_0|,$$

where γ_0 is the linear and continuous trace operator defined over V . Moreover, the function $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$

$$(12) \quad q \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_h(q) d\gamma \in \mathbf{R},$$

is a continuous and strictly decreasing function.

(iii) The function $f_h = f_h(q)$ is differentiable. Moreover, f_h' is a continuous and strictly decreasing function given by the following expression

$$(13) \quad f_h'(q) = \int_{\Gamma_2} u_h(q) d\gamma.$$

PROOF.— (i) If we take $v = u_2 - u_1 \in V_h$ in the variational equality corresponding to u_1 and $v = u_1 - u_2 \in V_h$ in the one corresponding to u_2 , add and subtract the resulting relations, then we obtain, respectively (8) and (9).

(ii) Taking into account (II-4), the Cauchy-Schwarz inequality, and the continuity of the operator γ_0 , we deduce (14). From (14) and the continuity of γ_0 we have (11). Therefore, we have (12) because

$$(14) \quad \left| \int_{\Gamma_2} [u_h(q) - u_h(q + \delta)] d\gamma \right| \leq D_2 |\Gamma_2|^{1/2} \delta.$$

Moreover, the monotony property is a consequence of (8).

(iii) From (7) and elementary computations, we deduce

$$(15) \quad \frac{1}{\delta} [f_h(q + \delta) - f_h(q)] = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} [u_h(q) + u_h(q + \delta)] d\gamma,$$

that is (13), by using (12).

THEOREM 4.— (i) The element $u_h = u_h(q) \in V_h$ can be written as

$$(16) \quad u_h(q) = B - q u_{3h}$$

where u_{3h} is the unique solution of the variational equality

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u_{3h}, v_h) = \int_{\Gamma_2} v_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_h, \\ u_{3h} \in V_h. \end{array} \right.$$

(ii) There exists a constant $C_h > 0$ such that

$$(18) \quad f_h(q) = q B |\Gamma_2| - \frac{1}{2} C_h q^2, \quad \forall q > 0,$$

$$(19) \quad a(u_h(q), u_h(q)) = C_h q^2, \quad \forall q > 0.$$

where the constant C_h is given by

$$(20) \quad C_h = a(u_{3_h}, u_{3_h}) = \int_{\Gamma_2} u_{3_h} \, d\gamma .$$

(iii) If

$$(21) \quad q > q_{0_h}(B) ,$$

then problem (3) represents a discretized steady-state two-phase Stefan problem (i.e. $u_h(q)$ is a function of non-constant sign in Ω), where

$$(22) \quad q_{0_h}(B) = \frac{B |\Gamma_2|}{C_h} .$$

PROOF.— (i) It follows from (3), (7) and (16) by uniqueness of the variational equalities (3) and (17);

(ii) It follows from (7) and (16);

(iii) It follows taking into account

$$(23) \quad f_h'(q_{0_h}(B)) = 0 ,$$

and the monotony property of the function f_h' .

THEOREM 5.— (i) We have the following equality :

$$(24) \quad a(u(q), u_h(q)) = C_h q^2 , \forall q > 0 .$$

(ii) Also, we have the following inequalities :

$$(25) \quad (a) C_h < C , \quad (b) q_0(B) < q_{0_h}(B) .$$

PROOF.— (i) If we take $v = u_h(q) \in K_h = B + V_h \subset B + V_0 = K$ in the variational

equality (I-7), and we take into account the expressions (II-10) and (18), then we obtain (24).

(ii) On the other hand, from (II-4) and (24) we have

$$(26) \quad \alpha \| u(q) - u_h(q) \|_V^2 \leq a(u(q) - u_h(q), u(q) - u_h(q)) = (C - C_h) q^2,$$

that is (25a). Moreover, (25b) follows from (II-13), (22) and (25a).

Now we shall use the interpolation result (2) for the function $u_3 \in H^r(\Omega)$, as a hypothesis of regularity of the continuous problem (I-7) (in general, $1 < r < \frac{3}{2}$ [5, 7, 8]). In [11], we present three examples with explicit solution were presented. In those cases, $u(q), u_3 \in C^\infty(\Omega)$.

THEOREM 6 .— We have the following relations and estimations :

$$(27) \quad a(u(q) - u_h(q), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$(28) \quad (C - C_h) q^2 = a(u(q) - u_h(q), u(q) - u_h(q)) \leq \\ \leq \inf_{v_h \in V_h} a(u(q) - v_h, u(q) - v_h),$$

$$(29) \quad 0 < C - C_h \leq C_0^2 h^{2(r-1)} |u_3|_{r,\Omega}^2,$$

$$(30) \quad 0 < q_{0h}(B) - q_0(B) \leq \frac{C_0^2 h^{2(r-1)}}{C} |u_3|_{r,\Omega}^2 q_{0h}(B).$$

PROOF .— See [13].

REMARK 1 .— If we only have $u(q) \in V$ (i.e. $u_3 \in V$), we can obtain

$$(31) \quad 0 < C - C_h \leq \frac{1}{q^2} \| u(q) - \Pi_h(u(q)) \|_V^2 = \| u_3 - \Pi_h(u_3) \|_V^2 ,$$

where the second term converges to zero when $h \rightarrow 0^+$ [2] , but we cannot give an order of convergence.

REMARK 2.— If the constant heat flux on Γ_2 verifies the inequality $q > q_{0_h}(B)$, then both the discrete and continuous problems represent steady-state, two-phase, Stefan problems, that is, their temperatures are of non-constant sign in Ω .

REMARK 3.— When the function $u_h(q)$ is constant on Γ_2 (as a function of $x \in \Gamma_2$), then the sufficient condition given by (21) is also necessary in order to have a two-phase discrete problem, because

$$(32) \quad \int_{\Gamma_2} u_h(q) \, d\gamma < 0 \Leftrightarrow u_h(q) < 0 \text{ on } \Gamma_2 .$$

THEOREM 7.— If we let $h, B > 0$, and $0 < \epsilon_0 < 1$ (ϵ_0 is a parameter to be chosen arbitrarily), then we have the following estimations :

$$(33) \quad q_0(B) < q_{0_h}(B) \leq \frac{q_0(B)}{\epsilon_0} \quad \text{and} \quad C_h \geq C \epsilon_0 , \quad \forall h \leq h_r(\epsilon_0),$$

$$(34) \quad 0 < q_{0_h}(B) - q_0(B) \leq \frac{C_0^2 |u_3|_{r,\Omega}^2}{C \epsilon_0} q_0(B) h^{2(r-1)} , \quad \forall h \leq h_r(\epsilon_0),$$

where

$$(35) \quad h_r(\epsilon_0) = \left(\frac{C(1-\epsilon_0)}{C_0^2 |u_3|_{r,\Omega}^2} \right)^{\frac{1}{2(r-1)}} .$$

PROOF .— From (30) we deduce

$$(36) \quad A(h) q_{0h}(B) \leq q_0(B),$$

where

$$(37) \quad A(h) = 1 - \frac{C_0^2 |u_3|_{r,\Omega}^2}{C} h^{2(r-1)} < 1.$$

If we consider, for each ϵ_0 , $0 < \epsilon_0 < 1$, the following equivalence :

$$(38) \quad 0 < \epsilon_0 < A(h) < 1 \Leftrightarrow 0 < h < h_r(\epsilon_0),$$

then we deduce the inequalities (33) and (34).

COROLLARY 8.— If $B > 0$, then we have the following limit

$$(39) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} q_{0h}(B) = q_0(B).$$

REMARK 4.— Everything we proved in this paper is still valid if the boundary Γ of the bounded domain Ω is represented by the union of three portions ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$) having the following characteristics :

- (i) Γ_1 and Γ_2 have the same conditions as the ones previously described in (I-4),
- (ii) Γ_3 is a wall impermeable to heat, i.e. we have $\frac{\partial \theta}{\partial n} |_{\Gamma_3} = 0$ in (I-4) and therefore $\frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_3} = 0$ in (I-6).

Moreover, the first example considered (see below) verifies this condition.

We shall give three examples in which the solution is explicitly known [11] so that we can verify all the theoretical results obtained in this work.

Example 1.— We consider the following data

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & n = 2 \quad , \quad \Omega = (0, x_0) \times (0, y_0) \quad , \quad x_0 > 0 \quad , \quad y_0 > 0 \quad , \\
 & \Gamma_1 = \{0\} \times [0, y_0] \quad , \quad \Gamma_2 = \{x_0\} \times [0, y_0] \quad , \\
 & \Gamma_3 = (0, x_0) \times \{0\} \cup (0, x_0) \times \{y_0\} .
 \end{aligned}$$

Example 2.— Next we consider

$$\begin{aligned}
 (41) \quad & n = 2 \quad , \quad 0 < r_1 < r_2 \quad , \quad \Gamma_3 = \phi \quad , \\
 & \Omega : \text{annulus of radius } r_1 \text{ and } r_2 \quad , \text{ centered at } (0, 0) \quad , \\
 & \Gamma_1 : \text{circumference of radius } r_1 \text{ and center } (0, 0) \quad , \\
 & \Gamma_2 : \text{circumference of radius } r_2 \text{ and center } (0, 0) \quad .
 \end{aligned}$$

Example 3.— Finally, we take into account the same information of Example 2 but now for the case $n = 3$.

Acknowledgments.— This paper has been sponsored by the Projects "Problemas de Frontera Libre de la Física—Matemática" and "Análisis Numérico de Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales" from CONICET, Rosario—Argentina.

REFERENCES

[1] C. BAIOCCHI — A. CAPELO, "Diseguazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1, 2, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[2] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).

[3] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche No. 185, LABORIA—IRIA, Rocquencourt (1976).

[4] M. FREMOND, "Diffusion problems with free boundaries", in Autumn

Course on Applications of Analysis to Mechanics, ICTP, Trieste (1976).

[5] P. GRISVARD, "Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain", in Numerical Solution of Partial Differential Equations III, SYNSPADE 1975, B. Hubbard (Ed.), Academic Press, New York (1976), 207–274.

[6] D. KINDERLEHRER – G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[7] M.K.V. MURTHY – G. STAMPACCHIA, "A variational inequality with mixed boundary conditions", Israel J. Math., 13 (1972), 188–224.

[8] E. SHAMIR, "Regularization of mixed second-order elliptic problems", Israel J. Math., 6 (1968), 150–168.

[9] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", C. R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941–944.

[10] D.A. TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981), 147–241. See also "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan problem", (with 2528 references), Progetto Nazionale M.P.I. "Equazioni di evoluzione e applicazioni fisico-matematiche", Firenze (1988).

[11] D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computação Científica, Vol. 5, SBMAC, Rio de Janeiro (1987).

[12] D.A. TARZIA, "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Engineering Analysis, 5 (1988), 177–181.

[13] D.A. TARZIA, "Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem to obtain a discrete steady-state two-phase Stefan problem", To appear.

Serie : CUADERNOS del Inst. de Matemática "B. Levi"

Coordinador: Domingo Alberto TARZIA , Secretaria: María Cristina SANZIEL

NUMEROS APARECIDOS :

1. G. STAMPACCHIA, "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales".
2. C. PROCESI, "Teoría de Galois elemental".
3. U. MOSCO, "Transformada de Fourier y distribuciones".
4. P. BERNHARD, "Introducción a la teoría de Control Optimo".
5. P. FAURRE, "Teoría de Control. Filtrado estadístico e Introducción al Control Estocástico".
6. "Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", E. Hofman (Ed.), Rosario, 2-7 de julio de 1973 :
U. D'AMBROSIO, "Superficies generalizadas no cálculo das variacoes", p. 5-24.
L.A. MEDEIROS, "Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales", p. 25-58.
E. ROFMAN, "Desigualdades variacionales. Existencia y aproximación numérica de soluciones", p. 59-86.
7. A. BENSOUSSAN, "Teoría moderna de Control Optimo".
8. C. BAIOCCHI, "Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi-variacional y numérico".
9. R. GLOWINSKI, "Introducción a la aproximación de inecuaciones variacionales elípticas".
10. H. SAMARA, "Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Formulación variacional del método TAU".
11. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1 :
D.A.TARZIA, "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", p. 5-32.
D.A.TARZIA, "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", p. 33-61.
J.E. BOUILLET, "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", p. 63-74.
J.E. BOUILLET, "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", p. 75-104.
L.T. VILLA, "El problema inverso de Stefan", p. 105-131.
L.T. VILLA, "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase", p. 133-142.

R.H. NOCHETTO, "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", p. 143-166.

G.G. GARGUICHEVICH-M.C. SANZIEL, "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", p. 167-177.

12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2.
D.A. TARZIA, "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", p. 5-36.
D.A. TARZIA, "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", p. 37-85.
P.R. MARANGUNIC, "Algunos conceptos básicos del análisis funcional", p. 87-118.
H.R. BERTORELLO, "Sobre la solidificación de aleaciones binarias", p. 119-142.
L. CRIVELLI-S. IDELSOHN-C. BAIGORRIA, "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales", p. 143-170.
E.E. ALANIS, "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar", p. 171-177.
M.B. STAMPELLA, "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase", p. 179-193.
13. A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", en "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 1.
14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2 :
H. BERTORELLO, "Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido", p. 9-27.
J.E. BOUILLET, "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas", p. 29-44.
D.A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases", p. 45-75.
D.A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", p. 77-99.
L.T. VILLA, "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre", p. 101-116.
N. AGUILERA, "El método de Alt para el problema del dique poroso", p. 117-128.
G.G. GARGUICHEVICH, "Las inecuaciones variacionales elípticas", p. 129-138.
P.R. MARANGUNIC, "Distribuciones y espacios de Sobolev", p. 139-165.
E. ZARANTONELLO, "Teoría espectral cónica", p. 167-169.
15. P.L. GEORGE, "Introducción a la utilización del Software Científico MODULEF".
16. J.L. MENALDI, "Programación dinámica estocástica".

17. "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 1 :
 J.K. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas", p. 7-13.
 C. CORTAZAR - M. ELGUETA, "Sobre localización de soluciones de la ecuación de medios porosos", p. 15-27.
 G.G. GARGUCHEVICH - D.A. TARZIA, "Sobre un problema de Stefan a dos fases con fuente de energía interna", p. 29-44.
 M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas", p. 45-53.
 R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos", p. 55-71.
 D.A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción", p. 73-86.
 C.V. TURNER, "Difusión de un solvente en un polímero no homogéneo", p. 87-104.
 K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic and stochastic approach", p. 105-119.
 L.T. VILLA, "Problemas de frontera libre y móvil en procesos de ingeniería química", p. 121-132.
 D.A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados", p. 133-151.
18. M. PRIMICERIO - R. GIANNI, "La filtración en medios porosos", en "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 2.
19. J.C. CESCO, "Economía matemática", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
20. L. QUINTAS, "Teoría de juegos", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
21. E. GENTILE, "Forma Normal de Jordan", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
22. M. UGHI, "On the porous media equation with either source or absorption".
23. "IV Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 14-18 de diciembre de 1992, Volumen 1 :
 J.C. REGINATO - D.A. TARZIA, "Free boundary models for root growth of crops", p. 1-26.
 R. PARDO, "Modelado térmico de soldaduras GMA", p. 27-33.
 M.K. KORTEN, "Fronteras libres en soluciones de la ecuación $u_t = \Delta(u-1)_+$ ", p. 35-37.
 M.C. SANZIEL - D.A. TARZIA, "Problemas con multifases", p. 39-51.
 L.T. VILLA, "Modelos de Frontera Libre-Móvil en sistemas de difusión reacción química gas-sólido", p. 53-71.

- L.R. BERRONE—G.G. GARGUICHEVICH, "Sobre un problema estacionario de Stefan con fuente de energía", p. 73—80.
- J.I. ETCHEVERRY, "Análisis de Modelos de Ablación de Polímeros", p. 81—92.
- V.A. KUZ, "Dynamic study of evaporation of droplets", p. 93—102.
- D.F. DELMASTRO — A. CLAUSSE, "Oscilaciones de frontera de entalpia en flujos de dos fases", p. 103—119.
24. "IV Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 14—18 de diciembre de 1992, Volumen 2:
- L.R. BERRONE, "Rango temporal de validez de modelos que involucran a la ecuación del calor—difusión", p. 1—36.
- C.V. TURNER, "El problema de Stefan unidimensional para el líquido sobreenfriado", p. 37—49.
- R.H. MASCHERONI, "Transferencia de calor con cambio de fase en sistemas multidimensionales: uso de factores de forma en métodos aproximados", p. 51—66.
- M. STORTI, "Numerical modeling of ablation phenomena as two—phase Stefan problems", p. 67—88.
- C.B. LEDERMAN, "Un problema de frontera libre en elasticidad", p. 89—96.
- J.E. BOUILLET, "Fronteras libres en ecuaciones de conducción con coeficientes discontinuos", p. 97—102.
- D.A. TARZIA, "Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem with solution of non—constant sign", p. 103—120.

Nota : Para intercambiar esta serie con publicaciones similares, dirigirse a:

CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas , Ingeniería y Agr.,
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.

Note : To exchange this serie with similar publications, please write to:

CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas , Ingeniería y Agr.,
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.

Impreso en I.R.I.C.E 27 de Febrero 210 bis 2000 Rosario

Mayo de 1994