

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

# CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

## **III SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES**

Rosario, 11 al 15 de octubre - 1988

**17**

Rosario - República Argentina  
-1989-

## Serie : CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"

Coordinador : Domingo A. TARZIA.

### NUMEROS APARECIDOS :

1. G. STAMPACCHIA, "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales".
2. C. PROCESI, "Teoría de Galois elemental".
3. U. MOSCO, "Transformada de Fourier y distribuciones".
4. P. BERNHARD, "Introducción a la teoría de Control Optimo".
5. P. FAURRE, "Teoría de Control. Filtrado estadístico e Introducción al Control Estocástico".
6. "Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", Rosario, 2-7 de julio de 1973.
7. A. BENSOUSSAN, "Teoría moderna de Control Optimo".
8. C. BAIOCCHI, "Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi-variacional y numérico".
9. R. GLOWINSKI, "Introducción a la aproximación de inecuaciones variacionales elípticas".
10. H. SAMARA, "Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Formulación variacional del método TAU".
11. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1.
12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2.
13. A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", en "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 1.
14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2.
15. P.L. GEORGE, "Introducción a la utilización del Software Científico MODULEF".
16. J.L. MENALDI, "Programación dinámica estocástica".
17. "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 1.
18. M. PRIMICERIO, "La filtración en medios porosos", en "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 2.
19. J.C. CESCO, "Economía matemática", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
20. L. QUINTAS, "Teoría de juegos", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
21. E. GENTILE, "Forma Normal de Jordan", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.

## PREFACIO

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años (ver Anexo I ), el Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario, PROMAR (CONICET—UNR), que se desarrolla en el Instituto de Matemática "Beppo Levi", emprendió, a través del proyecto de investigación y desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física Matemática", la organización del interdisciplinario Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones, realizado en la ciudad de Rosario (Argentina) durante el período del 11 al 15 de octubre de 1988.

El Comité Organizador estuvo compuesto por H. R. BERTORELLO (FAMAF, Córdoba), J. E. BOUILLET (IAM—UBA, Buenos Aires), E. A. GARCIA (CNEA, Buenos Aires), D. A. TARZIA (PROMAR, Rosario) (Coordinador) y L. T. VILLA (UNSa, Salta).

La Secretaría estuvo a cargo de L. R. BERRONE, G. G. GARGUICHEVICH, S. DI MARCO, P. R. MARANGUNIC (Coordinador), M. C. SANZIEL, C. O. STOICO, todos del PROMAR.

Este Seminario ha sido realizado, en parte, gracias a un subsidio que a tal efecto otorgó el CONICET. Además se contó con la ayuda de las siguientes Instituciones Auspiciantes :

AMCA — Asociación Argentina de Mecánica Computacional; CAMAT — Comité Argentino de Transferencia de Calor; CERIDER — Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Rosario; CONICET — Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas; CIUNR — Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario; Depto. de Matemática — Escuela de Ciencias Exactas y Naturales; Depto. de Matemática — Escuela de Formación Básica; FCEIA — Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR); Municipalidad de Rosario.

Además colaboraron las siguientes entidades:

CIDCA (CIC — CONICET — UNLP), La Plata; CNEA, Buenos Aires; Consulado de Italia en Rosario; FAMAF (UNC), Córdoba; IAM (CONICET), Buenos Aires; INIQUI (CONICET — UNSa), Salta; PEMA (CONICET — UNL), Santa Fe.

En el Seminario participaron 51 personas (de las cuales 5 son extranjeras) provenientes de 14 ciudades argentinas y 4 extranjeras (ver Anexo III — Lista de Participantes)

Los objetivos del Seminario fueron

- 1) Gestar un *encuentro bianual/trianual* de las personas y grupos que trabajan en problemas de frontera libre, en particular, en el problema de Stefan (cambio de fase) en el país, a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos
- 2) No limitar el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia, sino también, y muy especialmente, despertar el interés y el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*.

Esta tercera edición del Seminario estuvo constituida por cursillos intensivos sobre los aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones (ver Anexo II). En años sucesivos, los cursillos versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numérico (no tratados en Seminarios anteriores) y los principios teóricos irán paulatinamente dando lugar a las aplicaciones

Para finalizar, quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a los profesores encargados de la redacción de estas notas como asimismo a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA

Compilador

Rosario, Abril 1989



## ANEXO PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Los problemas de frontera libre son aquellos problemas de contorno donde interviene además una incógnita (la "frontera libre") que separa dos o más regiones, y sobre la cual se conocen datos que dependen del modelo analizado. Según el número de dimensiones del espacio, en lugar de una superficie de separación se podrá tener una curva o un número finito de puntos.

Un ejemplo típico es el problema de Stefan (o problema de cambio de fase), que estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida (por ej. hielo y agua en procesos de fusión o solidificación). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. Sobre la superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, se impone una condición adicional que surge del principio de conservación de la energía. El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha frontera libre, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Otros ejemplos son:

- ✕ problemas de hidráulica, por ej. el del dique poroso, donde una superficie desconocida separa la zona seca de la zona húmeda;
- ✕ el problema del obstáculo, donde hay una zona de contacto entre el obstáculo y la configuración de equilibrio de la cuerda o membrana elástica;
- ✕ problemas de difusión-reacción gas-sólido en Ingeniería Química, donde la superficie incógnita separa la región del sólido ya atacada de la todavía no atacada;
- ✕ problemas de elasto-plasticidad, problemas térmicos con pared semi-permeable, semiconductores bajo una unión P-N, problemas de mecánica de los fluidos, etc.

Entre las múltiples aplicaciones de estos problemas se pueden mencionar: electropintura, envenenamiento y regeneración de catalizadores; combustión de sólidos; solidificación de aleaciones binarias; soldadura de metales; colada continua del acero; congelación de alimentos en la industria frigorífica; almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase; oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares, en caso de accidentes; procesos de ablación térmica; difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos, para el tratamiento médico de tumores mediante la aplicación de radiaciones; problemas de control óptimo ligados a procesos con cambio de fase; solidificación de suelos húmedos, derretimiento de glaciares; etc.

El avance considerable que se ha obtenido en el desarrollo teórico de estos temas a nivel nacional, y sus variadas aplicaciones industriales que se encuentran en etapa inicial, impulsan la realización de este III Seminario, prosiguiendo la línea de los ya concretados I y II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones (Rosario, 4-8/7/83 y 13-17/10/86, respectivamente). El material correspondiente a estos últimos ha sido publicado en la colección CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi" números 11, 12, 13 y 14.

## ANEXO II

### CONTENIDO DEL SEMINARIO

CURSO (en CUADERNOS No. 18):

✠ M. PRIMICERIO, "La filtración en medios porosos"

CONFERENCIAS GENERALES Y DE APLICACIONES (en CUADERNOS No. 17):

✠ N. AGUILERA, "Análisis numérico de flujos potenciales cavitacionales".

✠ J. E. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas".

✠ A. DENIS, "Modelos de simulación para interpretar cinéticas de permeación con trampas profundas".

✠ M. ELGUETA, "Localización de soluciones en problemas de filtración".

✠ E. A. GARCIA - A. WILHELM, "Disolución de  $UO_2$  por zircaloy líquido".

✠ G. G. GARGUICHEVICH, "El problema estacionario de Stefan a dos fases con una fuente de energía interna".

✠ S. IDELSOHN - M. STORTI, "Solución numérica del problema de Stefan con un método de convergencia cuadrática".

✠ M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas".

✠ R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos".

✠ D. A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados".

✠ D. A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción".

✠ C. TURNER, "El problema del polímero".

✠ K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic approach".

✠ K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Stochastic approach".

✠ E. VICENTE, "Procesos de solidificación de metales y aleaciones".

✠ L. T. VILLA, "Problemas de frontera móvil y libre en procesos de ingeniería química".

✠ D. G. WILSON, "Cyclic melting and freezing with variable density".

✠ D. G. WILSON, "Implicit finite-difference schemes for phase-change problems".

## LISTA DE PARTICIPANTES

- ACOSTA, Nelson A., Fac. Cs. Tecnológicas (UNSa), Buenos Aires 177, 4400 Salta (ARGENTINA).
- AGUILERA, Néstor, PEMA-INTEC (CONICET-UNL), Guemes 3450, 3000 Santa Fe (ARGENTINA).
- AKOVALI, Yurdanur, Oak Ridge Nat. Lab., P.O.Box 2008 - Oak Ridge, TN 37831-6371 (USA).
- ANTONETTI, Daniel Eduardo, Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- ARAGONE, Laura Susana, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- BANCORA-IMBERT, María Cristina, Dpto. de Matemática, Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- BERGALLO, Marta Beatriz, Fac. de Ingeniería Química - P.E.M.A., Guemes 3450, 3000 Santa Fe (ARGENTINA).
- BERRONE, Lucio, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- BOUILLET, Julio E., Fce y N. - UBA - IAM (CONICET), Viamonte 1636, 1055 Buenos Aires (ARGENTINA).
- BRITO, Héctor H., Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- BRUNET, Hector Arnaldo, Dpto de Matemática - U.N.S., Alem 1253, 8000 Bahía Blanca (ARGENTINA).
- CAMARGO, Susana O., Dr. Vidal 1161, C. de Nieva, 4600 S.S. de Jujuy (ARGENTINA).
- CASTELLINI, Horacio, Fac. Cs. Ex., Ing. y Agr., Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- CIAVATTINI, Roberto Antonio, Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- CICUTTI, Carlos E., Inst. Arg. Metalurgia, Avda Central y 19 de Oeste B. Gral. Savio, 2901 San Nicolás (ARGENTINA).
- DENIS, Alicia, Dpto Materiales - CAC - CNEA, Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (ARGENTINA).
- DI MARCO, Silvia, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- DUELLI, Rodolfo M., Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- ELGUETA, Manuel, Univ. Católica de Chile, Cardenal Neuman 1016, Santiago de Chile (CHILE).
- FRATTINI, Agustín L., Fac. Cs. Bioq. y Far., Suipacha 531, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- GARCIA, Eduardo A., CNEA-CAC - Dpto de Materiales, Avda del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (ARGENTINA).
- GARGUICHEVICH, Graciela G., PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- GONZALEZ, Adriana María, Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace ruta 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- IDELSHON, Sergio, INTEC-SANTA FE (CONICET-UNL), Guemes 3450, 3000 Santa Fe (ARGENTINA).
- KORTEN, Marianne, IAM-CONICET, Viamonte 1636, 1055 Cap. Fed.

LASSERRE, Cecilia M., Univ. Nac. de Jujuy, Gorriti 237, 4600 S.S. de Jujuy (ARGENTINA).

LEDERMAN, Claudia, IAM - CONICET, Viamonte 1636 - 1<sup>er</sup> piso - 1<sup>er</sup> cuerpo, Buenos Aires (ARGENTINA).

LEHMAN, Mario M., Univ. Nac. de Centro de la Prov. de Bs. As., Pinto 399, 7000 Tandil (ARGENTINA).

MARANGUNIC, Pedro R., PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).

MARTINEZ, Rubén Germán, Avda Pellegrini 1474 - 2p. 6, 2000 Rosario (ARGENTINA).

MASCHERONI, Rodolfo H., CIDCA, 47 Y 116, 1900 La Plata (ARGENTINA).

MOEX, Guillermo S., Gálvez 5930, 2000 Rosario (ARGENTINA).

MOYANO, Edgardo A., C.N.E.A. (Centro de Cálculo), Av. Constituyentes y Gral Paz, 1704 Buenos Aires (ARGENTINA).

MULER, Nora, CONICET - Inst. Arg. de Mat., Viamonte 1636 - 1<sup>er</sup> piso - 1<sup>er</sup> cuerpo, 1055 Cap. Fed. (ARGENTINA).

ORNASS, Victoria R., Fac. Cs. Tecnológicas (UNSa), Buenos Aires 177, 4400 Salta (ARGENTINA).

PRIMICERIO, Mario, Ist. Mat. U. Dini, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze (ITALIA).

QUIROGA, Marisa, Fac. de Ing., Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).

REGINATO, Juan Carlos, Univ. Nac. Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36, Río Cuarto - 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).

ROYO DE OVANDO, Josefina, Univ. Nac. de Jujuy, Gorriti 237, 4600 S.S. de Jujuy (ARGENTINA).

SANZIEL, María Cristina, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).

STOICO, César O., PROMAR (CONICET-UNR), Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).

STORTI, Mario Alberto, INTEC-SANTA FE (CONICET-UNL), Guemes 3450, 3000 Santa Fe (ARGENTINA).

TARZIA, Domingo A., PROMAR (CONICET - UNR), Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).

TIDBALL, Mabel, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).

TORRES DE OSELLA, Maria Eugenia, Fac. de Ing. (UNER), Oro Verde, Entre Rios (ARGENTINA).

TURNER, Cristina, FAMAF UNC, Valparaíso y R. Martínez - Cd. Univ., 5000 Cordoba (ARGENTINA).

TWARDOWSKA, Krystyna, Jagiellonian Univ., 31501 Krakow, UL. Kopernika 27 (POLAND).

VICENTE, Eduardo, Dpto Materiales - CAC - CENEA, Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (ARGENTINA).

VILLA, Luis T., Fac. Cs. Tecnológicas (UNSa), Buenos Aires 177, 4400 Salta (ARGENTINA).

WILHELM, Aida N., C.N.E.A., Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (ARGENTINA).

WILSON, D.G., Oak Ridge Nat. Lab., P.O.Box 2009 Oak Ridge, TN 37831 - 8083 (USA).

## Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción - difusión degeneradas

JULIO E. BOUILLET

En esta conferencia nos proponemos describir el comportamiento, cuando  $t \rightarrow \infty$  de las soluciones  $u(x, t)$  del problema de valores iniciales en  $\mathbf{R} \times (0, +\infty)$ ,

$$u_t = ((u - 1)^+)_{xx}, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = u_I(x).$$

Aquí  $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$  y  $u_I(x)$  se supondrá al principio, por conveniencia, continuamente diferenciable con soporte compacto ( $C_0^1$ ) y tal que  $\{x \in \mathbf{R} : u_I(x) > 1\} = (s, d)$ ,  $s < d$ . Por *solución* entendemos que  $u(x, t) \in L_{loc}^\infty(\mathbf{R} \times (0, +\infty))$  y

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_0^2(\mathbf{R}^2), & \hspace{15em} (*) \\ \iint u \varphi_t dx dt &= \iint (u - 1)^+ \varphi_{xx} dx dt + \int u_I(x) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Esta clase es, en realidad, muy amplia, pero nos convendrá para poder usar con libertad *principios de comparación*, a saber:

sean  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  soluciones según (\*), con datos respectivos  $u_I(x)$  y  $v_I(x)$ . Entonces si  $u$  y  $v$  crecen en  $\mathbf{R} \times (0, T)$ ,  $T > 0$  como  $\exp(C|x|^2)$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ ,

$$u_I(x) \leq v_I(x) \implies u(x, t) \leq v(x, t)$$

para  $(x, t) \in \mathbf{R} \times (0, T)$  (cf. [B1]).

Entonces resulta de inmediato que  $u(x, t) \leq \max u_I(x)$ . Probemos que  $\{x \in \mathbf{R} : u(x, t) > 1\}$  está *acotado* para todo  $t \geq 0$ , por ejemplo, por la derecha: supongamos para simplificar que  $u_I(0) = \max u_I(x) > 1$ , y desde luego,  $s < 0 < d$ . Sea  $A = u_I(0) + \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Construyamos la solución del problema de valores iniciales siguiente para el operador con  $\alpha(v) := \min\{2A - 2, (v - 1)^+\}$ :

$$v_t = (\alpha(v))_{xx} \quad \text{en } \mathbf{R} \times (0, \infty), \quad v(x, 0) = \begin{cases} 2A & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La solución  $v(x, t)$  tiene forma autosemejante,  $v(x, t) = v(x/t^{1/2}) = v(\eta)$ ,  $\eta = x/t^{1/2}$ , y se puede ver que esta función se obtiene por simetría con centro en  $(0, A)$  a partir de la solución (generalizada) de

$$-\frac{1}{2}\eta v'(\eta) = \alpha(v(\eta))'', \quad v(0) = A, \quad v(+\infty) = 0,$$

la cual se obtiene en forma implícita (cf. [B2]) de

$$\eta^2(v) = 4 \int_v^A \frac{\chi_{[s>1]}(s) ds}{s + 2 \int_0^s \frac{\chi_{[r>1]}(r) dr}{\eta^2(r)}} < 4 \int_v^A \chi_{[s>1]}(s) d \ln s$$

De la acotación anterior resulta que el soporte de  $v(\eta) = \text{sop}(v(\eta) - 1)$  está acotado, y que  $v$  salta de 1 a cero en el extremo derecho del mismo. Debido a la definición de  $A = (\max u_I) + \frac{1}{\epsilon}$ , y al soporte compacto de  $u_I$ , podemos hallar  $\epsilon, \tau > 0$  tal que  $w(x, t) := v\left(\frac{x}{(t + \tau)^{1/2}}\right)$  sea tal que  $w_I(x) = w(x, 0) = v(x/\tau^{1/2}) > u_I(x)$ . Es inmediato comprobar que  $u(x, t)$  es solución de  $u_t = \alpha(u)_{xx}$ , luego por comparación resulta

$$u(x, t) \leq w(x, t) = v(x/(t + \tau)^{1/2}),$$

y por lo tanto existe una *interfase* (derecha)  $d(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $d(0) = d$  [y con análogo razonamiento una interfase izquierda  $s(t)$ ,  $t > 0$ ,  $s(0) = s$ ] tales que, para  $t > 0$ ,

$$u(x, t) > 1 \quad \text{en} \quad (s(t), d(t))$$

(que  $d(0) = d$  (y  $s(0) = s$ ) puede verse empleando funciones similares a  $w$ , pero obtenidas a partir de  $v(x, 0) = 2A$ , si  $x < 0$ ,  $v(x, 0) = 1 - \epsilon$  si  $x > 0$ ,  $1 > \epsilon > 0$ , con la correspondiente modificación de la ecuación integral).

Nada nos autoriza a suponer que  $d(t)$  y  $s(t)$  sean funciones suaves, pero, si lo fueran, separarían regiones donde  $u(x, t) > 1$  - y por lo tanto la ecuación diferencial es  $u_t = ((u - 1)^+)_{xx} = u_{xx}$  (ec. del calor) - de regiones donde  $u \leq 1$  y la ecuación se reduce a  $u_t = 0$ . Entonces se podría ver (cf. [B1]) que la solución discutida  $u(x, t)$  del (PVI) se obtiene como *yuxtaposición* de

(1) la solución  $u(x, t) = u_I(x)$  de  $u_t = 0$  si  $x < s(t)$ , ó  $x > d(t)$  y

(2) la solución  $u(x, t) > 1$  en  $s(t) < x < d(t)$  del siguiente problema de tipo Stefan con calor latente variable:

Hallar  $u(x, t)$ ,  $s(t)$ ,  $d(t)$  tales que

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{en } s(t) < x < d(t), t > 0 \quad (u > 1) \\ u(x, 0) &= u_I(x) \quad \text{en } s < x < d \\ u(s(t)^+, t) &= u(d(t)^-, t) = 1, \\ (1 - u_I(d(t)))d'(t) &= -u_x(d(t)^-, t), t > 0, \\ (1 - u_I(s(t)))s'(t) &= -u_x(s(t)^+, t), t > 0. \end{aligned} \tag{s}$$

Es interesante destacar que la solución del (PVI) así obtenida (como solución generalizada (\*)) es en general *discontinua*, con saltos sobre  $x = s(t)$ ,  $x = d(t)$ .

Este problema (s) admite solución clásica obtenible por el método del "argumento retardado" [BKM, T]. Asimismo, se puede hallar solución del (PVI) con un dato inicial  $u_I$  que posea un número finito de intervalos  $(s_i, d_i)$ ,  $s_i < d_i < s_{i+1} < d_{i+1}$ , donde  $u_I > 1$ : si para  $t^* > 0$ , las interfases  $d_i(t)$ ,  $s_{i+1}(t)$  se juntan;  $x^* := d_i(t^*) = s_{i+1}(t^*)$ , se puede ver que en  $(x^*, t^*)$  la solución  $u(x, t^*)$  es lipschitziana, y se puede continuar para  $t > t^*$  resolviendo (s) con dato inicial  $u(x, t^*)$  en  $(s_i(t^*), d_{i+1}(t^*))$ . Así se obtiene una posible reducción del número de regiones donde  $u(x, t) > 1$ .

Otra comparación, ahora con la solución del (PVI) para dato inicial  $u(x, 0) = \max\{u_I(x), 1\}$ , que no es otra que la solución - obtenida mediante la fórmula de Poisson - de la ecuación del calor  $u_t = u_{xx}$ , permite probar que, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\limsup u(x, t) \leq 1$ , para todo  $x$ . Interesa entonces determinar dónde existe  $\lim u(x, t)$ , dónde es  $= 1$  y dónde  $< 1$ .

Por lo pronto observemos que los intervalos  $(s(t), d(t)) \supset (s, d)$  y son crecientes con  $t$ , pues  $s(t)$  decrece y  $d(t)$  crece, mientras no interactúen con otros intervalos similares, como dijimos en el párrafo anterior: esto surge del hecho que  $u(x, t) > 1$  en  $(s(t), d(t))$ , consecuencia, a su vez, del principio fuerte del máximo para la ecuación de (s). Se deduce entonces que será  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 1$  para  $x \in (S_{\infty j}, d_{\infty j})$ , intervalos maximales, disjuntos, con  $U(s_i, d_i) \subset U(s_{\infty j}, d_{\infty j})$ . Estos intervalos pueden tener extremos comunes.

Podemos obtener información sobre la evolución de los intervalos  $(s_i(t), d_i(t))$  donde



$u > 1$  de la ecuación del (PVI) si la escribimos como ley de conservación para  $u$ :

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(-(u-1)_x^+) = 0,$$

de la que se deduce una ley de conservación para  $x \cdot u$ :

$$(xu)_t + \frac{\partial}{\partial x}(-x(u-1)_x^+ + (u-1)^+) = 0$$

Si  $r < s(t) < d(t) < h$  para  $0 < t < T$  y  $u_I < 1$  en  $(r, s(T))$  y  $(d(T), h)$ , integrando estas ecuaciones en  $(r, h) \times (0, t)$ , y haciendo  $r \rightarrow s(t)^-$ ,  $h \rightarrow d(t)^+$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{s(t)}^{d(t)} u(x, t) dx &= \int_{s(t)}^{d(t)} u_I(x) dx && \text{de la primera,} \\ \int_{s(t)}^{d(t)} xu(x, t) dx &= \int_{s(t)}^{d(t)} xu_I(x) dx && \text{de la segunda.} \end{aligned}$$

Si bien las leyes de conservación sólo tienen sentido débil, estas igualdades son consecuencia de la expresión *integral* de la conservación cuya versión diferencial son las leyes escritas, por lo tanto los resultados son lícitos; estos podrían obtenerse con una adecuada elección de  $\varphi$  en (\*).

Así, conservación de masa y primer momento permiten “ubicar” un intervalo  $(s_\infty, d_\infty)$  donde  $\lim u(x, t) = 1$ , y por lo tanto conocemos  $d_\infty - s_\infty$  y  $\frac{d_\infty^2 - s_\infty^2}{2}$ : ver el ejemplo al final de estas notas.

Debido a la forma del operador diferencial, sólo las masas  $u > 1$  se difunden; veamos que si  $u \geq 1$  en un entorno de  $x$  y un instante dado, la masa no puede volverse menor que 1 en instantes posteriores. El siguiente resultado es válido para soluciones (\*) de (PVI).

**Proposición.** Sea  $\bar{t} > 0$ . Si  $u(x, \bar{t}) < \theta \leq 1$  para  $x$  en un conjunto  $E$  de medida  $|E| > 0$ , entonces para todo  $t < \bar{t}$  es  $u(x, t) < \theta$  para  $x \in E$ .

Si así no fuera,  $u(x, \tau) \geq \theta$  para  $x \in \tilde{E} \subset E$  con  $|\tilde{E}| > 0$ , y algún  $\tau < \bar{t}$ . Si definimos

$$\begin{aligned} u_\theta &= \theta \leq 1 && \text{en } \tilde{E} \\ &= \min(1, u(x, \tau)) && \text{fuera de } \tilde{E}, \end{aligned}$$

entonces  $u(x, \tau) \geq u_\theta(x)$ , y como  $u_\theta(x, t) \equiv u_\theta(x)$  es solución de  $u_t = (u - 1)_{xx}^+$  en el sentido (\*), resulta, para todo  $t \geq \tau$ ,  $u(x, t) \geq u_\theta(x) = \theta$  en  $\tilde{E} \subset E$ : esto contradice lo supuesto.

Veamos otra forma de describir la evolución de  $u_I(x)$  según  $u_t = (u - 1)_{xx}^+$ . Tomando adecuadas funciones de prueba en (\*) se obtiene, para casi todo  $t > 0$ ,

$$u_I(x) - u(x, t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_0^t (u(x, \tau) - 1)^+ d\tau \right) \quad \text{en } D'(\mathbb{R}),$$

que escrito de otra manera es

$$u(x, t) - 1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t (u(x, \tau) - 1)^+ d\tau + u_I(x) - 1,$$

y poniendo  $w^t(x) := \int_0^t (u(x, \tau) - 1)^+ d\tau + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} (u_I(x_2) - 1) dx_2$  resulta

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w^t(x) = u(x, t) - 1 \quad \text{en } D'(\mathbb{R})$$

Entonces

a)  $w^t(x) \geq \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} (u_I(x_2) - 1) dx_2$ , por definición de  $w^t$ ;

b) Si en  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  es  $u(\bar{x}, t) < 1$ ,  $\forall t$ , entonces  $w^t(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} dx_1 \int_0^{x_1} (u_I(x_2) - 1) dx_2$ ,  $\forall t$ , y  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w^t(x) \leq 0$ ;

c) Si  $u(\bar{x}, t) > 1$ ,  $t \geq \bar{t}$ , entonces  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w^t(x) > 0$  y  $w^t(x) > \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} (u_I(x_2) - 1) dx_2$ ;

d) En c), como  $1 < u(\bar{x}, t) \rightarrow 1$ ,  $t \rightarrow \infty$ , entonces el  $\lim_{t \rightarrow \infty} w^t(x) =: w^\infty(x)$  verifica  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w^\infty = 0$  donde  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 1$ ;

El límite  $w^\infty(x)$  de  $w^t(x)$ ,  $t \rightarrow \infty$ , puede ser caracterizado por la siguiente *inecuación variacional*, con obstáculo  $\psi(x) := \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} (u_I(x_2) - 1) dx_2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w^\infty(x) \leq 0, & w^\infty(x) \geq \psi(x), \\ (w^\infty(x) - \psi(x)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w^\infty(x) = 0. \end{cases}$$

Así,  $w^\infty(x)$  es (en una dimensión) la envolvente convexa del obstáculo  $\psi(x)$ : las regiones donde  $u(x, \infty) = 1$  corresponden a las zonas donde  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w^\infty = 0$  y  $w^\infty > \psi$ , eso es, al conjunto de no coincidencia de la inecuación variacional: es una unión de intervalos disjuntos que pueden tener extremos en común. El conjunto de coincidencia, complementario de esa unión, contiene a los  $x$  para los cuales  $u(x, t) = u_I(x)$ , para todo  $t > 0$ .

Como ejemplo, tomemos

$$u_I(x) = 3(\chi_{[0,1]}(x) + \chi_{[3,4]}(x)) :$$

Dado que se conservan masa y baricentro de  $3\chi_{[0,1]}$  y  $3\chi_{[3,4]}$  en la evolución  $u(x, t)$ , podemos ver que las interfases  $s_0(t), d_1(t)$  y  $s_3(t), d_4(t)$  no interactúan, y por lo tanto

$$u(x, \infty) = \chi_{(-1,2)}(x) + \chi_{(2,5)}(x) ,$$

mientras que  $u(2, t) = 0$ , para todo  $t > 0$ .

El obstáculo es

$$\psi(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} (u_I(x_2) - 1) dx_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & -\infty < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & 1 < x \leq 3, \\ x^2 - 6x + 12, & 3 < x \leq 4, \\ -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 12, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

y es fácil ver que su envolvente convexa se obtiene trazando la recta que une los puntos  $(-1, -1/2)$ ,  $(2, 5/2)$  y  $(5, 11/2)$ , cuyas abscisas son los extremos de los intervalos donde  $u(x, \infty) = 1$ .

## REFERENCIAS.

- [B1] J. E. Bouillet, Signed solutions to diffusion-heat conduction equations, Trabajos de Matemática (preprint) N° 101, IAM-Conicet, Buenos Aires, Dec. 1986.
- [B2] J. E. Bouillet, Soluciones autosemejantes con cambio de fase, en "Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", D. A. Tarzia, editor, Cuadernos de Inst. B. Levi, N° 11, 75-104, U.N. Rosario, 1984.
- [BKM] J.E. Bouillet, M.K. Kortén, V. Márquez, Enfoque clásico de existencia de soluciones para un problema de Cauchy, Comunicación a la XXXVIII Reunión de la UMA, S. Juan, Oct. 1988.
- [T] D. A. Tarzia, Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases, en II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones, D. A. Tarzia, editor, Cuadernos del Inst. B. Levi, N° 14, U. N. Rosario, 1987.



SOBRE LOCALIZACION DE SOLUCIONES DE LA  
ECUACION DE MEDIOS POROSOS

C.Cortazar - M.Elgueta

§1. Introducción.

El propósito de esta charla es describir algunos aspectos del fenómeno de localización de soluciones de la ecuación de medios porosos. Por esta razón no se trabajará con las hipótesis más generales y en general se dará sólo la idea de las demostraciones, indicándose donde pueden ser encontrados los detalles.

Se considera el problema

$$\begin{aligned} u_t &= (\alpha(u))_{xx} \quad \text{en} \quad [0, +\infty) \times [0, T) \\ (1.1) \quad -(\alpha(u))_x(0, t) &= h(t) \quad \text{en} \quad [0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{en} \quad [0, +\infty) \end{aligned}$$

donde  $\alpha \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} - \{0\})$ ;  $\alpha'(s) > 0 \quad \forall s \neq 0$ ,  $h$  continua en  $[0, T)$ ,  $h \geq 0$  y  $u_0 \in C_0^\infty([0, \infty))$ .

Una solución débil (de ahora en adelante solución) de

(1.1) es una función  $u(x,t)$  continua y acotada en  $D_t = [0, \infty) \times [0, t] \quad \forall t < T, \quad (\alpha(u))_x \in L^\infty(D_t)$  y

$$(1.2) \quad \int_0^\infty \int_0^T (u\phi_t - (\alpha(u))_x \phi_x)(x,t) dx dt + \int_0^\infty u_0(x)\phi(x,0) dx + \int_0^T h(t)\phi(0,t) dt = 0$$

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, T]).$$

A lo largo de esta nota se supondrá

$$(1.3) \quad \int_0^1 \frac{\alpha'(s)}{s} ds < +\infty$$

Es sabido que (1.3) es condición necesaria y suficiente para que la velocidad de propagación del problema (1.1) sea finita, ver [5]. Esto implica la existencia de una frontera libre. Diremos que la solución  $u$  de (1.1) está localizada si la frontera libre se mantiene uniformemente acotada  $\forall t \in [0, T]$ .

Esta nota está organizada de la manera siguiente. En §2 se revisa la existencia y unicidad de soluciones de (1.1); un lema de comparación integral y una solución explícita de (1.1). En §3 se da una condición necesaria para la localización de la solución (1.1) y se plantea la pregunta de si



la condición es suficiente. Se termina dando algunos resultados parciales sobre la respuesta a dicha pregunta.

## §2. Resultados preliminares.

### Existencia y unicidad.

La existencia y unicidad de soluciones del problema (1.1) ha sido probada en [2]. La unicidad se demuestra exactamente como en [8]. Daremos a continuación la idea de la demostración de existencia.

Se considera la sucesión de problemas aproximados

$$\begin{aligned} v_t &= (\alpha_n(v))_{xx} \\ (2.1)_n \quad -(\alpha(v))_x(0,t) &= h_n(t) \\ v(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_n(s) = \alpha(s) + \frac{s}{n} \quad \text{y} \quad h_n \rightarrow h$$

cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Además  $h_n$  cumple las hipótesis necesarias para garantizar que el problema estrictamente parabólico (2.1)<sub>n</sub> tiene solución clásica que denotaremos por  $u_n$ . Ver [4], [7].

Acto seguido se comprueba que la función

$w_n(x,t) = (\alpha_n(u_n))_x(x,t)$  satisface una ecuación parabólica para la cual rige el principio del máximo. Esto, ya que  $(\alpha_n(u_n))_x(0,t) = h_n(t)$  y  $u_0 \in C_0^\infty([0,+\infty))$ , permite garantizar que

$$(2.2) \quad \|(\alpha_n(u_n))_x\|_\infty \leq C$$

donde C no depende de n.

Lo anterior y la estimación

$$(2.3) \quad \int_0^{+\infty} |u(y,t)| dy \leq \int_0^t |h(s)| ds + \int_0^{+\infty} |u_0|(y) dy$$

nos da que

$$(2.4) \quad \|u_n\|_\infty \leq C$$

con C independiente de n.

Finalmente una estimación típicamente parabólica, usando (2.2) y (2.4), nos dá

$$(2.5) \quad |\alpha_n(u_n)(x,t_2) - \alpha_n(u_n)(x,t_1)| \leq C \cdot |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}$$

con C independiente de n.

Las relaciones (2.2), (2.4) y (2.5) garantizan las hipótesis del Teorema de Ascoli-Arzelá para  $\{\alpha_n(u_n)\}$ , luego existe una subsucesión y por consiguiente una subsucesión de  $\{u_n\}$  que converge uniformemente en compactos a una función u. Se comprueba finalmente, por pasaje al límite, que u satisface (1.2). Además, como se sabe que la solución u

es única, se obtiene que  $u_n \rightarrow u$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  uniformemente en compactos.

Lema de comparación:

El lema siguiente se encuentra en [2] y solo daremos aquí la idea formal de la demostración.

Lema. (Comparación integral)

Sean  $u$  y  $\bar{u}$  soluciones de (1.1) con datos  $h$ ,  $u_0$  y  $\bar{h}$ ,  $\bar{u}_0$  respectivamente.

Se supone:

$$\int_x^{+\infty} u_0(y)dy \geq \int_x^{+\infty} \bar{u}_0(y)dy \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

$$\int_0^{+\infty} u_0(y)dy + \int_0^t h(s)ds \geq \int_0^{+\infty} \bar{u}_0(y)dy + \int_0^t \bar{h}(s)dy \quad \forall t \in [0, T)$$

Se concluye

$$\int_x^{+\infty} u(y,t)dy \geq \int_x^{+\infty} \bar{u}(y,t)dy \quad \forall (x,t) \in [0, +\infty) \times [0, T)$$

Demostración:

La demostración se hace primero a nivel de aproximaciones para luego obtener el resultado por pasaje al límite. La idea formal es la siguiente.

Se define

$$H(x,t) = e^{-t} \cdot \int_x^{+\infty} (\bar{u}(y,t) - u(y,t)) dy$$

De las hipótesis se deduce que  $H(x,0) \leq 0 \forall x \in (0, +\infty)$ ,  
 $H(0,t) \leq 0 \forall t \in [0, T)$ . Supongamos que existe  $(x_1, t_1)$  tal que  
 $H(x_1, t_1) > 0$  entonces existe  $(x_0, t_0)$  tal que  $H$  alcanza un  
máximo estrictamente positivo en  $(0, +\infty) \times (0, t_1]$  en el pun-  
to  $(x_0, t_0)$ .

En dicho punto se tendrá

$$0 = H_x = e^{-t_0} \cdot (\bar{u}(x_0, t_0) - u(x_0, t_0))$$

$$0 \geq H_{xx} = e^{-t_0} \cdot (\bar{u}_{xx}(x_0, t_0) - u_{xx}(x_0, t_0))$$

$$0 \leq H_t = -H(x_0, t_0) - e^{-t_0} ((\alpha(\bar{u}))_x(x_0, t_0) - (\alpha(u))_x(x_0, t_0))$$

Las últimas tres afirmaciones son contradictorias.

Por lo tanto,  $H(x,t) \leq 0$ . Esto termina la demostración del  
lema.

### Una solución particular.

Es bien sabido, ver [6] y su bibliografía, que si se  
define la función

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\alpha'(r)}{r} dr$$

entonces para cualquier  $C \geq 0$  la función

$$(2.6) \quad w(x,t) = \phi^{-1}((C^2 \cdot t - Cx)^+)$$

satisface (1.1) con  $u_0 \equiv 0$  y condición de Neumann.

$$(2.7) \quad -(\alpha(w))_x(0,t) = C \cdot \phi^{-1}(C^2 \cdot t)$$

Obs.:

Se ha supuesto y se hará de aquí en adelante que  $\phi^{-1}$  está definida en  $[0, +\infty)$ .

Ejercicio:

Use el lema de comparación y la solución particular para probar el conocido resultado que bajo nuestras hipótesis con  $u_0 \equiv 0$  se tiene que el conjunto  $\{x/u(x,t) > 0\}$  es un intervalo que denotaremos por  $[0, s(t))$ .

La función  $t \rightarrow s(t)$  se denomina la frontera libre.

### §3. Localización.

Sea  $u$  la solución del problema (1.1) con flujo  $h$  tal que  $\int_0^T h(s)ds = +\infty$ . Supondremos en esta sección  $u_0 \equiv 0$ . Hipótesis no necesaria pero que simplifica la notación.

Se dice que  $u$  esta localizada si existe  $0 < A < +\infty$  tal que  $s(t) \leq A \ \forall t \in [0, T]$ ; donde  $s(t)$  es la frontera libre de finida en el Ejercicio de la sección anterior.

Fijemos por un momento  $\bar{t} \in [0, T)$  y consideremos la solución particular en  $[0, +\infty) \times [\bar{t}, T)$   $w(x, t) = \phi^{-1}((C^2 \cdot (t - \bar{t}) - Cx)^+)$  donde  $C$  es tal que

$$(3.1) \quad \int_0^{\bar{t}} h(s)ds = - \int_{\bar{t}}^T (\alpha(w))_x(0, s)ds = \int_{\bar{t}}^T C \cdot \phi^{-1}(C^2(s - \bar{t}))ds$$

$$= \frac{T - \bar{t}}{C \cdot (T - \bar{t})} \int_0^{T - \bar{t}} \phi^{-1}(s)ds = \frac{T - \bar{t}}{\zeta(\bar{t})} \int_0^{\zeta^2(\bar{t})} \phi^{-1}(s)ds$$

donde por definición  $\zeta(\bar{t}) = C \cdot (T - \bar{t})$ .

Observamos ahora que para  $t \in [\bar{t}, T)$  se tiene

$$(3.2) \quad \{x/w(x, t) > 0\} = [0, C \cdot (t - \bar{t})]$$

Ahora aplicando el Lema de comparación a  $u$  y  $\bar{u} = w(x, t)$



en la región  $[0, +\infty) \times [\bar{t}, T)$  se obtiene

$$\int_x^{+\infty} u(y,t)dy \geq \int_x^{+\infty} w(y,t)dy$$

Por lo tanto para  $t \in [\bar{t}, T)$  se tendrá

$$[0, s(t)) \supset [0, C(t-\bar{t}))$$

y consecuentemente

$$\limsup_{t \rightarrow T} s(t) \geq C(T-\bar{t}) = \zeta(\bar{t})$$

Hemos probado lo siguiente:

Si se define la función  $\zeta(t)$  por la ecuación

$$(3.3) \quad \int_0^t h(s)ds = \frac{T-t}{\zeta(t)} \int_0^{\frac{\zeta^2(t)}{T-t}} \phi^{-1}(s)ds$$

entonces se tiene:

### Proposición:

Si  $u$  está localizada entonces existe  $K > 0$  tal que  $\zeta(t) < K \forall t \in [0, T)$ .

Es natural ahora formularse la siguiente pregunta.

Pregunta:

¿Es el recíproco de la proposición precedente cierto?

A continuación presentamos algunos antecedentes sobre la respuesta a la pregunta anterior.

- 1.- En [2] se demuestra que en el caso  $\alpha(s) = s^m$  con  $m > 1$  la respuesta es afirmativa. En este caso la fórmula (3.3) toma la forma

$$\int_0^t h(s) ds = C_m \frac{(\zeta(t))^{\frac{m+1}{m-1}}}{(T-t)^{\frac{1}{m-1}}}$$

La demostración está basada en el mismo tipo de comparación pero, esta vez con la solución explícita de Barenblatt-Pattle (ver [1]).

$$(3.4) \quad w(x,t) = D_m \cdot \left( \frac{(x_0-x)^+}{T-t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{en } [0, +\infty) \times [0, T]$$

- 2.- Si  $u$  y  $\bar{u}$  son soluciones de (1.1) con coeficientes  $\alpha$  y  $\bar{\alpha}$  respectivamente y  $\alpha'(s) = \bar{\alpha}'(s) \quad \forall s \geq s_0$  para algún  $s_0 > 0$  entonces  $u$  está localizada si y sólo si  $\bar{u}$  está localizada. Este hecho se ha usado en [3] para caracterizar los datos de Neuman que producen localización de la solución del problema de Stefan de una fase.

3.- En el caso de  $\alpha(s) = \exp(\exp(\exp \dots \exp(s)))$  o  $\alpha(s) = \log(\log(\dots \log(s)))$  para  $s \geq s_0$  se puede probar, usando supersoluciones del tipo de (3.4), que la respuesta a la pregunta es afirmativa.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] BARENBLATT G.I. *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium.* Prikl. Math. Meh., 16, 67-78 (1952) (En Ruso).
- [2] CORTAZAR C. & ELGUETA M. *Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation.* Nonlinear Analysis Th M. & A. (por aparecer)
- [3] CORTAZAR C. & ELGUETA M. *Localization of the solution of a one-dimensional one-phase Stefan problem.* Preprint.
- [4] FRIEDMAN A. *Partial Differential Equations,* Holt, Rinchart and Winston, New York, 1969.
- [5] KERSNER R. *Filtration with absorption necessary and sufficient conditions for the propagation of perturbations to have finite*

*velocity.* J. Math. Anal. Appl. 90 (1982) #2, 463-479.

[6] KNERR B.F. *The porous medium equation in one dimension.*

Trans. Amer. Math. Soc. 234 (1977) 381-415.

[7] DADYZENSKAJA, O.A., SOLONNIKOV, V.A. & URALCEVA, N.N.,

*Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Translations  
of Math. Math. Monographs, A.M.S. 1968.

[8] OLEINIK O. *On some degenerate quasilinear parabolic equations.*

Seminari 1962-1963, Edizioni Cremonese, Roma.



# SOBRE UN PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

## CON FUENTE DE ENERGIA INTERNA

Graciela G. GARGUICHEVICH - Domingo A. TARZIA

PROMAR (CONICET-UNR),

Instituto de Matemática "Beppo Levi",

Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agr.,

Avda. Pellegrini 250,

2000 Rosario, Argentina.

### 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Consideremos el problema de la distribución estacionaria de temperatura  $\theta$  en un cuerpo  $\Omega$  con una fuente de energía interna de densidad  $g$ .

Supondremos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tiene una frontera suficientemente regular  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  disjuntos y de medida  $(n-1)$  dimensional positiva ( $|\Gamma_i| > 0$ ,  $i = 1, 2$ ) y admitiremos el caso  $\Gamma_3 = \emptyset$ .

Asumiremos, además, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase del material es  $0^0$ , que sobre  $\Gamma_1$  es  $\theta = b > 0$  y sobre  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  el flujo es  $q$  y  $0$  respectivamente.

Vamos a generalizar aquí los resultados obtenidos en [5] para el caso  $g = 0$ . Obtendremos condiciones necesarias y/o suficientes que relacionarán los datos  $B$ ,  $q$  y  $g$  para que el material presente una o dos fases.

Si definimos la temperatura estacionaria por:

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & , x \in \Omega_1 \text{ (fase sólida) ,} \\ 0 & , x \in \mathcal{L} \text{ (frontera libre) ,} \\ \theta_2(x) > 0 & , x \in \Omega_2 \text{ (fase líquida) ,} \end{cases} \quad (1)$$

con  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$ , entonces se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_i \Delta \theta_i = g \text{ en } \Omega_i \text{ (} i = 1, 2 \text{)} , \\ \theta_1 = \theta_2 = 0 , \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \text{ sobre } \mathcal{L} , \\ \theta_2 = b \text{ sobre } \Gamma_1 , \\ -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = a \text{ si } \theta > 0 \text{ sobre } \Gamma_2 , \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = a \text{ si } \theta < 0 \text{ sobre } \Gamma_2 , \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} |_{\Gamma_3} = 0 , \end{array} \right. \quad (2)$$

donde  $k_i > 0$  es el coeficiente de conductividad térmica de la fase  $i$  ( $i=1$  fase sólida,  $i=2$  fase líquida) y  $n$  es la normal exterior a  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  o  $\mathcal{L}$  según corresponda.

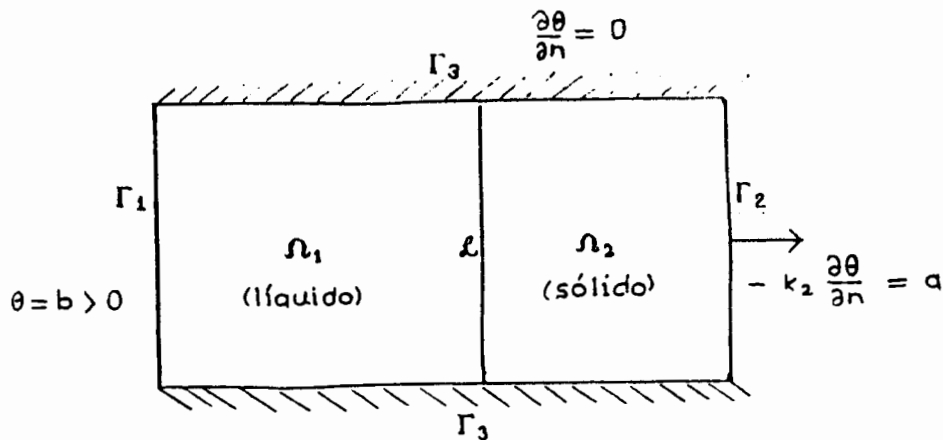


FIGURA 1

Este problema resulta equivalente a ([1],[4])

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = g \text{ en } \Omega , \\ u |_{\Gamma_1} = B , \\ -\frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_2} = a , \quad -\frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_3} = 0 , \end{array} \right. \quad (3)$$

siendo  $u=u(x)$  la nueva función incógnita, definida de la siguiente manera

$$u = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- \text{ en } \Omega \quad (4)$$



## 2. FORMULACION VARIACIONAL

Sea

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, , \\ L(v) = \int_{\Omega} g \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} q \, v \, d\gamma \quad ( = L_{ag}(v) ) \\ V = H^1(\Omega) \, , \quad V_0 = \{ v \in V : v|_{\Gamma_1} = 0 \} \, , \quad K = \{ v \in V : v|_{\Gamma_1} = B \} \quad ( = K_B ) \end{array} \right. \quad (5)$$

con  $L \in V_0'$  (por ej.  $q \in L^2(\Gamma_2)$ ,  $g \in L^2(\Omega)$ ) y  $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ .

El problema (3) admite la siguiente formulación variacional ([2], [4]):

$$u \in K_B \, , \quad a(u,v) = L(v) \, , \quad \forall v \in V_0 \, , \quad (6)$$

y también, su equivalente

$$u \in K_B \, , \quad J(u) \leq J(v) \, , \quad \forall v \in K_B \, , \quad (7)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \quad (8)$$

La única solución de (6) puede caracterizarse por

$$u_{Baq} = u_B + u_q + u_g \quad \text{en } \Omega \, , \quad (9)$$

donde  $u_B$ ,  $u_q$  y  $u_g$  son respectivamente las únicas soluciones de

$$u_B \in K_B \, , \quad a(u_B,v) = 0 \, , \quad \forall v \in V_0 \, , \quad (10)$$

$$u_q \in V_0 \, , \quad a(u_q,v) = - \int_{\Gamma_2} q \, v \, d\gamma \, , \quad \forall v \in V_0 \, , \quad (11)$$

$$u_g \in V_0 \, , \quad a(u_g,v) = \int_{\Omega} g \, v \, dx \, , \quad \forall v \in V_0 \quad (12)$$

En el caso  $B, q$  y  $g$  constantes, resulta

$$u_{Baq} = B - q \, u_1 + g \, u_2 \quad \text{en } \Omega \, , \quad (13)$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  quedan definidas por los siguientes problemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1 = 0 \text{ en } \Omega , \\ u_1 |_{\Gamma_1} = 0 , \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} |_{\Gamma_2} = 1 , \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} |_{\Gamma_3} = 0 , \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \in V_0 , \\ a(u_1, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma , \quad \forall v \in V_0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$u \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2 = 1 \text{ en } \Omega , \\ u_2 |_{\Gamma_1} = 0 , \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} |_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0 , \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 \in V_0 , \\ a(u_2, v) = \int_{\Omega} v \, dx , \quad \forall v \in V_0 \end{array} \right. \quad (15)$$

Además, por el principio del máximo ([2],[3]),  $u_1$  y  $u_2$  son funciones positivas en  $\Omega$ .

### 3. PROPIEDADES GENERALES DE LA SOLUCION

Sea  $u = u_{B, q, g}$  la única solución del problema (6) para los datos  $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $q \in L^2(\Gamma_2)$  y  $g \in L^2(\Omega)$ , se demuestran las siguientes propiedades:

#### Propiedad 1

i) Si  $B_1 \leq B_2$  (ó  $b_1 \leq b_2$ ) sobre  $\Gamma_1$ ,  $q_2 \leq q_1$  sobre  $\Gamma_2$ ,  $g_1 \leq g_2$  en  $\Omega$ , entonces:

$$u_1 = u_{B_1, q_1, g_1} \leq u_{B_2, q_2, g_2} = u_2 \text{ en } \bar{\Omega} \quad (16)$$

ii) Si alguna de las tres desigualdades para  $B_i$ ,  $q_i$  ó  $g_i$  es estricta, la desigualdad para  $u_i$  también lo es.

#### Demostración

i) Si  $w = (u_2 - u_1)^-$ , usando  $v = u_i + w \in K_{B_i}$  para  $i = 1, 2$  en (6), se obtiene que

$$0 \leq a(w, w) = \int_{\Omega} (g_1 - g_2) w \, dx - \int_{\Gamma_2} (q_1 - q_2) w \, d\gamma \leq 0 .$$

es decir  $w = 0$  en  $\bar{\Omega}$  y por ende  $u_1 \leq u_2$  en  $\bar{\Omega}$

ii) Si se supone  $u_1 = u_2$ , resulta de  $a(u_2 - u_1, v) = 0$  que  $g_2 = g_1 \in L^2(\Omega)$  y  $q_2 = q_1 \in L^2(\Gamma_2)$

### Propiedad 2

Si  $B > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $g \geq 0$  resulta:

$$u^- \neq 0 \text{ en } \Omega \Leftrightarrow u^- \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_2. \quad (17)$$

### Demostración

Se deduce trivialmente de la ecuación

$$\int_{\Omega} g u^- dx + a(u^-, u^-) = \int_{\Gamma_2} \alpha u^- d\gamma \quad (18)$$

### Definición 1

Para cada  $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $B > 0$ , se definen las funciones

$$F_{Bg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} /$$

$$F_{Bg}(\alpha) = J(u_{B\alpha g}) = \frac{1}{2} a(u_{B\alpha g}, u_{B\alpha g}) - \int_{\Omega} g u_{B\alpha g} dx + \alpha \int_{\Gamma_2} u_{B\alpha g} d\gamma \quad (19)$$

donde  $g \in L^2(\Omega)$  y

$$F_{B\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} /$$

$$F_{B\alpha}(g) = J(u_{B\alpha g}) = \frac{1}{2} a(u_{B\alpha g}, u_{B\alpha g}) - g \int_{\Omega} u_{B\alpha g} dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u_{B\alpha g} d\gamma \quad (20)$$

donde  $\alpha \in L^2(\Gamma_2)$ .

### Teorema 1

Las funciones  $F_{Bg}$  y  $F_{B\alpha}$  verifican

$$i) F_{Bg} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ y } F'_{Bg}(\alpha) = \int_{\Gamma_2} u_{B\alpha g} d\gamma, \quad (21)$$

$$ii) F_{B\alpha} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ y } F'_{B\alpha}(g) = - \int_{\Omega} u_{B\alpha g} dx \quad (22)$$

### Demostración

Probaremos sólo ii). El caso i) se prueba en forma similar y el resultado es idéntico al obtenido en [5] para el caso  $g = 0$ .

La función  $g \rightarrow \int_{\Omega} u_{Bqg} dx$  es continua ya que a partir de las

desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Poincaré-Friederichs (con cte.  $C(\Omega)$ ) resultan

$$\| u_{Bq(g+h)} - u_{Bqg} \|_V \leq \frac{|\Omega|^{1/2} C(\Omega)}{\alpha} |h|, \quad (23)$$

$$\left| \int_{\Omega} (u_{Bq(g+h)} - u_{Bqg}) dx \right| \leq \frac{|\Omega| C(\Omega)}{\alpha} |h| \quad (24)$$

donde  $\alpha$  la constante de coercividad de la forma bilineal  $a$  sobre  $V_0$  y  $h \in \mathbb{R}$ .

Es fácil verificar además que

$$\frac{F_{Bq}(g+h) - F_{Bqg}}{h} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{Bq(g+h)} + u_{Bqg}) dx, \quad (25)$$

y por ende,  $F_{Bq} \in C^1(\mathbb{R})$  con  $F'_{Bq}$  definido por (22).

Más aún,  $F'_{Bq}$  es una función estrictamente decreciente como consecuencia de la propiedad 1.

#### Corolario 1

i) Sean  $B_0 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $B_0 > 0$ ,  $g_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $g_0 \geq 0$  y  $a_0 \in \mathbb{R}^+$  tales que  $F'_{B_0 a_0}(a_0) < 0$ ; entonces  $u_{Bqg}$  no es de signo constante en  $\Omega$ , para todo  $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $a \in L^2(\Gamma_2)$ , y  $g \in L^2(\Omega)$  que verifican  $0 < B \leq B_0$ ,  $0 \leq g \leq g_0$  y  $0 < a_0 \leq \inf_{x \in \Gamma_2} a(x)$ .

ii) Sean  $B_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $B_1 > 0$ ,  $a_1 \in L^2(\Gamma_2)$  y  $g_1 \in \mathbb{R}$  tales que  $F'_{B_1 a_1}(g_1) > 0$ , entonces  $u_{Bqg}$  no es de signo constante en  $\Omega$  para todo  $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $a \in L^2(\Gamma_2)$  y  $g \in L^2(\Omega)$  que verifican  $0 < B \leq B_1$ ,  $a_1 \leq a$  y  $\sup_{x \in \Omega} g(x) \leq g_1$ .

#### Demostración

Resulta inmediata del teorema 1 y de las propiedades 1 y 2. (La propiedad 2 se usa sólo en el caso i)).

Si se suponen  $q, g$  ctes.,  $B > 0$  fijo, el caso i) queda representado por la siguiente figura

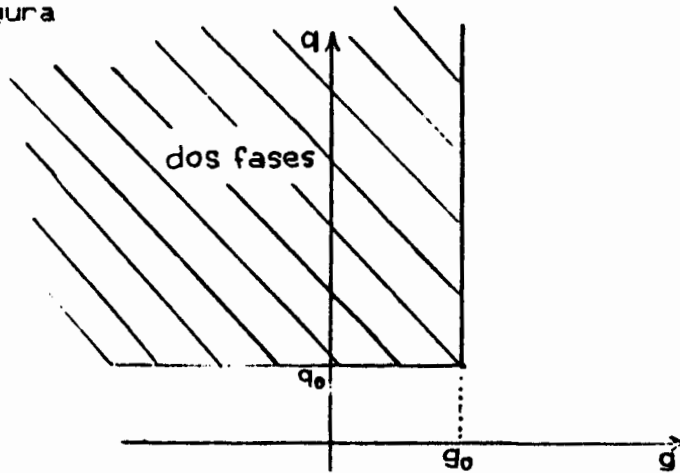


FIGURA 2

El caso ii) repite la misma figura reemplazando  $(g_0, q_0)$  por  $(g_1, q_1)$ .

### Definición 2 : Función Flujo Crítico

Si consideramos  $B \geq 0$  y cte. sobre  $\Gamma_1$ ,  $q$  constante sobre  $\Gamma_2$  y  $g \in L^2(\Omega)$ , podemos definir la función flujo crítico por

$$\begin{aligned} q_c : \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (B, g) &\rightarrow q_c(B, g) \end{aligned} \quad (26)$$

tal que

- \* para cada  $B > 0$  y  $q \leq q_c(B, g)$ ,  $u_{Bqg} \geq 0$  en  $\Omega$  (una sola fase),
- \* para cada  $B > 0$  y  $q > q_c(B, g)$ ,  $u_{Bqg}$  es de signo no constante en  $\Omega$  (dos fases).

### Observación 1

Como consecuencia de la propiedad 1, la función Flujo Crítico es monótona en el siguiente sentido:

$$\forall 0 < B_1 \leq B_2 \text{ y } \forall g_1, g_2 \in L^2(\Omega), g_1 \leq g_2 \text{ resulta } q_c(B_1, g_1) \leq q_c(B_2, g_2). \quad (27)$$

En el caso que  $g$  y  $q$  son ctes. y  $B > 0$  fijo, se tiene la siguiente representación

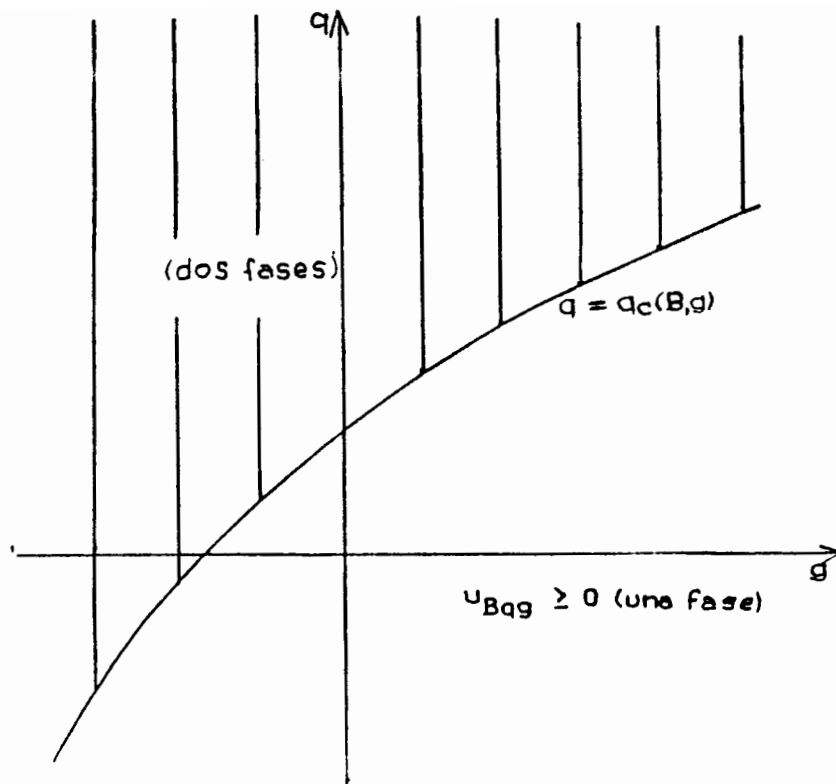


FIGURA 3

**Corolario 2**

i) Sean  $B > 0$  constante y  $g \in L^2(\Omega)$ , resulta

$$a) F'_{Bq}(a) < 0 \Leftrightarrow a > a_0(B) + \frac{c_g}{c_1} , \quad (28)$$

con

$$c_1 = a(u_1, u_1) = \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma > 0 , \quad (29)$$

$$c_g = a(u_g, u_1) = \int_{\Omega} g u_1 \, dx = \int_{\Gamma_2} u_g \, d\gamma , \quad (30)$$

$$a_0(B) = \frac{B |\Gamma_2|}{c_1} > 0 , \quad (31)$$

( $u_1$  y  $u_g$  están definidas por (14) y (12) respectivamente) .

$$h) a_0(B) + \frac{c_g}{c_1} > a_c(B,g) , \quad \forall g \in L^2(\Omega) , g \geq 0 , D \in \mathbb{R}^+ , \quad (32)$$

es decir que, si  $a > a_0(B) + \frac{c_g}{c_1}$  entonces  $u_{Bqg}$  no es de signo constante en  $\Omega$

ii) Sean  $B > 0$  constante y  $q \in L^2(\Gamma_2)$ , resulta

$$a) F_{Bq}(g) > 0 \Leftrightarrow g < \frac{c_q}{c_2} - g_0(B) \quad (33)$$

con

$$c_2 = a(u_2, u_2) = \int_{\Omega} u_2 \, dx > 0 \quad (34)$$

$$c_q = -a(u_2, u_q) = - \int_{\Omega} u_q \, dx = \int_{\Gamma_2} q u_2 \, d\gamma \quad (35)$$

$$g_0(B) = \frac{B |\Omega|}{c_2} > 0 \quad (36)$$

b) Si  $g < -g_0(B) + \frac{c_q}{c_2}$ , entonces  $u_{Bqg}$  no es de signo constante en  $\Omega$ . (37)

**Demostración**

i)a) De (9), (14) y (21) resulta

$$F_{Bq}(g) = -\frac{1}{2} a(u_g, u_g) + q a(u_g, u_1) - \frac{q^2}{2} a(u_1, u_1) + B [q |\Gamma_2| - \int_{\Omega} g \, dx] \quad (38)$$

y luego

$$F'_{Bq}(g) = a(u_g, u_1) + B |\Gamma_2| - q a(u_1, u_1) = c_g + B |\Gamma_2| - q c_1 \quad (39)$$

Como  $c_1 > 0$ , se obtiene (28).

b) Resulta de i) y de la propiedad 2, teniendo en cuenta que, para  $g \geq 0$ ,

$$c_g = \int_{\Omega} g u_1 \, dx > 0 \quad \text{y por lo tanto} \quad c_g(B) + \frac{c_q}{c_1} > 0.$$

ii) Se prueba de forma similar a la parte i) considerando que

$$F_{Bq}(g) = -\frac{g^2}{2} a(u_2, u_2) - g [a(u_2, u_q) + B |\Omega|] + B \int_{\Gamma_2} q \, d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} q u_q \, d\gamma \quad (40)$$

y de allí

$$F'_{Bq}(g) = -a(u_2, u_2) g - a(u_2, u_q) - B |\Omega| \quad (41)$$

Es remarcable que en este caso no se requiere que  $q$  y  $g$  sean positivas o no negativas como sucede en el ítem i).

### Corolario 3

Si  $B$ ,  $q$  y  $g$  son constantes, se define la función

$$F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(B, a, g) \rightarrow F(B, a, g) = J(u_{B, a, g}) = F_{B, g}(a) = F_{B, a}(g) \quad (42)$$

que verifica

$$F(B, a, g) = -\frac{c_1}{2} a^2 + c_{12} a g - \frac{c_2}{2} g^2 + B |\Gamma_2| a - B |\Omega| g \quad (43)$$

con  $c_1$  y  $c_2$  definidas por (29) y (34) respectivamente y

$$c_{12} = a(u_1, u_2) = \int_{\Omega} u_1 dx = \int_{\Gamma_2} u_2 d\gamma > 0 \quad (44)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(B, a, g) = -c_1 a + c_{12} g + B |\Gamma_2|, \\ \frac{\partial F}{\partial g}(B, a, g) = c_{12} a - c_2 g - B |\Omega|, \\ \frac{\partial F}{\partial B}(B, a, g) = |\Gamma_2| a - |\Omega| g. \end{cases} \quad (45)$$

Además resulta:

i)  $D = c_1 c_2 - c_{12}^2 > 0$ , esto es, para  $B > 0$  dado

gráfico  $F = \{(a, g, z) \in \mathbb{R}^3 / z = F(B, a, g)\}$  es un paraboloides elíptico y las rectas

$$\begin{cases} l_1) -c_1 a + c_{12} g + B |\Gamma_2| = 0 \\ l_2) c_{12} a - c_2 g - B |\Omega| = 0, \end{cases} \quad (46)$$

se intersecan en el punto  $(a^*, g^*)$  definido por

$$\begin{cases} a^* = B \frac{|\Gamma_2| c_2 - |\Omega| c_{12}}{D}, \\ g^* = B \frac{|\Gamma_2| c_{12} - |\Omega| c_1}{D} \end{cases} \quad (47)$$

ii)  $a_c(B, g) < a_0(B) + \frac{c_{12}}{c_1} g \quad \forall B \in \mathbb{R}^+, g \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  (48)

iii)  $a_c(B, g) < a_1(B) + \frac{c_g}{c_{12}} g \quad \forall B \in \mathbb{R}^+, g \in \mathbb{R}$  (49)



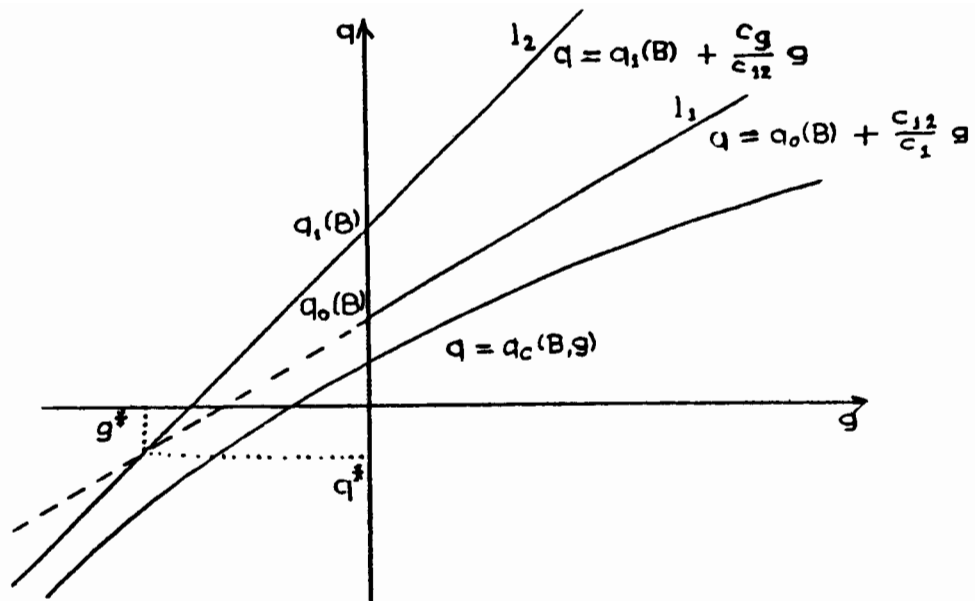


FIGURA 4

### Demostración

Las identidades (43) y (45) se obtienen trivialmente de (38)-(41).

i) Se tiene que

$$0 < C_{12} = a(u_1, u_2) = \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla u_2 \, dx \leq \| \nabla u_1 \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla u_2 \|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{C_1} \sqrt{C_2}$$

y como

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \nabla u_1 = \Delta u_1 = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \nabla u_2 = \Delta u_2 = -1 \quad \text{en } \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no existe } C / \nabla u_1 = C \nabla u_2$$

resulta

$$D = C_1 C_2 - C_{12}^2 > 0$$

Para obtener (47) se resuelve el sistema lineal (46)

ii) y iii) resultan respectivamente de (32) y (37)

### Propiedad 3

Sean  $B, \alpha, \beta$  ctes. y

$$Q_0(B) = \frac{B}{\inf_{\Gamma_2} u_1} \geq \frac{B}{\sup_{\Gamma_2} u_1} = \tilde{\alpha}_0(B) > 0, \quad (50)$$

$$M = \frac{\sup_{\Gamma_2} u_2}{\inf_{\Gamma_2} u_1} \geq \frac{\inf_{\Gamma_2} u_2}{\sup_{\Gamma_2} u_1} = m > 0 \quad (51)$$

Resulta:

$$i) \quad \tilde{\alpha}_0(B) + m g \leq \alpha_C(B, g) \leq Q_0(B) + M g, \quad \forall g \geq 0 \quad (52)$$

$$ii) \quad \text{Si } u_1|_{\Gamma_2} = \alpha_1 \text{ es constante, luego } \alpha_C(B, 0) = \frac{B}{\alpha_1} = \tilde{\alpha}_0(B) = Q_0(B) \quad (53)$$

iii) Si  $u_1|_{\Gamma_2} = \alpha_1$  y  $u_2|_{\Gamma_2} = \alpha_2$  son constantes, luego

$$\alpha_C(B, g) = \frac{B}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g, \quad \forall g \geq 0. \quad (54)$$

**Demostración**

Si  $u_{Bqg}$  no es de signo constante en  $\Omega$ , por Propiedad 2, para  $B > 0$ ,  $g \geq 0$  y  $q > 0$ , existe  $x \in \Gamma_2$  tal que

$$u_{Bqg}(x) = B - q u_1(x) + g u_2(x) < 0.$$

Luego

$$q > \frac{B + g u_2(x)}{u_1(x)} > \tilde{\alpha}_0(B) + m g > 0, \text{ o sea } \tilde{\alpha}_0 + m g \leq \alpha_C(B, g) \quad \forall g \geq 0.$$

$$\text{Si } g \geq 0 \text{ y } q > Q_0(B) + M g = \frac{B + \sup_{\Gamma_2} u_2}{\inf_{\Gamma_2} u_1} > 0, \text{ luego}$$

$$u_{Bqg}(x) < 0, \quad \forall x \in \Gamma_2 \text{ y } \alpha_C(B, g) < Q_0(B) + M g, \quad \forall g \geq 0$$

De (52) se obtienen trivialmente (53) y (54).

#### 4. EJEMPLOS

Daremos a continuación tres ejemplos en los que la solución se conoce explícitamente para  $B > 0$ ,  $q$  y  $g$  ctes.

##### Ejemplo 1

Se considera:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \quad \Omega = (0, x_0) \times (0, y_0) \quad , \quad x_0 > 0 \quad , \quad y_0 > 0 \quad , \\ \Gamma_1 = (0) \times [0, y_0] \quad , \quad \Gamma_2 = (x_0) \times [0, y_0] \quad , \quad \Gamma_3 = (0, x_0) \times (0) \cup (0, x_0) \times (y_0) \quad . \end{array} \right. \quad (55)$$

Se obtiene:

$$u_1(x, y) = x \quad , \quad u_2(x, y) = x_0 x - \frac{x^2}{2} \quad ,$$

$$c_1 = x_0 y_0 \quad , \quad c_2 = \frac{x_0^3 y_0}{3} \quad , \quad c_{12} = \frac{x_0^2 y_0}{2} \quad ,$$

$$D = c_1 c_2 - c_{12}^2 = \frac{x_0^4 y_0^2}{12} \quad , \quad |\Omega| = x_0 y_0 \quad , \quad |\Gamma_2| = y_0 \quad ,$$

$$1_1) \quad a - \frac{x_0}{2} g - \frac{B}{x_0} = 0$$

$$1_2) \quad a - \frac{x_0}{3} g - \frac{B}{x_0} = 0$$

$$(g^*, a^*) = \left( -\frac{2B}{x_0} \quad , \quad -\frac{6B}{x_0^2} \right) \quad ,$$

$$a_C(B, g) = \begin{cases} \frac{B}{x_0} + \frac{x_0}{2} g \quad , & \forall g \geq -\frac{2B}{x_0} \quad , \\ g x_0 + \sqrt{-2B g} \quad , & \forall g \leq -\frac{2B}{x_0} \quad . \end{cases} \quad (56)$$

## Ejemplo 2

Se considera:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \quad , \quad 0 < r_1 < r_2 \quad , \quad \Gamma_3 = \emptyset \quad , \quad r, \omega : \text{coordenadas polares en } \mathbb{R}^2 \quad , \\ \Omega = \left\{ (r, \omega) : r_1 < r < r_2 \right\} \quad , \\ \Gamma_1 = \left\{ (r, \omega) : r = r_1 \quad , \quad 0 \leq \omega < 2\pi \right\} \quad , \\ \Gamma_2 = \left\{ (r, \omega) : r = r_2 \quad , \quad 0 \leq \omega < 2\pi \right\} \quad , \quad \Gamma_3 = \emptyset \quad . \end{array} \right. \quad (57)$$

Se obtiene:

$$u_1(r) = r_2 \log \frac{r}{r_1} \quad , \quad u_2(r) = \frac{r_2^2}{2} \log \frac{r}{r_1} - \frac{r^2 - r_1^2}{4} \quad ,$$

y definiendo

$$c = \frac{r_2}{r_1} ; \alpha(c) = (c^2 - 1) - 2 \log c , \quad \beta(c) = (1 + c^2) \log c - (c^2 - 1) ,$$

$$\gamma(c) = 2 c^2 \log c - (c^2 - 1)$$

resulta:

$$c_1 = 2 \pi r_2^2 \log c , \quad c_{12} = \frac{\pi r_1^3 c}{2} [ 2 c^2 \log c - (c^2 - 1) ] .$$

$$c_2 = \frac{\pi r_1^4}{8} [ 4 c^4 \log c - 2 c^2 (c^2 - 1) - (c^2 - 1)^2 ] .$$

$$D = c_1 c_2 - c_{12}^2 = \frac{\pi^2}{4} r_1^5 c^2 (c^2 - 1) \beta(c) ,$$

$$|\Omega| = \pi (r_2^2 - r_1^2) , \quad |\Gamma_2| = 2 \pi r_2 ,$$

$$1_1) \alpha - \frac{B}{r_2 \log c} - \left[ \frac{r_2}{2} - \frac{r_1 (c^2 - 1)}{4 c \log c} \right] g = 0$$

$$1_2) \alpha - \frac{2 (c^2 - 1) B}{[2 c^2 \log c - (c^2 - 1)] r_1 c} - \frac{r_1 [4 c^4 \log c - (c^2 - 1) (3 c^2 - 1)]}{4 c [2 c^2 \log c - (c^2 - 1)]} g = 0$$

$$(g^*, \alpha^*) = \left( - \frac{4 B \alpha(c)}{r_1^2 (c^2 - 1) \beta(c)} ; \frac{B}{r_2} \left[ \frac{1}{\log c} - \frac{\gamma(c) \alpha(c)}{(c^2 - 1) \beta(c) \log c} \right] \right) ,$$

$$a_c(B, g) = \begin{cases} \frac{B}{r_2 \log c} + \left[ \frac{r_2}{2} - \frac{r_1 (c^2 - 1)}{4 c \log c} \right] g , & \forall g \geq - \frac{4 B}{r_1^2 \gamma(c)} , \\ - \frac{g r_1}{2 c} [ Q^2(g) - c^2 ] , & \forall g < - \frac{4 B}{r_1^2 \gamma(c)} , \end{cases} \quad (58)$$

donde  $Q(g)$  está definida implícitamente por

$$H(g, Q) = B + g \frac{r_1^2}{4} [ Q^2 [ 2 \log Q - 1 ] + 1 ] = 0 . \quad (59)$$

### Ejemplo 3

Se consideran los mismos datos que en el ejemplo 2 pero para  $n = 3$

Se obtiene:

$$u_1(r) = r_2^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) , \quad u_2(r) = - \frac{r_2}{3} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) - \frac{r^2 - r_1^2}{6}$$

$$c_1 = 4 \pi r_1^3 c^3 (c - 1) , \quad c_{12} = \frac{2}{3} \pi r_1^4 c^2 (c - 1)^2 (2c + 1) ,$$

$$c_2 = \frac{4}{45} \pi r_1^5 (c - 1)^2 (5c^3 + 6c^2 + 3c + 1) ,$$

$$D = c_1 c_2 - c_{12}^2 = \frac{4}{45} \pi^2 r_1^8 (c - 1)^4 c^3 (4c^2 + 7c + 4) ,$$

$$|\Omega| = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3) , \quad |\Gamma| = 4 \pi r_2^2 ,$$

$$l_1) \alpha - \frac{B}{r_1 c (c - 1)} - \frac{r_1 (c - 1) (2c + 1)}{6c} g = 0$$

$$l_2) \alpha - \frac{2B(c^2 + c + 1)}{r_1 c^2 (c - 1) (2c + 1)} - \frac{2r_1(5c^3 + 6c^2 + 3c + 1)}{15c^2(2c + 1)} g = 0$$

$$(g^*, \alpha^*) = \left( - \frac{180 B (c + 1)}{r_1^2 (c - 1)^2 (4c^2 + 7c + 4)} ; - \frac{12 B}{r_1} \frac{(c^2 + 3c + 1)}{c (c - 1) (4c^2 + 7c + 4)} \right) ,$$

$$\alpha_c(B, g) = \begin{cases} \frac{B}{r_1 c (c - 1)} + \frac{r_1 (c - 1) (2c + 1)}{6c} g , & \forall g \geq g_1 \\ g \frac{r_1}{3} (c - \tilde{Q}(g)) , & \forall g \leq g_1 \end{cases} \quad (60)$$

Observamos que, en los tres ejemplos, fijado  $B > 0$ , la gráfica de  $\alpha_c(B, g)$  coincide con la de  $r_1$ ,  $\forall g \geq g_1$  ( $g_1 > g^*$ ), es decir, para los  $g$  tales que  $\alpha_c(B, g) \geq 0$ .

## REFERENCIAS

- [1] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus". Rapport de Recherche N° 185, Rocquencourt (1976).
- [2] D. KINDERLEHRER - G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).
- [3] M. H. PROTTER - H. F. WEINBERGER, "Maximum principles in differential equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).
- [4] D. A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse de 3ème Cycle. Univ. Paris VI, 8 Mars 1979. C.R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941-944. Ver además "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27(1979), 145-156.
- [5] D. A. TARZIA, "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Engineering Anal., 5(1988), 177-181. Ver además Math. Notae, 28(1980), 73-89 y "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computação Científica. Vol. 5, SBMAC-Soc. Brasileira Mat. Apl. Comput., Gramado (1987).

# Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión – conducción generalizadas

MARIANNE KATHE KORTEN

Pensaremos aquí en ecuaciones que puedan escribirse de la forma

$$E(u) = \operatorname{div}(\alpha(u) |\operatorname{grad} \phi(u)|^{N-1} \operatorname{grad} \phi(u)) \quad (1)$$

donde  $N \in \mathbf{R}_{>0}$ ,  $\alpha$  y  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ ,  $\phi(x)$  no decreciente y  $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es no decreciente. Se ha visto en seminarios anteriores que saltos o intervalos de constancia en las funciones constitutivas hacen que las soluciones también los presenten (por ejemplo, intervalos de constancia (resp. saltos) en  $\phi$  inducen saltos (resp. intervalos de constancia) en  $u$ ). En los saltos de  $u$  se satisface una condición de Rankine – Hugoniot, o de Stefan, y los intervalos de constancia de  $u$  pueden pensarse como modelos ingenuos de zonas pastosas.

Exhibiremos aquí diversas ecuaciones que pueden escribirse de la forma (1), y soluciones autosemejantes de las mismas resaltando sus aspectos típicos.

1. En condiciones homogéneas, es decir, cuando  $E$ ,  $\alpha$  y  $\phi$  son potencias tenemos los ejemplos típicos de las ecuaciones del calor, de los medios porosos y de la difusión rápida.

La posibilidad de cambiar de escala, es decir, la existencia de  $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$  tales que si  $u(t, x)$  es solución de (1),

$$\bar{u}(x, t) = \lambda^\beta \mu^\gamma u(\lambda t, \mu x)$$

también lo es para todo  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^+$  fijos, lleva naturalmente a la aparición de soluciones de la forma

$$u(x, t) = \psi(t) v \left( \frac{x}{\varphi(t)} \right)$$

Habitualmente  $\varphi$  y  $\psi$  son potencias o exponenciales, y se requiere una condición extra (por ejemplo, conservación de la masa en el tiempo si se pide  $v \in L^1(x)$ ), para poner,

digamos,  $\psi$  en función de  $\varphi(t)$ . Se está entonces frente a dos ecuaciones ordinarias respectivamente para  $\varphi$  y  $v$ .

Si nos ocupamos de la ecuación

$$u_t = \operatorname{div}(u^M |\nabla u|^{N-1} \nabla u), \quad M, N \in \mathbb{R}, N \geq 0$$

o, con dependencia radial

$$u_t = r^{1-n} (r^{n-1} u^M |u_r|^{N-1} u_r)_r \quad (1.1)$$

que para  $M > 1$  y  $N = 1$  es la de medios porosos y para  $0 < M < 1$  y  $N = 1$  la de la difusión rápida, tenemos, si  $\eta := \frac{|x|}{\varphi(t)}$  es la variable autosemejante (cf. [B-K-S]),

i) Soluciones tipo Barenblatt, para  $M + N - 1 > 0$ , es decir, si

$$\eta = \frac{|x|}{(\alpha(T+t))^{1/\alpha}}, \quad \alpha = n(M+N-1) + N + 1 > 0,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{(\alpha(T+t))^{n/\alpha}} \left[ A - \frac{M+N-1}{N+1} \eta^{\frac{N+1}{N}} \right]_+^{N/(M+N-1)}$$

$u(x, t)$  es solución débil de (1.1), y  $u(x, 0) = C\delta_0$ ,  $A$  es proporcional a la masa total (constante en el tiempo)  $C$ .

Para  $\eta = \frac{|x|}{[\alpha(T-t)]_+^{1/\alpha}}$ , se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{[\alpha(T-t)]_+^{n/\alpha}} \left[ A + \frac{M+N-1}{N+1} \eta^{(N+1)/N} \right]_+^{N/(M+N-1)}$$

que sólo existe para  $t < T$ . Para  $A = 0$  esta solución exhibe "tiempo de espera":  $u(0, t) = 0$  para  $0 \leq t < T$ , y  $u(0, T) = u(x, T) = +\infty$ .

(Es claro que en este caso ya no se conserva la masa).

ii) Tipo calor, para  $M + N - 1 = 0$ .

Obsérvese que si  $u$  es solución de (1.1),  $\lambda u$  en este caso también lo es, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Aquí sigue siendo  $\eta = \frac{|x|}{(\alpha(T+t))^{1/\alpha}}$ , con  $\alpha = N + 1 > 0$ , y

$$u(x, t) = \frac{A}{(\alpha(T+t))^{1/\alpha}} e^{-\frac{N}{N+1} \eta^{(N+1)/N}}.$$



O poniendo,  $\eta = \frac{|x|}{(\alpha(T-t))_+^{1/\alpha}}$ ,

$$u(x,t) = \frac{A}{(\alpha(T-t))_+^{n/\alpha}} e^{\frac{N}{N+1}\eta^{(N+1)/N}}$$

(la segunda diverge en tiempo  $t = T$ , y no se conserva la masa). Obsérvese el crecimiento (resp., decrecimiento) muy rápido para  $0 < N < 1$ ).

iii) Para  $M + N - 1 < 0$ , pueden aparecer distintos comportamientos:

a) Tipo difusión rápida: si  $\alpha = n(M + N - 1) + N + 1 > 0$ .

$$\eta = \frac{|x|}{(\alpha(T \pm t))_+^{1/\alpha}}$$

y

$$u(x,t) = \frac{|x|}{(\alpha(T \pm t))_+^{n/\alpha}} \frac{1}{\left[ A \pm \frac{(1-(M+N))}{N+1} \eta^{(N+1)/N} \right]_+^{N/(1-(M+N))}}$$

b)  $\alpha = 0$

Para  $\eta = \frac{|x|}{e^{T \pm t}}$ ,

$$u(x,t) = \frac{1}{e^{n(T \pm t)}} \frac{1}{\left[ A \pm \frac{1}{n} \eta^{(N+1)/N} \right]_+^{nN/(N+1)}}$$

c)  $\alpha < 0$

Para  $\eta = (-\alpha(T \mp t))^{1/(-\alpha)} |x|$ ,

$$u(x,t) = \frac{(-\alpha(T \mp t))^{n/(-\alpha)}}{\left[ A \pm \frac{(1-(M+N))}{N+1} \eta^{(N+1)/N} \right]_+^{N/(1-(M+N))}}$$

En el caso de la ecuación de medios porosos, o difusión rápida, los casos  $\alpha = 0$  y  $\alpha < 0$  aún se han estudiado poco.

Son de esperar problemas para encontrar unicidad (véase [E-R-V]) para el problema de Cauchy, parece claro que deben agregarse condiciones sobre el crecimiento de las soluciones

para  $|x|$  grande para caracterizar una clase de unicidad.

2. Miremos un ejemplo en que  $\alpha$  no es monótona, estudiado en [vD-H]:

$$\begin{aligned}
 u_t &= (\alpha(u)\Phi(u_x))_x, & (2.1) \\
 \alpha(s) &= s(1-s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad y \\
 \Phi(r) &= \frac{r}{1+r^2}, \quad -1 \leq r \leq 1.
 \end{aligned}$$

(2.1) admite soluciones de la forma  $\bar{u}_{c,r}(x,t) = \bar{u}(x-c, t+r)$ , con

$$\bar{u} = \begin{cases} 0 & -\infty < \frac{x}{g(t)} \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{g(t)} & \left| \frac{x}{g(t)} \right| < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{g(t)} < \infty \end{cases}$$

y  $g(t)$  solución de

$$\begin{cases} g'(t) = 2 \Phi\left(\frac{1}{g(t)}\right) & t > 0 \\ g(0) = G \geq 1 \end{cases}$$

3. Veamos una posible manera de obtener un "efecto homogéneo". Consideremos

$$u_t = A(u)_{xx} \quad (3.1)$$

A no decreciente, y busquemos  $w(x,t) = \frac{1}{t} v\left(\frac{x}{t}\right)$  que sea solución de la ecuación modificada

$$u_t = A(tu)_{xx}. \quad (3.2)$$

Para ello, la función  $v$ , que se busca par, debe satisfacer la ecuación integral implícita

$$r^2 = 2 \int_v^{v(0)} \frac{dA(s)}{s}$$

donde el parámetro  $v(0)$  está relacionado con la masa total  $\int_{-\infty}^{+\infty} v(r)dr$ . Puede verse que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} w(x,t) = \text{const.} \delta(x)$ . Mediante técnicas de comparación puede obtenerse información sobre soluciones de (3.1) a partir de soluciones de (3.2) (cf. [B2]). La técnica de obtener  $v$  a partir de una ecuación integral implícita se debe a L. Peletier, y volveremos a ella en el

próximo inciso.

4.a) Consideremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(k(u)|\nabla u|^{N-1}\nabla u) \quad k \geq 0 \text{ p.p.} \\ u_t &= \operatorname{div}(|\nabla \phi(u)|^{N-1}\nabla(\phi(u))) \\ E(u)_t &= \operatorname{div}(|\nabla \phi(u)|^{N-1}\nabla(\phi(u))), \end{aligned}$$

con  $E, \phi$  gráficos monótonos. En condiciones bastante generales sobre  $E$  y  $\phi$  (por ejemplo que  $E \circ \phi^{-1}$  sea un gráfico es suficiente) puede verse que admiten soluciones radiales débiles de la forma

$$u(x, t) = u\left(\frac{|x|}{t^{1/(N+1)}}\right) = u(\eta).$$

El estudio cualitativo de  $u$  puede hacerse a través del estudio de la variable de Krichhoff asociada a  $u$ ,  $V(\eta) := \phi(u(\eta))$  y de su flujo  $f(\eta) := -\eta^{n-1}|V'(\eta)|^{N-1}V'(\eta)$ , obteniéndose que:

(i)  $V(\eta)$  es monótona (la supondremos decreciente), estrictamente mientras sea  $V(\eta) > \inf V(s)$ , y localmente absolutamente continua,

(ii)  $f(\eta)$  es no decreciente y negativo, y existe  $f(\infty) := \lim_{\eta \rightarrow 0} f(\eta)$ ,

(iii)  $V'(\eta) = \text{const. } \eta^{(1-n)/N}$ ,  $\eta \in (a, b)$  (forma típica de  $V(\eta)$ )  $\Leftrightarrow E(u(\eta))$  es constante en  $(a, b)$ .

(iv)  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} E(u(\eta)) =: E(u)(\infty) < \infty$

$\exists \lim_{\eta \rightarrow \infty} V(\eta) =: V_\infty \geq -\infty$

(v) (intervalos de constancia de  $\phi$  y saltos de  $u$ ). Si  $\phi = \text{const.}$  en  $(u_1, u_2)$  y  $\phi(u_1) > \inf V$ , entonces los valores de  $u(\eta)$  evitan  $(u_1, u_2)$  y se tiene  $u(\eta) = \nu(V(\eta))$ , con  $\nu$  el gráfico inverso de  $\phi$  y por lo tanto  $u(\eta)$  tiene un salto.

(vi) (saltos de  $\phi$  e intervalos de constancia de  $u$ ). Si  $\phi$  salta en  $u_c \in \text{Im}(u)$ , entonces existe un intervalo  $(\eta_1, \eta_2)$  tal que  $u(\eta) \equiv u_c$  en  $(\eta_1, \eta_2)$ , y  $V(\eta)$  une  $\phi(u_{c+})$  con  $\phi(u_{c-})$  a través de una curva típica (esto es consistente con (iii)).

(vii) Condición de Stefan en los  $\eta_c$  en que salta  $E(u)$ : en esos puntos se verifica

$$\begin{aligned} (-V'(\eta_{c+})^N - (-V(\eta_{c-}))^N) &= \frac{\eta_c}{N+1} [E(u(\eta_{c+}) - E(u(\eta_{c-}))] \quad (\text{en saltos de } u) \\ &= -\frac{\eta_c}{N+1} [E(u_{c+}) - E(u_{c-})] \quad (\text{en saltos de } E). \end{aligned}$$

(viii)  $V(\eta)$  es convexa.

La existencia de solución para el problema de valores iniciales y de contorno

$$(P) \begin{cases} \frac{\eta^n}{N+1} E(u(\eta))' = (\eta^{n-1} |\phi(u(\eta))|^{N-1} \phi(u(\eta)))' \\ u(\eta_{0+}) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} E(u(\eta)) = 0 \quad (\eta_0 \in \mathbf{R} > 0) \end{cases}$$

se estudia a través de la ecuación integral para la función inversa de la variable de Kirchhoff  $V(\eta)$

$$\eta(V) = \eta_0 + \int_V^{\alpha(1)} \frac{\eta^{(n-1)/N}(s)}{\left[ -\tilde{K} + \frac{1}{N+1} \int_0^s \eta^n(t) d(E(\nu(t))) \right]^{1/N}} ds, \quad (4.1)$$

técnica que ya hemos mencionado en el punto 3.  $\tilde{K}$  está relacionado con  $f(\infty)$ , no siempre determinable a priori, habiendo casos en que distintos valores  $\tilde{K}$  proveen distintas soluciones de (P) (compárese con 1.iii)c). Un ejemplo de esta situación puede verse en [K1].

**4.b)** Discutiremos ahora en el contexto de 4.a) una generalización de un modelo de zona pastosa autosemejante debido a Solomon, Wilson y Alexiades (ver [S-W-A]) siguiendo el tratamiento del caso unidimensional de [B1].

Quiere modelarse una zona pastosa autosemejante a temperatura  $u \equiv u_c$  constante para la ecuación  $E(u)_t = \text{div}(k(u)|\nabla u|^{N-1} \nabla u)$ . Si  $u(x, t) = u\left(\frac{|x|}{t^{1/(N+1)}}\right)$ , debe satisfacer la ecuación ordinaria

$$-\frac{\eta^n}{N+1} E(u(\eta))' = (\eta^{n-1} (k(u(\eta)))' |u'(\eta)|^{N-1} u'(\eta))'$$

Introduciendo  $\phi(u) = \int_0^u k(s) ds + \omega H(u - u_c)$ , con  $H$  la función de Heaviside y  $\omega > 0$  la constante (asociada al ancho de la zona) dada por

$$[\phi(b) - \phi(a)] \times (-\text{flujo de temperatura}) = \omega,$$

con

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{N}{N+1-n} x^{(N+1-n)/N} & N+1-n=0 \\ \ln x & N+1=n, \end{cases}$$

y pongamos

$$\phi(u_{c-}) = V_1, \quad \phi(u_{c+}) = \alpha(u_{c-}) + \omega = V^1.$$

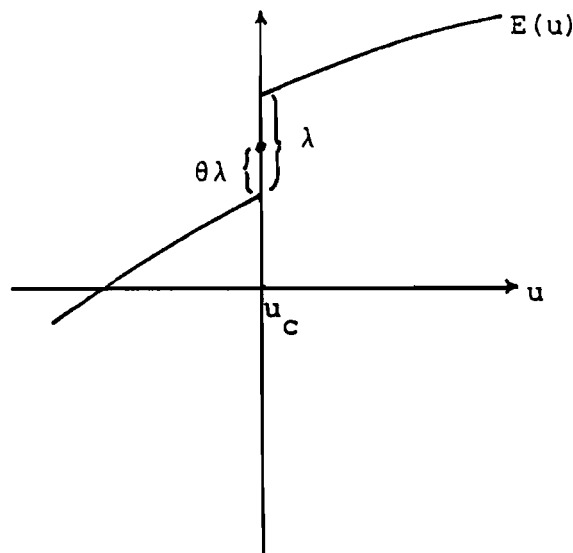
Con esta elección de  $\phi$ ,  $E$  y  $\phi$  saltan en un mismo punto  $u_c$ . Redefiniendo  $E \circ \nu \equiv E_c$  para  $V_1 \leq V \leq V^1$ , la discusión de existencia se hace a través de (4.1). En [K] pueden verse condiciones en las que el análisis cualitativo (i) - (viii) sigue siendo válido aún si  $E$  y  $\phi$  saltan en un mismo punto.

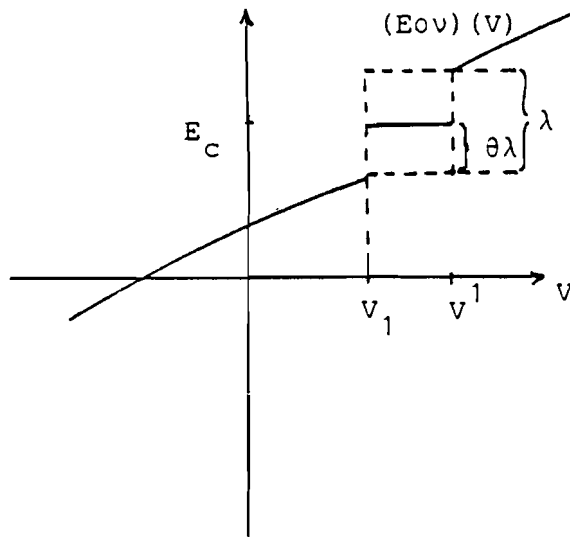
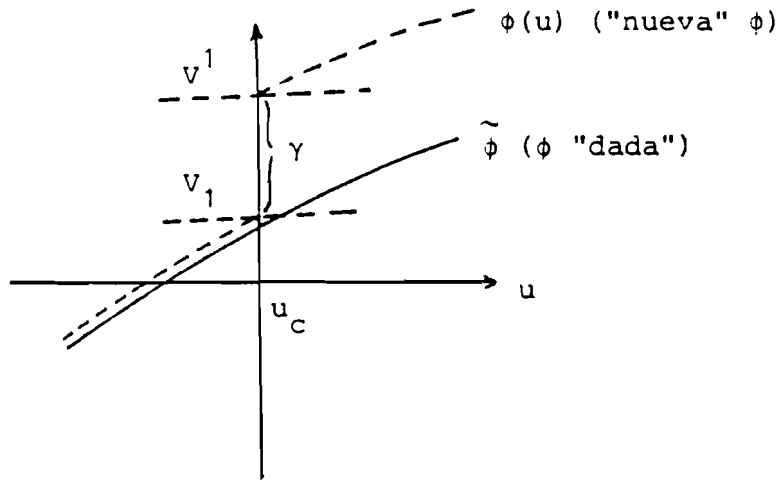
Se tiene  $u(\eta) = \nu(V(\eta))$ ;  $f(\eta)$  es constante y  $V(\eta)$  tiene por lo tanto una forma típica y  $u \equiv u_c$  en cierto intervalo  $a \leq \eta \leq b$  (la zona pastosa), cumpliéndose

$$(\varphi(a) - \varphi(b))(-f(a+)) = V^1 - V_1,$$

y la condición de conservación de energía a través de la zona  $a \leq \eta \leq b$ ,

$$\begin{aligned} & b^{n-1}(-V'(b+))^N - a^{n-1}(-V'(a-))^N = \\ & = -\frac{1}{N+1}(b^n - a^n)[E_c + \theta\lambda] - \frac{a^n}{N+1}E(u_{c+}) + \frac{b^n}{N+1}E(u_{c-}) = \\ & = \frac{\lambda}{N+1}((1-\theta)a^n + \theta b^n). \end{aligned}$$





Observemos que aquí  $V(\xi)$  ya no es la composición de  $u(\xi) \equiv u_c$  y  $\alpha$  para  $a \leq \xi \leq b$ , sin embargo es  $u(\xi) = \nu(V(\xi))$ . Al tener  $V(\xi)$  una "forma típica" sobre  $(a, b)$ ,  $V'(a+) = V'(b-)$  es el flujo constante (de la variable de Kirchhoff) a través de la zona.

El punto 4 es la versión  $n$ -dimensional de [B1] y un resumen del mismo aparecerá en [K2].

## REFERENCIAS.

- [B-K-S] J.E. Bouillet, M.K. Korten, M. Shillor: Some Special Solutions of the Generalized Diffusion Equation, manuscrito inédito.
- [B1] J.E. Bouillet: Self Similar Solutions, Having Jumps and Intervals of Constancy, of a Diffusion - Heat Conduction Equation, IMA Preprint Series # 230, Marzo 1986.
- [B2] J.E. Bouillet: Some Properties of Solutions to  $u_t = (A(u))_{xx}$  which are related to zeros of  $A'(u)$ . Publicaciones Matemáticas del Uruguay, No. 1, 1988, pp. 27-35.
- [E-R-V] J.R. Esteban, A. Rodriguez, J.L. Vázquez: A Nonlinear Heat Equation with Singular Diffusivity, Prepublicación No. 1987/003, Dpto. de Matemática, Univ. Autónoma de Madrid.
- [K1] M.K. Korten: Remarks on Some Particular Solutions to Generalized Diffusion Equations, Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen, Sommersemester 1987.
- [K2] M.K. Korten: Generalized Self-Similar Diffusion in  $\mathbb{R}^n$ , com. al "Free Boundary Problems: Theory and Applications - International Colloquium" Junio 1987, por aparecer en las Actas del Coloquio.
- [S-W-A] A.D. Solomon, D.G. Wilson, V. Alexiades: A Mushy Zone Model with an Exact Solution; Letters in Heat and Mass Transfer, Vol. 9, No. 4, 1982.
- [vD-H] C.J. van Duijn, D. Hilhorst: On a doubly nonlinear diffusion equation in hydrology. Nonlinear Analysis, T.M.A., 11, (1987), 305- 333.

Marianne K. Korten

C.I.C.de la Pcia.de Buenos Aires, y

Dpto. de Matemática - FCEyN, UBA.

Pabellon No.1 - 1428 Buenos Aires

Argentina.

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por el PID 683/85, CONICET.





# MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA LA PREDICCIÓN DE TIEMPOS DE CONGELACIÓN Y DESCONGELACIÓN DE ALIMENTOS

Rodolfo Horacio Mascheroni

Centro de Investigación y Desarrollo en Criotecnología de Alimentos  
(CIDCA). Facultad de Ciencias Exactas. U.N.L.P.

Los procesos de congelación y descongelación de alimentos pueden considerarse como casos particulares del esquema general de frente móvil con zona pastosa.

El factor único que caracteriza a estos sistemas es que el componente principal de los alimentos (y el que cambia de fase) es el agua que pasa a hielo durante la congelación.

A los fines prácticos, el alimento -de cualquier tipo: carne, fruta, verdura, jugo- se comporta como una solución. Es decir que comienza a congelarse a una temperatura ( $T_F$ ) más baja que la del agua pura ( $0^\circ\text{C}$ ) y la congelación es gradual, siguiendo una curva de equilibrio del contenido de hielo ( $W$ ) con la temperatura ( $T$ ) que es característica de cada alimento. Además, como puede verse en la Figura 1 el agua no se congela totalmente, ya que parte de la misma está "ligada" a los componentes solubles y estructurales del alimento.

Esta congelación (o descongelación) gradual del agua, y el hecho de que la conductividad térmica ( $k$ ) del hielo sea del orden de 5 veces la del agua líquida provoca que las propiedades térmicas del congelado sean muy distintas de las del producto fresco y además -y esto es lo más importante- que varíen fuertemente durante la congelación o descongelación, como lo muestra la Figura 2 para el caso particular de carne (Donde  $k$ : conductividad térmica,  $C_p$ : capacidad calorífica

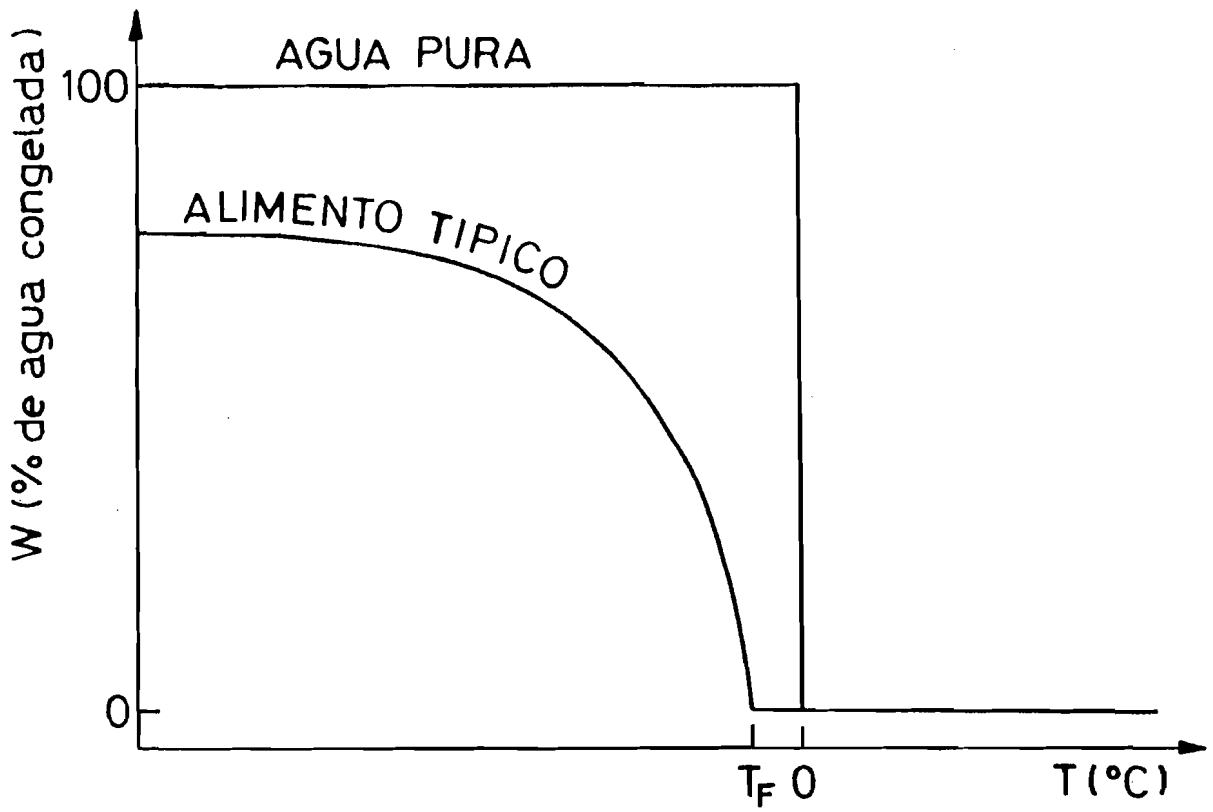


Figura 1

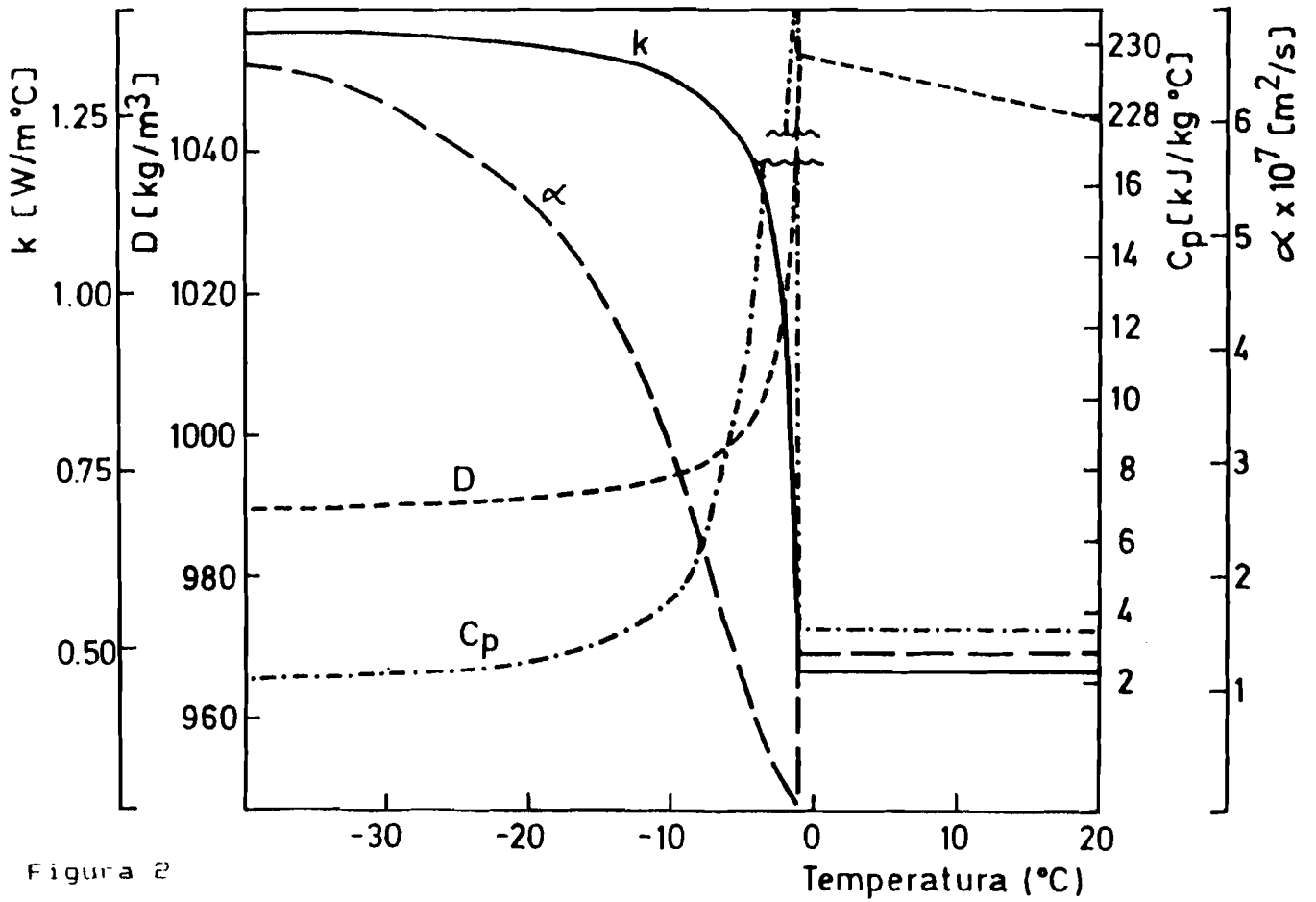


Figura 2

aparente,  $D$ : densidad y  $\alpha$ : difusividad térmica).

El proceso de congelación, desde el punto de vista de la transferencia de calor se puede considerar en forma simplificada como ocurriendo en tres etapas, las que se esquematizan a continuación:

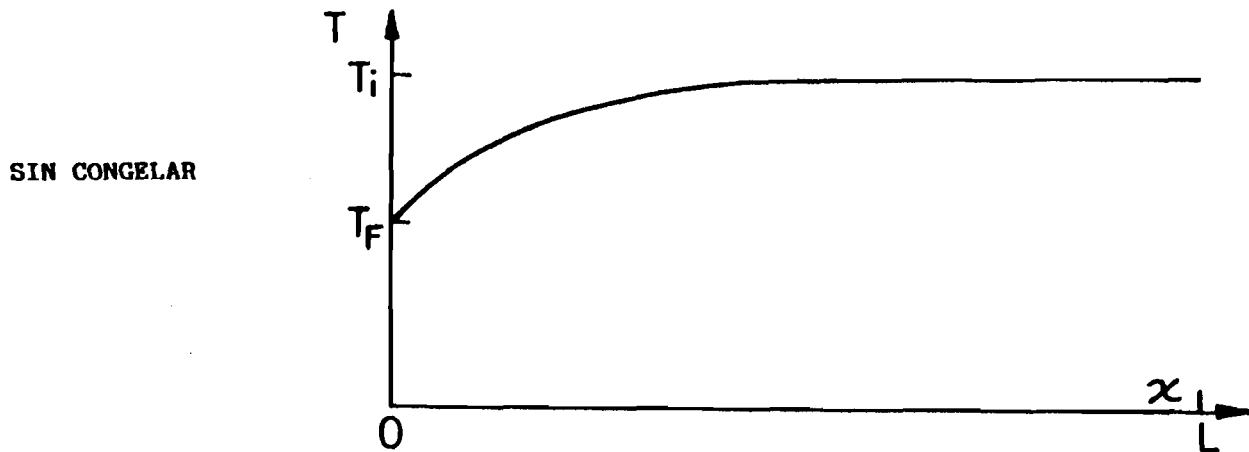


Figura 3

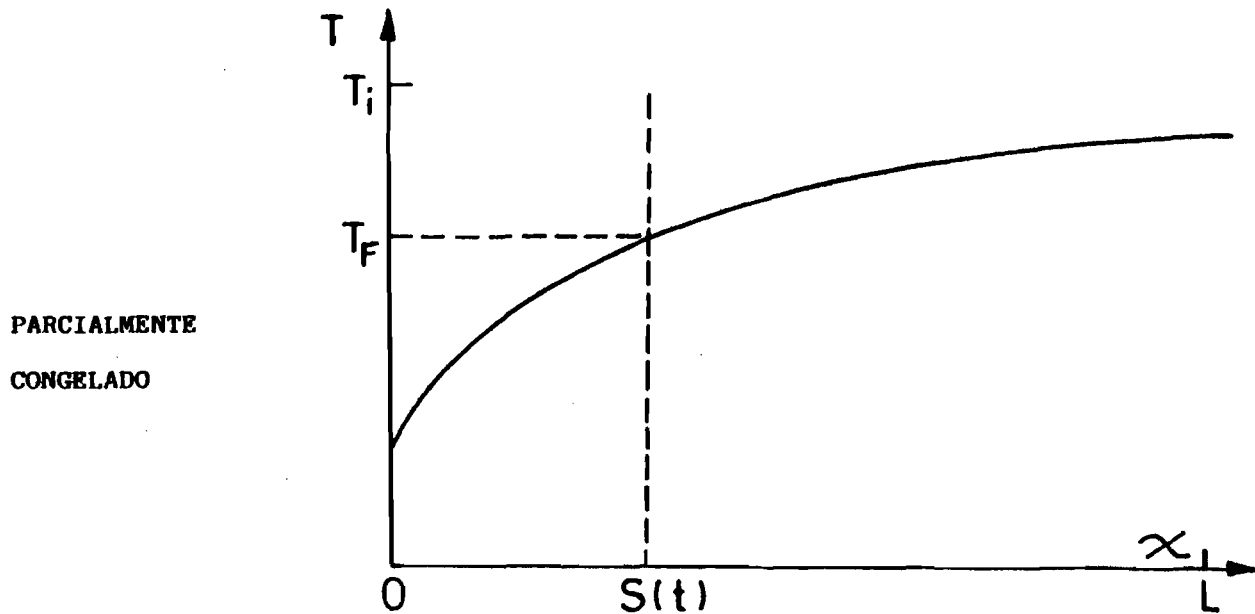


Figura 4

Este tipo de esquema con algunas simplificaciones complementarias dio origen a varios métodos aproximados de cálculo de tiempos de congelación y descongelación, como veremos más adelante.

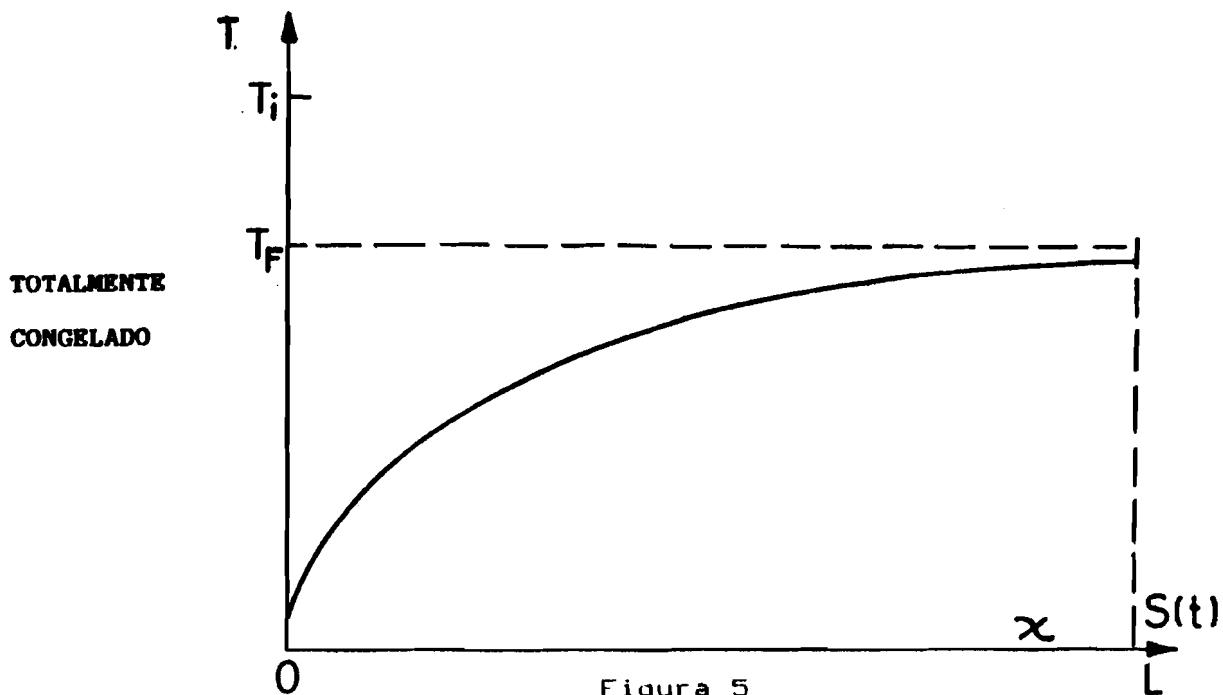


Figura 5

**Modelado de la transferencia de calor durante la congelación y descongelación de alimentos**

El hecho de que la congelación sea gradual con la temperatura y que las propiedades térmicas varíen fuertemente durante la misma determinan que, independientemente de la geometría y composición del sistema, no existan soluciones analíticas exactas que predigan la variación de temperatura y tiempos de proceso para estos sistemas.

Existen entonces dos alternativas para la predicción en estos casos que en forma general se pueden caracterizar por el balance diferencial

$$D \rho C_p \frac{\delta T}{\delta t} = \nabla k \nabla T \quad (1)$$

1) Métodos "exactos", numéricos, que utilizan valores experimentales o ecuaciones teóricas para la predicción de las propiedades térmicas. La ec. (1) se resuelve por métodos numéricos (diferencias o elementos finitos).

II) Métodos "aproximados". Efectúan una serie de simplificaciones, tales que logren obtener una solución analítica del sistema o, en muchos casos, sólo se obtiene una ecuación simplificada para el cálculo de tiempos de congelación o descongelación.

En el siguiente esquema se sintetizan las principales características de ambas opciones:

#### MÉTODOS "EXACTOS"

- Resuelven el balance de energía del sistema sin hacer simplificaciones
- Permiten predecir perfiles de temperatura y tiempos de proceso
- Necesitan información detallada de la variación de las propiedades térmicas con la temperatura y composición
- Tienen en cuenta en forma "exacta" la influencia de las condiciones de trabajo sobre el tiempo de proceso y aun permiten trabajar con condiciones variables en el tiempo

#### MÉTODOS "APROXIMADOS"

- Utilizan simplificaciones en las ecuaciones diferenciales, o regresiones o gráficos aproximados
- Generalmente solo dan tiempo de proceso
- Emplean sólo el valor de las propiedades a temperaturas determinadas o suponen una dependencia simple con la temperatura
- Tienen en cuenta en forma "aproximada" la influencia de las condiciones de trabajo sobre el tiempo de proceso. En general solo consideran condiciones constantes

## METODOS "EXACTOS"

- Son válidos en cualquier rango de los parámetros del sistema
- Necesitan del programa de cálculo específico, una computadora con cierta capacidad de memoria y una cantidad variable de tiempo de máquina

## METODOS "APROXIMADOS"

- Generalmente solo dan resultados de buena precisión dentro del rango de variación de los parámetros para el cual fueron deducidos
- Solo implican cálculos simples, no necesitan de una computadora

En esta conferencia sólo nos ocuparemos de los métodos aproximados que son los que están dentro de las posibilidades de uso de fabricantes de equipos y procesadores de alimentos, quienes son los principales interesados en el problema.

### Métodos aproximados

Existen cientos de modelos y métodos simplificados para el cálculo aproximado de tiempos de congelación y descongelación. Ramaswamy y Tung [RT] y Hayakawa y col. [HSS] presentan revisiones bastante completas de los mismos.

Dentro de los de uso más habitual se puede hacer una división en tres grandes grupos:

- a) Simplificaciones en la resolución de la ecuación diferencial:

## Esquemas tipo Plank-Stefan

- b) Regresiones a partir de datos experimentales y/o teóricos
- c) Diagramas térmicos generalizados

### a) Esquemas tipo Plank-Stefan

Parten de un caso particular del problema de frente móvil: sistema a una fase pseudoestacionario con resistencia térmica en la interface superficial. En tecnología de alimentos se lo conoce como modelo de Plank [P1] por ser éste el primero que lo adaptó a congelación de alimentos.

Las suposiciones que se hacen son:

- $T_i = T_F$  (la temperatura inicial es igual a la de inicio de congelación)
- $D_1 C_{p1}$  muy bajo (las propiedades del congelado determinan resistencia térmica casi nula)
- Propiedades térmicas constantes en cada fase
- Todo el calor de cambio de fase ( $\Delta H_c$ ) se libera a  $T_F$
- El número de Biot ( $Bi = \frac{hL}{k_1}$ ) es finito

Ello lleva al esquema de la Figura 6 para una geometría de placa plana infinita de espesor  $L$  refrigerada de una sola cara (Donde  $h$ : coeficiente de transferencia calórica,  $T_S$ : temperatura de la superficie,  $T_R$ : temperatura del refrigerante).

El balance que se cumple para cada fase es  $d^2T/dx^2 = 0$

Integrando y reordenando se obtiene:

$$k_1 \frac{dT}{dx} = \frac{T_F - T_R}{(S(t)/k_1 + 1/h)} = \Delta H D_1 \frac{dS(t)}{dt}$$

Integrando entre  $S(t) = 0$  y  $S(t) = L$  se obtiene:

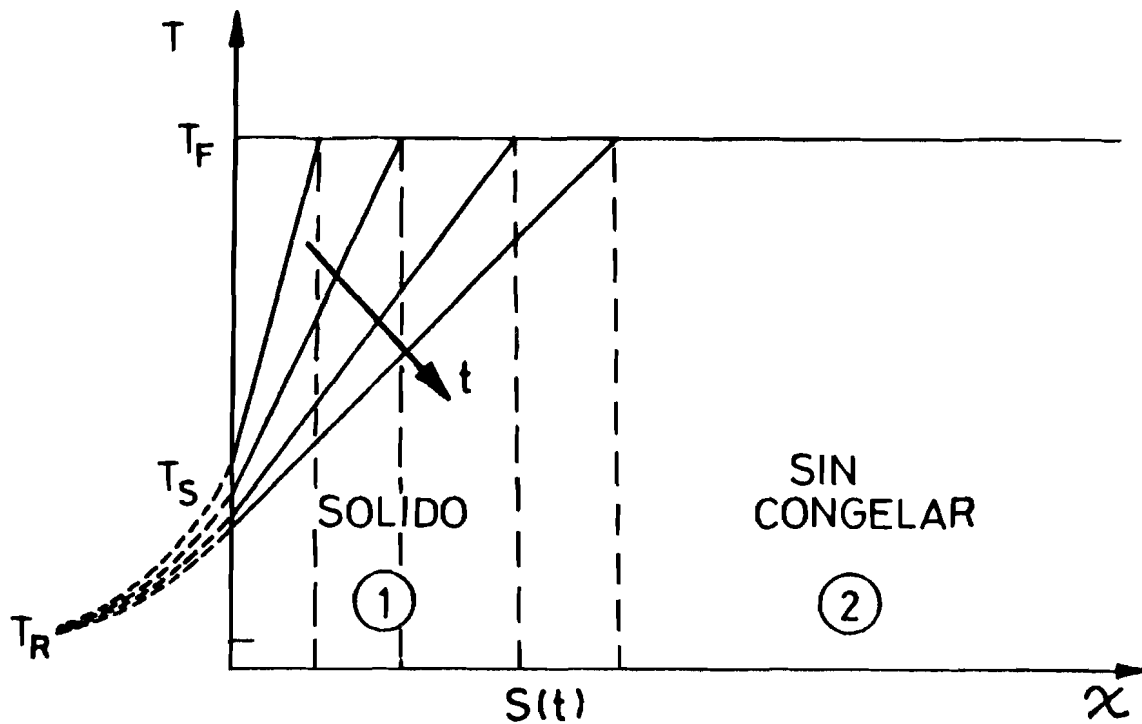


Figura 6

$$t_{cp} = \frac{D_1}{h} \frac{H}{(T_F - T_R)} \left[ \frac{L}{h} + \frac{L^2}{2k_1} \right]$$

que es la fórmula de Plank para el cálculo del tiempo de congelación ( $t_c$ ) para alimentos de geometría de placa plana.

En forma general se la suele expresar como:

$$t_{cp} = \frac{D_1}{h} \frac{H L e}{(T_F - T_R) k_1} \left[ \frac{P}{Bi_1} + R \right] \quad (2)$$

P y R dependen de la geometría y están tabulados para: placa plana infinita, cilindro infinito, esfera, cilindro finito y paquetes (en estos dos casos para distintas relaciones de tamaño entre las caras).

H solo tiene en cuenta el calor de cambio de fase. La misma ecuación se puede utilizar para el cálculo de tiempos de descongelación ( $t_d$ ) usando  $D_2$ ,  $Bi_2$  y  $k_2$  y  $(T_H - T_R)$  en lugar  $(T_F - T_R)$  ( $T_H$ : temperatura del medio de calentamiento)



## Modificaciones a la fórmula general de Plank

Las suposiciones hechas en su deducción implican que en general la ecuación de Plank (ec. (2)) prediga por defecto, teniendo errores de hasta un 40 % o mayores. Sin embargo, el que tenga fundamento teórico ha permitido que se la use de base para la formulación de numerosos métodos mejorados. Estos se originan en la aplicación de una o más de las siguientes mejoras a la ecuación original:

1. Agregado de factores que corrigen la fórmula original
2. Suma de tiempos que toman en cuenta los periodos de preenfriamiento y atemperado, ya que  $T_i > T_F$  y que la temperatura final  $T_c < T_F$
3. Cambios en los valores de propiedades ( $\Delta H$ ,  $D_1$ ,  $F_1$ ) y/o de las constantes  $P$  y  $R$ .

Algunas de las más utilizadas son:

- La de Nagaoka y col. [NIH] que corrigen por  $T_i$  distinto de  $T_F$  y usan un  $\Delta H_t$  calculado entre  $T_i$  y  $T_c$  (incluye el salto entálpico total)

$$t_c = \frac{(1 + 0.008 T_i) D_1 \Delta H_t L e}{(T_F - T_R)} \left( \frac{P}{Bi_1} + R \right)$$

- Levy [L] presenta una fórmula muy similar:

$$t_c = \frac{(1 + 0.008 (T_i - T_F)) D_1 \Delta H_t L e}{(T_F - T_R)} \left( \frac{P}{Bi_1} + R \right)$$

- El Instituto Internacional de Refrigeración [I] utiliza un  $\Delta H_c$  que toma en cuenta la variación de entalpia entre  $T_F$  y  $T_c$ .

$$t_c = \frac{D_1 \Delta H_c L e}{(T_F - T_R)} \left( \frac{P}{Bi_1} + R \right)$$

- Plank [P2] corrige su fórmula agregando un factor que toma en cuenta el preenfriamiento y sumando un término que tiene en consideración la diferencia entre TF y Tc.

$$tcp' = \frac{(1 + 0.0053 (T_i - TF)) D_1 \Delta H'c L^2}{(TF - TR)} \left( \frac{P}{Bi_1} + R \right) + ta$$

$$ta = \frac{1.886 L^2 n D_1 Cp'1}{k'1} \left( \log \left( \frac{TF - TR}{Tc - TR} \right) - 0.0913 \right) \left( \frac{P}{Bi_1} + R \right)$$

$\Delta H'c$  está considerado entre TF y  $-4^\circ C$ ,  $Cp'1$  es un valor medio en el rango de  $-4^\circ C$  y Tc. Finalmente n es un factor que depende de Bi1 y puede valer entre 1 a  $Bi_1 = \infty$  y 1.21 a Bi1 tendiendo a cero.

- Una de las correcciones más precisas y de más amplio campo de aplicación es la presentada por Cleland y Earle [CE1] y ampliada en varios trabajos posteriores (ver bibliografía). Desarrollan una ec. tipo Plank generalizada válida para distintas geometrías y posteriormente ampliada a los casos de transmisión de calor multidireccional.

$$tc = \frac{D_1 \Delta Hc L^2}{(TF - TR)} \left( \frac{P'}{Bi_1} + R' \right) \quad (3)$$

P' y R' dependen de la geometría y de los parámetros Bi1, Pk, Ste, donde

$$Pk = \frac{Cp2 (T_i - TF)}{\Delta Hc} \quad \text{y} \quad Ste = \frac{Cp1 (TF - TR)}{\Delta Hc}$$

- En otro tipo de enfoque Mascheroni y Calvelo [MC] utilizan una ec. de Plank modificada (tcp'') a la que le adicionan tiempos de preenfriamiento (tp) y de atemperado (ta) calculados con la solución

analítica para transferencia de calor sin cambio de fase para placa plana infinita.

$$t_c = t_p + t_{cp}'' + t_a$$

$$t_{cp}'' = \frac{D^2 \Delta H''_c L''}{(T_F - T_R)k'1} \left( \frac{P}{812} + R \right)$$

$\Delta H''_c$  tiene en cuenta el calor de cambio de fase "efectivo" considerando la fracción de agua que realmente se congela.

Dentro de este mismo esquema de cálculo De Michelis y Calvelo [DC1], [DC2], De Michelis y col. [DMC], Lacroix y Castaigne [LC1], [LC2], [CL] y Pham [PH], modifican la manera de calcular  $t_p$  y  $t_a$  y lo generalizan para otras geometrías y a conducción multidimensional y/o asimétrica.

#### b) Regresiones a partir de datos experimentales y/o numéricos

Dan fórmulas del tipo  $t_{c-f}(TR, T_i, L, h)$  o  $t_{d-f}(L, T_i, T_H, h)$  donde la funcionalidad es propuesta por los autores y se ajusta a datos experimentales o teóricos de forma de obtener los "mejores" valores de las constantes que incluye cada regresión. Su validez se circunscribe al tipo de equipo y rango de condiciones usadas en su deducción.

Algunos ejemplos son:

- Scott [SC] obtuvo para descongelación adiabática de bloques de pescado sumergidos en un volumen determinado de agua:

$$t_d = \frac{60732 (50 L + 1.00)^{1.374}}{(T_H + 0.5)^{1.500} R^{0.050}}$$

donde

$$R = \frac{\text{peso agua}}{\text{peso pescado}}$$

- Flores y col. (F) obtuvieron para descongelación unidireccional de placas o bloques de alimentos de alto contenido acuoso:

$$t_d = \frac{39.835 L^2 C_p \rho D^2 (0.5 + 1/Bi^2)(T_F - T_i)^{0.24}}{k^2 (T_H - T_F)^{0.7273}}$$

- Hayakawa y col. [H1] y Hayakawa y Succar [H2] obtuvieron fórmulas de regresión precisas y complicadas para el cálculo de tiempos de congelación de bloques y cilindros finitos y de placa plana infinita, respectivamente, válidas para un amplio rango de condiciones de trabajo.

### c) Diagramas térmicos generalizados

La idea es obtener una relación entre la temperatura del centro térmico del producto  $T_c$  y un tiempo adimensional que sea general y válida, por tanto, para cualquier condición de trabajo. Salvadori et al [S1] y Salvadori y Mascheroni [S2], [S3], [S4], hallaron relaciones de este tipo para congelación o descongelación de productos alimenticios de formas geométricas regulares.

Al trabajarse con relaciones empíricas regresionadas de modelos numéricos, sólo se pudo generalizar para la zona final de congelación o descongelación pero esto es suficiente para poder predecir con precisión  $t_c$  o  $t_d$ .

El tipo de curvas obtenidas  $T_c$  vs  $X$  para congelación se presentan en la Fig. 7 donde se halla graficada para cada geometría la relación  $T_c$  vs  $X$  y el límite de variación de todos los casos teóricos posibles.

Estas relaciones se pueden linealizar y despejar de ellas  $t_c$  o  $t_d$ , llevando a expresiones del tipo.

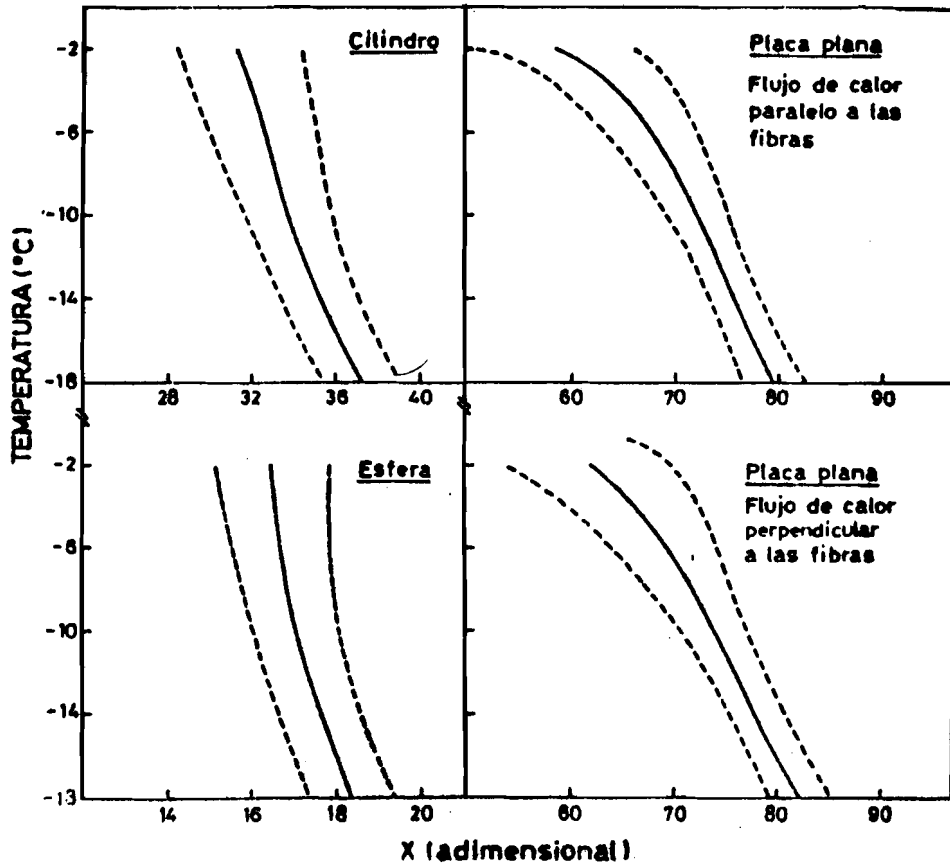


Figura 7.

$$T_c = A + B X$$

$$t_c = \frac{X L^m \left( \frac{1}{B12} + C \right) \left( \frac{T_R - T_I}{T_F} \right)^n}{\left( \frac{k2}{D2 Cp2} \right) \left( \frac{T_F - T_H}{T_F} \right)^m} \quad (4)$$

$$t_d = \frac{X L^m \left( \frac{1}{B12} + C \right) \left( \frac{T_I - T_F}{T_F} \right)^n}{\left( \frac{k2}{D2 Cp2} \right) \left( \frac{T_F - T_H}{T_F} \right)^m} \quad (5)$$

Las constantes A, B, C, m y n dependen de la geometria y de si es congelación o descongelación y se hallan tabuladas en los trabajos

respectivos.

### Conclusiones

El ideal para el cálculo simple y preciso de tiempos de congelación o descongelación es el desarrollo de relaciones adimensionales generalizadas teóricas de tipo  $T_c$  vs  $X$ , obtenidas sin realizar simplificaciones en la ecuación diferencial (1).

Al momento actual, al no haberse obtenido aun este tipo de relaciones, las opciones de uso más simple y que brindan mayor precisión son los esquemas de Cleland y Earle (ec. (3)) y los diagramas térmicos generalizados aproximados (ec. (4) y (5)).

### Bibliografía

- [CE1] Cleland, A.C., Earle, R.L. A comparison of methods for predicting the freezing times of cylindrical and spherical foodstuffs. J. Food Sci. (1979) 44, 958.
- [CE2] Cleland, A.C., Earle, R.L. Prediction of freezing times for foods in rectangular packages. J. Food Sci. (1979) 44, 964.
- [CE3] Cleland, A.C., Earle, R.L. Assessment of freezing time prediction methods. J. Food Sci. (1984) 49, 1034.
- [CE4] Cleland, D.J., Cleland, A.C., Earle, R.L., Byrne, S.J. Prediction of thawing times for food of simple shape. Int. J. Refrig. (1986) 9, 220.
- [CE5] Cleland, D.J., Cleland, A.C., Earle, R.L. Prediction of freezing and thawing times for multidimensional shapes by simple formulae. Part I: regular shapes. Int. J. Refrig. (1987) 10, 156.

- [CE6] Cleland, D.J., Cleland, A.C., Earle, R.L. Prediction of freezing and thawing times for multidimensional shapes by simple formulae. Part II: irregular shapes. *Int. J. Refrig.* (1987) 10.
- [CL] Castaigne, F., Lacroix, C. Methode simple permettant d'estimer les temps de congelation de produits ayant des formes simples. *Revue General du Froid* (1985), 251.
- [DC1] De Michelis, A., Calvelo, A. Mathematical models for nonsymmetric freezing of beef. *J. Food Sci.* (1982) 47, 1211.
- [DC2] De Michelis, A., Calvelo, A. Freezing time predictions for bricks and cylindrical-shaped foods. *Journal of Food Science* (1983), 48, 909.
- [DMC] De Michelis, A., Mascheroni, R.H., Calvelo, A. Estimación de tiempos de congelación de productos cárneos. *La Alimentación Latinoamericana.* (1985) 19, N° 151, 52.
- [F] Flores, E.S., Bazán, H.C., De Michelis, A., Mascheroni, R.H. Thawing times of slabs of boneless or minced meats. Measurement and prediction for different thawers. *Int. J. Food Sci. & Technol.* (1989) (en prensa).
- [H1] Hayakawa, K.I., Nonino, C., Succar, J. Two-dimensional heat conduction in food undergoing freezing: predicting freezing time of rectangular or finitely cylindrical food. *Journal of Food Science* (1983). 48, 1841.
- [H2] Succar, J., Hayakawa, K.I. Parametric analysis for predicting freezing time of infinitely slab shaped food. *Journal of Food Science* (1984), 49, 468.
- [HSS] Hayakawa, K.I., Scott, K.R., Succar, J. Theoretical and semitheoretical methods for estimating freezing and thawing time. *Ashrae Trans.* (1986) 91 N° 2, 321.

- [I] International Institute of Refrigeration. Recommendations for the processing and handling of frozen foods. IIR (1972), Paris.
- [L] Levy, F. Calculating freezing time of fish in airblast freezers. J. Refrig. (1958), 1, 55.
- [LC1] Lacroix, C., Castaigne, F. Simple method for freezing time calculations for infinite flat slabs, infinite cylinders and spheres. Can. Inst. Food Sci. Technol. J. (1987), 20, 251.
- [LC2] Lacroix, C., Castaigne, F. Simple method for freezing time calculations for brick and cylindrical shaped food products. Can. Inst. Food Sci. Technol. J. (1987), 342.
- [MC] Mascheroni, R.H., Calvelo, A. A simplified model for freezing time calculations in foods. Journal of Food Science (1982), 47, 1201.
- [NTH] Nagaoka, J., Takaji, S., Hotani, S. Experiments on the freezing of fish by air-blast freezer. J. Tokio Univ. Fish (1955) 42, 65.
- [P1] Plank, R. Beitrage zur berechnung und bewertung der gefriergeschwindigkeit von lebensmitteln. Zeitschrift für die gesamte kalte industrie (1941) Beih Reihe 3, 1.
- [P2] Plank, R. El empleo del frío en la industria de la refrigeración. Ed Reverté (1963). Barcelona.
- [PH] Pham, Q.T. An extension to Plank's equation for predicting freezing times for food-stuffs of simple shapes. International Journal of Refrigeration (1984) 7, 377.
- [RT] Ramaswamy, H.S., Tung, M.A. A review on predicting freezing times of foods. J. Food Proc. Engin. (1984) 7, 169.



- [S1] Salvadori, V.O., Reynoso, R.O., De Michelis, A.  
Mascheroni, R.H. Freezing time predictions for regular-  
shaped foods. A simplified graphical method. Int. J.  
Refrig. (1987) 10, 357.
- [S3] Salvadori, V.O., Mascheroni, R.H. Non symmetrical freezing  
of blocks of foods. A simplified analytical method for  
prediction of freezing times. Regional Seminar: Cold Chain  
Development in Latin America (1988), IIR (en prensa).
- [S3] Salvadori, V.O., Mascheroni, R.H. Thawing time prediction  
for simple shaped foods using a generalized graphical  
method. Int. J. Refrig. (1989) (en prensa).
- [S4] Salvadori, V.O., Mascheroni, R.H. Prediction of freezing  
and thawing times of foods by means of a simplified  
analytical method. J. Food Sci. (enviado).
- [S5] Scott, K.R. Hot water thawing of deboned mullet blocks.  
Can. Inst. Food Sci. Technol. J. (1967) 9, 160.



# COMPORTAMIENTO ASINTOTICO EXPONENCIAL EN LA ECUACION DE MEDIOS POROSOS CON ABSORCION

Domingo Alberto TARZIA

## ABSTRACT

We give an explicit estimate for the asymptotic behavior of the solutions of the problem  $u_t - u_{xx} + u_+^p = 0$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ , with conditions  $u(0,t) = 1$ ,  $t > 0$  and  $u(x,0) = U_0(x) \geq 0$ ,  $x > 0$ , for a class of functions  $U_0$  and parameter  $0 < p < 1$ . We use an approximate solution given by the heat balance integral method with the innovation property which fixes appropriately the asymptotic limit of the corresponding approximate free boundary.

We also give an explicit estimate for the asymptotic behavior of the solution of the problem:  $u_t - (u^m)_{xx} + u^p = 0$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ , with conditions  $u(0,t) = 1$ ,  $t > 0$  and  $u(x,0) = U_0(x) \geq 0$ ,  $x > 0$ .

## KEY WORDS:

Heat balance integral method, asymptotic behavior, free boundary problems, heat conduction problems with absorption, porous medium equation with absorption, approximate solution, super and sub-solutions.

## I. INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es dar una estimación explícita para el comportamiento asintótico de la solución del problema [RiTal, Ta2] :

- (1) i)  $L(u) = u_t - u_{xx} + \lambda^2 u_+^p = 0$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ,  
ii)  $u(0,t) = 1$ ,  $t > 0$ ,  
iii)  $u(x,0) = U_0(x) \geq 0$ ,  $x > 0$ ,

para una cierta clase de funciones  $U_0 = U_0(x)$  correspondientes a la condición inicial (1iii), y parámetros  $p > 0$  y  $\lambda > 0$ . Se denota con  $x_+$  la parte positiva de  $x$ , es decir  $x_+ = \text{Max}(0, x)$ .

Si  $0 < p < 1$ , es conocido [BSS, Di, St] que la ecuación (1) tiene una solución estacionaria correspondiente al dato inicial (1ii) con soporte compacto en el intervalo  $[0, +\infty)$ , la cual está dada por la expresión

$$(2) \quad u_\infty(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{1} x\right)_+^{\frac{2}{1-p}}, \quad l = l(p) = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p}.$$

En el caso  $0 < p < 1$  y  $U_0 \leq u_\infty$ , la solución  $u = u(x, t)$  de (1) satisface

$$(3) \quad 0 < u(x, t) < u_\infty(x), \quad 0 < x < \frac{l}{\lambda}, \quad t > 0,$$

debido al principio de comparación para la ecuación (1) [Be]. Esto significa que  $u(t) = u(\cdot, t)$  tiene soporte compacto en la variable  $x$  para todo  $t > 0$ , y que

$$(4) \quad s(t) = \text{Sup} \{ x > 0 / u(x, t) > 0 \}, \quad t > 0,$$

es la frontera libre que se mueve con velocidad finita para  $t > 0$ .

Se dará una estimación de como la frontera libre  $s(t)$  tiende a su límite  $\frac{l}{\lambda}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Esta estimación implicará que la convergencia es exponencial en el tiempo. Para probar este hecho se usará una solución aproximada dada por el método del balance integral calórico con una innovación que fija apropiadamente el límite asintótico de la correspondiente frontera libre aproximada. El método del balance integral calórico ha resultado ser muy útil en algunos problemas con cambio de fase [Ta1], por ejemplo en [Ga, GST, Vo]. Esta solución aproximada a (1) converge exponencialmente a la solución estacionaria  $u_\infty = u_\infty(x)$  cuando  $U_0 < u_\infty$  y  $0 < p < 1$ ,  $\lambda > 0$  [Ta2].

Luego, se considerará una ecuación mas general, es decir, la ecuación de medios porosos con absorción y se dará también una estimación explícita para el comportamiento asintótico de la solución del problema [RiTa1]

$$(5) \quad \begin{aligned} & \text{i) } \mathcal{L}(u) = u_t - (u^m)_{xx} + u^p = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ & \text{ii) } u(0, t) = 1, \quad t > 0, \\ & \text{iii) } u(x, 0) = U_0(x) > 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Si  $0 < p < m$ , es conocido [Di, BSS] que la ecuación (5i) tiene una solución estacionaria, correspondiente al dato (5ii), que tiene soporte compacto en el intervalo  $[0, +\infty)$  y que viene dada por la siguiente expresión

$$(6) \quad u^*(x) = \left| 1 - \frac{x}{L} \right|^{\frac{2}{m-p}}, \quad L = L(m,p) = \frac{\sqrt{2m(m+p)}}{m-p}.$$

El resultado que se probará aquí será la existencia de super y sub-soluciones para la ecuación (5i), que satisface la condición (5ii), la cual converge exponencialmente a la solución estacionaria  $u^*(x)$ .

Finalmente, se obtendrán algunos resultados de comparación entre las soluciones aproximadas obtenidas para la ecuación del calor con absorción (1i) por el método del balance integral calórico y por el método de las super y sub-soluciones.

## II. EL METODO DEL BALANCE INTEGRAL CALORICO APLICADO A LA ECUACION DEL CALOR CON ABSORCION (I-1)

Se considera un problema relacionado a (1) el cual consiste en encontrar la función  $C=C(x,t)$  y la frontera libre  $x=s(t)$  de manera que se satisfagan las condiciones siguientes :

- i)  $C_t - C_{xx} + \lambda^2 C^p = 0$  ,  $0 < x < s(t)$  ,  $t > 0$  ,
- ii)  $C(0,t)=1$  ,  $t > 0$  ,
- (1) iii)  $s(0)=0$  ,
- iv)  $C(s(t),t) = 0$  ,  $t > 0$  ,
- v)  $C_x(s(t),t) = 0$  ,  $t > 0$  .

Teniendo en cuenta el método del balance integral calórico, se reemplaza la ecuación (1i) por su integral en la variable  $x$  de 0 a  $s(t)$ , es decir

$$(2) \quad -\lambda^2 \int_0^{s(t)} C^p(x,t) dx = \int_0^{s(t)} C_t(x,t) dx - \int_0^{s(t)} C_{xx}(x,t) dx = \\ = \int_0^{s(t)} C'_t(x,t) dx + C_x(0,t) , \quad t > 0 ,$$

y luego se propone para el problema aproximado (2) (1ii-v) la siguiente expresión

para  $C$  [Go1, Go2] :

$$(3) \quad C(x,t) = \left(1 - \frac{x}{s(t)}\right)^\alpha$$

donde  $x = s(t)$  es una función a ser determinada y  $\alpha > 1$  es un parámetro a ser elegido de manera de verificarse la propiedad

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{l(p)}{\lambda}.$$

Esta es la presente innovación al método del balance integral calórico aplicado a problemas con cambio de fase [Go1,Go2].

La función  $C$  satisface las condiciones (ii,iv,v). Si se pone la expresión (3) en (2), se obtiene para  $s = s(t)$  una ecuación diferencial ordinaria, es decir el siguiente problema de Cauchy :

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= \alpha(\alpha+1) \left[ \frac{1}{y(t)} - \frac{\lambda^2}{\alpha(1+p\alpha)} y(t) \right], \quad t > 0, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$(6) \quad s(t) = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \exp(-2\alpha(\alpha+1)\beta^2 t) \right]^{1/2}, \quad t \geq 0,$$

con

$$(7) \quad \beta^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha(1+p\alpha)}.$$

Si se elige  $\alpha > 1$ , imponiendo la condición límite (4), se obtiene que

$$(8) \quad \beta = \frac{\lambda}{l(p)},$$

la cual resulta ser una ecuación para  $\alpha > 1$ , cuya solución está dada por

$$(9) \quad \alpha - \alpha(p) = 1 - \frac{2}{p} > 2,$$

que es el mismo exponente de la solución estacionaria (1-2) y que es independiente del parámetro  $\lambda$ . A continuación se resumirá el reciente resultado [Ta2] :

**TEOREMA 1.** Sean  $p \in (0,1)$  y  $\lambda > 0$ . Si se aplica el método del balance integral calórico al problema (1), es decir al problema definido por (2) y (1ii-v), con la propiedad de innovación (4), se obtiene la solución  $C_B = C_B(x,t)$  y  $s_B = s_B(t)$  que están dadas respectivamente por (3) con (9) y

$$(10) \quad s_B(t) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\lambda^2(3-p)t}{1+p}\right) \right]^{1/2}, \quad t \geq 0.$$

Se pueden definir las siguientes funciones :

$$(11) \quad u_1(x,t) = \left[ 1 - \frac{x}{s_1(t)} \right]_+^{\frac{2}{1-p}}, \quad x \geq 0, \quad t > 0,$$

$$(12) \quad s_1(t) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\lambda t}{1}\right) \right], \quad t \geq 0.$$

Si se considera el problema de conducción del calor con absorción (1-1), se obtiene :

**TEOREMA 2.** Sean  $0 < p < 1$ ,  $\lambda > 0$  y  $0 \leq U_0 < u_\infty$  en  $\mathbb{R}^+$ . Si  $u = u(x,t)$  es la solución de (1-1) y  $s = s(t)$  está definida por (1-4), entonces se tienen las siguientes propiedades de comparación :

$$(13) \quad u_1(x,t) \leq u(x,t) \leq u_\infty(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\lambda}, \quad t > 0,$$

$$(14) \quad s_1(t) \leq s(t) \leq \frac{1}{\lambda}, \quad t \geq 0,$$

y las siguientes estimaciones

$$(15) \quad 0 < \frac{1}{\lambda} - s(t) \leq \frac{1}{\lambda} - s_1(t) \leq \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{2\lambda t}{1}\right), \quad t \geq 0,$$

$$(16) \quad 0 \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x) - u^{\frac{1-p}{2}}(x,t) < u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x) - u_1^{\frac{1-p}{2}}(x,t) < \frac{\exp\left(-\frac{2\lambda t}{1}\right)}{\exp\left(-\frac{2\lambda t}{1}\right)},$$

$$x \in [0, \frac{1}{\lambda}], \quad t > 0.$$

**Demostración.** Para probar (13) es suficiente verificar que  $I(u_1) < 0$  debido al principio de comparación del operador  $I$  [3c]. Tomando en cuenta las propiedades

$$(17) \quad \left(1 - \frac{x}{s}\right) \frac{x}{s} < \frac{1}{4}, \quad \forall x \in [0, s],$$

$$(18) \quad \frac{\dot{s}_1(t)}{s_1(t)} - 2 \left[ \frac{1}{s_1(t)} - \lambda \right], \quad t > 0,$$

se obtiene que

$$(19) \quad L(u_1) \leq 1 - \frac{x}{s_1(t)} + \frac{2p}{1-p} \left( \frac{1}{s_1(t)} - \lambda \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{2(1+p)}} - \lambda \right] < 0, \quad \text{para } \lambda > \frac{1}{\sqrt{2(1+p)}}.$$

Debido al hecho que

$$(20) \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2(1+p)}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \quad 0 < p < 1,$$

y a la propiedad de dilatación siguiente

$$(21) \quad v_\lambda(x, t) = v_1(\lambda x, \lambda^2 t),$$

donde  $v_\lambda$  y  $v_1$  denotan las soluciones de (I-1) para  $\lambda > 0$  y  $\lambda = 1$  respectivamente, se deduce que  $L(u_1) \leq 0$  para todo  $\lambda > 0$ . Entonces,  $u_1$  es una sub-solución de (I-1) y se obtiene por lo tanto (13) y (14). Luego, las estimaciones (15) y (16) siguen de las expresiones de  $u_1$  y  $s_1$ .

**COROLARIO 3.** El Teorema 2 implica que la solución  $u$  del problema (I-1) converge uniformemente y exponencialmente a la solución  $u_\infty$  cuando el tiempo  $t$  tiende al infinito. Además, la razón de convergencia es más rápida que  $2\lambda/l$ .

**OBSERVACION 1.** Se probará luego que la función  $s_B = s_B(t)$  es mejor que  $s_1 = s_1(t)$  para aproximar a la frontera libre  $s = s(t)$ .

### III. SUPER Y SUB-SOLUCIONES PARA LA ECUACION DE MEDIOS POROSOS CON ABSORCION (I-5)

A continuación se considerará la ecuación de medios porosos con absorción (I-5) [RiTal].



**TEOREMA 4.** Si  $m + p < 2$ , entonces las funciones

$$(1) \quad \bar{u}(x, t) = \left[ 1 - \frac{x}{\bar{s}(t)} \right]_+^{\frac{2}{m+p}}, \quad (2) \quad u(x, t) = \left[ 1 - \frac{x}{s(t)} \right]_+^{\frac{2}{m+p}},$$

son respectivamente una super-solución y una sub-solución de (1-5) cuando las funciones  $\bar{s}(t)$  y  $s(t)$  están definidas por  $\bar{s}(t) = r(t)$  si  $L_0 > L$  y  $s(t) = r(t)$  si  $0 \leq L_0 < L$ , donde

$$(3) \quad r(t) = \sqrt{L^2 + (L_0^2 - L^2) \exp[-\beta(m+p)t]},$$

estando la constante  $\beta$  dada por

$$(4) \quad \beta = \frac{(1+\gamma)^{(1+\gamma)}}{\gamma^\gamma}, \quad \gamma = \frac{2-(m+p)}{m+p}, \quad \text{si } \gamma > 0; \quad \beta = 1 \quad \text{si } \gamma = 0.$$

Demostración. Se define la siguiente función

$$(5) \quad h(x, t) = \left[ 1 - \frac{x}{\rho(t)} \right]_+^{\frac{2}{m+p}},$$

y se calcula  $\mathcal{L}(h)$ , obteniéndose

$$(6) \quad \mathcal{L}(h) = \left[ 1 - \frac{x}{\rho(t)} \right]_+^{\frac{2p}{m+p}} \frac{1}{\rho^2(t)} \left\{ \frac{2}{m+p} x \left[ 1 - \frac{x}{\rho(t)} \right]_+^{\frac{2-(m+p)}{m+p}} \rho'(t) + \rho^2(t) - L^2 \right\}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$(7) \quad x \left[ 1 - \frac{x}{\rho(t)} \right]_+^{\frac{2-(m+p)}{m+p}} \leq \frac{\rho(t)}{\beta}, \quad x \in [0, \rho(t)].$$

Entonces, se obtiene para  $\mathcal{L}(h)$  una cota inferior si  $\rho'$  es negativa y una cota superior si  $\rho'$  es positiva. Si se supone que  $\rho' < 0$ , entonces se tiene

$$(8) \quad \mathcal{L}(h) \geq \left[ 1 - \frac{x}{\rho(t)} \right]_+^{\frac{2m}{m+p}} \frac{1}{\rho^2(t)} \left\{ \frac{2}{m+p} \frac{\rho(t)}{\beta} \rho'(t) + \rho^2(t) - L^2 \right\} = 0,$$

donde  $\rho = \rho(t)$  es la solución del siguiente problema de Cauchy

$$(9) \quad \frac{2}{m+p} \frac{\rho(t)}{\beta} \rho'(t) + \rho^2(t) - L^2 = 0, \quad \rho(0) = L_0 > L.$$

La solución de (9) está dada por (3), y además satisface que  $r' < 0$ . Entonces, se puede concluir que la función  $h(x,t)$ , definida por (5), es una super-solución del operador  $\mathcal{L}$ . Con una metodología similar, se obtiene una sub-solución si se toma la condición inicial para (9) de manera que se tenga que  $U_0 < L$ .

Si se aplica el principio de comparación para el operador  $\mathcal{L}$  [Be] entonces se obtiene el siguiente resultado :

**COROLARIO 5** . Si se supone que  $m + p \leq 2$  y que existe una constante  $\Lambda$  de manera que el dato inicial verifique la condición

$$(10) \quad 0 \leq U_0(x) \leq \left[ 1 - \frac{x}{\Lambda} \right]_+^{\frac{2}{m-p}},$$

entonces la solución del problema (1-5) converge exponencialmente a la solución estacionaria  $u^*(x)$ .

**OBSERVACION 2**. La razón de convergencia es mas rápida que  $\beta(m-p)$  debido a que la diferencia entre la super y la sub-solución, que acotan la solución, es del tipo  $\text{Const. exp}[-\beta(m-p)t]$ .

**OBSERVACION 3**. Estos resultados pueden ser utilizados para el problema del corazón muerto [St], para probar que la solución del problema  $u_t - u_{xx} + u^p = 0$ ,  $0 < x < \Lambda$ ,  $t > 0$ , ( $\Lambda > 2L$ ), con la condición de borde  $u(0,t) = u(\Lambda,t) = 1$ ,  $t > 0$ , y con la condición inicial  $u(x,0) = 1$  en  $0 < x < \Lambda$ , converge exponencialmente a la solución estacionaria [RiTa2].

**OBSERVACION 4**. Estos resultados se generalizan para la ecuación  $u_t - (\phi(u))_{xx} + f(u) = 0$ , con apropiadas condiciones sobre las funciones  $\phi$  y  $f$  en [RiTa2].

#### IV. RELACIONES ENTRE LAS DIVERSAS SOLUCIONES .

De ahora en adelante se considerará, sin pérdida de generalidad, el caso  $\lambda = -1$ ,  $0 < p < 1$  y  $0 < U_0 \leq u_\infty$  en  $\mathbb{R}^+$  en el problema (1-1). Los resultados obtenidos

anteriormente están dados por las desigualdades siguientes

$$(1) \quad s_0(t) \leq s(t) \leq 1, \quad t > 0, \quad (1 - l(p) = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p})$$

$$(2) \quad u_0(x,t) \leq u(x,t) \leq u_\infty(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0,$$

donde las funciones  $s_0$  y  $u_0$  vienen dadas por (se toma  $l_0 = 0$  y  $m = 1$ ):

$$(3) \quad s_0(t) = 1 [1 - \exp(-c_0 t)]^{1/2}, \quad t \geq 0, \quad c_0 = c_0(p) = 4(1-p),$$

$$(4) \quad u_0(x,t) = [1 - \frac{x}{s_0(t)}]_+^{i \frac{2}{1-p}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0,$$

Si se consideran las funciones  $C_B$  y  $s_B$ , dadas por el Teorema 1:

$$(5) \quad C_B(x,t) = [1 - \frac{x}{s_B(t)}]_+^{i \frac{2}{1-p}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad c_B = c_B(p) = \frac{2(3-p)}{1+p},$$

$$(6) \quad s_B(t) = 1 [1 - \exp(-c_B t)]^{1/2}, \quad t > 0,$$

y las funciones  $u_1$  y  $s_1$ , dadas respectivamente por (II-9) y

$$(7) \quad s_1(t) = 1 [1 - \exp(-c_1 t)]^{1/2}, \quad t \geq 0, \quad c_1 = c_1(p) = \frac{2}{1-p} - (1-p) \sqrt{\frac{2}{1-p}},$$

entonces se obtienen propiedades de comparación entre ellas [Ta2].

**TEOREMA 6.** Bajo las hipótesis y definiciones anteriores, se tienen las siguientes relaciones:

A) Relación entre  $u_0$ ,  $s_0$  y  $C_B$ ,  $s_B$ :

$$(8) \quad s_0(t) < s_B(t) < 1, \quad t > 0,$$

$$(9) \quad u_0(x,t) \leq C_B(x,t) \leq u_\infty(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0.$$

B) Relación entre  $u_1$ ,  $s_1$  y  $C_B$ ,  $s_B$ :

$$(10) \quad s_1(t) < s_B(t), \quad t > 0,$$

$$(11) \quad u_1(x,t) \leq C_B(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0.$$

C) Relación entre  $u_0$ ,  $s_0$  y  $u_1$ ,  $s_1$  :

$$(12) \quad s_1(t) < s_0(t) \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

$$(13) \quad u_1(x,t) \leq u_0(x,t) \quad , \quad 0 \leq x < 1 \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Demostración. A) Se deduce que

$$(14) \quad \frac{s_0^2(t) - s_B^2(t)}{l^2(p)} = - \exp(-c_0 t) [1 - \exp(- (c_B - c_0)t)] < 0 \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

debido a que la función

$$(15) \quad g(x) = \frac{c_0(x)}{c_B(x)} = 2 \frac{(1-x)^2}{3-x} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad ,$$

verifica las siguientes propiedades :

$$g(0) = \frac{2}{3} \quad , \quad g(1) = 0 \quad ,$$

$$(16) \quad g'(x) = \frac{2(x^2 - 6x + 1)}{(3-x)^2} \quad , \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 - 2\sqrt{2} \in (0,1) \quad ,$$

$$g(x) \leq g(3 - 2\sqrt{2}) = 12 - 8\sqrt{2} \approx 0,686 < 1 \quad , \quad 0 \leq x < 1 \quad .$$

Por lo tanto, se tienen (8) y (9).

B) Se define la función  $G = G(p,t)$ , dada por ( $p$  es un parámetro en  $s_B$  y  $s_1$ ) :

$$(17) \quad G(p,t) = \frac{s_B(t)}{s_1(t)} = \frac{\sqrt{1 - \exp(-c_B(p)t)}}{1 - \exp(-c_1(p)t)} \quad , \quad 0 < p < 1 \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Se tiene que  $c_1 < c_B$ , debido al hecho siguiente

$$(18) \quad c_1^2(x) - c_B^2(x) = \frac{2}{(1+x)^2} Q(x) < 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad ,$$

donde

$$(19) \quad Q(x) = x^3 - 3x^2 + 11x - 17 < 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad .$$

La función  $G$  verifica las siguientes propiedades :

$$G(p, 0^+) = +\infty, \quad G(p, +\infty) = 1, \quad 0 < p < 1,$$

$$(20) \quad G_t(p, t) = \frac{1}{2} c_B c_1 \frac{\exp(-c_B t) + \exp(-c_1 t)}{[1 - \exp(-c_1 t)]^2 \sqrt{1 - \exp(-c_B t)}} = |h(c_1, t) - h(c_2, t)| < 0,$$

$$0 < p < 1, \quad t > 0$$

donde la función  $h = h(c, t)$  está definida por :

$$(21) \quad h(c, t) = \frac{\exp(c t) - 1}{c}, \quad c > 0, \quad t > 0,$$

que satisface las condiciones

$$(22) \quad h(0^+, t) = t, \quad h(+\infty, t) = +\infty, \quad t > 0,$$

$$h_c(c, t) = \frac{1 + W(c, t)}{c^2} > 0, \quad c > 0, \quad t > 0,$$

con

$$(23) \quad W(c, t) = (c t - 1) \exp(c t) > -1, \quad c > 0, \quad t > 0.$$

Por lo tanto se obtiene que  $G(p, t) > 1, 0 < p < 1, t > 0$  y por ende (10) y (11).

(C) Siguiendo un método similar al desarrollado anteriormente, se obtiene que

$$(24) \quad \frac{s_0(t)}{s_1(t)} = \frac{\sqrt{1 - \exp(-c_0(p) t)}}{1 - \exp(-c_1(p) t)} > 1, \quad 0 < p < 1, \quad t > 0,$$

debido a que se tiene

$$(25) \quad c_0^2(x) - c_1^2(x) = 2(1-x)^2 \frac{7 + 8x}{1+x} > 0, \quad 0 < x < 1,$$

es decir (12) y (13).

**COROLLARY 7.** Para todo  $0 < p < 1$ , se obtienen las siguientes estimaciones :

$$(26) \quad s_1(t) < s_0(t) \leq s(t) \leq 1, \quad t > 0,$$

$$(27) \quad s_1(t) < s_0(t) < s_B(t) < 1, \quad t > 0,$$

y por ende

$$(28) \quad |s(t) - s_B(t)| \leq |s_0(t) - s_1(t)| \leq \exp\left(-\frac{2}{l}t\right), \quad t > 0.$$

OBSERVACION 6. La expresión  $s_0$  fue obtenida construyendo una sub-solución para el problema (I-1) ( $\lambda = 1$ ), y en cambio  $s_B$  fue obtenida calculando la solución de un problema aproximado (II-2) y (I-iii-v) al problema (I-1) a través del método del balance integral calórico. Ambas expresiones,  $s_0$  y  $s_B$ , dan un comportamiento asintótico exponencial para la solución del problema de conducción del calor con absorción (I-1), pero hasta el presente no se puede decir quien es la mejor estimación. Para valores del tiempo grandes, ambas expresiones son equivalentes pues se tiene que

$$(29) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s_B(t)}{s_1(t)} = 1, \quad 0 < p < 1.$$

COROLARIO 8. Se tienen también las estimaciones

$$(30) \quad u_1(x,t) \leq u_0(x,t) \leq u(x,t) \leq u_\infty(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$(31) \quad u_1(x,t) \leq u_0(x,t) < C_B(x,t) \leq u_\infty(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0,$$

y por ende :

$$(32) \quad \left| u^{\frac{1-p}{2}}(x,t) - C_B^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \right| \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x,t) - u_1^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x,t) - u_1^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq \exp\left(-\frac{2}{l}t\right), \quad 0 < x < s_1(t), \quad t > 0.$$

## REFERENCIAS

[BSS] C. BANDLE R.P. SPERB I. STAKGOLD, "Diffusion and reaction with monotone kinetics", *Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl.*, 8(1984), 321--333.

[Be] M. BERTSCH, "A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term", *Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl.*, 7(1983), 117--127.

[Di] J.I. DIAZ, "Nonlinear partial differential equation and free boundaries, I: Elliptic problems", *Research Notes in Math. N° 106*, Pitman, London (1985).

[Ga] G.G. GARGUICHEVICI, "A note on the heat balance integral method applied to the resolution of a one-phase Stefan problem with an increasing prescribed flux on the fixed face", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 10(1983), 349--355.

[GST] G.G. GARGUICHEVICH -- M.C. SANZIEL -- D.A. TARZIA, "Comparison of approximate methods for the determination of thermal coefficients through a phase-change problem", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 12(1985), 451--464.

[Go1] T.R. GOODMAN, "The heat balance integral and its application to problems involving a change of phase", *Trans. of the ASME*, 80(1958), 335--342.

[Go2] T.R. GOODMAN, "Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer", *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York (1964), Vol. 1, 51--122.

[RiTa1] R. RICCI -- D.A. TARZIA, "Asymptotic behavior of the solutions of a class of diffusion-reaction equations", in *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, 11-20 June 1987, Irsee/Bavaria, Germany, To appear on *Research Notes in Math.*, Pitman, London.

[RiTa2] R. RICCI -- D.A. TARZIA, "Asymptotic behavior of the solution of the dead-core problems", *Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl.*, 13 (1989), 405--411.

[St] I. STAKGOLD, "Reaction-diffusion problems in chemical engineering", in

Nonlinear diffusion problems, A. Fasano--M. Primicerio (Eds.), Lecture Notes in Math. N° 1224, Springer Verlag, Berlin (1986), 119--152.

[Ta1] D.A. TARZIA, "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem", Progetto Nazionale M.P.I. "Equazioni di evoluzione e applicazioni fisico-matematiche", Firenze (1988) (with 2528 titles),(103 pages).

[Ta2] D.A. TARZIA, "A variant of the heat balance integral method and a new proof of the exponentially fast asymptotic behavior of the solutions in heat conduction problems with absorption", Int. J. Engineering Science.

[Vo] V.R. VOLLER, "A heat balance integral method based on an enthalpy formulation", Int. J. Heat Mass Transfer, 30 (1987), 604--607.

PROMAR (CONICET--UNR),  
Instituto de Matemática "Deppo Levi",  
Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agr.,  
Avda. Pellegrini 250,  
2000 Rosario, Argentina.



# DIFUSION DE UN SOLVENTE EN UN POLIMERO NO HOMOGENEO.

Cristina V. Turner

## 1. INTRODUCCION.

El transporte de solventes a través de polímeros vídriosos amorfos puede presentar diversos comportamientos.

El hecho más interesante de este fenómeno se observa cuando la actividad del penetrante (solvente) excede un cierto umbral, el cual para un dado par solvente-polímero depende esencialmente de la temperatura.

La penetración ocurre en forma masiva y el proceso tiene las siguientes características :

a) Una marcada discontinuidad morfológica aparece en el polímero, separando una región vídriosa, donde la concentración de solvente es muy pequeña, de una región gomosa (gel) con una alta concentración de solvente.

b) Esta discontinuidad se mueve a través del polímero con una velocidad que es aproximadamente constante respecto al tiempo durante la primera etapa de la penetración.

c) La cantidad de solvente absorbido es inicialmente lineal respecto al tiempo.

Los ingenieros químicos denominan a este tipo de comportamiento, caso de transporte II. Un modelo matemático para este caso de transporte II fue propuesto por G. Astarita y G.C. Sarti en 1978 [2] . Este modelo difiere de los anteriores debido a la presencia de una frontera libre.

La descripción de este modelo para el caso unidimensional es la siguiente: Una barra semi-infinita de polímero, inicialmente en la fase vídriosa, ocupa el semiespacio  $x > 0$  . Por el momento se supone que el polímero no se hincha con el solvente y se considera que  $x = 0$  es la cara fija del material. En esta cara se impone una condición de contorno para la concentración de solvente  $C$ , para todo  $t > 0$  .

Si  $C(0,t)$  excede el umbral  $C^*$  en una cantidad finita, se observará el caso de transporte II.

La hipótesis fundamental de este modelo es que la transición morfológica tiene lugar sobre la

frontera libre  $x = s(t)$ , la cual a priori es desconocida. El gel ocupa la región  $0 < x < s(t)$ , donde el solvente difunde de acuerdo con la ley de Fick :

$$(1.1) \quad DC_{xx} = C_t, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0.$$

En la región vidriosa,  $x > s(t)$ , la concentración del solvente se considera nula, por lo tanto el problema a resolver es un problema de frontera libre a una fase.

Resta imponer dos condiciones sobre la frontera libre, la primera es la conservación de la masa:

$$(1.2) \quad -D C_x(s(t),t) = C(s(t),t) \dot{s}(t), \quad t > 0.$$

En cuanto a la segunda condición, asumir que la concentración sea continua sobre la frontera libre, i.e.  $C(s(t),t) = 0$  sería inconsistente con el resto del esquema, por otro lado imponer la condición que la concentración  $C(s(t),t)$  sea igual al valor umbral  $C^*$  lleva a un problema de tipo Stefan, contrariando el comportamiento de la frontera libre descrito en b).

Entonces la ley propuesta para la penetración dinámica es :

$$(1.3) \quad \dot{s}(t) = k (C(s(t),t) - C^*)^m,$$

donde  $k$  y  $m$  son constantes positivas. Esta ley empírica concuerda con el hecho de que la velocidad de penetración aumenta con el aumento del exceso de concentración.

Se puede ver que la solución de la frontera libre con la condición (1.2) y el dato inicial :

$$s(0) = 0$$

satisfacen las hipótesis b) y c).

En lo que sigue se describe la teoría desarrollada en [4] para el modelo recién descrito.

La concentración de solvente en la frontera  $x = 0$  se considera constante y que excede el umbral de concentración.

Usando variables adimensionalizadas el problema a resolver es el siguiente :

Problema P

Encontrar  $(s,C)$  tal que  $s \in C^1[0,T]$  para algún  $T > 0$ ,  $C \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$ ,

$D_T = \{ (x,t) / 0 < x < s(t), 0 < t < T \}$ ,  $C$  continua hasta  $x = s(t)$  y tal que :

$$(2.1) \quad C_{xx} - C_t = 0 \text{ en } D_T,$$

$$(2.2) \quad s(0) = 0,$$

$$(2.3) \quad C(0,t) = 1 \quad , \quad 0 < t < T ,$$

$$(2.4) \quad \dot{s}(t) = f(C(s(t),t)) \quad , \quad 0 < t < T \quad ,$$

$$(2.5) \quad C_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) ( C(s(t),t) + q ) \quad , \quad 0 < t < T .$$

$C(x,t)$  representa el exceso (normalizado) de concentración y  $q$  es una constante positiva relativa al umbral de concentración.

La condición (2.4) es una generalización de la condición (1.3) y la función  $f$  satisface las siguientes hipótesis :

$$f \in C^2(0,1] \cap C[0,1] \quad , \quad f'(C) > 0 \quad , \quad C \in (0,1] \quad , \quad f(0) = 0 .$$

Los principales resultados obtenidos en [4] son:

**Teorema 1.**

El problema (P) admite solución única global (  $T = + \infty$  ) con  $s \in C^2[0,\infty)$  ,  $\dot{s}$  es Hölder continua para  $t > 0$  y  $\dot{s}(t) < 0$  para  $t > 0$  .

**Teorema 2.**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = +\infty \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0 . \quad \text{Más aún, si } q > 0 \quad , \quad \text{luego}$$

$$s(t) \leq \sqrt{\frac{2t}{q}} \quad , \quad \text{si } t \rightarrow \infty .$$

$$\text{Si } q \geq 0 \quad , \quad \text{entonces } s(t) > \sqrt{\frac{2}{q + \frac{1}{3}}} \sqrt{t} ( 1 - \epsilon^2(t) ) \quad \text{donde } \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon^2(t) = 0 .$$

Se pueden obtener algunos resultados más sobre el mismo modelo, si se imponen otras condiciones de contorno sobre la frontera exterior :([1], [3], [6], [10]) .

**Observación:**

El proceso de penetración de solvente en polímeros es esencialmente isotérmico y mucho más lento que el de conducción de calor. Sin embargo, en muchas aplicaciones se puede presentar un gradiente de temperatura en el polímero que dependa del tiempo; ya que la temperatura afecta al umbral de concentración  $C^*$ , se puede tener en cuenta una distribución de temperatura ,generalizando la ley de penetración (2.4), i.e. haciendo depender a la función  $f$  del espacio y del tiempo.

En este capítulo el interés radica en el caso de una barra no-homogénea de polímero cuyas propiedades mecánicas dependen de una variable espacial, en este caso la ley de penetración es generalizada a  $v = f(c,x)$  , donde  $x$  representa a la variable espacial (ver [9]). Llamando  $c(x,t)$  a la

concentración de solvente normalizada y  $x = s(t)$  a la ubicación del frente en la barra

(luego  $0 \leq x < s(t)$  es la región penetrada en el tiempo  $t$ ), el problema matemático que resulta puede ser enunciado como sigue :

**Problema P**

Encontrar un triplete  $(T,s,c)$  tal que  $T > 0$ ,  $s \in C^1[0,T]$ ,  $c \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$ , donde  $D_T = \{ (x,t) / 0 < x < s(t), 0 < t < T \}$  y que satisfaga :

$$(1.1) \quad c_{xx} - c_t = 0 \text{ en } D_T,$$

$$(1.2) \quad s(0) = 0,$$

$$(1.3) \quad c(0,t) = c_0, \quad 0 < t < T,$$

$$(1.4) \quad \dot{s}(t) = f(c(s(t),t),s(t)), \quad 0 < t < T,$$

$$(1.5) \quad c_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) c(s(t),t), \quad 0 < t < T.$$

La función  $f$  satisface las siguientes hipótesis :

Fi)  $f \in C(\mathfrak{R}^2)$ ,

Fii) Existe una función continua no negativa  $C^*(x)$  tal que  $f(c,x) > 0$  en  $E = \{ (c,x) / c > C^*(x), x \geq 0 \}$  y  $f(C^*(x),x) = 0$ ,

Fiii) para  $x > 0$  existen dos funciones continuas  $L(x)$  y  $\epsilon(x) > 0$  tal que :  $C^*(x) - C^*(x - h) \leq L(x) h$ , para todo  $h \in (0,\epsilon(x))$ ,

Fiv)  $f_c, f_x$  existen y son Lipschitz continuas en  $E$ ,

Fv)  $f_c(c,x) > 0$  para todo  $(c,x) \in E$ .

Aquí  $C^*$  representa el umbral de concentración para el proceso de penetración. La función  $f$ , da la velocidad de penetración del salto en la concentración como una función creciente de la cantidad del salto mismo, (Fv). De acuerdo con el esquema físico del proceso,  $f$  se anula cuando la concentración se iguala al umbral. Luego que  $(c(s(t),t),s(t)) \in E$  implica que la frontera libre puede moverse hacia la zona vidriosa. Se prueba que esta condición es siempre satisfecha bajo las hipótesis hechas antes.

La hipótesis más obvia es que  $c_0$ , i.e. el valor (normalizado) de la concentración sobre la frontera fija, el cual se considera constante, satisface la condición  $c_0 > C^*(0)$ , i.e., la concentración sobre la frontera fija excede el umbral de concentración y por lo tanto la penetración del solvente puede empezar.

Las condiciones Fiii) y Fiv) son hipótesis técnicas, en parte la condición Fiii) es una especie de condición de Lipchitz para la función  $c^*$ .

De las hipótesis (F) se sigue que existe una función  $\phi \in C(\bar{f}(E) \times \mathbb{R}^+)$  tal que  $\phi(f(c,x),x) = c$  para  $x > 0$  y  $c > c^*(x)$  más aún se satisface :

$$\phi i) \phi \in C^1(G), G = f(E) \times \mathbb{R}^+;$$

$$\phi ii) \phi > 0, \text{ en } G,$$

$$\phi iii) \phi(\eta,x) > c^*(x), \eta > 0, x \geq 0,$$

$$\phi iv) \phi_\eta(\eta,x) > 0 \text{ en } G.$$

Se puede usar la función  $\phi$  para reescribir la ley de penetración (1.4) en una forma equivalente

$$(1.4') \quad c(s(t),t) = \phi(\dot{s}(t),s(t)), \quad 0 < t < T.$$

En las secciones siguientes se prueba la existencia y la unicidad para la solución del problema (P) para todo  $T > 0$ , la dependencia continua de la solución respecto al dato  $f$  y se analiza el comportamiento asintótico de la frontera libre.

## 2. PROBLEMA AUXILIAR.

En esta sección se considera que la frontera móvil es conocida como una función del tiempo,  $x = r(t)$  y se estudia el problema de difusión del solvente en la barra  $0 \leq x < r(t)$ .

Se supone  $r \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$ , para un valor fijo  $T$ , más aún se considera :

$$(2.1) \quad r(0) = 0;$$

$$(2.2) \quad \dot{r}(0) = f(c_0,0);$$

$$(2.3) \quad |\ddot{r}(t)| \leq k, \quad 0 < t < T;$$

donde  $k$  es una constante positiva.

El problema de difusión que se tiene que resolver es el siguiente : Encontrar una función  $c \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $D = \{(x,t) / 0 < x < r(t), 0 < t < T\}$  con  $c_x$  continua hasta la frontera  $x = r(t)$  y tal que :

$$(2.4) \quad c_{xx} - c_t = 0 \text{ en } D,$$

$$(2.5) \quad c(0,t) = c_0, \quad 0 < t < T,$$

$$(2.6) \quad c_x(r(t),t) = -\dot{r}(t) \phi(\dot{r}(t),r(t)), \quad 0 \leq t < T.$$

Aquí la condición (2.6) semeja a la condición (1.5), expresada en términos de la función  $r$  solamente, i.e. substituyendo el valor de la función  $\phi$  por el valor de la concentración sobre el contorno.

La existencia y la unicidad para el problema (2.4)-(2.6) ha sido probado en [5]. Aquí se dan algunas estimaciones de la solución y sus derivadas.

Comencemos notando que la función  $c^*$  es continua y  $(c_0, 0) \in E$ , luego se puede encontrar dos constantes positivas  $\delta$  y  $x_1$  tales que:  $\overline{E(\delta, x_1)} \subset E$ , donde  $E(\delta, x_1) = \left\{ (c, x) / c_0 - \delta < c < c_0 + \delta, 0 < x < x_1 \right\}$ .

Si definimos  $A(t) = \left\{ (x, \eta) / 0 < x < V_0 t + \frac{1}{2} k t^2, V_0 - k t < \eta < V_0 + k t \right\}$  donde  $V_0 = f(c_0, 0)$ .

De la inecuación (2.3) se obtiene:

$$(2.7) \quad (r(t), \dot{r}(t)) \in A(t) \subset A(\bar{t}), \quad 0 < t < \bar{t} < \frac{V_0}{k}.$$

Luego para todo  $t < \bar{T}$ , se tienen las siguientes estimaciones:

$$(2.8) \quad 0 \leq c_0 - \delta \leq \phi(\dot{r}(t), r(t)) \leq c_0 + \delta$$

$$(2.9) \quad -(V_0 + kt)(c_0 + \delta) \leq c_x(x, t) \leq 0, \quad 0 < x < r(t), \quad 0 < t < \bar{T}.$$

La última inecuación, junto con la condición (2.5), dan una estimación para la solución  $c$ :

$$(2.10) \quad c_0 - (V_0 + kt)(c_0 + \delta)(V_0 t + \frac{1}{2} k t^2) \leq c(x, t) \leq c_0,$$

$$0 < x < r(t), \quad 0 < t < \bar{T}.$$

Finalmente se puede dar una simple estimación, uniforme con respecto a la función  $r$ , restringiendo  $\bar{T}$ .

$$(2.11) \quad c_0 - \delta \leq c(x, t) \leq c_0 \leq c_0 + \delta, \quad 0 < x < r(t), \quad 0 < t < \bar{T}.$$

#### Nota 2.1

Una vez elegido  $\delta$  y  $x_1$  independientemente de la función  $r$  en la clase especificada por las condiciones (2.1)-(2.3), el valor de  $\bar{T}$  depende en forma simple de  $k$ . En particular es siempre positivo para cualquier  $k$  finito.

Bajo las hipótesis (2.1)-(2.3) se cumple que:

$$c \in C^{2,1}(\bar{D}), \quad c_{xt} \in C(\bar{D} \setminus (0,0))$$

y además

$$(2.12) \quad \begin{aligned} |c_t(x,t)| &\leq M_1(k) \left( 1 + \sup_{(0,T)} \dot{r} / \inf_{(0,T)} \dot{r} \right) \sup_{(0,T)} r(t) \leq \\ &\leq M_1(k) 5 V_0 t \leq L_1, \quad t \leq \bar{T}, \end{aligned}$$

donde  $L_1$  no depende de  $k$ , siempre que  $\bar{T}$  sea menor que  $\frac{V_0}{2k}$ .

La inecuación (2.12) permite comparar dos soluciones  $c_1$  y  $c_2$  correspondientes a dos fronteras diferentes  $x = r_1(t)$  y  $x = r_2(t)$ . En efecto resulta

$$(2.13) \quad |c_1(r_1(t),t) - c_2(r_2(t),t)| \leq L_2 t \|r_1(t) - r_2(t)\|_{C^1([0,T])},$$

donde nuevamente la constante  $L_2$  no depende de  $k$  si  $\bar{T} \leq \frac{V_0}{2k}$ . La demostración es similar a la hecha para el caso homogéneo.

### 3. EXISTENCIA LOCAL Y UNICIDAD.

En esta sección se prueba la existencia local de la solución usando un argumento de punto fijo. Primero se define un apropiado espacio funcional. Para este propósito sea  $\alpha$  una constante tal que  $0 < \alpha < 1$  y sea  $\gamma(t)$  una función positiva no decreciente definida para todo  $t > 0$ , posiblemente divergente cuando  $t \rightarrow 0$ .

Sean  $k$  y  $T$  dos constantes positivas.

Se nota con  $\mathfrak{X}(k,T,\gamma,\alpha)$  el conjunto de funciones  $r(t)$  que satisfacen :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} r \in C^1([0,T]) \cap C^2((0,T)), \quad r(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = f(c_0, 0), \quad |\ddot{r}(t)| \leq k, \\ 0 < t < T, \quad y \quad |\ddot{r}(t_1) - \ddot{r}(t_2)| \leq \gamma(\tau) (t_2 - t_1)^{\alpha/2}, \quad 0 < \tau < t_1 < t_2 \leq T. \end{aligned}$$

El conjunto  $\mathfrak{X}(k,T,\gamma,\alpha)$  es un conjunto cerrado de  $C^1([0,T])$  con respecto a la norma  $C^1$ . Ver el apéndice al final del capítulo.

Se define el operador  $\mathcal{T}$  sobre  $\mathfrak{X}$  de la siguiente manera : para cada  $r \in \mathfrak{X}$  sea  $c(x,t)$  la solución correspondiente a (2.4)-(2.6) y sea  $\bar{r}$  definida por :

$$(3.2) \quad \bar{r}(t) = \int_0^t f(c(r(\tau,\tau),r(\tau))) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

entonces  $\mathcal{T}$  verifica  $\mathcal{T}(r) = \bar{r}$ .

Se quiere probar que con una adecuada elección de  $\alpha$ ,  $k$ ,  $T$  y de la función  $\gamma$ ,  $\mathcal{T}$  lleva el conjunto  $\mathfrak{X}$  en si mismo y que es una contracción. Esto implica que hay un único punto fijo del operador  $\mathcal{T}$  en  $\mathfrak{X}$ , con lo cual resulta el siguiente teorema.

**Teorema 3.1**

El problema (P) admite al menos una solución local más aún la concentración  $c$  satisface  $c \in C^{2,1}(\bar{D})$  y  $c_{xt} \in C(\bar{D} \setminus \{0,0\})$ .

**Demostración.**

Se comienza probando que  $\mathcal{T}$  va de  $\mathfrak{X}$  en si mismo.

Las condiciones (2.1) y (2.2) son satisfechas trivialmente. Más aún se tiene :

$$(3.3) \quad \ddot{r}(t) = f_c(c(r(t),t),r(t)) \left( c_x(r(t),t) \dot{r}(t) + c_t(r(t),t) \right) + f_x(c(r(t),t),r(t)) \dot{r}(t)$$

De las estimaciones hechas en la sec. 2 , se obtiene  $|\ddot{r}(t)| \leq k$  ,  $0 < t \leq T$  .

Para demostrar que  $\bar{r}$  satisface la última condición de (3.1) se necesita una estimación de la norma  $c_x(x,t)$  en el espacio  $C^{1+\alpha}$  (derivada respecto a la variable espacial Hölder de orden  $\alpha$ ) para algún  $\alpha \in (0,1)$  (la cual da una estimación de  $c_t$  en la norma  $C^\alpha$ ). Ver [8].

El caracter contractivo de  $\tau$  sigue de la dependencia continua de  $c$  respecto de  $r(t)$  , como en (2.14). En efecto se tiene

$$\begin{aligned} \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|_{C^1[0,T]} &\leq \sup_{E(\delta,x_1)} |f_c(c,x)| |c_1(r_1(t),t) - c_2(r_2(t),t)| + \\ &+ \sup_{E(\delta,x_1)} |f_x(c,x)| \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|_{C^1[0,T]} \leq L_3 T \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|_{C^1[0,T]} \end{aligned}$$

Finalmente se reduce  $T$ , si fuese necesario, para tener  $L_3 T < 1$  .

La regularidad de la solución sigue de las estimaciones hechas a la solución del problema auxiliar.

Debido al caracter contractivo de  $\tau$  la solución local es también única en  $\mathfrak{X}$  . Más aún la solución es única en una clase funcional más amplia la cual es la más grande en la cual la solución clásica tiene sentido. La demostración es casi la misma que la del caso  $f$  independiente de  $x$  (ver [4]). Sólo se enuncia el resultado :



### Teorema 3.2

El problema (P) admite a lo sumo una solución para  $t < T$ .

## 4. EXISTENCIA GLOBAL.

Aquí se dan algunas propiedades cualitativas de la solución del problema (P).

### Proposición 4.1

Se supone que la función  $f$  en (1.4) pertenece a  $C^\infty(E)$  luego la frontera libre  $s(t)$  pertenece a  $C^\infty((0,T)) \cap C^2([0,T])$ .

### Demostración.

Se define la función  $u(x,t)$  como :

$$(4.1) \quad u(x,t) = - \int_x^{s(t)} c(y,t) dy ,$$

la cual satisface la ecuación del calor en  $D_T = \{ (x,t) , 0 < x < s(t) , 0 < t < T \}$ , con condiciones de contorno  $u_x(0,t) = c_0$ ,  $u(s(t),t) = 0$  y la condición no lineal de Stefan  $f(u_x(s(t),t),s(t)) = \dot{s}(t)$ . Luego se puede probar la regularidad de la frontera libre usando la misma técnica iterativa introducida en [12] para un problema de Stefan lineal ya que  $f \in C^\infty(E)$ .

### Proposición 4.2

La frontera libre es una función estrictamente creciente de  $t$ , i.e.  $\dot{s}(t) > 0$ ,  $0 \leq t < T$ .

### Demostración.

Ya que  $\dot{s}(0) = f(c_0, 0) > 0$  y  $\dot{s}$  es continua, entonces existe  $t' > 0$  tal que  $\dot{s}(t) > 0$ ,  $0 < t < t'$ . Sea  $t_1$  el ínfimo de los  $t$ , tal que  $\dot{s}(t) \leq 0$ . Luego  $t_1 > 0$  y  $\dot{s}(t) > 0$  en  $0 \leq t < t_1$  y  $\dot{s}(t_1) = 0$ . De (1.5)  $c_x(s(t_1),t_1) = 0$ , y luego  $(s(t_1),t_1)$  es un punto de máximo para  $c_x$  en  $D_{t_1}$ , donde  $D_{t_1} = \{ (x,t) , 0 < x < s(t) , 0 < t < t_1 \}$ . Esto implica que la derivada espacial de  $c_x$  en dicho punto es estrictamente positiva (ver aplicación del principio de máximo [7]) y luego  $c_t(s(t_1),t_1) > 0$ . De esto se deduce que la derivada total de  $c$  respecto al tiempo evaluada a lo largo de la curva  $x = s(t)$  es positiva en  $t = t_1$ . Por lo tanto  $c(s(t),t)$  es estrictamente creciente en un intervalo  $(t_2, t_1)$  para algún  $t_2 < t_1$ . Por otro lado ya que  $t_1$  es el primer cero de  $\dot{s}(t)$  y  $(c_0,0) \in E$  luego :  $(c(s(t),t),s(t)) \in E$  para todo  $t < t_1$  o  $c(s(t),t) > c^*(s(t))$ , para  $t < t_1$  y  $c(s(t_1),t_1) = c^*(s(t_1))$ . Esto nos dice, junto a la hipótesis Fiii) que

$$\frac{c(s(t_1, t_1) - c(s(t_1 - h), t_1 - h))}{h} \leq \frac{c^*(s(t_1)) - c^*(s(t_1 - h))}{h} \leq$$

$$\leq L(s(t_1)) \frac{s(t_1) - s(t_1 - h)}{h}$$

Finalmente se toma límite cuando  $h \rightarrow 0^+$ , y se obtiene la siguiente inecuación :

$$0 < \frac{d}{dt}(c(s(t), t)) \Big|_{t = t_1} \leq L(s(t_1)) \dot{s}(t_1) = 0 . \text{ Absurdo.}$$

### Proposición 4.3

Sea  $(T, s, c)$  una solución del problema (P) luego :

$$(4.2) \quad c(x, t) < c_0, \quad 0 < x \leq s(t), \quad 0 < t < T,$$

$$(4.3) \quad 0 < \dot{s}(t) \leq \bar{s}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$(4.4) \quad -c_0 \bar{s} < c_x(x, t) < 0 \text{ en } D_T,$$

**Demostración.**

$$\bar{s} = \sup_{E_T} f(c, x), \quad E_T = E \cap \left\{ (c, x) / c < c_0, x < s(T) \right\}$$

La demostración es una aplicación directa del principio del máximo a las funciones  $c$  y  $c_x$ , teniendo en cuenta que  $\dot{s}$  es estrictamente positiva.

### Teorema 4.4

El problema (P) admite solución para todo  $T$  arbitrario.

**Demostración:**

El teorema 3.2 garantiza que existe una única solución del problema hasta un tiempo  $T > 0$ .

Sea  $T^*$  el máximo tiempo de existencia de la solución y se supone que  $T^* < \infty$  ( $T^* \geq T$ ).

Se considera un nuevo problema de frontera libre para  $T' > T^*$ . Se busca  $u(x, t)$  y  $\sigma(t)$  tales que :

$$u_{xx} - u_t = 0, \text{ en } D' = \left\{ (x, t) / 0 < x < \sigma(t), T^* < t < T' \right\},$$

$$\sigma(T^*) = b ,$$

$$u(x, T^*) = h(x) , 0 < x < b ,$$

$$u_x(0, t) = c_0 , T^* < t < T' ,$$

$$u(\sigma(t), t) = 0 , T^* < t < T' ,$$

$$\dot{\sigma}(t) = f(u_x(\sigma(t), t), \sigma(t)) , T^* < t < T' , \quad s(t)$$

$$\text{donde } b = \lim_{t \rightarrow T^{*-}} s(t) , h(x) = \lim_{t \rightarrow T^{*-}} u(x, t) = - \lim_{t \rightarrow T^{*-}} \int_x^{s(t)} c(y, t) dy$$

y  $u(x, t)$  es definida por (4.1).

Notar que el límite de  $s(t)$  existe debido a la monotonía de la frontera libre  $x = s(t)$  ,  $t < T^*$ .

Ya que  $u_t = c_x < 0$  el límite  $u(x, t)$  existe cuando  $t \rightarrow T^*$  para cada  $x < b$  . Más aún ya que  $u_x(x, t) = c(x, t)$  es uniformemente acotada,  $h(x)$  es Lipschitz continua en  $(0, b)$  y  $h(b) = 0$  . En realidad  $h(x)$  es  $C^1$  .

La existencia y unicidad de la solución del problema de frontera libre para  $u$  y  $\sigma$  para un adecuado  $T' > T^*$  , es entonces asegurado por [11]. Ya que los datos para el problema que satisfacen  $(u, \sigma)$  verifican las hipótesis del Teorema de existencia en [12] :  $f_c$  y  $f_x$  Lipschitz continuas en  $E$  y  $h \in C^1[0, b]$  . Más aún esta solución satisface :  $u \in C^{1,0}(\bar{D}') \cap C^{2,1}(D')$  ,  $\sigma \in C^1([T^*, T'])$  . Ahora el teorema de unicidad y el resultado de regularidad de [12] implican que la derivada espacial de  $u(x, t)$  extiende a la solución del problema P, contrariamente a la hipótesis de que existe un tiempo  $T^*$ , máximo de los tiempos de existencia de la solución.

## 5. DEPENDENCIA CONTINUA Y OTRAS PROPIEDADES CUALITATIVAS DE LA SOLUCION.

Primero se enuncia un resultado de dependencia continua de la solución respecto a la función  $f$  definida en (1.4) :

### Proposición 5.1

Se supone que ambas  $f_1$  y  $f_2$  satisfacen las hipótesis (F).

Sea  $s_i$  ,  $c_i$  ,  $i = 1, 2$  las correspondientes soluciones del problema (1.1)-(1.5), luego en un intervalo fijo  $(0, T)$  se tiene

$$(5.1) \quad \|s_1 - s_2\|_{C^1((0,T))} \leq \text{const.} \sup_{E'} |f_1(c,x) - f_2(c,x)|$$

donde  $E' = E \cap \{ (c,x) / : c < c_0, x < \min(s_1(T), s_2(T)) \}$

**Demostración.**

El caracter contractivo del operador  $\mathcal{T}$  no depende de  $f$ . En efecto la acotación de  $\dot{s}$ , determina una cota inferior independiente de  $f$  para  $\dot{s}$  en un adecuado intervalo de tiempo. Más aún  $\mathcal{T}$  depende continuamente de  $\|f_1 - f_2\|_{C((0,T))}$

La dependencia continua para cualquier intervalo de tiempo puede ser obtenida aplicando el teorema 2 de [12] a la solución del problema definido por (4.1).

En cuanto a la dependencia monótona se tiene lo siguiente.

**Proposición 5.2**

Sean  $s_i, c_i, i = 1, 2$ , dos soluciones del problema P, correspondientes a las funciones  $f_1$  y  $f_2$ , ambas satisfacen las hipótesis (F) y tal que  $f_1(c,x) < f_2(c,x)$  para todo  $c, x$ , luego :

$$(5.2) \quad s_1(t) < s_2(t), \quad 0 < t < T.$$

**Demostración.**

Se consideran los correspondientes  $u_i(x,t)$  definidos por (4.1). Como  $\dot{s}_1(0) < \dot{s}_2(0)$ , entonces se supone que existe un  $t_0$  tal que  $s_1(t_0) = s_2(t_0)$  y  $s_1(t) < s_2(t)$ , para cualquier  $t < t_0$ . Y

$$(5.3) \quad \dot{s}_1(t_0) \geq \dot{s}_2(t_0).$$

Se define  $v = u_1 - u_2$  y  $D_0 = \{ (x,t) / 0 \leq x < s_1(t), 0 < t < t_0 \}$  luego  $v$  satisface

$$v_{xx} - v_t = 0 \text{ en } D_0$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < t_0$$

$$v(s_1(t),t) > 0, \quad 0 < t < t_0$$

$$v(s_1(t_0),t_0) = 0$$

Luego  $v$  tiene un mínimo en el punto  $(s_1(t_0),t_0)$  y por lo tanto  $v_x(s_1(t_0),t_0) < 0$ . Esto conduce a :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1(t_0) - \dot{s}_2(t_0) &= f_1(u_{1x}(s_1(t_0),t_0),s_1(t_0)) - f_2(u_{2x}(s_2(t_0),t_0),s_2(t_0)) \leq \\ &\leq f_{2c}(\mu,s_1(t_0)) (u_{1x}(s_1(t_0),t_0) - u_{2x}(s_2(t_0),t_0)) < 0, \end{aligned}$$

con  $u_{1x}(s_1(t_0),t_0) < \mu < u_{2x}(s_2(t_0),t_0)$  lo cual contradice (5.3).

### Proposición 5.3

Se supone que  $f_x < 0$ . Luego :

$$(5.4) \quad c_t(x,t) > 0, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T$$

$$(5.5) \quad c_{xt}(0,t) > 0, \quad 0 < t < T.$$

**Demostración.**

Sea  $w = c_t$ , luego  $w$  resuelve la ecuación del calor en  $Q_T$  con las siguientes condiciones de contorno :

$$w(0,t) = 0$$

$$w(s(t),t) \alpha(t) + w_x(s(t),t) = \beta(t)$$

donde

$$\alpha(t) = 2(\dot{s}(t) + f_c c) |_{x = s(t)}$$

$$\beta(t) = -\dot{s}(c_x \dot{s} + c f_c c_x + c f_x) |_{x = s(t)}$$

Ya que  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  son no negativas, el principio del máximo implica que  $w$  no puede asumir un mínimo negativo ni anularse sobre  $x = s(t)$ . Luego  $w$  es estrictamente positivo dentro de  $D_T$ . Se sigue que el mínimo para  $w$  es asumido sobre la frontera  $x = 0$ , esto es  $w_x(0,t) > 0$ .

### Proposición 5.4

Si  $f_x > 0$ , luego la función  $a(t) = c(s(t),t)$  es decreciente en  $0 < t < T$ .

**Demostración.**

Sea  $v = (\ln c)_{xx}$ . El teorema 3.2 asegura que  $v$  es continua en  $\bar{D}_T$  y que  $v_x$  es continua en  $\bar{D}_T \setminus (0,0)$ . Más aún  $v$  satisface :

$$(5.6) \quad v_{xx} + 2(\ln c)_x v_x + v^2 - v_t = 0 \quad \text{en } D_T,$$

con las siguientes condiciones de contorno :

$$v(0,t) = - \left( \frac{c_x(0,t)}{c(0,t)} \right)^2$$

$$v(s(t),t) = \frac{\ddot{s} - f_x \dot{s}}{f_c c} |_{x = s(t)}$$

Ya que  $v(0,0) < 0$  y  $v$  es continua en  $(0,0)$ ,  $v(s(t),t)$  es negativa en algún intervalo  $[0,t_0)$ . El principio del máximo (i.e. en la forma del teorema 5, de [7], aplicado con cuidado a la ecuación (5.6)

implica que si  $v(s(t),t)$  se anula por primera vez en  $t_0 > 0$ , entonces  $(s(t_0),t_0)$  es un punto de máximo para  $v$ , esto es  $v_x(s(t_0),t_0) > 0$ . Sin embargo  $v_x(s(t_0),t_0) = -f_x f |_{x=s(t_0), t=t_0}$  es no positiva.

Luego  $v(s(t),t)$  no se puede anular, esto es :

$\ddot{s}(t) < f_x(c(s(t),t),s(t))\dot{s}(t)$ ,  $0 < t < T$ . El resultado se obtiene teniendo en cuenta que :

$$\ddot{s}(t) = f_c(c(s(t),t),s(t)) \dot{a}(t) + f_x(c(s(t),t),s(t)) \dot{s}(t) .$$

## 6. COMPORTAMIENTO ASINTOTICO.

En esta sección se describe el comportamiento de la solución del problema (P) cuando  $t \rightarrow \infty$ , bajo distintas hipótesis sobre los datos.

### Proposición 6.1

Se supone que existe un  $\bar{x} < \infty$  tal que  $c^*(\bar{x}) \geq c_0$ , luego  $s(t) < \bar{x}$  para todo  $t > 0$ .

**Demostración.**

Se supone que existe un  $\bar{t}$  tal que  $s(\bar{t}) = \bar{x}$ , luego  $(c(s(\bar{t}),\bar{t}), s(\bar{t})) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ . Sin embargo la proposición 4.2 asegura que la distancia de los puntos  $(c(s(t),t), s(t))$  a la frontera del conjunto  $E$  es positiva para todo  $t > 0$ .

### Proposición 6.2

Si la frontera libre  $x = s(t)$  tiene una asíntota en  $x = x_0$ , luego  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(s(t),t) = c_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0$ .

**Demostración.**

Sea  $u(x,t)$  definida como en (4.1) luego :

$$(6.1) \quad c_0(x - x_0) \leq u(x,t) \leq 0$$

Se fija  $\bar{n}$  entero arbitrariamente grande. Y para todo  $n > \bar{n}$  se define:

$u_n(x,t)$  solución de :

$$u_{nxx} - u_{nt} = 0 \text{ en } D_n = \left\{ (x,t) / 0 < x < x_n, t > t_n \right\},$$

donde  $t_n$  es tal que  $s(t_n) = x_n = x_0 - \frac{1}{n}$  con las siguientes condiciones de contorno e iniciales :

$$u_n(x,t_n) = 0, \quad 0 < x < x_n$$

$$u_{nx}(0,t) = c_0, \quad t > t_n$$

$$u_n(x_n,t) = 0, \quad t > t_n$$

Se cumple que :

$$(6.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_n(x,t) = c_0 (x - x_n) \quad \text{para cada } n.$$

Entonces (6.1) junto al teorema 4 pag. 158 de [7] asegura que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = c_0 (x - x_0) \quad \text{uniformemente en } \bar{D}_n.$$

Más aún

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_x(x,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(x,t) = c_0 \quad \text{uniformemente en cualquier intervalo } [0,x'], \text{ para}$$

cualquier  $x' < x_0$  (ver teorema 15, pag. 80 de [7]). Se sigue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(s(t),t) = c_0.$

$$\text{Entonces existe } \lim_{t \rightarrow \infty} f(c(s(t),t),s(t)) \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf \dot{s}(t) = 0.$$

En efecto como  $f$  es continua,  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(s(t),t) = c_0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = x_0$ , entonces existe el límite de  $f(c(s(t),t),s(t))$  cuando  $t \rightarrow \infty$  que se sabe por (1.4) que es igual a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t)$ , pero como  $x = x_0$  es asíntota de  $s(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0$ , luego existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t)$  y es igual a cero.

### Corolario 6.3

Supongamos que  $s(t)$  tiene una asíntota en  $x = x_0$ , luego

$$x_0 = x^* = \inf \{ x / c^*(x) \geq c_0 \}$$

### Corolario 6.4

Sea  $c^*(x)$  tal que  $c^*(x) < c_0$ , para todo  $x$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = +\infty.$$

## NOMENCLATURA

$c_0$  : concentración en la cara  $x = 0$

$c$  : concentración

$c^*$  : umbral de concentración

$D$  : constante de difusividad

$f$  : velocidad de la frontera libre

$s$  : frontera libre

$t$  : variable tiempo

$x$  : variable espacial

Letras griegas

$\phi$  : inversa de  $f$

$\mathcal{T}$  : operador contracción



## BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. ANDREUCCI, R. RICCI, "A free boundary problem arising from sorption of solvents in glassy polymers". *Quart. of Appl. Math.* 44 (1987), 649-657.
- [2] G. ASTARITA, G.C. SARTI, "A class of mathematical models for sorption of swelling solvents in glassy polymers", *Polym. Eng. Sci.* 18 (1978), 388-395.
- [3] E. COMPARINI, R. RICCI, "On the swelling of a glassy polymer in contact with a well-stirred solvent", *Math. Methods Appl. Sci.* 7 (1985), 238-250.
- [4] A. FASANO, G. MEYER, M. PRIMICERIO, "On a problem in the polymer industry: theoretical and numerical investigation of swelling", *SIAM J. Appl. Math.* 17 (1986), 945-960.
- [5] A. FASANO, M. PRIMICERIO, "Su un problema unidimensionale de diffusione in un mezzo a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineari", *Ann. Mat. Pura e Appl.*, 93 (1972), 333-357.
- [6] A. FASANO, R. RICCI, "Penetration of solvents into glassy polymers", in "Free boundary problems : theory and applications", Eds. A. Bossavit et al., vol. 1, 132-139, Pitman, London 1985.
- [7] A. FRIEDMAN, "Partial differential equations of parabolic type", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [8] O.A. LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", *A.M.S. Trans.* 23, Providence, R.I., 1968.
- [9] E. COMPARINI, R. RICCI, C. TURNER, "Penetration of a solvent into a non homogeneous polymer". *Meccanica*, 23 (1988), 75-80.
- [10] M. PRIMICERIO, "Sorption of swelling solvents by glassy polymers in mathematics in industry", H. Neunzert (ed.), *Stuttgart* (1983).

- [11] A. FASANO, M. PRIMICERIO, "Free-boundary problems for non linear parabolic equations with non linear free boundary conditions", J. Math. Anal. Appl, 72 (1979), 247-273.
- [12] D. SCHAFFER, "A new proof of the infinite differentiability of the free boundary in the Stefan problem", Journal Differential Equations, 20 (1976), 266-269.

**Cristina Vilma Turner**  
**FAMAF**  
**Universidad Nacional Cordoba**  
**1988**

# A FREE BOUNDARY VALUE PROBLEM IN SOLIDIFICATION OF BINARY ALLOYS. DETERMINISTIC AND STOCHASTIC APPROACH

Krystyna Twardowska

Department of Informatics,  
Jagiellonian University,  
ul Kopernika 27, 31-501 Kraków, Poland.

## ABSTRACT.

We consider the existence and uniqueness of solutions for the Stefan problem of parabolic partial differential equations for heat and mass diffusions in the solidifying three-phase mixture. The concentration of the mixture components being taken into account. The novelty contained in this paper consists in determining the free boundary on which the temperature of solidification is unknown. The notions of a classical and weak solutions were introduced in [4] and [5], respectively.

A statistical solution to a free boundary value problem of the partial parabolic differential equations is defined using measure theory approach [13], [2], [3]. The notion of a statistical solution was first introduced in [6], [17] for the Navier-Stokes equations.

The solution to the stochastic Stefan problem considered here is, on one side, a probability measure on a Borel  $\sigma$ -algebra of the appropriate abstract space ([14]). This solution is, on the other side, a limit of a sequence of distributions of the solutions to the Itô-Galerkin approximations.

## 1. INTRODUCTION.

The objective of the present study is to prove the existence and uniqueness theorem for the multidimensional problem of heat and mass diffusion in the solidifying binary three-phase mixture. The intermediary phase called "mushy zone" between the liquid and the solid body is defined from one side by the Stefan boundary and from the other one by the so-called boundary of fast chemical reaction. We take into consideration the mass transport equation for one of the mixture components.

It is considered the source function  $f(u,c)$  informing about solid body fraction in the "mushy zone" at a given temperature (where  $u$  is temperature and  $c$  is concentration).

As it is well known in physics (see [1]), when liquid and solid bodies are close one to the other at a given temperature, then liquid composition differs from the one of the solid body. The relations between concentrations and temperature at this point are illustrated by so called "phase diagram". With the assumption that  $f(u,c) = 0$  at the "liquid-mushy zone" boundary as well as  $f(u,c) \neq 1$  at the "mushy zone-liquid body" boundary, the whole unfreezed liquid at that other boundary would pass rapidly into the solid body because  $f(u,c) = 1$  in solid body. Contrary to a solidification problem of a pure metal the alloy solidifies partially, step by step, till its temperature will be in an eutectic point and then the remaining part of unsolidified alloys solidifies rapidly in this temperature.

Therefore, between the liquid and solid body is the mushy region. That is, the region between isothermal hypersurfaces of the liquid and solid body, respectively. At the solidus temperature we consider latent heat which imposes a Stefan-type condition across the "mushy zone - solid body" boundary. There is no latent heat being generated at the liquidus temperature, therefore we have a fast chemical reaction between the liquid and mushy zone. Hence at such a point temperature and concentration should satisfy the phase diagram and thus the concentrations on the both sides of the Stefan boundary would differ.

Consequently, one phase would precipitate into the other some amount of its component. The concentration at the Stefan boundary will be not a continuous function. Hence there is also taking place the transport of the component across the whole mixture. This is compelling us to write a parabolic equation for mass transport conjugated with the heat equation at the Stefan boundary.

## 2. DEFINITIONS AND NOTATIONS.

We consider a bounded domain  $G$  in  $R^n$  with a smooth boundary  $\partial G$  and we set  $G(t) := G \times \{t\}$ ,  $\partial G(t) := \partial G \times \{t\}$ ,  $\Omega = \Omega^T := \bigcup_{0 < t < T} G(t)$ ,  $S = S^T := \bigcup_{0 < t < T} \partial G(t)$  for any  $T : 0 < T \leq \infty$ . We divide  $\Omega$  into  $\Omega^1$ ,  $\Omega^2$ ,  $\Omega^3$  for the solid body, mushy region, and liquid zone, respectively. Now we define the free boundaries  $\Gamma^1 := \bigcup_{0 < t < T} \Gamma^1(t)$ ,  $\Gamma^2 := \bigcup_{0 < t < T} \Gamma^2(t)$  for the interphase surfaces separating solid body from mushy region and mushy region from liquid zone, respectively.

Let  $\Gamma^i(t) := \{(x,y) \in \bar{G}(t) : \phi(x,t) = \phi^i\}$ ,  $\phi^i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$  be hypersurfaces in  $\bar{G}(t)$  given by a function  $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$  such that  $\nabla_x \phi(x,t) |_{\Gamma^i} \neq 0$ ,  $\phi < \phi^1$  in  $\Omega^1$ ,  $\phi^1 < \phi < \phi^2$  in  $\Omega^2$ ,  $\phi^2 < \phi$  in  $\Omega^3$ . Let  $S^i := \bar{\Omega}_i \cap S$ ,  $i = 1, 2, 3$ . The hypersurfaces  $\Gamma^i(t)$  divide  $G(t)$  into three parts  $G^i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , some of  $G^i(0)$  may be empty. Let us consider the phase diagram on  $\Gamma^1$  defined by the functions  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{G}$  with common initial and final points corresponding to the pure components of the alloy. It is obvious from the diagram that

$$c^1(x,t) |_{\Gamma^1} := \lim_{x \rightarrow \Gamma^1, x \in \Omega^1} c(x,t) = \mathcal{F}(u(x,t) |_{\Gamma^1}),$$

$$c^2(x,t) |_{\Gamma^1} := \lim_{x \rightarrow \Gamma^1, x \in \Omega^2} c(x,t) = \mathcal{G}(u(x,t) |_{\Gamma^1}).$$

We introduce a known function  $f(u,c)$  as a relative amount of the solid present at any temperature and concentration in  $\Omega^2$ . We point out that

$$f(u,c) |_{\Gamma^1} := \lim_{x \rightarrow \Gamma^1, x \in \Omega^2} f(u(x,t) |_{\Gamma^1}, c^2(x,t) |_{\Gamma^1}) \text{ is a function of } t \text{ only.}$$

## 3. STATEMENT OF THE DETERMINISTIC PROBLEM.

We denote by  $u^i$ ,  $c^i$  the temperatures and concentrations of the component of the alloy in the regions  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , respectively.

We consider equations

$$(1)^i \quad \alpha^i(u^i) \frac{\partial u^i}{\partial t} = \text{div} (k^i(u^i) \nabla_x u^i) + \alpha \frac{\partial f(u^1, c^1)}{\partial t} \delta_{i2}$$

$$\alpha^i(u^i) \quad \text{for } i = 1, 3,$$

$$\alpha^1(u^1) =$$

$$\alpha^1(u^1) - (\alpha^2(f^1(t)) - \alpha^1(f^1(t))) \quad \text{for } i = 2.$$

We examine the following problem

$$(1)^i \quad \alpha^i(u^i) \frac{\partial u^i}{\partial t} = \operatorname{div} (k^i(u^i) \nabla_x u^i) + \alpha \frac{\partial f(u^i, c^i)}{\partial t} \delta_{i2},$$

$$(2)^i \quad \frac{\partial c^i}{\partial t} = \operatorname{div} (\bar{k}^i(c^i) \nabla_x c^i), \quad i = 1, 2, 3,$$

where  $\alpha$  is a positive constant equals to density multiplied by the latent heat,  $\delta_{i2}$  is the Kronecker's delta, with the initial and the boundary conditions

$$u^i(x,0) = h^i(x), \quad h^i(x) \geq 0 \quad \text{in } G^i(0),$$

$$(3)^i$$

$$h^1(x) \leq u^1(x,0)|_{\Gamma^1} = u^2(x,0)|_{\Gamma^1} \leq h^2(x) \leq u^2(x,0)|_{\Gamma^2} = u^3(x,0)|_{\Gamma^2} \leq h^3(x),$$

$$c^i(x,0) = \bar{h}^i(x), \quad \bar{h}^i(x) \geq 0 \quad \text{in } G^i(0),$$

$$(4)^i$$

$$\bar{h}^1(x) \leq \mathcal{F}(f^1(0)) \leq \mathcal{G}(f^1(0)) \leq \bar{h}^2(x),$$

$$(5) \quad u^i(x,t) = g^i(x,t) \quad \text{for } (x,t) \in S,$$

$$(6) \quad \frac{\partial c^i}{\partial n_x} = 0 \quad \text{for } (x,t) \in S,$$

where  $\frac{\partial}{\partial n_x}$  is differentiation in the direction of the outer normal to  $S$ ,

$$(7)^i \quad u^1(x,t)|_{\Gamma^1} = u^2(x,t)|_{\Gamma^1} = f^1(t), \quad u^2(x,t)|_{\Gamma^2} = u^3(x,t)|_{\Gamma^2} = \theta,$$

where  $\theta$  is given,  $f^1(t)$  is an unknown function,

$$(7)^2 \quad c^2(x,t) |_{\Gamma^2} = c^3(x,t) |_{\Gamma^2}, \quad \frac{\partial c^2}{\partial x_i} |_{\Gamma^2} = \frac{\partial c^3}{\partial x_i} |_{\Gamma^2} \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(8) \quad c^1(x,t) |_{\Gamma^1} = \mathcal{F}(f^1(t)),$$

$$(9) \quad c^2(x,t) |_{\Gamma^1} = \mathcal{G}(f^1(t)),$$

$$(10) \quad [k^2(u^2) \nabla_x u^2 - k^1(u^1) \nabla_x u^1] \nabla_x \Phi = \alpha (1 - f(u,c)) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{on } \Gamma^1,$$

$$(11) \quad [\bar{k}^2(c^2) \nabla_x c^2 - \bar{k}^1(c^1) \nabla_x c^1] \nabla_x \Phi = (\mathcal{G}(f^1) - \mathcal{F}(f^1)) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{on } \Gamma^1,$$

$$(12) \quad [k^2(u^2) \nabla_x u^2 - k^3(u^3) \nabla_x u^3] \nabla_x \Phi = 0 \quad \text{on } \Gamma^2.$$

In the one-dimensional case condition (11) is a result of mass conservation law and is introduced in [11].

We assume

(A1) the functions  $\alpha^1(u)$ ,  $k^1(u)$ ,  $\bar{k}^1(c)$  are continuous in  $\Omega^1$ ,  $0 < \gamma^0 \leq \alpha^1(u) \leq \gamma^1$ ,  $0 < \gamma^0 \leq k^1(u) \leq \gamma^1$ ,  $0 < \gamma^0 \leq \bar{k}^1(c) \leq \gamma^1$  for  $i = 1, 2, 3$ ;  $\gamma^0, \gamma^1$  are constants,

(A2) the function  $f(u,c)$  is differentiable with respect to  $u$  and  $c$ , is decreasing with respect to  $u$  and increasing with respect to  $c$ ,  $0 \leq f(u,c) < 1$ ,  $0 \leq -\frac{\partial f}{\partial u} \leq \gamma^2$ ,  $0 \leq \frac{\partial f}{\partial c} \leq \gamma^2$ ,  $\gamma^2$  is a positive constant,

(A3)  $G$  is bounded,  $\partial G \in C^{2+\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ ,

(A4)  $\mathcal{G}, \mathcal{F}$  are continuous and decreasing functions  $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ ,

$$(A5) \quad \frac{d\alpha^1}{d(u^1 |_{\Gamma^1})} = \frac{d\alpha^2}{d(u^1 |_{\Gamma^1})}$$

**Definition.** The classical solutions of problem (1) - (12) is  $\{u^i, c^i, \Phi\}$ ,  $i = 1, 2$ ,

3 such that  $u^i \in C(\bar{\Omega}^i)$ ,  $\nabla_x u^i$ ,  $D_t u^i$ ,  $D_x^2 u^i \in C(\Omega^i)$ ,  $c^i$ ,  $\nabla_x c^i$ ,  $D_t c^i$ ,  $D_x^2 c^i \in C(\Omega^i)$  and relations (1)-(12) are satisfied.

In the one-dimensional case in [4] we construct a system of integral equations using Green's and Neumann's functions. We prove the existence and uniqueness theorem by Banach fixed point theorem.

#### 4. WEAK SOLUTION.

We introduce the following functions

$$A^i(u) = \int_u^{f^i(t)} \alpha^1(\xi) d\xi + \int_{f_1^i(t)}^\theta \alpha^2(\xi) d\xi, \quad A^i(u) = \int_u^\theta \alpha^i(\xi) d\xi \quad \text{for } i = 2, 3,$$

$$K^i(u) = \int_u^{f^i(t)} k^1(\xi) d\xi + \int_{f_1^i(t)}^\theta k^2(\xi) d\xi, \quad K^i(u) = \int_u^\theta \bar{k}^i(\xi) d\xi \quad \text{for } i = 2, 3,$$

$$\bar{K}^i(u) = \int_c^{\mathcal{F}(f^i)} \bar{k}^1(\xi) d\xi + \int_{\mathcal{G}(f^i)}^\theta \bar{k}^2(\xi) d\xi, \quad \bar{K}^i(c) = \int_c^\theta \bar{k}^i(\xi) d\xi \quad \text{for } i = 2, 3.$$

Let

$$a(u,c) = \begin{cases} -A^1(u) - \alpha, & u < f^1(t), \\ -A^2(u) - \alpha f(u,c), & \text{for } f^1(t) < u < \theta, \\ -A^3(u), & \theta < u \end{cases} \quad k(u) = \begin{cases} -K^1(u), & u < f^1(t), \\ -K^2(u), & \text{for } f^1(t) < u < \theta, \\ -K^3(u), & \theta < u \end{cases}$$

and

$$K^i(u) = \int_u^{f^i(t)} k^1(\xi) d\xi + \int_{f_1^i(t)}^\theta k^2(\xi) d\xi, \quad K^i(u) = \int_u^\theta \bar{k}^i(\xi) d\xi \quad \text{for } i = 2, 3,$$

$$\bar{K}^i(u) = \int_c^{\mathcal{F}(f^i)} \bar{k}^1(\xi) d\xi + \int_{\mathcal{G}(f^i)}^\theta \bar{k}^2(\xi) d\xi, \quad \bar{K}^i(c) = \int_c^\theta \bar{k}^i(\xi) d\xi \quad \text{for } i = 2, 3.$$

Let  $u = (u^1, u^2, u^3)$ ,  $c = (c^1, c^2, c^3)$ ,  $h = (h^1, h^2, h^3)$ ,  $\bar{h} = (\bar{h}^1, \bar{h}^2, \bar{h}^3)$  and  $g = (g^1, g^2, g^3)$  in  $\Omega^1$ ,  $\Omega^2$ ,  $\Omega^3$ , respectively.

We rewrite problem (1)-(12) in the following form

$$(13)^1 \quad \frac{\partial}{\partial t} [A^i(u) + \alpha f(u,c) \delta_{i2}] = \text{div} (\nabla_x K^i(u)), \quad i = 1, 2, 3,$$



$$(14)^1 \quad \frac{\partial}{\partial t} c^i = \operatorname{div} (\nabla_x \bar{K}^i(u)) \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(15) \quad u = h \quad \text{on } G(t) \quad ,$$

$$(16) \quad c = \bar{h} \quad \text{on } G(t) \quad ,$$

$$(17) \quad u = g \quad \text{on } S \quad ,$$

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial n_x} \bar{K}^i(c) = 0 \quad \text{on } S \quad ,$$

$$(19)^1 \quad u(x,t) |_{\Gamma^1} = f^1(t) \quad , \quad u(x,t) |_{\Gamma^2} = \theta \quad ,$$

$$(19)^2 \quad c^2(x,t) |_{\Gamma^2} = c^3(x,t) |_{\Gamma^2} \quad , \quad \frac{\partial c^2(x,t)}{\partial x_i} |_{\Gamma^2} = \frac{\partial c^3(x,t)}{\partial x_i} |_{\Gamma^2} \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

Let  $\phi^i$  ( $i = 1, 2$ ) be smooth functions in  $R^{n+1}$  such that

$$\phi^i(x,T) = 0 \quad \text{and} \quad \phi^i |_S = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi^i}{\partial n_x} |_S = 0 \quad .$$

We write equation (13)<sup>1</sup> equivalently as

$$(13)^1 \quad \frac{\partial}{\partial t} [A^1(u) + \alpha] = \operatorname{div} [\nabla_x K^1(u)] \quad .$$

Let

$$a(u,c) = \begin{cases} -A^1(u) - \alpha \quad , & u < f^1(t) \quad , \\ -A^2(u) - \alpha f(u,c) \quad , & \text{for } f^1(t) < u < \theta \quad , \\ -A^3(u) \quad , & \theta < u \end{cases} \quad , \quad k(u) = \begin{cases} -K^1(u) \quad , & u < f^1(t) \quad , \\ -K^2(u) \quad , & \text{for } f^1(t) < u < \theta \quad , \\ -K^3(u) \quad , & \theta < u \end{cases}$$

and

$$\bar{k}(c) = \begin{cases} -\bar{K}^1(c) \quad , & c < \mathcal{F}(u^1 |_{\Gamma^1}) \quad , \\ -\bar{K}^2(c) \quad , & \text{for} \\ -\bar{K}^3(c) \quad , & c > \mathcal{G}(u^1 |_{\Gamma^1}) \quad . \end{cases}$$

Using the above definitions we transform the initial system of equations to a system of integral equations.

The functions  $a(u,c)$  and  $c$  have jumps on  $\Gamma^1$ , where they are multivalued functions there.

We compute the magnitude of these jumps. We obtain

$$a(f^1(t) - \theta, \mathcal{F}(f^1(t))) - a(f^1(t)) = -A^1(f^1(t)) - \alpha = \int_{f^1(t)}^{\theta} \alpha^2(\xi) d\xi - \alpha \quad ,$$

$$\begin{aligned}
a(f^1(t) + 0, g(f^1(t))) &= -A^2(f^1(t)) - \alpha f(f^1(t), g(f^1(t))) = \\
&= \int_{f^1(t)}^0 \alpha^2(\xi) d\xi - \alpha f(f^1(t), g(f^1(t)))
\end{aligned}$$

therefore the jump of  $a$  is

$$a(f^1(t) + 0, g(f^1(t))) - a(f^1(t) - 0, g(f^1(t))) = \alpha (1 - f(f^1(t), g(f^1(t)))) .$$

The jump of  $c$  is

$$c^2(x,t) |_{\Gamma^1} - c^1(x,t) |_{\Gamma^1} = g(f^1(t)) - f(f^1(t)) .$$

We point out that  $a$  and  $c$  are single-valued functions beyond the  $\Gamma^1$ . Let

$$a |_{\Gamma^1} := [ a(f^1(t) + 0, f(f^1)), a(f^1(t) + 0, g(f^1)) ] = P(t) ,$$

$$c |_{\Gamma^1} := [ f(f^1), g(f^1) ] = Q(t) .$$

The functions  $k$  and  $\bar{k}$  are continuous and strictly increasing so there exist their inverses  $k^{-1}, \bar{k}^{-1}$ . We consider the multivalued applications

$$\begin{aligned}
b^1(\rho_1, \rho_2) &= \begin{cases} a(k^{-1}(\rho_1), \bar{k}^{-1}(\rho_2)) & \text{if } \rho_1 \neq k(u |_{\Gamma^1}), \rho_2 \neq \bar{k}(c |_{\Gamma^1}) , \\ [a(f^1 + 0, f(f^1)), a(f^1 - 0, g(f^1))] & \text{if } \rho_1 = k(u |_{\Gamma^1}), \rho_2 = \bar{k}(c |_{\Gamma^1}), \end{cases} \\
b^2(\rho_2) &= \begin{cases} \bar{k}^{-1}(\rho_2) & \text{if } \rho_2 \neq \bar{k}(c^1 |_{\Gamma^1}) , \\ [f(f^1), g(f^1)] & \text{if } \rho_2 = \bar{k}(c^1 |_{\Gamma^1}) . \end{cases}
\end{aligned}$$

We introduce other unknown functions  $v^1 = k(u)$ ,  $v^2 = \bar{k}(c)$ , that is  $u = k^{-1}(v^1)$ ,  $c = \bar{k}^{-1}(v^2)$ . Let  $B^1(v^1, v^2)$  and  $B^2(v^2)$  be some functions such that  $B^1(v^1, v^2) \subset b^1(v^1, v^2)$ ,  $B^2(v^2) \subset b^2(v^2)$  in the sense of graphs, that is  $B^1(v^1, v^2) = b^1(v^1, v^2) = a(k^{-1}(v^1), \bar{k}^{-1}(v^2))$ ,  $B^2(v^2) = b^2(v^2)$  if  $v^1 \neq k(u |_{\Gamma^1})$ ,  $v^2 \neq \bar{k}(c |_{\Gamma^1})$  and  $B^1(v^1, v^2) \in P(t)$ ,  $B^2(v^2) \in Q(t)$ , if  $v^1 = k(u |_{\Gamma^1})$ ,  $v^2 = \bar{k}(c |_{\Gamma^1})$ .

**Definition.** By a weak solution of problem (1)-(12) we mean bounded measurable functions  $u(x,t)$ ,  $c(x,t)$  such that for functions  $B^1(v^1, v^2)$ ,  $B^2(v^2)$  defined above and for any smooth functions  $\phi^i(x,t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\phi^i(x,T) = 0$ ,  $\phi^1 |_{S} = 0$ ,  $\frac{\partial \phi^2}{\partial n_x} |_{S} = 0$  the

functions  $v^1 = k(u)$ ,  $v^2 = \bar{k}(c)$  satisfy the system of equations

$$(20) \quad \iint_{\Omega} (B^1(v^1, v^2) \phi_t^1 + v^1 \Delta \phi^1) dx dt + \int_{G(0)} \phi^1(x, 0) B^1(k(\bar{h}), \bar{k}(\bar{h})) dx - \\ - \int_S k(u) \frac{\partial \phi^1}{\partial n_x} dS = 0,$$

$$(21) \quad \iint_{\Omega} (B^2(v^2) \phi_t^2 + v^2 \Delta \phi^2) dx dt + \int_{G(0)} \phi^2(x, 0) B^2(\bar{k}(\bar{h})) dx + \\ + \int_S \phi^2 \frac{\partial \bar{k}}{\partial n_x} dS = 0.$$

The weak versions of  $\Gamma^1$  and  $\Gamma^2$  are the sets  $\{(x, t) : c^1(x, t) = \mathcal{F}(u(x, t)), c^2(x, t) = \mathcal{G}(u(x, t))\}$  and  $\{(x, t) : u(x, t) = \theta\}$ , respectively.

We summarize our calculations (see [5]) in :

**Theorem 1.** A classical solution of problem (1)-(12) is also a weak solution.

It is well known that a sufficiently regular weak solution is a classical solution.

Let  $H^1(G)$  be a Hilbert space of functions with the strong first derivative in  $L^2(G)$ , endowed with the norm

$$\|u\|_{H^1(G)}^2 = \int_G \{ |u|^2 + |\nabla_x u|^2 \} dx.$$

Analogously, we define a space  $H^1(\Omega)$  with the norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} \{ |u|^2 + |\nabla_x u|^2 + |u_t|^2 \} dx dt.$$

**Theorem 2.** (see to [5]). Under the assumptions (A1) - (A5) problem (1) - (12) has exactly one weak solution in  $L^2(\Omega)$ .

In the proof of the above theorem we apply the compactness method developed in [8], [10].

For the proof of the existence of the solution we approximate the function

$b^2(\rho_2)$  uniformly on compact subset of  $R$  depending on  $t$ , by smooth functions  $b_m^2(\rho_2)$  for which  $R \setminus X(t)$  does not contain the curves  $\bar{k}(c | \Gamma_1)$  and for which

$$(*) \quad a(f^1(t)) \leq b_m^2 \leq g(f^1(t))$$

and  $0 < \gamma^4 \leq \frac{\partial b_m^2}{\partial \rho_2} \leq \gamma^5(m) < \infty$ ,  $\gamma^4, \gamma^5 = \gamma^5(m)$  are constants.

We set  $v_0^2 := \bar{k}(\bar{h}) \in H^1(G) \cap L^\infty(G)$  and we approximate it by  $v_{0,m}^2 \in C^\infty(\bar{G})$  such that  $\max_{\bar{G}} |v_{0,m}^2| \leq \text{ess sup}_G |v_0^2| \leq c$ ,  $c$  is constant ([1]) and  $v_{0,m}^2 \rightarrow v_0^2$  in  $H^1(G)$ .

We have the approximating problems

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} b_m^2(v_m^2) &= \Delta v_m^2 && \text{in } \Omega, \\ v_m^2(x,0) &= v_{m,0}^2(x) && \text{in } G(0), \\ \frac{\partial v_m^2}{\partial n_x} &= 0 && \text{on } S. \end{aligned}$$

Each of these problems has exactly one classical solution ([9], Theorem 7.4, part V). Reasoning as in [1] we get the existence of the weak solution of problem (21).

We treat this weak solution as the known function  $v^2 = v^{20}$  in equation (20).

Once more we approximate a function  $b^1(\rho_1, \rho_2) = b^1(\rho_1)$  uniformly on such compact subsets of  $R$  as for  $b^2$  by smooth functions  $b_m^1(\rho_1, \rho_2)$  such chosen that

$$a(f^1(t) - 0, \mathcal{F}(f^1(t))) \leq b_m^1(k(u | \Gamma_1)),$$

$$(**) \quad \bar{k}(c | \Gamma_1) \leq a(f^1(t) + 0, \mathcal{G}(f^1(t))),$$

$$0 < \gamma^4 \leq \frac{\partial b_m^1}{\partial \rho_1} \leq \gamma^5(m)$$

We choose  $v_0^1$  and  $v_{0,m}^1$  similarly as  $v_0^2$  and  $v_{0,m}^2$  and we introduce a sequence  $\{g_m(x,t)\}$  of smooth functions on  $S$  satisfying  $\sup_S |g_m| \leq \text{ess sup}_S |g| = \gamma^6$ ,  $\gamma^6$  is a constant,  $g_m(x,0) = v_{0,m}^1(x) |_{\partial G}$ ,  $g_m \rightarrow g$  in  $L^1(S)$ ,  $\frac{\partial g_m}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial t}$  in  $L^1(S)$

Therefore we have the approximating problems

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} b_m^1(v_m^1) &= \Delta v_m^1 && \text{in } \Omega, \\
 (23) \quad v_m^1(x,0) &= v_{m,0}^1(x) && \text{in } G(0) \\
 v_m^1|_S &= g_m(x,t) && \text{on } S.
 \end{aligned}$$

Each of these problems has exactly one classical solution ([9], Theorem 6.1, part V). Reasoning as in [1] we get the existence of the weak solution of problem (20).

To get a weak solution of conjugated system (20), (21) we prove that the suitably chosen sequence  $\{f^{1n}\}$  has a subsequence which is convergent to a certain  $f^1$  which has the following property

$$u|_{\Gamma_1} = f^1(t), \quad c^1|_{\Gamma_1} = \mathcal{F}(f^1(t)), \quad c^2|_{\Gamma_2} = \mathcal{G}(f^1(t)).$$

If  $f^{10}(t)$  is given we take an iterative procedure described in [5]. To prove the theorem in the space  $L^2(\Omega)$  we proceed as in [1]

## 5. STATISTICAL SOLUTIONS.

A statistical solution is a generalisation of a weak solution for which the measures derived from the initial and boundary conditions are concentrated in one point only. It is a family of such measures which defines a probability distribution on a set of solutions derived from the probability distributions of the initial and boundary conditions ([17]). We mean solutions in a general distributional sense.

The approximate systems (22) and (23) have unique solutions on the spaces

$$X^1 = H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega) \quad \text{and} \quad X^2 = H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\Omega) \quad (\text{see [9]}) \quad \text{for } \alpha, \beta < 1.$$

Now we choose spaces  $U_1^0$  ( $1 = 1, 2, 3$ ) of the initial and boundary conditions according to our assumptions for  $u(x,0)$ ,  $c(x,0)$  and  $g(x,t)$  which are random functions now.

We put  $U^0 = U_1^0 \times U_2^0 \times U_3^0$ . We consider in this paper a probability space  $(U^0, B(U^0), \mu(\omega_0))$ , where  $B(U^0)$  is a  $\sigma$ -algebra of Borel sets,  $\mu(\omega_0)$  is a product measure on it. Thus we can write the solutions to (13) and (14) in a form

$$u(x,t) = \rho^1(t, u(x,0), g) \in U_1,$$

$$c(x,t) = \rho^2(t, c(x,0)) \in U_2.$$

We put  $U = U_1 \times U_2$ . We also consider a probability space  $(U, \mathcal{B}(U), P(d\omega))$ , where  $\mathcal{B}(U)$  is a  $\sigma$ -algebra of Borel sets,  $P(d\omega)$  is a product measure on it.

A statistical solution corresponding to a measure  $\mu(\omega_0)$  is a probability measure  $P(d\omega)$  which is concentrated on  $U$  (that is  $P(U) = 1$ ), it is identical to  $\mu(\omega_0)$  for  $t = 0$  and fulfils some energetic inequalities.

**Theorem 3.** (see [13]). There exists exactly one statistical solution  $P(d\omega)$  to problem (1) - (12) corresponding to the measure  $\mu(\omega_0)$

Sketch of the proof. We solve systems (22) and (23) by the Galerkin approximation method ([9]). To do this we choose in  $X^i$  ( $i = 1, 2$ ) finite dimensional spaces  $V_m^i = \text{span} [ e_1^i(x), \dots, e_m^i(x) ]$  where  $e_1^i(x), \dots, e_m^i(x)$  are some special basis of eigenvectors. We take the orthogonal projections  $\Pi_m^i : X^i \rightarrow V_m^i$  (in the sequel we shall not put additional notation for the next approximations of  $u_m$ ). We put

$$(24) \quad \begin{aligned} u_m(x,t) &= \sum_{k=1}^m u_{mk}(t) e_k^1(x), \quad x \in \Omega, \quad u_m(t) = u_m(t, \cdot), \\ c_m(x,t) &= \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) e_k^2(x), \quad x \in \Omega, \quad c_m(t) = c_m(t, \cdot) \end{aligned}$$

and we solve this system to obtain the approximate solutions.

**Lemma 1.** There exists exactly one solution  $(u_m, c_m)$  to system (24) for  $t \in [0, T]$  and for every  $\epsilon > 0$  we have for it an a priori estimation. Thus

$$(25) \quad \mathcal{G}_m^1(t, u_m(x,0), g_m(x,t)) = u_m(x,t), \quad \mathcal{G}_m^2(t, c_m(x,0)) = c_m(x,t).$$

For the proof of this lemma we use the standard argumentation ([10], [13], [17]).

Now we introduce the following operators

$$S_m^1 : u_m(0) \in V_m^1 \rightarrow u_m(t) \in U^1, \quad t \in [0, T],$$

$$S_m^2 : c_m(0) \in V_m^2 \rightarrow c_m(t) \in U^2, \quad t \in [0, T].$$

We define the Galerkin approximations of the initial measures

$$u_m^1(\omega_0) := \mu^1 \left( (\Pi_m^1)^{-1} (\omega_0 \cap V_m^1) \right)$$

for  $\omega_0 \in B(U)$ ,  $i = 1, 2$ . We show ((13)) that the measures  $\mu_m^1 \times \mu_m^2$  are weakly convergent to  $\mu = \mu^1 \times \mu^2$  for  $m \rightarrow \infty$ . To define the statistical solution  $P_m = P_m^1 \times P_m^2$  of problem (1)-(12) we put

$$(26) \quad P_m^1(\omega) := \mu_m^1 \left( (S_m^1)^{-1}(\omega) \right), \quad P_m^2(\omega) := \mu_m^2 \left( (S_m^2)^{-1}(\omega) \right),$$

for every  $\omega \in B(U)$ .

Using the compactness method ((10), (17)) we prove that the family of measures  $\{P_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  is weakly compact on the space  $U$ . From Prokhorov's theorem ((12)) about weak compactness we have.

**Lemma 2.** The family of measures  $\{P_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  defined by formula (26) is weakly compact on the space  $U$ . Therefore, we can choose from the sequence  $\{P_m\}$  a subsequence  $\{P_{m_k}\}$  which is weakly convergent on  $U$  to a certain measure  $P$ .

We verify that  $p$  is the probability measure which satisfies all conditions from the definition of the statistical solution to problem (1)-(12).

We obtain the uniqueness of solutions in a similar way as in Theorem 6.1 ((17)) because we have uniqueness of the weak solution to problem (1)-(12).

## 6. FREE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS.

The notion of stochastic solutions, in the same sense as ours, but to the stochastic Navier-Stokes equations, was examined in (17). The solution to the stochastic Stefan problem considered here is, on one side, a probability measure on a Borel  $\sigma$ -algebra of the appropriate abstract space ((14)). This solution is, on the other side, a limit of a sequence of distributions of the solutions to the Itô - Galerkin approximations. The convergence is meant in a weak sense ((2)). The existence and uniqueness theorem is proved in [14].

Therefore, if we consider internal noises in the alloy, so-called "white noises", we have the following problem

$$(27) \quad \alpha(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} [ k(u) \nabla_x u ] + \alpha \frac{\partial f(u, c)}{\partial t} + \frac{\partial w_1(t)}{\partial t},$$

$$(28) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div} [ \bar{k}(c) \nabla_x c ] + \frac{\partial w_2(t)}{\partial t},$$

where  $w_1(t)$  and  $w_2(t)$  are independent Wiener processes with values in  $H \equiv [L^2(\Omega)]^n$ ,  $w_i(t,x) \in \mathcal{C} \equiv C([0,T],H)$  and the trajectories of the stochastic processes are treated in the Wiener space ([7], [17]). We put the initial and boundary conditions as in the statistical case which are the random functions independent of  $w_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

We solve this problem analogously as statistical one introducing the Itô - Galerkin approximations instead of Galerkin approximations because we are working on stochastic Itô differential equations.

## 7. THE FINITE - DIMENSIONAL APPROXIMATION OF THE STOCHASTIC FREE BOUNDARY VALUE PROBLEM.

Unfortunately, the solutions to the Itô - Galerkin approximations as well as the exact solutions to the stochastic Stefan problem can not be calculated. Therefore, we can construct ([15]) the finite - dimensional approximations of such solutions (see [12] for the stochastic Navier - Stokes equations). The probabilistic distributions of these approximations converge weakly to the solution of the stochastic Stefan problem. If we construct the increments of the Wiener process by a random generator, then we can compute explicitly the trajectories of the finite - dimensional approximations. By some estimations we get information about the probabilistic distributions of the solutions.

## REFERENCES.

- [1] V. ALEXIADES, J.R. CANNON, "Free boundary problems in solidification of alloys", SIAM J. Math. Anal., 11,2 (1980), 254-264.
- [2] P. BILLINGSLEY, "Convergence of probability measures", J. Wiley and Sons, New York, 1975
- [3] P. BILLINGSLEY, "Probability and measure", J. Wiley and Sons, New York, 1979.
- [4] E. BOBULA, K. TWARDONSKA, "A binary alloy solidification problem for parabolic differential equations", Control and Cybernetics, 16, 3-4 (1987), 45-58
- [5] E. BOBULA, K. TWARDONSKA, "On the solutions for the multidimensional Stefan problem", Bull. Pol. Ac. Tech., 36, 1-2 (1988), 37-48.



- [6] C. FOIAS, "Statistical study of Navier-Stokes equations I", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 48 (1972), 219-348.
- [7] N. IKEDA, S. WATANABE, "Stochastic differential equations and diffusion processes", North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1981.
- [8] S. L. KAMENOMOSTSKAYA, "On Stefan's problem" (in Russian), Mat. Sb. 534 (1961), 489-514.
- [9] O.A. LADYZNENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", Transl. Math. Monogr., Vol. 23, American Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [10] J.L. LIONS, "Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires", Dunod, Paris, 1969.
- [11] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Transl. Math. Monogr., Vol. 27, American Math. Soc., Providence, RI, 1971.
- [12] B. SCHMALFUSS, "Finite dimensional approximations to stochastic Navier-Stokes equations", Proc. of IFIP-WG 7/1 Working Conf., Stochastic Differential Systems, Eisenach, GRD, 1986, 109-115.
- [13] K. TWARDOWSKA, "Statistical solutions to a free boundary value problem for the parabolic partial differential equations", Submitted to Mathematicae Notae.
- [14] K. TWARDOWSKA, "On a free boundary value problem for the stochastic differential equations", Submitted to Mathematicae Notae.
- [15] K. TWARDOWSKA, "The finite-dimensional approximation of the stochastic Stefan problem", in preparation.
- [16] M. VIOT, "Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires", Thèse, Paris VI, 1976.
- [17] M.I. VISIK, A.I. KOMEC, A.W. FURSIKOW, "Nekotoryje matematicheskiye zadaci statisticeskoj vidromekaniki", Uspechi Mat. Nauk, 34,5 (1979), 136-210.



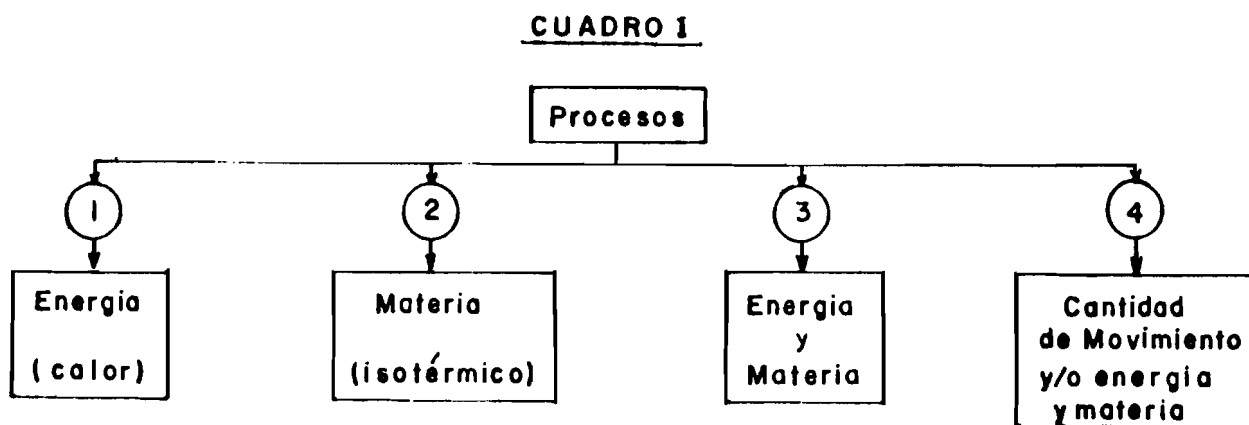
PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y MOVIL  
EN PROCESOS DE INGENIERIA QUIMICA

Luis T. VILLA

1. INTRODUCCION

Es sabido que uno de los principales campos de actividad en Ingeniería Química está constituido por la formulación de modelos y análisis de los mismos para procesos en los que ocurren fenómenos de transporte, transporte y transformación de: materia, energía, cantidad de movimiento, sean acoplados que desacoplados.

En el CUADRO 1 siguiente se explicitan algunos de los precitados procesos



- 1 : Fusión - Solidificación - Condensación - Ebullición - Combustión.
- 2 : Difusión-Reacción: gas-sólido, gas-líquido, líquido-líquido, líquido-sólido polidisperso.  
Catalizadores: preparación, envenenamiento y regeneración.  
Polímeros: hinchamiento.
- 3 : Solidificación de aleaciones - Fusión de hielo en soluciones salinas.  
Difusión-Reacción (no isotérmica)
- 4 : Flujo en medios porosos - Flujo en sistemas homogéneos.

Mecanismos de transporte y leyes fenomenológicas.

Consideraremos transporte de energía calórica sólo por conducción y obedeciendo a la ley de Fourier:

$$F = -k \nabla T \quad (1.1)$$

donde F denota un flujo de energía, k conductividad térmica y T temperatura. Eventualmente se contemplará transporte de energía por convección (movimiento

global de fluido)

En cuanto al transporte de materia se considerará el debido a la difusión según la ley de Fick:

$$J = - D \nabla C \quad (1.2)$$

denotando ahora con  $J$  un flujo de materia, con  $D$  el coeficiente de difusividad y con  $C$  a una concentración.

Con referencia a leyes cinéticas, se considerarán las usuales en el campo de las reacciones químicas.

Eventualmente podrán considerarse flujos convectivos de materia de la forma

$$G = V \cdot \nabla C \quad (1.3)$$

donde  $V$  denota un vector velocidad que a su vez vendrá de una ecuación de transporte de cantidad de movimiento, en la que se aceptará una ley fenomenológica del tipo conocida como ley de Newton para la viscosidad:

$$\tau = - \mu \Delta \quad (1.4)$$

donde  $\tau$  es el tensor esfuerzo,  $\mu$  la viscosidad y  $\Delta$  el tensor velocidad de deformación.

### Ecuaciones Diferenciales de Cambio.

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  una región acotada de contorno  $\partial\Omega$  suave. Por otra parte, sean  $u = u(x,y,z,t)$ ,  $c = c(x,y,z,t)$ ,  $p = p(x,y,z,t)$  funciones escalares como por ejemplo temperatura, concentración y presión respectivamente

Sea además  $E = E(x,y,z,t, u(x,y,z,t))$  una propiedad por unidad de volumen definida en  $\Omega$  ( $E$  puede por ejemplo representar una energía interna) y sea  $f = f(x,y,z, C(x,y,z,t), u(x,y,z,t))$  una fuente o sumidero irreversible para la propiedad  $E$  y para la  $C$  en  $\Omega$ .

Supongamos además que la región  $\Omega$  es atravesada por una corriente de fluido con perfil de velocidad  $V = V(x,y,z,t)$  y de presión  $p = p(x,y,z)$ .

Entonces, si se toma un volumen de control en  $\Omega$  y se realiza un balance para  $E, C, V$  se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D\nabla C) + V \cdot \nabla C - f(x,y,z,c,u); (x,y,z) \in \Omega, 0 < t < T \\ \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla(k\nabla u) + V \cdot \nabla u + a f(x,y,z,c,u); (x,y,z) \in \Omega, (0 < t < T) \\ \frac{\partial(pV)}{\partial t} = - \nabla p - \nabla \tau + \rho g; (x,y,z) \in \Omega, 0 < t < T \end{cases} \quad (1.5)$$

donde  $\rho$  denota una densidad y  $a$  una constante positiva vinculada al efecto térmico de la eventual reacción química contemplada por  $f$ .

(1.5) es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas en general altamente no lineales debido al efecto de la forma de  $f$ . El sistema (1.5) podría ser descriptivo de algunos de los procesos explicitados en el CUADRO I.

En el caso particular en que la región  $\Omega$  sea la sede de un sólido de composición inicial  $S_0$ , reactivo frente a la especie química en juego, el sistema (1.5) viene reemplazado por el siguiente:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D\nabla C) - V \cdot \nabla C - f(C, U, S), & (x, y, z) \in \Omega, 0 < t < T \\ \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla(k\nabla U) + a f(C, U, S), & (x, y, z) \in \Omega, (0 < t < T) \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -b f(C, U, S), & (x, y, z) \in \Omega, (0 < t < T) \end{cases} \quad (1.6)$$

donde  $S = S(t)$  representa la concentración de sólido reactivo,  $\epsilon$  la porosidad y  $b$  una constante positiva.

Este cursillo está dirigido específicamente a casos particulares sea de (1.5) que de (1.6) que se presentan cuando parte del contorno  $\partial\Omega$  no es fijo al transcurrir el tiempo, pudiéndose presentar las alternativas de que tal frontera se mueva con una ley desconocida a priori o conocida dando así lugar respectivamente a problemas de frontera libre y problemas de frontera móvil descriptivos de procesos de ingeniería química.

En lo referente a la formulación y análisis matemático de problemas en el campo de la conducción de calor con cambio de fase, como es sabido, los pioneros fueron Lamé-Clapeyron [1] (1831), Neumann (inédito), J) Stefan [2] (1891). En el campo de los procesos de difusión-reacción gas-sólido con control difusivo cabe destacar los trabajos de Yagi y Kunii [3], [4], (1953, 1955).

En la sección siguiente se reseñan algunos modelos descriptivos de procesos de ingeniería química. Como se apreciará, tales modelos constituyen problemas de frontera libre para las ecuaciones diferenciales parabólicas de (1.5) o (1.6) según corresponda.

El objetivo básico de la sección encierra la esperanza de que los modelos presentados conlleven al menos algún aspecto que resulte de interés analizar al mundo de la matemática aplicada.

## 2. PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

### 2.1. Proceso isotérmico de transferencia de materia y cantidad de movimiento

La situación física en juego consiste en el crecimiento de una burbuja estacionaria de gas en el seno de un líquido el que respecto de la burbuja se considerará un medio de extensión infinita (ver [5])

Consideraremos una burbuja esférica de radio inicial  $R_0$  que crece a expensas de gas disuelto en el líquido que desde el seno del mismo se incorpora por difusión hacia la burbuja

Denotando con:

$s = s(t)$  radio de la burbuja al tiempo  $t$ .

$V = V(r,t)$  componente radial de la velocidad del líquido inducida por el crecimiento de la burbuja.

$P = P(r,t)$  perfil de presión en el líquido.

$\rho = \text{cte}$  densidad del líquido.

$C = C(r,t)$  perfil de concentración de la especie gaseosa en consideración disuelta en el líquido.

$S = S(t)$  posición de la frontera libre (radio de la burbuja) al tiempo  $t$ .

$D = \text{cte}$  difusividad del gas en el líquido.

$\mu = \text{cte}$  viscosidad del líquido.

$P_g$  presión dentro de la burbuja (supuesta constante).

$P_\infty$  presión en el líquido lejos de la burbuja

$\rho_g$  densidad molar del gas

$C_e$  concentración de equilibrio del gas en la interfase líquido-burbuja.

$C_\infty$  concentración del gas disuelto en el líquido lejos de la burbuja.

Las pertinentes ecuaciones de continuidad, movimiento y difusión serían las siguientes

$$s^2 \frac{ds}{dt} = r^2 V, \quad s(t) < r < +\infty, \quad 0 < t < T; \quad (21)$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = 2 \mu \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} - \rho V \frac{\partial V}{\partial r}, \quad s(t) < r < +\infty, \quad 0 < t < T; \quad (22)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right) - V \frac{\partial C}{\partial r}, \quad s(t) < r < +\infty, \quad 0 < t < T \quad (23)$$

Sustituyendo en (22) la expresión de  $V$  obtenida de (21) e integrando respecto de  $r$  entre los límites  $r = s(t)$  y  $r = +\infty$  se obtiene la conocida ecuación de Rayleigh, es decir

$$\frac{P_g - P_\infty}{\rho} = 4 \mu \frac{\dot{s}}{s} + \frac{3}{2} \dot{s}^2 + \dot{s} \ddot{s}, \quad 0 < t < T; \quad (24)$$

Por otra parte, la sustitución de  $V$  de (2.1) en (2.3) produce

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right) - \frac{\dot{s} s^2}{r^2} \frac{\partial C}{\partial r}, \quad s(t) < r < +\infty, \quad 0 < t < T; \quad (2.6)$$

Entonces, se puede escribir el siguiente problema de frontera libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= D \left( \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right) - \frac{\dot{s} s^2}{r^2} \frac{\partial C}{\partial r}, \quad s(t) < r < +\infty, \quad 0 < t < T \\ \dot{s} \ddot{s} + \frac{3}{2} \dot{s}^2 + 4 \mu \frac{\dot{s}}{s} &= \frac{Pg - P_\infty}{\rho}, \quad 0 < t < T, \\ C(r, 0) &= C_\infty, \quad R_0 < r < +\infty \\ (2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(\infty, t) = C_\infty, \quad 0 < t < T \\ C(s(t), t) = C_e, \quad 0 < t < T \\ D \frac{\partial C}{\partial r}(s(t), t) = (C_e + Pg) \cdot \frac{ds}{dt}, \quad 0 < t < T \\ s(0) = R_0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En [6] A. Friedman estudió un caso restringido de (2.6) que surge al describir un proceso de decrecimiento de una burbuja esférica despreciando el efecto hidrodinámico inducido en la fase líquida.

En [7] S.J.D. Van Stralen presenta un análisis de diversas teorías conducentes al modelado del crecimiento de burbujas en líquidos puros sobrecalentados. Por otra parte, algunos aspectos sobre la solución de (2.6) se presentan en los trabajos [8] y [9] de la literatura.

Una cuestión interesante sobre (2.6) es la relativa al análisis de la influencia en la dinámica del crecimiento de la burbuja del volumen inicial de la misma.

## 2.2 Transformaciones por interacción uniforme de la interfase fluido-sólido

Transformaciones de este tipo se observan en muchos procesos de la ingeniería química, particularmente en casos donde están comprometidos sistemas gas-sólido reactivo y sólido-líquido. Al respecto basta citar algunas reacciones no catalíticas gas-sólido (ver por ej. [10] y [11]) y la nucleación y crecimiento de cristales.

En el trabajo [11] se proveen 116 referencias de artículos relativos al tema.

## 2.21 Cristalización en geometría esférica en líquido sobresaturado

Consideremos el crecimiento de un cristal a partir de un núcleo por precipitación de soluto desde solución líquida.

Si con  $C = C(r,t)$  se denota la concentración de soluto en fase líquida, con  $C_{\infty}$ ,  $C_e$ ,  $C_s$  respectivamente las concentraciones de soluto a sobresaturación, de equilibrio en la interfase sólido-líquido y en la fase sólida, habida cuenta de ciertas restricciones se puede escribir el siguiente modelo descriptivo del proceso en cuestión:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial t} &= D \left( \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right) - \frac{\dot{s}}{r^2} \frac{\partial C}{\partial r}, \quad s(t) < r < +\infty, \quad 0 < t < T \\
 s \dot{s} \dot{s} + \frac{3}{2} s \dot{s}^2 + 4 \mu \dot{s} &= 0, \quad 0 < t < T \\
 C(r,0) &= C_{\infty}, \quad R_0 < r < +\infty \\
 (28) \quad \left\{ \begin{array}{l} c(\infty,t) = C_{\infty}, \quad 0 < t < T \\ D \frac{\partial C}{\partial r} (s(t),t) = h(s(t), R_e) \cdot [C_{\infty} - C_e], \quad 0 < t < T \\ D \frac{\partial C}{\partial r} (s(t),t) = (C_s - C_e) \cdot \frac{ds}{dt}, \quad 0 < t < T \\ s(0) = R_0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

En la formulación de (27) se han seguido etapas análogas que las explicitadas detalladamente en la formulación de (26)

$D$  es el coeficiente de difusividad del soluto en el líquido (se ha supuesto constante),  $\mu$  la viscosidad del líquido,  $h = h(s(t), R_e)$  el coeficiente de transferencia del soluto hacia la interfase líquido-soluto. Nótese que  $h$  es una función del tamaño del cristal, es decir, de la posición de la frontera libre y de la fluidodinámica del sistema explicitada a través del número de Reynolds  $R_e$ .

Una correlación frecuentemente usada para  $h$  en el presente caso es la siguiente

$$h \cdot \frac{s(t)}{D} = 1 + f(R_e) \cdot \sqrt{s(t)}, \quad (29)$$

donde  $f(R_e) = 0$  si  $R_e = 0$



222 Transformación de un sólido poroso esférico por reacción química no catalítica con un gas

Consideremos un sistema constituido por un sólido reactivo esférico de radio inicial  $R_0$  inmerso en una atmósfera de gas A de tal modo que ocurre la siguiente transformación química



Hay numerosos procesos químicos (por ejemplo la reducción de pellets de óxido de níquel y hierro con monóxido de carbono, ver [12] y [13]) en los que la transformación esquematizada por (29) transcurre controlada por la etapa de difusión del gas a través de la capa inerte de sólido ya transformado totalmente. Bajo esta última consideración y otras que explicitaremos luego, se puede escribir el siguiente problema de frontera libre como descriptivo de (29):

$$\epsilon_2 \frac{\partial U}{\partial t} = D_1 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \text{ en } \Omega_1 \equiv \{ (r,t) : s(t) < r < R(t) , 0 < t < T \} , \quad (211)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial V}{\partial t} = D_2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - f(V) \text{ en } \Omega_2 \equiv \{ (r,t) : 0 < r < s(t) , 0 < t < T \} , \quad (212)$$

$$R(0) = R_0 , U = 0 , V = 0 \text{ para } t = 0 , 0 \leq r \leq R_0 , \quad (213)$$

$$U(R(t),t) = G(t) \text{ ó } D_1 \frac{\partial U}{\partial r}(R(t),t) = h \left( U_\infty - U(R(t),t) \right) , \quad (214)$$

$$D_2 \frac{\partial V}{\partial r}(0,t) = 0 , 0 < t < T , \quad (215)$$

$$U(s(t),t) = V(s(t),t) = W(s(t),t) , 0 < t < T , \quad (216)$$

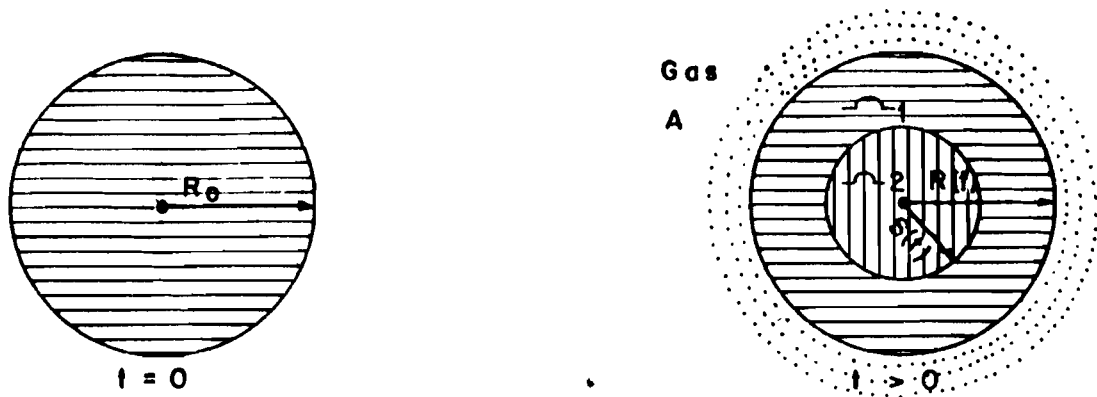
$$D_2 \frac{\partial V}{\partial r}(s(t),t) - D_1 \frac{\partial U}{\partial r}(s(t),t) = a \rho \frac{ds}{dt} , 0 < t < T , \quad (217)$$

$$D_2 \frac{\partial V}{\partial r}(s(t),t) - D_1 \frac{\partial U}{\partial r}(s(t),t) = a K_S g(W) , 0 < t < T , \quad (218)$$

$$s(0) = R_0 \quad (219)$$

En la FIGURA 1 siguiente se esquematiza el curso del proceso

FIGURA 1



La región definida por  $\Omega_1$  representa sólido ya totalmente reaccionado (inerte). La reacción química ocurre en la interfase separatriz de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  cuya coordenada al tiempo  $t$  la da precisamente  $S(t)$  y también homogéneamente en  $\Omega_2$ .

Se considera que por efecto de la transformación química los cambios estructurales en el sólido son tales que producen una disminución monótona en el volumen del mismo, aún manteniendo su forma, durante el curso de la reacción. Con  $R(t)$  se denota el radio del sólido al tiempo  $t$ .

$U = U(r,t)$ ,  $V = V(r,t)$  denotan la concentración del gas en la zona inerte y de reacción respectivamente.

$\epsilon$ ,  $D$ ,  $h$ ,  $K_S$ ,  $\rho$ ,  $a$  representan respectivamente porosidad, coeficiente efectivo de difusión de masa del gas, coeficiente de transferencia del gas, constante cinética superficial, densidad del sólido puro, coeficiente estequiométrico.

Las funciones  $f$  y  $g$  representan las expresiones cinéticas homogénea y superficial, siendo las siguientes las condiciones usualmente exigidas sobre las mismas

$$f > 0, \quad \forall V > 0, \quad f(0) = 0, \quad (2.20)$$

$$g > 0, \quad \forall W > 0, \quad g(0) = 0, \quad (2.21)$$

y las de Wen y Langmuir las formas usualmente propuestas:

$$f(V) = K V^n, \quad n \text{ (orden de reacción)}, \quad (2.22)$$

$$g(W) = K_S W^m, \quad m \text{ (orden de reacción)}, \quad (2.23)$$

$$f(V) = \frac{a V^n}{b + c V^n}, \quad (a, b, c > 0), \quad (2.24)$$

$$g(W) = \frac{a W^m}{b + c W^m}, \quad (2.25)$$

Para el caso de considerar las cinéticas (2.21) y (2.22), una cuestión interesante para analizar en relación al modelo (2.10) - (2.18) es la dependencia de la solución con el orden de reacción para el caso cuasi-estacionario.

### 3. PROBLEMAS DE FRONTERA MÓVIL

#### 3.1 Difusión-Reacción de materia

Un problema de frontera móvil interesante es el que aparece asociado al problema de frontera libre (2.10) - (2.18) en el caso en que en tal modelo se considera despreciable el efecto de la reacción química homogénea. El problema a considerar se puede entonces postular como sigue (para sólido plano):

$$\epsilon \frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad , \quad \text{en } \Omega \equiv \{ (r,t) : s(t) < r < R(t) \quad , \quad 0 < t < T \} \quad , \quad (3.1)$$

$$R(0) = R_0 \quad , \quad U = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq R_0 \quad , \quad (3.2)$$

$$U(R(t),t) = G(t) \quad , \quad 0 < t < T \quad , \quad (3.3)$$

$$- D \frac{\partial U}{\partial r} (s(t),t) = a \rho \frac{ds}{dt} \quad , \quad 0 < t < T \quad , \quad (3.4)$$

$$- D \frac{\partial U}{\partial r} (s(t),t) = a K_{\Sigma} U^n (s(t)) \quad , \quad 0 < t < T \quad , \quad (3.5)$$

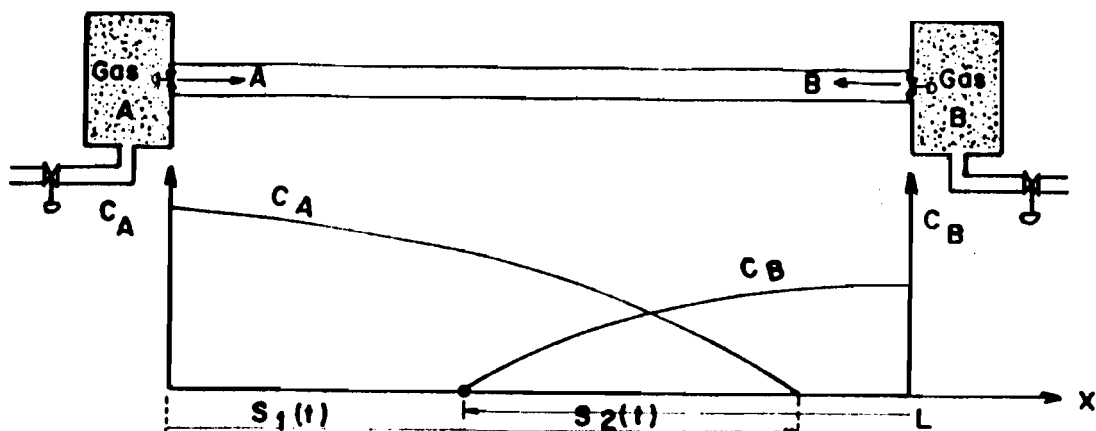
$$s(0) = R_0 \quad (3.6)$$

Para el caso especial en que  $R(t) \equiv R_0$  ,  $\forall t \geq 0$  y  $n = 1$ , el problema inverso asociado a (3.1) - (3.6) esto es asignar a priori una ley para  $s = s(t)$  y entonces encontrar  $U$  que verifique (3.1), (3.4), (3.5), en particular la expresión de  $G(t)$ , fue resuelto en [14] cuando se asigna para  $s(t)$  una expresión tal que  $\ddot{s} = 0$ .

#### 3.2 Difusión-Reacción multicomponentes

En la FIGURA II siguiente se esquematiza un proceso de contradifusión de dos componentes químicos A y B en estado gaseoso que al entrar en contacto experimentan una reacción química rápida e irreversible.

FIGURA II



Se supone que uno de los componentes, por ejemplo el A tiene un coeficiente de difusión mucho más bajo que el otro.

Hay equipos experimentales que permiten seguir las coordenadas  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ , en definitiva podemos para este proceso considerar asignadas las leyes para el movimiento de las fronteras no fijas.

Si con  $C_A = C_A(x,t)$ ,  $C_B = C_B(x,t)$ ,  $D_A$ ,  $D_B$  se denotan respectivamente la concentración y la difusividad de cada especie química en juego, un modelo matemático procedente para el proceso esquematizado es el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_A = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L - s_2(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_B = D_B \frac{\partial^2 C_B}{\partial x^2}, \quad L - s_1(t) < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_A = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - f(C_A, C_B), \quad L - s_2(t) < x < s_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_B = D_B \frac{\partial^2 C_B}{\partial x^2} + f(C_A, C_B), \quad L - s_2(t) < x < s_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.10)$$

$$s_1(0) = 0, \quad s_2(0) = 0 \quad (3.11)$$

$$C_A(x,0) = 0, \quad C_B(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.12)$$

$$C_A(0,t) = F(t), \quad C_B(L,t) = G(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.13)$$

$$C_A(s_1(t), t) = 0 \quad , \quad C_B(s_2(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \quad (3.14)$$

$$C_A(L - s_2(t), t) = C_A(s_2(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \quad (3.15)$$

$$C_B(s_1(t), t) = C_B(L - s_1(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \quad (3.16)$$

$$D_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} C_A(L - s_2(t)) - \frac{\partial}{\partial x} C_A(s_2(t)) \right] = -D_B \frac{\partial}{\partial x} C_B(s_2(t)) \quad , \quad 0 < t < T \quad , \quad (3.17)$$

$$D_B \left[ \frac{\partial}{\partial x} C_B(L - s_1(t)) - \frac{\partial}{\partial x} C_B(s_1(t)) \right] = -D_A \frac{\partial}{\partial x} C_A(s_1(t)) \quad , \quad 0 < t < T \quad , \quad (3.18)$$

En [15] y [16] se analiza existencia y unicidad para casos restringidos obtenidos de (3.7) - (3.18) considerando esencialmente que se satisfaga la condición

$$s_1(t) + s_2(t) = L \quad , \quad \forall t > 0 \quad , \quad (3.19)$$

que significa precisamente que la reacción química ocurre totalmente en la interfase de separación de las zonas que sólo contienen A o B.

#### REFERENCIAS

- [1] LAMÉ-CLAPEYRON, "Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", ANN. CHIMIE ET PHYSIQUE 47, 250-256 (1831).
- [2] J. STEFAN, "Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere", ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE 42, 269-286 (1891).
- [3] S. YAGI - D. KUNII, "Proposed Theory of Fluidized Roasting of Sulfide Ore with Uniform Size" "Single Particle of Ore in the Fluidized Bed", J. CHEM. SOC. JAP. IND. CHEM, 56:131 (1953)
- [4] S. YAGI - D. KUNII, "Fluidized-Solid Reactors for Particles with Decreasing Diameters", CHEM. ENG. JAP., 19:500 (1955).
- [5] J. SZEKELY - N. K. THEMELIS, "Rate Phenomena in Process Metallurgy", John Wiley & Sons Inc., 1971
- [6] A. FRIEDMAN, "Gas Bubble in Liquid", Journal of MATHEMATICS and

- [7] S. J. D. VAN STRALEN, "The Growth Rate of Vapour Bubbles in Superheated Pure Liquids and Binary Mixtures". INT. J. HEAT AND MASS TRANSFER. Vol. 11, 1467-1489 (1968).
- [8] L. E. SCRIVEN, Chem. Eng. Sci. 10, 1 (1959)
- [9] J. SZEKELY - G. P. MARTINS, Chem. Eng. Sci. 26, 147 (1971).
- [10] C. Y. WEN, "Noncatalytic Heterogeneous Solid Fluid Reaction Models", INDUSTRIAL AND ENGINEERING CHEMISTRY, Vol. 60, N° 9 (1968).
- [11] O. M. ALFARO - P. E. ARCE, "Non-Catalytic Gas-Solid Reactions and Their Applications to Combustion and Gasification. A Review". REVISTA LATINOAMERICANA DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA. Vol. 6, N° 3, (1982).
- [12] C. B. D. TINE, 1985, "CHEM. ENG. RES. DES., 63:112-116".
- [13] L. T. VILLA - O. D. QUIROGA, "A Note on a Simple Model for Non-Catalytic Gas-Solid Reaction". CHEM. ENG. RES. DES., Vol. 67, January 1989.
- [14] D. A. TARZIA - L. T. VILLA, "Un problema inverso para el modelo de Wen en difusión-reacción sólido-gas", ACTAS MECOM 1988.
- [15] E. BOBULA - K. TWARDOWSKA, "On a Certain Inverse Stefan Problem". BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCE. TECHNICAL SCIENCES. Vol. 33, N° 7-8, 1985.
- [16] L. T. VILLA, "Some Remarks on a moving boundary problem in a fluid-fluid reaction-diffusion system." To appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications.

INIQUI (CONICET-UNSa),  
Fac. de Ciencias Tecnológicas,  
Buenos Aires N° 177,  
4400 Salta - ARGENTINA.

# EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES Y PROBLEMAS RELACIONADOS

Domingo Alberto TARZIA

**ABSTRACT :** We study some mixed elliptic differential problems with phase-change, i.e. with solutions of non-constant sign as functions of the Dirichlet and Neumann data.

**KEY WORDS :** Stefan problem, free boundary problems, phase-change problems, variational inequalities, Mixed elliptic problem.

Se considera un material conductor del calor que ocupa  $\Omega$ , un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$  para las aplicaciones), con una frontera  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  suficientemente regular con  $\text{med}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$ ,  $|\Gamma_2| > 0$  y  $|\Gamma_3| \geq 0$ . Sin pérdida de generalidad, se supone que la temperatura de cambio de fase es  $0^\circ\text{C}$ . Sobre la porción de frontera  $\Gamma_1$  se tiene una temperatura constante  $b > 0$  y sobre  $\Gamma_2$  se impone un flujo de calor constante (saliente)  $q > 0$ ; se supone también que la porción de frontera  $\Gamma_3$  (cuando existe) es una pared impermeable al calor, es decir que el flujo de calor sobre  $\Gamma_3$  es nulo. Si se considera en  $\Omega$  un problema estacionario de conducción de calor, sin fuentes de calor en su interior, desde un punto de vista físico, se tienen las siguientes conclusiones :

i) Si  $q$  es pequeño entonces la temperatura en  $\Omega$  resultará positiva y por ende no existirá un cambio de fase del material. En este caso, el problema resultará ser sólo de conducción para la fase líquida.

ii) Si  $q$  es grande entonces la temperatura en  $\Omega$  asumirá valores positivos y negativos, y por ende existirá un cambio de fase del material.

En esta charla se encontrará para  $q$  una condición suficiente (y/o necesaria)

para que exista en  $\Omega$  un cambio de fase, es decir se demostrará que existe  $q_0 > 0$  de manera que  $\forall q > q_0$  se tenga en  $\Omega$  un problema estacionario de Stefan a dos fases (la solución tiene signo no-constante).

Análogamente, si se reemplaza la condición de temperatura dada sobre  $\Gamma_1$  por una condición de tipo Neumann con un coeficiente de transferencia de calor  $\alpha > 0$ , entonces se hallarán para  $q, \alpha$  condiciones suficientes (y/o necesarias) para que la solución tenga signo no-constante.

Siguiendo [Du, Ta1] se estudia la temperatura  $\theta = \theta(x)$ , definida para  $x \in \Omega$ . El conjunto  $\Omega$  puede expresarse en la forma

$$(1) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$$

donde

$$(2) \quad \Omega_1 = \{ x \in \Omega / \theta(x) < 0 \}, \quad \Omega_2 = \{ x \in \Omega / \theta(x) > 0 \}$$

$$\mathcal{L} = \{ x \in \Omega / \theta(x) = 0 \},$$

representan respectivamente la fase sólida, la fase líquida y la frontera libre que las separa. La temperatura  $\theta$  puede representarse en  $\Omega$  de la siguiente manera :

$$(3) \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & , x \in \Omega_1 , \\ 0 & , x \in \mathcal{L} , \\ \theta_2(x) > 0 & , x \in \Omega_2 , \end{cases}$$

y satisface las siguientes condiciones :

$$(4) \quad \begin{aligned} (i) & \quad -k_i \Delta \theta_i = g \text{ en } \Omega_i \text{ ( } i = 1, 2 \text{ )} , \\ (ii) & \quad \theta_1 = \theta_2 = 0 \text{ , } k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \text{ sobre } \mathcal{L} \\ (iii) & \quad \theta_2 / \Gamma_1 = b \text{ , } (v) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} |_{\Gamma_3} = 0 \text{ ,} \\ & \quad -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} |_{\Gamma_2} = q \text{ si } \theta |_{\Gamma_2} > 0 \text{ ,} \\ (iv) & \quad -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} |_{\Gamma_2} = q \text{ si } \theta |_{\Gamma_2} < 0 \text{ ,} \end{aligned}$$

donde  $k_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ) es la conductividad térmica de la fase  $i$  ( $i = 2$  : líquida,  $i=1$  : sólida),  $b = b(x)$  es la temperatura dada sobre  $\Gamma_1$ ,  $q = q(x)$  es el flujo de calor dado sobre  $\Gamma_2$  y  $g = g(x)$  es un aporte de energía dado en  $\Omega$ .

Observación 1. El calor latente de fusión no interviene en el caso



estacionario del problema de Stefan a dos fases debido al hecho de que la frontera que separa las dos fases sólida y líquida es invariante en el transcurso del tiempo.

Observación 2. Si la temperatura  $b$  toma valores positivos y negativos sobre  $\Gamma_1$ , entonces se tiene realmente un problema estacionario a dos fases. En cambio, si  $b$  asume valores de signo constante (por ejemplo, positivo) sobre  $\Gamma_1$ , dicho hecho no está, en general, garantizado; ésto motiva el presente cursillo.

A continuación se transformará el problema (4) a través de un cambio de función incógnita, con el objeto de eliminar la frontera libre  $\mathcal{L}$ , escribir las ecuaciones en el sentido de las distribuciones en  $\Omega$  y hallar la correspondiente formulación variacional. Sean

$$(5) \quad \begin{aligned} T_2 &= \theta^+ , \quad T_1 = -\theta^- \quad \text{en } \Omega , \\ u &= k_2 T_2 + k_1 T_1 = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- \quad \text{en } \Omega \end{aligned}$$

donde  $\theta^+$  y  $\theta^-$  representan la parte positiva y negativa de la función  $\theta$ .

LEMA 1. (i) Se tienen las siguientes propiedades :

$$(6) \quad \langle -k_2 \Delta T_2, \phi \rangle = \int_{\Omega_2} g \phi \, dx - k_2 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \phi \, d\gamma , \quad \forall \phi \in D(\Omega) ,$$

$$(7) \quad \langle -k_1 \Delta T_1, \phi \rangle = \int_{\Omega_1} g \phi \, dx + k_1 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \phi \, d\gamma , \quad \forall \phi \in D(\Omega) ,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa la dualidad  $D'(\Omega) \times D(\Omega)$ ,  $n$  es el vector normal exterior a  $\partial\Omega$  y a  $\mathcal{L}$  (en la dirección de  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ ).

ii) La nueva función incógnita  $u$  satisface las siguientes relaciones :

$$(8) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= g \quad \text{en } D'(\Omega), \\ u|_{\Gamma_1} &= B , \\ -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} &= q , \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0 , \end{aligned}$$

donde

$$(9) \quad B = k_2 b^+ - k_1 b^- \quad \text{en } \Gamma_1 .$$

Demostración.  $\forall \phi \in D(\Omega)$ , se tiene :

$$\begin{aligned} \langle -k_2 \Delta T_2, \phi \rangle &= -k_2 \int_{\Omega} T_2 \Delta \phi \, dx = -k_2 \int_{\Omega_2} \theta_2 \Delta \phi \, dx = \\ &= -k_2 \left\{ \int_{\Omega_2} \Delta \theta_2 \phi \, dx + \int_{\partial(\Omega_2)} \left( \theta_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \phi \right) d\gamma \right\} = \\ &= \int_{\Omega_2} g \phi \, dx - k_2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \phi \, d\gamma \quad , \end{aligned}$$

es decir (6).

Ejercicio 1. Completar el Lema 1, probando (7) y (8).

Observación 3. La transformación inversa a (5) está dada por

$$(10) \quad \theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^- \quad \text{en } \Omega \quad .$$

TEOREMA 2. (i) La formulación variacional del problema (8) está dada por :

$$(11) \quad a(u, v - w) = L_Q(v - w) \quad , \quad \forall v \in K \quad , \quad u \in K \quad ,$$

donde

$$V = H^1(\Omega) \quad , \quad V_0 = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = 0 \right\} \quad , \quad H = L^2(\Omega) \quad ,$$

$$(12) \quad K = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = B \right\} \quad , \quad (u, v) = \int_{\Omega} u v \, dx \quad ,$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad , \quad L(v) = L_Q(v) = (g, v) - \int_{\Gamma_2} q v \, d\gamma \quad .$$

(ii) Si  $L_Q \in V'_0$  y  $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$  entonces existe una única solución de la ecuación variacional (10).

(iii) La solución de la ecuación variacional (11) está caracterizada por el siguiente problema de mínimo

$$(13) \quad J_Q(u) \leq J_Q(v) \quad , \quad \forall v \in K \quad , \quad u \in K \quad ,$$

donde

$$(14) \quad J_Q(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L_Q(v) \quad , \quad v \in V \quad .$$

Demostración (i) Si se multiplica la ecuación diferencial en (8) por  $(v - u)$  con  $v \in K$ , se integra en el dominio  $\Omega$  y se aplica la fórmula de Green siguiente

$$(15) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma, \quad (u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)),$$

entonces se obtiene (11).

(ii) De  $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$  surge la existencia de

$$(16) \quad B_0 \in V \quad / \quad B_0|_{\Gamma_1} = B.$$

Entonces se tiene la equivalencia (11)  $\Leftrightarrow$  (17), donde

$$(17) \quad a(U,v) = F(v), \quad \forall v \in V_0, \quad U \in V_0,$$

con

$$U = u - B_0 \in V_0,$$

(18)

$$F(v) = L(v) - a(B_0,v), \quad \forall v \in V_0.$$

La existencia y unicidad de  $U \in V_0$ , solución de (17) (análogamente  $u \in K$ , solución de (11)) surge por aplicación del Teorema de Lax–Milgram [BaCa, KiSt, Ro, Ta3].

(iii) La caracterización del problema de mínimo (13) surge por ser la forma bilineal  $a$  simétrica.

Observación 4. La condición  $L \in V_0'$  se verifica si se supone, por ejemplo, que se tiene :

$$(19) \quad g \in L^2(\Omega), \quad q \in L^2(\Gamma_2).$$

Una variante, del problema definido en (4), consiste en reemplazar la condición (4iii) por la siguiente

$$- k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} |_{\Gamma_1} = \alpha (k_2 \theta_2 - B) \quad \text{si } \theta |_{\Gamma_1} > 0,$$

(4iiibis)

$$- k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} |_{\Gamma_1} = \alpha (k_1 \theta_1 - B) \quad \text{si } \theta |_{\Gamma_1} < 0,$$

donde  $\alpha > 0$  es un parámetro, conocido como coeficiente de transferencia de la pared  $\Gamma_1$ .

Ejercicio 2. (i) Si se realiza el cambio de función incógnita (5) en el problema (4bis) (dado por las condiciones (4i, ii, iiibis, iv)) entonces se obtiene :

$$(20) \quad -\Delta u = g \text{ en } D'(\Omega), \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - B), \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

(ii) La formulación variacional del problema (20) está dada por

$$(21) \quad a_\alpha(u, v) = L_{\alpha q B}(v), \quad \forall v \in V, \quad u \in V,$$

donde

$$(22) \quad a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u v \, d\gamma, \quad L_{\alpha q B}(v) = L_q(v) + \alpha \int_{\Gamma_1} B v \, d\gamma.$$

(iii) Si  $L_q \in V'_0$  y  $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$  entonces existe una única solución de la ecuación variacional (21).

(iv) La solución de la ecuación variacional (21) está caracterizada por el siguiente problema de mínimo

$$(23) \quad G_{\alpha q B}(u) \leq G_{\alpha q B}(v), \quad \forall v \in V, \quad u \in V,$$

donde

$$(24) \quad J_{\alpha q B}(v) = -\frac{1}{2} a_\alpha(v, v) - L_{\alpha q B}(v), \quad v \in V.$$

Ejercicio 3. La forma bilineal  $a_1$  es coerciva sobre  $V$ , es decir

$$(25) \quad \exists \lambda_1 > 0 \quad / \quad a_1(v, v) \geq \lambda_1 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Más aún, también lo es la forma bilineal  $a_\alpha$  debido al hecho

$$(26) \quad a_\alpha(v, v) \geq \lambda_\alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V,$$

con

$$(27) \quad \lambda_\alpha = \lambda_1 \text{Mín}(1, \alpha) > 0.$$

TEOREMA 3. Si se suponen las hipótesis que garantizan la existencia y unicidad de las ecuaciones variacionales (11) y (21), cuyas soluciones se denotan por  $u$  y  $u_\alpha$  respectivamente, entonces se tiene

$$(28) \quad u_\alpha \rightarrow u \text{ en } V \text{ fuerte cuando } \alpha \rightarrow +\infty .$$

Demostración. Si se elige  $v = u_\alpha - u \in V$  en (21), se suma a ambos miembros el término  $-a(u, u_\alpha - u)$ , se obtiene

$$(29) \quad a_\alpha(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = L_\alpha(\xi_\alpha) - a(u, \xi_\alpha) , \quad \xi_\alpha = u_\alpha - u \in V .$$

Como  $\alpha$  tenderá a  $+\infty$ , se puede suponer que  $\alpha > 1$ ; entonces, por (25), se deduce

$$(30) \quad \lambda_1 \| \xi_\alpha \|_V^2 + (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} \xi_\alpha^2 d\gamma \leq a_\alpha(\xi_\alpha, \xi_\alpha) \leq C_1 \| \xi_\alpha \|_V ,$$

donde  $C_1 > 0$  es una constante independiente de  $\alpha$ , y por ende

$$(31) \quad \| \xi_\alpha \| \leq C_2 , \quad (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} \xi_\alpha^2 d\gamma \leq C_3 ,$$

donde  $C_2 = C_1/\lambda_1 > 0$  y  $C_3 = C_1^2/\lambda_1 > 0$  son dos nuevas constantes independientes de  $\alpha$ . De las estimaciones (31), se deduce que cuando  $\alpha \rightarrow +\infty$ , al menos por una subsucesión, se tiene

$$(32) \quad u_\alpha \rightarrow w \text{ en } V \text{ débil, } w \in V ,$$

$$(33) \quad (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha - B)^2 d\gamma \leq C_3 .$$

Teniendo en cuenta (33) y el hecho de que la aplicación

$$(34) \quad v \in V \rightarrow \int_{\Gamma_1} v^2 d\gamma \in \mathbb{R}$$

es semi-continua inferiormente en  $V$  débil, entonces se deduce

$$(35) \quad 0 \leq \int_{\Gamma_1} (w - B)^2 d\gamma \leq \liminf_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha - B)^2 d\gamma = 0 ,$$

es decir  $\omega \in \Gamma_1 = B$ , con lo cual  $\omega \in K$ . Si se toma  $v \in V_0 \subset V$  en (21), se tiene

$$(36) \quad a(u_\alpha, v) = L_Q(v), \quad \forall v \in V_0, \quad u_\alpha \in V,$$

y por ende con el pasaje al límite  $\alpha \rightarrow +\infty$ , se obtiene

$$(37) \quad a(\omega, v) = L_Q(v), \quad \forall v \in V_0, \quad \omega \in K,$$

es decir  $\omega = u \in K$ , por la unicidad de la solución de la ecuación variacional (11) que resulta trivialmente equivalente a la (37). Por otra parte y para  $\alpha > 1$ , se tiene

$$(38) \quad \lambda_1 \|u_\alpha - u\|_V^2 \leq a_\alpha(u_\alpha - u, u_\alpha - u) = L_Q(u_\alpha - u) - a(u, u_\alpha - u),$$

obteniéndose (28).

A continuación se verá el comportamiento de la temperatura  $\theta_\alpha$  cuando  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

LEMA 4. Se tiene

$$(39) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|\theta_\alpha - \theta\|_H = 0.$$

Demostración Teniendo en cuenta (28) (y por ende la convergencia será en  $H$  fuerte) y el hecho siguiente

$$(40) \quad \begin{aligned} \|u_\alpha - u\|_H^2 &= \|(u_\alpha^+ - u^+) - (u_\alpha^- - u^-)\|_H^2 = \\ &= \|u_\alpha^+ - u^+\|_H^2 + \|u_\alpha^- - u^-\|_H^2 - 2(u_\alpha^+ - u^+, u_\alpha^- - u^-) = \\ &= \|u_\alpha^+ - u^+\|_H^2 + \|u_\alpha^- - u^-\|_H^2 + 2(u_\alpha^+, u^-) + 2(u^+, u_\alpha^-) \geq \\ &\geq \|u_\alpha^+ - u^+\|_H^2 + \|u_\alpha^- - u^-\|_H^2 \end{aligned}$$

se deduce

$$(41) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|u_\alpha^+ - u^+\|_H + \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|u_\alpha^- - u^-\|_H = 0.$$

De la desigualdad

$$(42) \quad \|\theta_\alpha - \theta\|_H \leq \frac{1}{k_2} \|u_\alpha^+ - u^+\|_H + \frac{1}{k_1} \|u_\alpha^- - u^-\|_H,$$

surge (39)

De ahora en más se considerará el caso

$$(43) \quad g = 0 \text{ en } \Omega ,$$

es decir

$$(44) \quad I_q(v) = - \int_{\Gamma_2} q v \, d\gamma ,$$

y se analizarán las condiciones necesarias y/o suficientes para que los correspondientes problemas elípticos mixtos (B) (con formulación variacional (11)) (ver parte (A) ) [Ta4] y (20) (con formulación variacional (21)) ( ver parte (B) ) [TaTa] tengan solución con un signo no-constante, es decir que representen casos estacionarios de problemas de Stefan a dos fases. El caso  $g \neq 0$  se analiza en la Conferencia de G.G. Garguichevich en el presente Seminario (CUADERNOS N. 17, p.29-44 y en el trabajo [GaTa] .

Parte (A) :

Sea  $u = u_q = u_{qB}$  la única solución de la ecuación variacional (11), con  $g = 0$  en  $\Omega$ , para datos  $B = \text{const.} > 0$  sobre  $\Gamma_1$  y  $q = \text{const.} > 0$  sobre  $\Gamma_2$  .

LEMA 5. Se tiene la siguiente expresión :

$$(45) \quad a(u_q^-, u_q^-) = q \int_{\Gamma_2} u_q^- \, d\gamma$$

Demostración. Basta elegir  $v = u_q^+ \in K$  en (11) .

Observación 5. De (45) y del hecho que  $u_q^- \in V_0$  , se deduce la equivalencia :

$$(46) \quad u_q^- \not\equiv 0 \text{ en } \Omega \Leftrightarrow u_q^- \not\equiv 0 \text{ sobre } \Gamma_2$$

de la cual se obtiene que, para un dado valor de  $q$  , habrá en  $\Omega$  un cambio de fase ( $u_q$  ó  $\theta_q$  toman valores positivos y negativos en  $\Omega$ ) si y solamente si la función  $u_q$  toma valores negativos sobre la frontera  $\Gamma_2$  ; dicho de otra forma, la función  $u_q$  comenzará a asumir valores negativos sobre  $\Gamma_2$  .

LEMA 6. Si  $u_i \equiv u_{q_i}$  es la solución de (11) para  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ), entonces se tienen las siguientes igualdades :

$$(47) \quad a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) d\gamma ,$$

$$(48) \quad a(u_2, u_2) - a(u_1, u_1) = a(u_2 + u_1, u_2 - u_1) = (q_1 + q_2) \int_{\Gamma_2} (u_1 - u_2) d\gamma$$

Además, se tienen las siguientes propiedades :

i) Si  $q_2 \leq q_1$  entonces

$$(49) \quad (a) \ u_1 \leq u_2 \text{ en } \Omega , \quad (b) \ \int_{\Gamma_2} u_1 d\gamma \leq \int_{\Gamma_2} u_2 d\gamma .$$

ii) Además, las funciones  $q \rightarrow u_q$  y  $q \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma$  son monótonas estrictamente decrecientes, es decir :

$$(a) \ u_1 \leq u_2 , \ u_1 \neq u_2 \text{ en } \Omega ,$$

$$(50) \quad q_2 < q_1 \Rightarrow$$

$$(b) \ \int_{\Gamma_2} u_1 d\gamma < \int_{\Gamma_2} u_2 d\gamma .$$

Demostración. Si se toma  $v = u_2 \in K$  en la ecuación variacional correspondiente a  $u_1$  y  $v = u_1 \in K$  en la correspondiente a  $u_2$ , luego se suman y se restan ambas igualdades, entonces se obtienen (47) y (48) respectivamente.

i) La condición (49b) surge directamente de (47). Para demostrar (49a) se tendrá en cuenta la siguiente equivalencia :

$$(51) \quad u_1 \leq u_2 \text{ en } \Omega \Leftrightarrow W = 0 \text{ en } \Omega ,$$

donde

$$(52) \quad W = (u_2 - u_1)^- .$$

Como  $W \in V_0$ , entonces si se utiliza  $v = u_2 + W \in K$  en la ecuación variacional correspondiente a  $u_1$  y  $v = u_1 + W \in K$  en la correspondiente a  $u_2$  y luego se suman ambas igualdades, se tiene :

$$(53) \quad 0 \leq (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} W d\gamma = a(u_2 - u_1, W) = -a(W, W) \leq 0 ,$$

es decir  $W = 0$  en  $\Omega$ .

ii) Para demostrar (50a,b) se utilizan los siguientes resultados :

$$(A) \quad u_1 = u_2 \text{ en } \Omega \Rightarrow q_1 = q_2 \quad \text{ó} \quad \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) d\gamma = 0 .$$



$$(B) \quad \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) d\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (Bi) \quad u_2 = u_1 \text{ en } \Omega, \\ (Bii) \quad q_1 = q_2 \end{array}$$

La condición (A) resulta directamente de (47) y la condición (Bi) se deduce de (47) y del hecho que  $u_2 - u_1 \in V_0$ . Teniendo en cuenta la hipótesis de (B), el resultado (Bi) y las ecuaciones variacionales correspondientes a  $u_2$  y  $u_1$ , se deduce:

$$(54) \quad (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (v - u_1) d\gamma = 0, \quad \forall v \in K.$$

Tomando un elemento  $v_0 \in V_0$  de manera que  $\int_{\Gamma_2} v_0 d\gamma \neq 0$  y eligiendo  $v = u_1 + v_0 \in K$ , de (54) se deduce (Biii).

Sea la función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida de la siguiente manera:

$$(55) \quad f(q) = J(u_q) = \frac{1}{2} a(u_q, u_q) + q \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma.$$

LEMA 7. Para todo  $q > 0$  y  $h$ , de manera que  $q+h > 0$ , se tienen las siguientes estimaciones:

$$(56) \quad \left\| \frac{1}{h} (u_{q+h} - u_q) \right\|_V \leq C_1 = \frac{\|\gamma_0\|}{\alpha_0} |\Gamma_2|^{1/2},$$

$$(57) \quad \left\| \frac{1}{h} (u_q - u_{q+h}) \right\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_2 = C_1 \|\gamma_0\|,$$

donde  $\gamma_0$  es el operador traza (lineal y continuo, definido sobre  $V$ ), y  $\alpha_0 > 0$  es la constante de coercividad sobre  $V_0$  de la forma bilineal  $a$ , i.e.:

$$(58) \quad a(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V_0.$$

Más aún, para todo  $q > 0$  y  $h > 0$  se tiene:

$$(59) \quad 0 < \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma - \int_{\Gamma_2} u_{q+h} d\gamma \leq C_3 h \quad (C_3 = C_2 |\Gamma_2|^{1/2} > 0),$$

con lo cual la función  $q > 0 \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma$  es continua.

Demostración. Teniendo en cuenta (58) y (47) con  $q_1 = q + h$ , y  $q_2 = q$ , la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la continuidad de  $\gamma_0$  se obtiene (56) y (57). Por otra parte, de (57) surge (59).

TEOREMA B. i) La función  $f$  es derivable. Mas aún,  $f'$  es continua y estrictamente decreciente, dada por la siguiente expresión :

$$(60) \quad f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma .$$

ii) Existe una constante  $C > 0$  de manera que

$$(61) \quad a(u_q, u_q) = C q^2 ,$$

$$(62) \quad f(q) = -\frac{C}{2} q^2 + B |\Gamma_2| q , \quad B = k_2 b > 0 .$$

iii) Si  $q > q_0(B)$ , entonces el problema (8) es a dos fases en  $\Omega$  (i.e.  $u_q$  es una función de signo no-constant en  $\Omega$ ), donde

$$(63) \quad q_0(B) = \frac{B |\Gamma_2|}{C} .$$

iv) La constante  $C = C(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) > 0$  está dada por

$$(64) \quad C = a(u_3, u_3) = \int_{\Gamma_2} u_3 \, d\gamma ,$$

donde  $u_3$  es la solución ecuación variacional

$$(65) \quad a(u_3, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma , \quad \forall v \in V_0 , \quad u_3 \in V_0 .$$

Mas aún,  $C$  puede ser calculada por

$$(66) \quad C = \frac{1}{q} \int_{\Gamma_2} (B - u_q) \, d\gamma ,$$

para cualquier  $q > 0$ .

Demostración (i) De (48) se obtiene

$$(67) \quad \frac{f(q+h) - f(q)}{h} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} u_{q+h} \, d\gamma ,$$

y por ende (60) pasando al límite  $h \rightarrow 0$  en (67) y utilizando (59). Para demostrar el

resto basta ver que ( Ejercicio 4. ) :

$$(68) \quad u_q = B - q u_3 \quad \text{in } \Omega ,$$

$$(69) \quad f'(q_0(B)) = 0 .$$

Observación 6. En el caso que por cuestiones de simetría se tenga que la función  $u_q$  es constante sobre  $\Gamma_2$  entonces la condición suficiente (63) , dada por el Teorema 8, es también necesaria para que el problema (8), con  $g = 0$ , sea a dos fases.

Parte (B) :

Sea  $u_\alpha = u_{\alpha q} = u_{\alpha q B}$  la única solución de la ecuación variacional (21), con  $g=0$  en  $\Omega$ , para datos  $B = \text{const.} > 0$  sobre  $\Gamma_1$  ,  $q = \text{const.} > 0$  sobre  $\Gamma_2$  y  $\alpha = \text{const.} > 0$  sobre  $\Gamma_1$  .

LEMA 9. Si  $u = u_{\alpha q B}$  es la solución del problema (21) para datos  $q$  ,  $B$ ,  $\alpha > 0$ , entonces se tienen las siguientes propiedades :

$$(70) \quad \begin{aligned} & \text{(i) } u_{\alpha q B} \leq B \text{ en } \Omega , \forall \alpha > 0 , \forall q > 0 , \\ & \text{(ii) } u_{\alpha q B} \leq u_{q B} \leq B \text{ en } \Omega , \forall \alpha > 0 , \forall q > 0 , \\ & \text{(iii) } u_{\alpha_1 q_1 B} \leq u_{\alpha_2 q_2 B} \text{ en } \Omega , \forall \alpha_1 \leq \alpha_2 , \forall q_2 \leq q_1 , \\ & \text{(iv) } M_2 \leq u_{\alpha q B} \leq M_1 \text{ en } \Omega , \forall \alpha > 0 , \forall q > 0 , \end{aligned}$$

donde

$$(71) \quad M_2 = M_2(\alpha, q, B) = \text{Min}_{\Gamma_2} u_{\alpha q B} = \text{Min}_{\bar{\Omega}} u_{\alpha q B} , \quad M_1 = M_1(\alpha, q, B) = \text{Max}_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} = \text{Max}_{\bar{\Omega}} u_{\alpha q B} .$$

Demostración. Ejercicio 5.

Se considerará que el dominio  $\Omega$  y los datos  $b$  (ó  $B$ ) sobre  $\Gamma_1$  y  $q$  sobre  $\Gamma_2$  son suficientemente regular para tener la regularidad  $u_{\alpha q B} \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Mas aún, en los tres ejemplos (Ver (97)-(101) ) la solución  $u_{\alpha q B}$  satisface este requerimiento.

TEOREMA 10. (i) Para todo  $B > 0$ , se tienen las siguientes expresiones :

$$(72) \quad \int_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} \, d\gamma = B |\Gamma_1| - \frac{q}{\alpha} |\Gamma_2| , \quad \forall \alpha, q > 0 ,$$

$$(73) \quad a(u_{\alpha B}, u_{\alpha B}) = L_{\alpha}(u_{\alpha B}) + B \alpha |\Gamma_2|, \quad \forall \alpha > 0,$$

$$(74) \quad a(u_{\alpha q B}, u_{\alpha q B}) = a(u_{\alpha q B}, u_{\alpha q B}), \quad \forall \alpha, q > 0.$$

(ii) Si  $q > q_0(B)$ , entonces el problema (21), con  $g = 0$ , es a dos fases en  $\Omega$  para todo  $\alpha > \alpha_0(q, B)$ , donde :

$$(75) \quad \alpha_0(q, B) = \frac{\alpha |\Gamma_2|}{B |\Gamma_1|}.$$

**Demostración.** Se utiliza la formulación variacional (21) y el hecho siguiente (Ejercicio 6.) :

$$(76) \quad \int_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} d\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha > \alpha_0(q, B),$$

Sea  $g : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$(77) \quad \begin{aligned} g(\alpha, q, B) &= G_{\alpha q B}(u_{\alpha q B}) = -\frac{1}{2} a_{\alpha}(u_{\alpha q B}, u_{\alpha q B}) = -\frac{1}{2} L_{\alpha q B}(u_{\alpha q B}) = \\ &= \frac{q}{2} \int_{\Gamma_2} u_{\alpha q B} d\gamma - \frac{\alpha B}{2} \int_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} d\gamma \leq 0, \quad \alpha, q, B > 0. \end{aligned}$$

**TEOREMA 11.** (i) La función  $g$  tiene derivadas parciales con respecto a las variables  $\alpha$ ,  $q$  y  $B$ , las cuales vienen dadas por las siguientes expresiones para todo  $\alpha, q, B > 0$  :

$$(78) \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, q, B) = \int_{\Gamma_1} \left( \frac{1}{2} u_{\alpha q B}^2 - B u_{\alpha q B} \right) d\gamma, \quad \frac{\partial g}{\partial q}(\alpha, q, B) = \int_{\Gamma_2} u_{\alpha q B} d\gamma,$$

$$(79) \quad \frac{\partial g}{\partial B}(\alpha, q, B) = -\alpha \int_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} d\gamma.$$

(ii) Existe una función  $A = A(\alpha) > 0$ , definida para  $\alpha > 0$ , de manera que se satisfacen las siguientes relaciones :

$$(80) \quad g(\alpha, q, B) = -\frac{A(\alpha)}{2} q^2 + B \alpha |\Gamma_2| - \frac{B^2}{2} \alpha |\Gamma_1|,$$

$$(81) \quad \int_{\Gamma_2} u_{\alpha q B} d\gamma = B |\Gamma_2| - q A(\alpha), \quad \forall q, B > 0.$$

(iii) La función  $A = A(\alpha)$  es decreciente en  $\alpha$ , y verifica las condiciones siguientes :

$$A(\alpha) > \frac{|\Gamma_2|^2}{|\Gamma_1|} \frac{1}{\alpha} \quad (\text{luego : } A(0^+) = +\infty),$$

$$(82) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = C, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha A'(\alpha) = 0,$$

$$(\alpha A(\alpha))' = \frac{1}{\alpha^2} a(u_{\alpha Q B}, u_{\alpha Q B}),$$

donde  $C > 0$  es la constante definida en el Teorema 8.

(iv) Mas aún, la función  $u_{\alpha Q B}$  puede ser expresada como

$$(83) \quad u_{\alpha Q B} = B - \alpha U_\alpha \quad \text{in } \Omega,$$

donde  $U_\alpha$  está definida por

$$(84) \quad \Delta U_\alpha = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad -\frac{\partial U_\alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \alpha U_\alpha, \quad \frac{\partial U_\alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 1, \quad \frac{\partial U_\alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0,$$

cuya formulación variacional está dada por

$$(85) \quad a_\alpha(U_\alpha, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma, \quad \forall v \in V, U_\alpha \in V,$$

y que verifica  $U_\alpha > 0$  en  $\bar{\Omega}$  y las siguientes propiedades :

$$(86) \quad \int_{\Gamma_1} U_\alpha \, d\gamma = \frac{|\Gamma_2|}{\alpha}, \quad \int_{\Gamma_2} U_\alpha \, d\gamma = A(\alpha), \quad a(U_\alpha, U_\alpha) = C, \quad \forall \alpha > 0.$$

Demostración. Ejercicio 7.

TEOREMA 12. (i) Sean las funciones  $\alpha_m = \alpha_m(\alpha, B)$  y  $\alpha_M = \alpha_M(\alpha, B)$ , definidas para  $\alpha, B > 0$ , por las siguientes expresiones

$$(87) \quad \alpha_m(\alpha, B) = \frac{B |\Gamma_2|}{A(\alpha)}, \quad \alpha_M(\alpha, B) = \frac{B \alpha |\Gamma_1|}{|\Gamma_2|},$$

que verifican las condiciones

$$\alpha_m(0^+, B) = \alpha_M(0^+, B) = 0, \quad \alpha_m(\alpha, B) < \alpha_M(\alpha, B), \quad \forall \alpha > 0, B > 0,$$

$$(88) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha_m(\alpha, B) = \alpha_0(B),$$

$\alpha_0$  es una función creciente de la variable  $\alpha$ .

(ii) El conjunto

$$(99) \quad S^{(2)}(B) = \{(\alpha, q) \in (\mathbb{R}^+)^2 / q_m(\alpha, B) < q < q_f(\alpha, B), \alpha > 0\}$$

es no vacío para todo  $B > 0$ .

(iii) Se tienen las siguientes equivalencias

$$(90) \quad \text{i) } \int_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} d\gamma > 0 \Leftrightarrow q < q_f(\alpha, B), \quad \text{ii) } \int_{\Gamma_2} u_{\alpha q B} d\gamma < 0 \Leftrightarrow q > q_m(\alpha, B).$$

(iv) Si  $(\alpha, q) \in S^{(2)}(B)$ , entonces el problema (20) con  $g = 0$  es a dos fases.

**Demostración. Ejercicio 8.**

A continuación se considerará un caso particular para el cual la función  $A=A(\alpha)$ , definida para  $\alpha > 0$ , podrá ser evaluada explícitamente. Se considera que  $u_{\alpha q B}$  verifica la condición [TaTa] :

$$(91) \quad \frac{1}{q} a(u_{\alpha q B}, u_{\alpha q B}) = \text{Const.} (= \text{Const}(\alpha, q, B)), \quad \forall \alpha, q, B > 0,$$

o en forma equivalente por

$$(92) \quad (\alpha A(\alpha))' = A(\alpha) + \alpha A'(\alpha) = C, \quad \forall \alpha > 0.$$

Se pueden deducir las siguientes propiedades :

**TEOREMA 13.** (i) Se tiene la siguiente equivalencia :

$$(93) \quad u_{qB} - u_{\alpha q B} \text{ es constante en } \Omega \Leftrightarrow (\alpha A(\alpha))' = C.$$

(ii) Para el caso particular (91), se tienen las siguientes propiedades:

$$(94) \quad u_{qB} - u_{\alpha q B} = \frac{q |\Gamma_2|}{\alpha |\Gamma_1|} \text{ en } \Omega, \quad u_{\alpha q B} |_{\Gamma_1} = B - \frac{q |\Gamma_2|}{\alpha |\Gamma_1|},$$

$$(95) \quad \frac{\partial u_{\alpha q B}}{\partial n} |_{\Gamma_1} = \frac{q |\Gamma_2|}{|\Gamma_1|}, \quad \frac{\partial u_{qB}}{\partial n} |_{\Gamma_1} = \text{const.}$$

(iii) Mas aún, la función  $A(\alpha)$  está dada por la expresión

$$(96) \quad A(\alpha) = C + \frac{1}{\alpha} \frac{|\Gamma_2|^2}{|\Gamma_1|}.$$

Demostración (i) Se tienen las equivalencias

$$\begin{aligned} u_{qB} - u_{\alpha qB} \text{ es constante en } \Omega &\Leftrightarrow a(u_{qB} - u_{\alpha qB}, u_{qB} - u_{\alpha qB}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) = a(u_{qB}, u_{qB}) \Leftrightarrow a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) = C \alpha^2 \Leftrightarrow (\alpha A(\alpha))' = C . \end{aligned}$$

(ii)-(iii) Ejercicio 9.

A continuación se darán tres ejemplos [Ta2] en los cuales la solución puede calcularse explícitamente, como asimismo otras propiedades y funciones auxiliares (Cabe destacar que para estos ejemplos las condiciones suficientes, vistas anteriormente, resultan ser también necesarias y que además verifican la hipótesis de caso particular (91)).

Ejemplo 1. Se consideran los siguientes datos :

$$\begin{aligned} (97) \quad n = 2 \quad , \quad \Omega = (0, x_0) \times (0, y_0) \quad , \quad x_0 > 0 \quad , \quad y_0 > 0 \quad , \\ \Gamma_1 = (0) \times [0, y_0] \quad , \quad \Gamma_2 = (x_0) \times [0, y_0] \quad , \\ \Gamma_3 = (0, x_0) \times (0) \cup (0, x_0) \times (y_0) \quad , \end{aligned}$$

y se obtienen :

$$\begin{aligned} (98) \quad |\Gamma_2| = |\Gamma_1| = y_0 \quad , \quad C = x_0 y_0 \quad , \\ u = u_{qB}(x, y) = B - \alpha x \quad , \quad u_{\alpha} = u_{\alpha qB}(x, y) = B - \frac{\alpha}{2} - \alpha x \quad , \\ u_3(x, y) = x \quad , \quad u_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{\alpha} + x \quad , \\ M_1(\alpha, \alpha, B) = B - \frac{\alpha}{2} \quad , \quad M_2(\alpha, \alpha, B) = B - \frac{\alpha}{2} - \alpha x_0 \quad , \\ (99) \quad \alpha_0(B) = \frac{B}{x_0} \quad , \quad \alpha_0(\alpha, B) = \frac{\alpha}{B} \quad , \quad A(\alpha) = y_0 \left( x_0 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad , \\ \alpha_{11}(\alpha, B) = \frac{B}{x_0 + \frac{1}{\alpha}} \quad , \quad \alpha_{11}(\alpha, B) = B \alpha \quad , \\ \mathcal{L} : \left\{ x = \frac{B}{\alpha} \right\} \quad , \quad \mathcal{L}_{\alpha} : \left\{ x = \frac{B}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right\} \quad (\text{cuando existe}) . \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Se consideran los siguientes datos :

$$\begin{aligned} (99) \quad n = 2 \quad , \quad 0 < r_1 < r_2 \quad , \quad \Gamma_3 = \emptyset \quad , \\ \Omega : \text{corona circular de radios } r_1 \text{ y } r_2 \text{ , centrado en } (0,0) \quad , \\ \Gamma_1 : \text{circunferencia de radio } r_1 \text{ y centrado en } (0,0) \quad , \\ \Gamma_2 : \text{circunferencia de radio } r_2 \text{ y centro en } (0,0) \quad , \end{aligned}$$

y se obtiene ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) :

$$\begin{aligned}
|\Gamma_1| &= 2\pi r_1, & |\Gamma_2| &= 2\pi r_2, & C &= 2\pi r_2^2 \log \frac{r_2}{r_1}, \\
u &= u_{\alpha B}(r) = B - \alpha r_2 \log \frac{r}{r_1}, & u_\alpha &= u_{\alpha \alpha B}(r) = B - \frac{\alpha r_2}{\alpha r_1} - \alpha r_2 \log \frac{r}{r_1}, \\
u_3(r) &= r_2 \log \frac{r}{r_1}, & U_\alpha(r) &= r_2 \left( \frac{1}{\alpha r_1} + \log \frac{r}{r_1} \right), \\
M_1(\alpha, \alpha, B) &= B - \frac{\alpha r_2}{\alpha r_1}, & M_2(\alpha, \alpha, B) &= B - \frac{\alpha r_2}{\alpha r_1} - \alpha r_2 \log \frac{r_2}{r_1}, \\
\alpha_0(B) &= \frac{B}{r_2 \log \frac{r_2}{r_1}}, & \alpha_0(\alpha, B) &= \frac{\alpha r_2}{B r_1}, & A(\alpha) &= 2\pi r_2^2 \left( \frac{1}{\alpha r_1} + \log \frac{r_2}{r_1} \right), \\
\alpha_{00}(\alpha, B) &= \frac{B}{r_2 \left( \frac{1}{\alpha r_1} + \log \frac{r_2}{r_1} \right)}, & \alpha_{01}(\alpha, B) &= \frac{B r_1 \alpha}{r_2}, \\
I_\alpha &: \left\{ r = r_1 \exp\left(\frac{B}{\alpha r_2}\right) \right\}, & I_\alpha &: \left\{ r = r_1 \exp\left(\frac{B}{\alpha r_2} - \frac{1}{\alpha r_1}\right) \right\} \text{ (cuando existe)}.
\end{aligned}
\tag{100}$$

**Ejemplo 3.** Se consideran los mismos datos que en el Ejemplo 2, pero para el caso tridimensional, es decir  $n=3$ , obteniéndose ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ):

$$\begin{aligned}
C &= 4\pi r_2^3 \frac{r_2 - r_1}{r_1}, & |\Gamma_1| &= 4\pi r_1^2, & |\Gamma_2| &= 4\pi r_2^2, \\
u &= u_{\alpha B}(r) = B - \alpha r_2^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), & u_\alpha &= u_{\alpha \alpha B}(r) = B - \frac{\alpha r_2^2}{\alpha r_1} - \alpha r_2^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), \\
u_3(r) &= r_2^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), & U_\alpha(r) &= r_2^2 \left( \frac{1}{\alpha r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), \\
M_1(\alpha, \alpha, B) &= B - \frac{\alpha r_2^2}{\alpha r_1}, & M_2(\alpha, \alpha, B) &= B - \frac{\alpha r_2^2}{\alpha r_1} - \frac{\alpha r_2}{r_1} (r_2 - r_1), \\
\alpha_0(B) &= \frac{B r_1}{r_2 (r_2 - r_1)}, & \alpha_0(\alpha, B) &= \frac{\alpha r_2^2}{B r_1}, & A(\alpha) &= 4\pi r_2^4 \left( \frac{1}{\alpha r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \\
\alpha_{00}(\alpha, B) &= \frac{B}{r_2^2 \left( \frac{1}{\alpha r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}, & \alpha_{01}(\alpha, B) &= \frac{B r_1^2 \alpha}{r_2^2}, \\
I_\alpha &: \left\{ r = \frac{\alpha r_2^2 r_1}{\alpha r_2^2 - B r_1} \right\}, & I_\alpha &: \left\{ \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha r_1} + \frac{\alpha r_2^2 - B r_1}{\alpha r_2^2 r_1} \right\} \text{ (cuando existe)}.
\end{aligned}
\tag{101}$$

#### REFERENCIAS

[BC] C. BAIUCCI - A. CAPELO, "Diseguazioni variazionali e quasivariationali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariationali, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, N. 4, 7, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[Du2] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N° 185, LABORIA - IRIA, Rocquencourt (1976).



## CONTENIDO DE NUMEROS ESPECIALES

6. "Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", Rosario, 2-7 de julio de 1973:

U. D'AMBROSIO, "Superficies generalizadas no cálculo das variacoes", p. 5-24.  
L.A. MEDEIROS, "Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales", p. 25-58.  
E. ROFMAN, "Desigualdades variacionales. Existencia y aproximación numérica de soluciones", p. 59-86.

11. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1:

D.A. TARZIA, "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", p. 5-32.

D.A. TARZIA, "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", p. 33-61.

J.E. BOUILLET, "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", p. 63-74

J.E. BOUILLET, "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", p. 75-104.

L.T. VILLA, "El problema inverso de Stefan", p. 105-131.

L.T. VILLA, "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase", p. 133-142.

R.H. NOCHETTO, "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", p. 143-166.

G.G. GARGUICHEVICH—M.C. SANZIEL, "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", p. 167-177.

12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2:

D.A. TARZIA, "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", p. 5-36.

D.A. TARZIA, "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", p. 37-85.

P.R. MARANGUNIC, "Algunos conceptos básicos del análisis funcional", p. 87-118.

H.R. BERTORELLO, "Sobre la solidificación de aleaciones binarias", p. 119-142.

L. CRIVELLI — S. IDELSOHN — C. BAIGORRIA, "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales", p. 143-170.

E.E. ALANIS, "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar", p. 171-177.

M.B. STAMPELLA, "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase", p. 179-193.

14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2:

H. BERTORELLO, "Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido", p. 9-27.

J.E. BOUILLET, "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas", p. 29-44.

- D.A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases", p.45-75.  
 D.A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", p. 77-99.  
 L.T. VILLA, "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre", p. 101-116.  
 N. AGUILERA, "El método de Alt para el problema del dique poroso", p. 117-128.  
 G.G. GARGUICHEVICH, "Las inecuaciones variacionales elípticas", p. 129-138.  
 P.R. MARANGUNIC, "Distribuciones y espacios de Sobolev", p.139-165.  
 E. ZARANTONELLO, "Teoría espectral cónica", p. 167-169.

17. "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen I:

- J.E. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas", p. 7-13.  
 C. CORTAZAR - M. ELGUETA, "Sobre localización de soluciones de la ecuación de medios porosos", p. 15-27.  
 G.G. GARGUICHEVICH - D.A. TARZIA, "Sobre un problema de Stefan a dos fases con fuente de energía interna", p. 29-44.  
 M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas", p. 45-53.  
 R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos", p. 55-71.  
 D.A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción", p. 73-86.  
 C.V. TURNER, "Difusión de un solvente en un polímero no homogéneo", p. 87-104.  
 K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic and stochastic approach", p. 105-119.  
 L.T. VILLA, "Problemas de frontera libre y móvil en procesos de ingeniería química", p. 121-132.  
 D.A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados", p. 133-151.

Nota : Para intercambiar esta serie con publicaciones similares, dirigirse a:

CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",  
 Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agr.,  
 Universidad Nacional de Rosario,  
 Avda. Pellegrini 250,  
 2000 Rosario, Argentina.

Note : To exchange this serie with similar publications, please write to:

CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",  
 Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agr.,  
 Universidad Nacional de Rosario,  
 Avda. Pellegrini 250,  
 2000 Rosario, Argentina.