

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

I.S.S.N. 03260690

# CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

## II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 13 al 17 de OCTUBRE - 1986

Volumen 2

14

Rosario - República Argentina

-1987-

## INDICE

	Pág.
<b>PREFACIO:</b>	3
<b>Lista de Participantes:</b>	7
1. BERTORELLO, H.: "Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido" (Cursillo C4) .....	9
2. BOUILLET, J.E.: "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas" (Cursillo C5) .....	29
3. TARZIA, D.A.: "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases" (Cursillo C1) .....	45
4. TARZIA, D.A.: "El problema de Stefan multidimensional a una fase" (Cursillo C2) .....	77
5. VILLA, L.T.: "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre" (Cursillo C3) .....	101
6. AGUILERA, N.: "El método de Alt para el problema del dique poroso" (Conferencia CA1) .....	117
7. GARGUICHEVICH, G.G.: "Las inecuaciones variacionales elípticas" (Conferencia CG3) .....	129
8. MARANGUNIC, P.R.: "Distribuciones y espacios de Sobolev" (Conferencia CG1) .....	139
9. ZARANTONELLO, E.: "Teoría espectral cónica" (Conferencia CG2) .....	167

Nota: Las Conferencias CA2, CA3 y CA4 no han sido redactadas.



## PREFACIO.

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años ( ver Anexo I ), el Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario, PROMAR ( CONICET - UNR ), que se desarrolla en el Instituto de Matemática "Beppo Levi", emprendió, a través del proyecto de investigación y desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física Matemática", la organización del interdisciplinario Seminario sobre el problema de Stefan y sus Aplicaciones, realizado en la ciudad de Rosario ( Argentina ) durante el período del 13 al 17 de octubre de 1986.

El Comité Organizador estuvo compuesto por H. R. BERTORELLO ( FAMAF, Córdoba ), J. E. BOUILLET ( IAM - UNBA, Buenos Aires ), E. A. GARCIA ( CNEA, Buenos Aires ), D. A. TARZIA ( PROMAR, Rosario ) y L. T. VILLA ( UNSa, Salta ).

La Secretaría estuvo a cargo de G. G. GARGUICHEVICI, P. R. MARANGUNIC, S. REYES, M. C. SANZIEL ( Coordinadora ), C. O. STOICO, A. L. TAIANA, todos del PROMAR.

Este Seminario, y la presente publicación, han sido realizados, en parte, gracias a subsidios que a tal efecto otorgó el CONICET. Además se contó con la ayuda de las siguientes Instituciones Auspiciantes:

AMCA - Asociación Argentina de Mecánica Computacional,  
CAMAT - Comité Argentino de Transferencia de Calor,  
CERIDER - Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Rosario,  
CONICET- Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,  
CIUNR - Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario,  
Depto. de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales,  
Depto. de Matemática - Escuela de Formación Básica ( FCEeI - UNR ),  
FCEeI - Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería ( UNR ),  
Municipalidad de Rosario.

Además colaboraron las siguientes entidades:

CIDCA ( CIC - CONICET - UNLP ), La Plata,  
CNEA, Buenos Aires,  
Consulado de Italia en Rosario,  
Embajada de Francia en Argentina,  
FAMAF ( UNC ), Córdoba,  
IAM ( CONICET ), Buenos Aires,  
INIQUI ( CONICET - UNSa ), Salta,  
PEMA ( CONICET - UNL ), Santa Fe.

En el Seminario participaron 57 personas provenientes de 14 ciudades argentinas y 2 extranjeras.

Los *objetivos* del Seminario fueron:

- 1) Gestar un *encuentro bianual* de las personas y grupos que trabajan en el **problema** de Stefan ( cambio de fase ) en el país, a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos.
- 2) No limitar el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia, sino también, y muy especialmente, despertar el interés y el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*.

Esta segunda edición del Seminario estuvo constituida por cursillos intensivos sobre los aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones ( ver Anexo II ). En años sucesivos, los cursillos versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numéricos ( no tratados en Seminarios anteriores ) y los principios teóricos irán, paulatinamente, dando lugar a las aplicaciones.

Para finalizar, quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a los profesores encargados de la redacción de estas notas como asimismo a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA.

Rosario, Abril 1987.

## ANEXO I.

*¿ Qué es el problema de Stefan ?*

El problema de Stefan estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida ( ejemplo: hielo y agua en procesos de fusión o solidificación ). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. La superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, es una incógnita suplementaria del problema sobre la cual existe una condición que surge del principio de conservación de la energía.

El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha superficie de separación entre las fases, a la cual se la llama la *frontera libre* del problema, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

En las múltiples aplicaciones del problema de Stefan se pueden mencionar: Problemas con cambio de fase, solidificación de aleaciones binarias, oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares en caso de accidentes, almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase, problema de colada continua ( solidificación de metales ), solidificación del pavimento, problemas de control óptimo, procesos de ablación térmica, solidificación de la corteza terrestre, etc.

Por todo ello, este problema ha concitado en los últimos años el interés de matemáticos, físicos, químicos e ingenieros de todo el mundo, lo que ha redundado en un importante desarrollo del tema. Es así que se presentan trabajos en Congresos de Matemática ( sobre Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional, Análisis Numérico, Matemática Aplicada ), Física, Transferencia del Calor y Materia, etc., y se realizan numerosas publicaciones en más de 150 revistas especializadas en dichas disciplinas. Para mayores detalles pueden verse las publicaciones de los siguientes simposios internacionales sobre problemas de frontera libre:

- i) J. R. OCKENDON-W. R. HODGHINS ( Eds. ), "Moving boundary problems in heat flow and diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).
- ii) D. G. WILSON-A. D. SOLOMON-P.T. BOGGS ( Eds. ), "Moving boundary problems", Academic Press, New York, (1978).
- iii) E. MAGENES ( Ed. ), "Free boundary problems", Vol. I, II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (1980).
- iv) J. ALBRECHT-I. COLLATZ-K. H. HOFFMANN ( Eds. ), "Numerical treatment of free boundary value problems", ISNM N° 58, Birkhäuser Verlag, Basel (1982).
- v) A. FASANO-M. PRIMICERIO ( Eds. ), "Free boundary problems: Theory and applications", Vol. I, II, Research Notes in Math. N° 79, 80, Pitman, London (1983).
- vi) A. BOSSAVIT-A. DAMLAMIAN-M. FREMOND ( Eds. ), "Free boundary problems: Applications and theory", Vol. III, IV, Research Notes in Math. N° 120, 121, Pitman, London (1985).
- vii) M. NIEZGODKA-I. PAWLOV ( Eds. ), "Recent advances in free boundary problems", Control and Cybernetics, 14 N° 1-3 (1985).
- viii) A. FASANO-M. PRIMICERIO ( Eds. ), "Nonlinear diffusion problems", Lecture Notes in Math. N° 1224, Springer Verlag, Berlin (1986).

Además puede consultarse una extensa bibliografía con más de 2300 referencias sobre problemas de frontera libre para la ecuación del calor y en particular sobre el problema de Stefan en: D. A. TARZIA, "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan Problem", To appear.

## ANEXO II.

## CONTENIDO DEL SEMINARIO.

CURSO ( en CUADERNOS N° 13 ):

C) A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", ( 4.30 horas ).

CURSILLOS ( en CUADERNOS N° 14 ):

C1) D. A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan Unidimensional a dos fases", ( 1.15 horas ).

C2) D. A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", ( 3 horas ).

C3) L. T. VILLA, "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre", ( 3 horas ).

C4) H. BERTIORELLO, "Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido", ( 3 horas ).

C5) J. E. BOUILLET, "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas", ( 3 horas ).

CONFERENCIAS GENERALES ( en CUADERNOS N° 14 ):

CG1) P. R. MARANGUNIC, "Distribuciones y espacios de Sobolev", ( 1.30 horas ).

CG2) E. ZARANTONELLO, "La teoría espectral cónica", ( 1.15 horas ).

CG3) G. G. GARGUICHEVICH, "Las inecuaciones variacionales elípticas", ( 1.15 horas ).

CONFERENCIAS DE APLICACION ( en CUADERNOS N° 14 ):

CA1) N. AGUILERA, "El método de Alt para el problema del dique poroso", ( 1.30 horas ).

CA2) R. H. MASCHERONI, "El problema de Stefan y la congelación y descongelación de almentos", ( 1.15 horas ).

CA3) E. A. GARCIA, "Interacción del  $UO_2$  con zircalloy a alta temperatura", ( 1.15 horas ).

CA4) M. SOLARI, "Procesos de solidificación de metales y aleaciones", ( 1.15 horas ).

## LISTA DE PARTICIPANTES

- N. AGUILERA, FEHA (CONICET-UNL)-INTEC, Güemes 3450, (3000) Santa Fe
- C. M. ALMIRON, Barrio 162 Sector G, casa 97, (3400) Corrientes
- M. ALVAREZ, Universidad Nacional del Sur, Dpto. de Matemática, Avda. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca
- D. E. ANTONETTI, Miguel Angel 940, (5400) Río Cuarto
- L. ARAGONE, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario
- J. ARDERIUS, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario
- B. E. AUDISIO, Universidad Nacional de Córdoba, Fac. de Matemática, Astronomía y Física, Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba
- N. BACA, M. Gorgaliza 1735, (4600) Jujuy
- B. BAFFA TRASCI, Universidad Nacional de Jujuy, Gorriti 237, (4600) Jujuy
- M. C. BANCORA, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario
- A. H. BAZAN, Dorrego 11, (4432) Campo Santo, Salta
- H. R. BERTORELLO, Universidad Nacional de Córdoba, Fac. de Matemática, Astronomía y Física, Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba
- J. BIEBEL, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario
- J. BOULLET, Instituto Argentino de Matemática, Viamonte 1636, 2<sup>o</sup> A, (1055) Buenos Aires
- H. BRITO, Universidad Nacional de Río Cuarto, Fac. de Ingeniería, Enlace Ruta 8 y 36, km 603, (5800) Río Cuarto
- H. A. BRUNET, Universidad Nacional del Sur, Dpto. de Matemática, Avda. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca
- R. CADOCHÉ-NEGRÍ, INTEC, Güemes 3450, (3000) Santa Fe
- C. CALVO, Universidad Nacional de San Juan, Fac. de Ingeniería, Dpto. de Matemática, Avda. San Martín 1109 (D), (5400) San Juan
- L. H. CANDLERLE, Cervantes 498, (6300) Santa Rosa
- S. A. CAVALLI, Santa Rosa 1086, Dpto. 5, (5000) Córdoba
- M. CHICRON, Comisión Nac. de Energía Atómica, Dpto. Química, Avda. Libertador 8250, (1429) Buenos Aires
- S. CORCHIS, Avda. Francia 2468, (2000) Rosario
- S. DI MARCO, Gorriti 1771, (2000) Rosario
- C. FABRO, Balcarce 740, 6° A, (2000) Rosario
- A. FASANO, Istituto Matematico "U. DINI", Università degli Studi di Firenze, Viale Morgagni 67a, (50134) Firenze, ITALIA
- J. FIGUEROA, Casilla de Correo 712, Talca, CHILE
- M. FIZNER, Comisión Nac. de Energía Atómica, Dpto. Química, Avda. Libertador 8250, (1429) Buenos Aires
- E. A. GARCIA, Comisión Nac. de Energía Atómica, Dpto. de Materiales, Avda. Libertador 8250, (1429) Buenos Aires
- G. GARGUICHEVICH, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario



- A GONZALEZ, Universidad Nacional de Río Cuarto, Fac. de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Dpto. de Matemática, Enlace Ruta 8 y 36, km 603, (3800) Río Cuarto.
- R GROSSI, Universidad Nacional de Salta, Fac. de Ciencias Tecnológicas, Buenos Aires 177, (4400) Salta.
- D. KLEIMAN, Calle 6 N° 1333, PB "C", (1900) La Plata.
- M. KORTEN, Universidad Nacional de Buenos Aires, Fac. de Ingeniería, Dpto. de Matemática, Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires.
- P. MARANGUNIC, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario.
- V. MARQUEZ, Colón 573, (1625) Escobar.
- D. MARTINO, Santiago 753, (2000) Rosario.
- R. H. MASCHERONI, Centro de Investigación y Desarrollo en Oritecnología de Alimentos (CIDCA), Calle 47 y 116, (1900) La Plata.
- G. MORALES, Universidad Nacional de Salta, INQUI (CONICET-UNSa), Buenos Aires 177, (4400) Salta.
- J. M. PAZ, Universidad Nacional de Jujuy, Fac. de Ingeniería, Gorriti 234, (4600) Jujuy.
- E. J. PETRYLA, Universidad Nacional de Misiones, Fac. de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales, Félix de Azara 174, (3300) Posadas.
- M. F. PEYRONEL, Balcarce 1142, (2000) Rosario.
- J. C. REGINATO, Universidad Nacional de Río Cuarto, Fac. de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Dpto. de Física, Enlace Ruta 8 y 36, km 603, (3800) Río Cuarto.
- A. R. de REINICK, INTEC, Güemes 3450, (3000) Santa Fe.
- A. ROVIGLIONE, LEMIT-CIC, Calles 122 y 52, (1900) La Plata.
- M. C. SANZIEL, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario.
- M. SOLARI, ENACE S. A., Avda. Leandro N. Alem 712, (1001) Buenos Aires.
- C. STOICO, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario.
- E. TABACHAN, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario.
- A. L. TAIANA, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario.
- D. A. TARZIA, PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario.
- J. M. TORRES, Luis Güemes 62, (4400) Salta.
- V. C. VAMPA, Universidad Nacional de La Plata, Fac. de Ingeniería, Lab. de Ingeniería de Reservorios, Calle 116, esquina 47, (1900) La Plata.
- I. VAQUILA, Vera Mujica 860, (2000) Rosario.
- A. R. VELAZQUEZ, Universidad Nacional de Misiones, Fac. de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales, Félix de Azara 174, (3300) Posadas.
- L. T. VILLA, INQUI (CONICET-UNSa), Facultad de Ciencias Tecnológicas-UNSa, Buenos Aires 177, (4400) Salta.
- A. WILHELM, Comisión Nac. de Energía Atómica, Dpto. de Materiales, Avda. Libertador 8250, (1429) Buenos Aires.
- E. ZARANTONELLO, CIBCYT, Casilla de Correo 131, (5500) Mendoza.

# TERMODINAMICA DEL CAMBIO DE FASE CON APLICACION A TRANSFORMACIONES SOLIDO-LIQUIDO

Héctor R. BERTORELLO

## ASPECTOS TERMODINAMICOS BASICOS.

Podemos definir la solidificación como un proceso por el cual un sólido crece a / expensas de un líquido con el cual está en contacto íntimo. Luego, podemos tomar como punto de partida para estudiar la solidificación el ver bajo qué condiciones un sólido puede coexistir con el líquido, sin cambio en sus cantidades relativas. En esas condiciones se dice que sólido y líquido se hallan en equilibrio. Luego, en segunda instancia, podemos ver qué ocurre cuando el sistema se aparta del equilibrio y el sólido crece.

Para estudiar las condiciones en que una fase sólida coexiste en equilibrio con / el líquido del cual se forma hacemos uso de la termodinámica, que nos describe el equilibrio de sistemas que pueden espontáneamente disminuir su energía pero no aumentarla, a menos que se suministre trabajo externo.

Un estado termodinámico del sistema se especifica fijando el conjunto de variables termodinámicas independientes que lo caracterizan. Las cantidades que en principio pueden ser medidas rápidamente para cualquier estado de la materia son: el volumen específico  $V$  ocupado por la unidad de masa, la temperatura  $T$  y la presión  $P$  a la cual se halla el sistema. Para cualquier estado de equilibrio del sistema, existe una ecuación, la ecuación de estado, que nos relaciona  $V$  con  $P$  y  $T$ . Para el caso de cuerpos sólidos se debe tener cuidado al definir el estado que no existan tensiones mecánicas // que originen flujo de materia. Sólo en el rango elástico puede definirse una ecuación de estado para el sólido.

La propiedad fundamental de todo sistema termodinámico es su energía interna  $E$ , / definida por la primera ley de la Termodinámica. Una manera de expresarla es diciendo que la variación de energía interna del sistema es igual a la cantidad neta de calor / absorbida menos el trabajo efectuado por el sistema sobre sus alrededores:

$$(1) \quad \Delta E = \Delta Q - L$$

De esta manera,  $E$  está definida a menos de una constante aditiva. Es una cantidad extensiva, por lo cual la energía se duplica si se duplica la masa. Para una transformación infinitesimal es

$$(2) \quad dE = dQ - dL$$

donde  $dE$  es diferencial exacta aunque  $dQ$  y  $dL$  no lo son.

La siguiente propiedad fundamental de un sistema termodinámico es la entropía  $S$ , definida a partir de la segunda ley de la Termodinámica. Un modo de enunciar la segunda ley es a partir del postulado de Clausius, que nos dice que no existe ninguna transformación termodinámica cuyo único efecto sea extraer calor de un cuerpo a una dada // temperatura y transferirlo a un cuerpo a temperatura mayor. De este postulado se deduce que existe una función de estado, la entropía  $S$ , tal que la diferencia de entropía entre dos estados  $A$  y  $B$  está dada por

$$(3) \quad S(B) - S(A) \leq \int_A^B dQ/T$$

siendo válido el signo  $=$  para una transformación reversible. Para una transformación / reversible infinitesimal el cambio en  $S$  está dado por

$$(4) \quad dS = dQ/T$$

Propiedad fundamental de la entropía es que para un sistema aislado ésta nunca de crece, o sea que el estado estable de un sistema aislado es el estado de máxima entropía. La entropía de un sistema sólo puede decrecer por interacción con otros sistemas.

Si nuestro sistema está en contacto térmico con un medio a temperatura constante  $T$ , el calor absorbido por el sistema al pasar de un estado  $A$  a otro  $B$  es

$$(5) \quad Q = T \int_A^B dQ/T \leq T |S(B) - S(A)|$$

y la cantidad de trabajo que se puede obtener, teniendo en cuenta la primera ley, está dada por

$$(6) \quad L \leq E(A) - E(B) + T |S(B) - S(A)|$$

Definimos la función energía libre de Helmholtz, o potencial termodinámico a temperatura constante, como

$$(7) \quad F = E - TS$$

con lo cual  $L \leq F(A) - F(B) = -\Delta F$

Si el sistema está dinámicamente aislado para cualquier transformación es  $L = 0$  y por lo tanto  $F(B) \leq F(A)$  y su energía libre no puede aumentar. En consecuencia, si la energía libre es un mínimo el sistema se halla en equilibrio estable.

En una transformación reversible infinitesimal es

$$(8) \quad dF = -PdV - SdT$$

Similarmente podemos definir la función energía libre de Gibbs, o potencial termodinámico a presión y temperatura constante. Será

$$(9) \quad L = P[V(B) - V(A)]$$

y como  $L \leq -\Delta F$  será

$$(10) \quad PV(B) - PV(A) \leq F(A) - F(B)$$

Definimos la energía libre de Gibbs  $G$  como

$$(11) \quad G = F + PV = E - TS + PV$$

con lo cual se ve que  $G(B) \leq G(A)$ , de donde se deduce que en una transformación isobárica e isotérmica  $G$  nunca puede aumentar. Luego, a  $T$  y  $P$  constantes el estado de equilibrio de un sistema es el de mínima energía libre de Gibbs  $G$ . En una transformación / infinitesimal es

$$(12) \quad dG = -SdT + VdP$$

También podemos definir la entalpía  $H$  como

$$(13) \quad H = E + PV$$

y será

$$(14) \quad dH = TdS + VdP$$

En una transformación isobárica es  $\Delta H = \Delta Q$  o sea que la variación de entalpía del sistema es igual al calor absorbido o entregado por el sistema.

En lo que sigue, cuando se mencione a la energía libre se sobreentenderá que se / refiere a la energía libre de Gibbs  $G$ .

Una sustancia homogénea posee dos grados de libertad y para la materia condensada es conveniente experimentalmente elegir la temperatura y presión como variables independientes. Con esta elección el potencial termodinámico apropiado es la función energía libre de Gibbs  $G$ , con lo cual podemos definir las otras variables dependientes como

$$(15) \quad V = (\partial G / \partial P)_T; \quad (16) \quad -S = (\partial G / \partial T)_P$$

$$(17) \quad H = G - T(\partial G / \partial T)_P = -T^2 \left[ \partial(G/T) / \partial T \right]_P$$

$$(18) \quad C_p = \text{calor específico a presión constante} \\ = (\partial H / \partial T)_P = T(\partial S / \partial T)_P = -T(\partial^2 G / \partial T^2)_P$$

La relación entre calores específicos a presión y volumen constante está dada por

$$(19) \quad C_p = C_v + T\alpha^2 V / \chi_T$$

donde

$$(20) \quad \alpha = (1/V) (\partial V / \partial T)_P = \text{coeficiente de expansión térmica}$$

$$(21) \quad \chi_T = -(1/V) \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \text{compresibilidad isotérmica}$$

Bajo condiciones adecuadas, la misma sustancia puede encontrarse en varios estados condensados. Por ejemplo, el estaño puede prepararse en formas cristalinas polimórficas, con estructura tetragonal y cúbica, indistintamente, y en estado líquido. En principio, podemos tratar termodinámicamente esos estados independientemente uno de otro.

#### EQUILIBRIO ENTRE FASES.

El equilibrio termodinámico entre dos estados de la materia está descrito por // teoremas que nos dicen que la energía libre por unidad de masa debe ser la misma para cada estado. En términos matemáticos, el equilibrio entre fases sólido y líquido para un elemento A puro está dado por la condición

$$(22) \quad G_S = G_L$$

Durante una transición de fases, aunque la energía libre permanece continua, otras propiedades termodinámicas como la entropía, volumen, calor específico, etc., sufren cambios discontinuos. Según Ehrenfest, podemos clasificar las transiciones de fase según qué propiedad es discontinua en la transición. En ese sentido, una transición de fase es del mismo orden que la derivada de la energía libre que muestra discontinuidad en la transición. Vemos entonces que transformaciones en las que ocurre un cambio discontinuo en el volumen y la entropía (y por lo tanto en la entalpía, o sea que existe calor latente de transformación) son transformaciones de primer orden. Aquellas en que hay cambio discontinuo en el calor específico, expansión térmica y compresibilidad isotérmica son transformaciones de segundo orden, etc. La transición sólido-líquido es pues una transformación de primer orden.

Los parámetros termodinámicos de importancia práctica, predominantes para la interpretación de la solidificación y fusión, son los cambios de volumen  $\Delta V$  y entropía  $\Delta S$  por unidad de masa y a la temperatura de fusión.

Si se trabaja a presión constante la entalpía y energía libre en función de la // temperatura se comportan como se muestra en la figura 1.

Las curvas de energía libre del sólido y líquido se interceptan en  $T = T_f$ , en que ocurre la transición. Las dos fases coexisten a  $T_f$  y se distinguen por su entalpía (y por lo tanto distintos detalles estructurales).  $G_S$  y  $G_L$  pueden extrapolarse a cada lado de  $T_f$  y corresponden a sólido sobrecalentado y líquido sobreenfriado. En la práctica se observan numerosos ejemplos de líquidos sobreenfriados por debajo de  $T_f$  pero es muy difícil sobrecalentar sólidos por encima de  $T_f$ . O sea que aparece una diferencia // en  $T_f$  según se mida en fusión o solidificación. Esto sugiere que la transformación no ocurre efectivamente en el punto en que las energías libres son iguales. Las razones // para este comportamiento involucran aspectos cinéticos de la fusión y solidificación: aunque en las condiciones de equilibrio las dos fases tengan igual energía libre, la // nueva fase no puede nuclear debido a barreras energéticas que se deben salvar para que

ocurra el cambio estructural.

Para sistemas de un componente, las energías libres de las dos fases pueden ser / descritas en términos de las superficies  $G_S(T,P)$  y  $G_L(T,P)$ . La transición ocurre en la línea de intersección de las dos superficies, donde  $G_S$  y  $G_L$  son iguales a lo largo de esta línea. En el plano  $P,T$  se obtienen dos zonas, correspondientes a sólido y líquido, separadas por una línea (ver figura 2).

Vinculando los puntos 1 y 2 sobre la curva tal que  $P_2 - P_1 = dP$  y  $T_2 - T_1 = dT$  la / pendiente de la curva será  $dP/dT$  y conectando estados a cada lado de la línea, se tiene:

$$dG_S = G_{S2} - G_{S1} = V_S dP - S_S dT$$

$$dG_L = G_{L2} - G_{L1} = V_L dP - S_L dT$$

$$\text{como } dG_S = dG_L \text{ es } (V_S - V_L)dP - (S_S - S_L)dT = 0$$

de donde

$$(23) \quad dP/dT = \Delta S/\Delta V = \Delta H/T\Delta V$$

relación conocida como ecuación de Clausius - Clapeyron. En transformación sólido-líquido es  $\Delta H > 0$  y  $\Delta V > 0$  por lo cual la pendiente de la línea es positiva. Un aumento en / la presión a  $T = \text{constante}$  tenderá llevar al sistema de la fase líquida a la sólida.

Ordinariamente, la fusión y solidificación involucran cambios discontinuos en la entropía y volumen. Esto es cierto aún cuando existan efectos precursores a cada lado de la transición. Sin embargo, un problema fundamental en las teorías generales de la fusión es determinar si hay sustancias que puedan arribar a condiciones "críticas" para la transición entre sólido y líquido, en las cuales no hay discontinuidad entre esos dos estados de la materia, en analogía con las condiciones críticas para la transición líquido-gas. Se ha buscado evidencia experimental de esta posibilidad, por mediciones de  $\Delta V$  y  $\Delta S$  en función de la presión. Se observa que hay sustancias en las cuales estos parámetros decrecen al aumentar  $P$  y extrapolando a altas presiones se trata de predecir la presión crítica para la cual  $\Delta V = 0$  y  $\Delta S = 0$ . Las presiones estimadas // caen dentro de las posibilidades experimentales pero no se han observado anomalías a / presiones aún mayores. Luego, no existe evidencia que la transición sólido-líquido pueda obtenerse en condiciones críticas.

Para sustancias puras, la termodinámica no brinda mayor información que la mencionada. Si se desea ahondar en el conocimiento de los mecanismos microscópicos que // dan cuenta de la transición, se deben realizar modelos que tengan en cuenta las características de los estados sólido y líquido, en especial aspectos estructurales vinculados con la pérdida del orden en el arreglo atómico cuando se pasa de sólido a líquido.

## SOLIDIFICACIONES DE SOLUCIONES BINARIAS.

Funciones termodinámicas para soluciones.

Si deseamos describir termodinámicamente la solidificación de soluciones binarias, debemos primero discutir sus propiedades termodinámicas.

Consideremos que nuestro sistema sea una solución, en que los componentes están / presentes en cantidades  $n_\alpha$ . Llamemos  $G'$  a la energía libre de la cantidad total de solución y sea  $G$  la correspondiente a un mol, o sea

$$(24) \quad G = G' / \sum n_\alpha$$

Si incrementamos las cantidades de componentes en  $dn_\alpha$  a  $P$  y  $T$  constantes, será

$$(25) \quad dG' = \sum \mu_\alpha \cdot dn_\alpha$$

donde  $\mu_\alpha = (\partial G' / \partial n_\alpha) =$  potencial químico del componente  $\alpha$  en la solución.

Si agregamos  $n_\alpha$  moles del componente  $\alpha$  se tendrá que la energía libre total habrá variado en

$$\Delta G' = \sum \mu_\alpha \cdot n_\alpha$$

si ahora quitamos  $\sum n_\alpha$  moles de solución (de manera mecánica) se tendrá

$$\Delta G' = \sum n_\alpha \cdot G$$

Como resultado de todo ese proceso  $G'$  no cambió y será

$$G \cdot \sum n_\alpha = \sum \mu_\alpha \cdot n_\alpha$$

con lo cual

$$(27) \quad G = \sum \mu_\alpha \cdot n_\alpha / \sum n_\alpha = \sum x_\alpha \mu_\alpha$$

donde

$$(28) \quad x_\alpha = n_\alpha / \sum n_\alpha = \text{fracción molar del componente } \alpha$$

Usando ecuaciones 24 y 27, obtenemos

$$(29) \quad G' = \sum n_\alpha \mu_\alpha$$

$$(30) \quad dG' = \sum (n_\alpha d\mu_\alpha + \mu_\alpha dn_\alpha)$$

pero teniendo en cuenta la ecuación 26 resulta debe ser

$$\sum n_\alpha d\mu_\alpha = 0$$

o bien, dividiendo por  $\sum n_\alpha$ ,

$$(31) \quad \sum x_\alpha d\mu_\alpha = 0 \quad \text{ecuación de Gibbs-Duhem.}$$

Si deseamos encontrar las condiciones en que se realiza el equilibrio termodinámico entre dos fases, debemos estudiar en qué condiciones la energía libre del sistema / es mínima.

La variación de energía libre para cada una de las dos fases presentes, será

$$dG'^1 = V'^1 dP - S'^1 dT + \sum \mu_\alpha^1 dn_\alpha^1$$

$$dG'^2 = V'^2 dP - S'^2 dT + \sum \mu_\alpha^2 dn_\alpha^2$$

El equilibrio mecánico implica igualdad de presión en todo punto del sistema y el equilibrio térmico igualdad de temperatura, por lo cual podemos fijar P y T constantes y analizar sólo el equilibrio químico.

Realizamos el intercambio de una cantidad infinitesimal de componente j entre las dos fases, por ejemplo de la 2 a la 1, con lo cual

$$dG'^1 = \mu_j^1 dn_j$$

$$dG'^2 = -\mu_j^2 dn_j$$

el cambio total es  $dG' = dG'^1 + dG'^2 = (\mu_j^1 - \mu_j^2) dn_j$

En equilibrio debe ser  $dG' = 0$ , por lo cual

$$(32) \quad \mu_j^1 = \mu_j^2$$

Luego, para que dos o más fases estén en equilibrio, el potencial químico de las especies presentes debe ser el mismo en todas ellas.

Si se tiene una solución binaria de especies A y B, sea C la fracción molar (o // composición) del componente B. Será

$$(33) \quad G = (1 - C) \mu_A + C \mu_B$$

con lo cual

$$(34) \quad \mu_A = G - C \cdot \partial G / \partial C$$

$$\mu_B = G + (1 - C) \cdot \partial G / \partial C$$

A una dada temperatura y presión (usualmente  $P = 1$  atm. para nuestros fines) se // tendrá las funciones energía libre y potenciales químicos para sólido y líquido como // los indicados en ecuaciones 33 y 34 y como se esquematizan en la figura 3. En un // gráfico como el presente, con G vs. C, la tangente común a ambas curvas determina las composiciones de las fases en equilibrio a una dada P y T, según se muestra en figura 3.

A partir de allí y variando la temperatura se construye el diagrama de equilibrio. Para soluciones ideales, los potenciales químicos están dados por

$$(35-a) \quad \mu_L^A = \mu_o^A + S_L^A \Delta T^A + RT \ln(1-C)$$

$$(35-b) \quad \mu_L^B = \mu_o^B + S_L^B \Delta T^B + RT \ln(C)$$

$$(35-c) \quad \mu_S^A = \mu_o^A + S_S^A \Delta T^A + RT \ln(1-C)$$

$$(35-d) \quad \mu_S^B = \mu_o^B + S_S^B \Delta T^B + RT \ln(C)$$

donde  $\mu_o^A$  y  $\mu_o^B$  son los potenciales químicos de los componentes puros;  $\Delta T^A = (T_o^A - T)$ , /  $\Delta T^B = (T_o^B - T)$ , siendo  $T_o^A$  y  $T_o^B$  las temperaturas de referencia para  $\mu_o^A$  y  $\mu_o^B$ , respectiva



mente. El diagrama de equilibrio que resulta está dado en figura 4.

El apartamiento de la idealidad da origen a la multitud de diagramas que se observan en la práctica. Para soluciones suficientemente diluidas, podemos usar la aproximación de solución ideal. Igualando  $\mu_L^A$  con  $\mu_S^A$  y llamando  $k = C_S^*/C_L^*$  = coeficiente de partición, donde designamos con \* las composiciones de sólido y líquido en equilibrio, se obtiene

$$(36) \quad k = 1 - m\Delta H^A/RT_{fA}^2$$

donde  $m$  es la pendiente de la línea líquidus y  $\Delta H^A$  es el calor de fusión y  $T_{fA}$  es la temperatura de fusión de A puro.

Cuando la interfaz de separación entre sólido y líquido no es plana, existe un efecto de tensión superficial debido a la curvatura. La presencia de una curvatura ejerce un exceso de presión sobre la fase sólido. Ese exceso de presión es  $E = 2\sigma/r$  donde  $\sigma$  es la energía libre superficial o tensión superficial, y lo igualamos a la diferencia de energía libre entre sólido y líquido a la temperatura  $T = T_f - \Delta T$ . Luego

$$\Delta G = 2\sigma/r$$

es  $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ ; a  $T = T_f$  es  $\Delta G = 0$ , por lo cual  $\Delta S = \Delta H/T_f$  luego, a la temperatura  $T$  es  $\Delta G = \Delta H\Delta T/T_f$  con lo cual

$$(37) \quad \Delta T = 2\sigma T_f/r\Delta H$$

Este aspecto es débil y solo importa para radios de curvatura de aproximadamente  $10^{-6}$  cm.

Incluyendo el efecto de curvatura en la expresión de los potenciales químicos produce un corrimiento en las líneas líquidus y sólidas, paralelas a sí mismas, con lo cual  $m$  y  $k$  no varían por efecto de curvatura.

La termodinámica solo nos permite analizar las condiciones en que las fases en sólido y líquido permanecen en equilibrio. Nada nos dice acerca de lo que sucede cuando una de las fases se desarrolla a expensas de la otra.

La constante  $k$ , que nos vincula las composiciones de sólido y líquido que coexisten en equilibrio, solo se ve alterada en muy poco cuando la solidificación o fusión tienen lugar a velocidades de avance de la interfase que son normalmente obtenibles experimentalmente, salvo en experiencias de templado desde el líquido. Eso implica que los procesos cinéticos que ocurren en la interfase sólido-líquido pueden describirse por medio del diagrama de equilibrio o sea que el equilibrio termodinámico se conserva en la interfaz.

Como consecuencia de que el sólido tiene distinta composición que el líquido en equilibrio con él, cuando la solidificación progresa hay exceso de soluto (solvente) en el líquido frente a la interfaz cuando  $k < 1$  ( $k > 1$ ). Cuando no existen efectos convectivos, este exceso de soluto se mezcla con el resto del líquido solo por difusión y se genera una capa de líquido enriquecido de soluto frente a la interfaz. Si la solidifi-

ción se realiza con extracción de calor por un sumidero plano, se tiene solidificación unidireccional y en este caso se obtiene situación de estado estacionario cuando se forma sólido de la misma composición que la composición promedio de partida. En estas condiciones de estado estacionario se obtiene un perfil de concentraciones en el líquido y sólido como se ejemplifica en la figura 5:

Si ubicamos un sistema de coordenadas fijo a la interfaz S-L que avanza a velocidad constante  $V$ , la distribución de soluto esta dada por

$$(38) \quad C_L(z) = C_o \left[ 1 - (1 - k)/k \cdot \exp(-Vz/D) \right] \quad \text{en el líquido}$$

$$C_S(z) = C_o \quad \text{en el sólido}$$

y relacionando  $C_L$  con la temperatura de equilibrio por medio del diagrama de equilibrio, se tiene que la temperatura de equilibrio del líquido es

$$(39) \quad T_L(z) = T_f + mC_o \left\{ 1 + (1 - k)/k \cdot \exp(-Vz/D) \right\}$$

$T_f + mC_o/k$  es la temperatura en la interfaz S-L. La temperatura real la podemos escribir cerca de la interfaz como

$$(40) \quad T(z) = T_f + mC_o/k + Gz$$

donde  $G$  es el gradiente de temperatura en el líquido frente a la interfaz.

Si  $T(z) < T_L(z)$  para algun rango de  $z$ , entonces esa zona se halla por debajo de la temperatura de equilibrio sólido-líquido y estaría sobreenfriada. Es lo que se conoce como sobreenfriamiento constitucional. Ello ocurriría en zonas adyacentes a la / interfaz y como no es posible tener sólido en contacto con líquido sobreenfriado (salvo en situaciones transitorias) las dos distribuciones de temperatura deben ser al menos tangentes en el origen para que la interfaz siga siendo plana. El caso límite, // que divide la zona de crecimiento con interfaz plana estable de la zona con interfaz plana inestable esta determinado por

$$(41) \quad \begin{array}{ll} G/VC_o > -m(1 - k)/Dk & \text{interfaz estable} \\ < & \text{interfaz inestable} \end{array}$$

Si se tienen condiciones de inestabilidad, la interfaz deja de ser plana y se generan estructuras que tienden a disminuir la acumulación de soluto y, por lo tanto, a eliminar el líquido sobreenfriado. Este sería el origen de la estructura celular en / la solidificación de aleaciones.

De aquí se infiere que podemos extender a aleaciones los conocimientos que se poseen por análisis del problema de Stefan en elementos puros, en los casos que la interfaz sea estable, pues puede definirse la geometría del dominio que ocupa el sólido. Si la interfaz no es estable, entonces no se puede definir la geometría de la interfaz a priori, sino que es parte de la solución que se busca.

#### ESTABILIDAD DE LA INTERFAZ PLANA EN LA SOLIDIFICACION DE SOLUCIONES BINARIAS.

El problema de no poder definir la forma de la interfaz sólido-líquido genera u-

na complicación formidable en el problema de Stefan, pues la frontera libre no puede / definirse a priori. El problema es fuertemente no lineal y cae fuera del ámbito de la termodinámica. Sin embargo, dada la importancia que reviste creo es conveniente dar aquí una visión, aunque más no sea parcial, de los desarrollos hechos en esta área, con la esperanza de motivar inquietudes acerca de los nuevos problemas que se generan.

En lo que sigue se dará una versión del análisis de estabilidad lineal realizado por Mullins y Sekerka, que predice bajo qué condiciones la interfaz plana se vuelve inestable.

Sea una solución binaria diluida que solidifica unidireccionalmente. Vamos a considerar una interfaz originalmente plana que se mueve con velocidad  $V$  en la dirección  $z$ . Ubicamos nuestro sistema de coordenadas fijo a la interfaz, de modo que  $z = 0$  es la interfaz plana. En estas condiciones, los campos térmicos y de soluto en estado estacionario satisfacen las siguientes ecuaciones:

en el líquido

$$(42) \quad \nabla^2 C + (V/D)\partial C/\partial z = 0$$

$$(43) \quad \nabla^2 T_L + (V/a_L)\partial T_L/\partial z = 0$$

en el sólido

$$(44) \quad \nabla^2 T_S + (V/a_S)\partial T_S/\partial z = 0$$

donde

$C$  = concentración de soluto en el líquido

$T_L, T_S$  = temperatura en el líquido, sólido

$D$  = coeficiente de difusión del soluto en el líquido

$a_L, a_S$  = difusividad térmica del líquido, sólido.

Se ha despreciado la difusión de soluto en el sólido, pues su efecto es muy pequeño.

Vamos a examinar la estabilidad de la interfaz plana, imponiendo una perturbación infinitesimal en la forma de la interfaz y observando bajo qué condiciones esta perturbación crece o decae.

La interfaz perturbada se describe por

$$(45) \quad z = \phi(x, t) = \delta(t) \cdot \text{sen } wx$$

$\delta(t)$  es la amplitud de la perturbación,  $w = 2\pi/\lambda$  es el número de onda,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $x$  es la coordenada normal a  $z$ , en el plano de la interfaz  $z = 0$ .

Las condiciones de contorno que deben satisfacerse en la interfaz son:

a) continuidad de los campos

$$(46) \quad T_L(\phi) = T_S(\phi) = T_\phi$$

$$(47) \quad T_\phi = T_f + mC_\phi - \Gamma w^2 \delta \cdot \text{sen } wx$$

donde  $T_\phi$ ,  $C_\phi$  = temperatura y composición del líquido en la interfaz

$$\Gamma = \gamma/\Delta S$$

$\gamma$  = energía interfacial sólido-líquido

$\Delta S$  = entropía de fusión por unidad de volumen.

b) conservación de calor y masa

$$(48) \quad V(x) = (1/\Delta H) \cdot |K_S(\partial T_S/\partial z)_\phi - K_L(\partial T_L/\partial z)_\phi| \\ = |D/C_\phi(k-1)| \cdot (\partial C/\partial z)_\phi$$

$K_S$ ,  $K_L$  = conductividades térmicas de sólido y líquido, respectivamente.

Las soluciones a las ecuaciones 42 - 44 se pueden escribir de modo que sea

$$(49) \quad T_\phi = T_o + a\delta \sin wx$$

$$(50) \quad C_\phi = C_o + b\delta \sin wx$$

donde  $T_o$  y  $C_o$  son las soluciones para interfaz plana.  $a$  y  $b$  determinan las correcciones debidas a la perturbación. Las soluciones buscadas son:

$$(51) \quad C - C_o = G_C D/V \cdot |1 - \exp(-Vz/D)| + \delta(b - G_C) \sin wx \cdot \exp(-w_C z)$$

$$(52) \quad T_L - T_o = G_L a_L/V \cdot |1 - \exp(-Vz/a_L)| + \delta(a - G_L) \sin wx \cdot \exp(-w_L z)$$

$$(53) \quad T_S - T_o = G_S a_S/V \cdot |1 - \exp(-Vz/a_S)| + \delta(a - G_S) \sin wx \cdot \exp(-w_S z)$$

$G_C$ ,  $G_L$ ,  $G_S$  = gradientes de concentración y térmicos en el líquido y sólido, para la interfaz plana.

$$(54) \quad w_C = V/2D + |(V/2D)^2 + w^2|^{1/2}$$

$$(55) \quad w_L = V/2a_L + |(V/2a_L)^2 + w^2|^{1/2}$$

$$(56) \quad w_S = V/2a_S + |(V/2a_S)^2 + w^2|^{1/2}$$

Sustituyendo ecuaciones 49 y 50 en la 47, se obtiene

$$(57) \quad a = mb - \Gamma w^2$$

Usando las ecuaciones 51 a 53 en la ecuación 48 y haciendo uso de la ecuación 57 se igualan los coeficientes de iguales componentes de Fourier, con lo cual se obtiene, en primer orden en  $\delta$ :

$$(58) \quad V = (K_S G_S - K_L G_L)/\Delta H$$

$$(59) \quad \delta/\delta = 1/\Delta H \cdot [K_S w_S (a - G_S) + K_L w_L (a - G_L) - V K_S G_S/a_S + V K_L G_L/a_L]$$

La estabilidad de la interfaz plana depende del signo de  $\delta/\delta$ . La interfaz plana es estable si  $\delta/\delta < 0$ . La condición de estabilidad marginal esta dado por la condición  $\delta/\delta = 0$ , lo cual se traduce en

$$(60) \quad -\Gamma w^2 - \tilde{K}_L G_L [(w_L - V/a_L) / (\tilde{K}_S w_S + \tilde{K}_L w_L)] - \\ - \tilde{K}_S G_S [(w_S - V/a_S) / (\tilde{K}_S w_S + \tilde{K}_L w_L)] + \\ + m G_C [(w_C - V/D) / (w_C - V/D \cdot (1 - k))] = 0$$

$$\text{donde } \tilde{K}_L = K_L / (K_S + K_L) \quad ; \quad \tilde{K}_S = K_S / (K_S + K_L)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \epsilon_L &= [w_L - V/a_L] / (\tilde{K}_S w_S + \tilde{K}_L w_L) \\ \epsilon_S &= [w_S - V/a_S] / (\tilde{K}_S w_S + \tilde{K}_L w_L) \\ \epsilon_C &= [w_C - V/D] / [w_C - V/D \cdot (1 - k)] \end{aligned}$$

la condición de estabilidad marginal se escribe:

$$(61) \quad -\Gamma w^2 - [\tilde{K}_L G_L \epsilon_L + \tilde{K}_S G_S \epsilon_S] + m G_C \epsilon_C = 0$$

Para visualizar este comportamiento, veamos el siguiente caso:  $K_S = K_L$  ;  
  $a_S = a_L$ , que son válidos para la solidificación succinonitrilo.

Si  $w \gg V/a_L$  ó  $V/a_S$  es  $w_L \cong w_S \cong w$  y  $\epsilon_L = \epsilon_S = 1$

Esto se cumple para velocidades normales en que se observa que las longitudes de onda de las perturbaciones son menores que la longitud de onda térmica en sólido o líquido. La ecuación 61 puede escribirse entonces como

$$(62) \quad m G_C(\text{ef}) - G(\text{ef}) < \Gamma w^2 \quad \text{interfaz estable} \\ > \quad \text{interfaz inestable}$$

$$\text{donde } G_C(\text{ef}) = G_C \cdot \epsilon_C$$

$$G(\text{ef}) = \tilde{K}_S G_S \epsilon_S + \tilde{K}_L G_L \epsilon_L$$

La ecuación 41 que daba la condición termodinámica para interfaz plana puede escribirse:

$$(63) \quad m G_C - G_L < 0$$

En el límite de bajas velocidades, aquellas comunmente halladas en la experiencia, es  $G_C(\text{ef}) \cong G_C$  y  $G(\text{ef}) \cong G_L$ , por lo cual la aproximación termodinámica es buena, dado que el término  $\Gamma w^2$  es muy pequeño.

Para  $V/2a_L w \gg 1$ , o sea altas velocidades,  $\epsilon_L \rightarrow 0$  y  $\epsilon_S \rightarrow 2$  y  $m G_C(\text{ef}) - G(\text{ef})$  se hace comparable con  $\Gamma w^2$ . Esto quiere decir que a altas velocidades la interfaz tiende a estabilizarse por efecto de la tensión superficial y la longitud de onda de la perturbación es mayor que la longitud de onda térmica. En este régimen el criterio de sobreenfriamiento constitucional no es válido y no se puede predecir con él la estabilidad de la interfaz plana.

Con este tipo de análisis se predicen las condiciones en que la interfaz plana se vuelve inestable, pero nada dice sobre la estructura que se desarrolla.

Experimentalmente se conoce que cuando el criterio de inestabilidad dado por ecua

ción 62 nos dice que la interfaz es inestable, la solidificación progresa en estado / estacionario no ya con interfaz plana sino con estructura celular o dendrítica estable. O sea que se generan estructuras disipativas que permiten absorber el exceso de energía libre que habría si existiese efectivamente líquido sobreenfriado constitucionalmente.

Si designamos por  $\phi(x,t)$  a la perturbación que se impone a la interfaz plana, el criterio de estabilidad nos dice cuando

$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x,t) \rightarrow 0$  en el caso de estabilidad o cuando

$t \rightarrow \infty$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x,t) \rightarrow \infty$  en el caso de inestabilidad, pero nada nos dice

$t \rightarrow \infty$

acerca de las situaciones en que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x,t) \rightarrow \phi_0(x)$

$t \rightarrow \infty$

o sea se generan estructuras que se mantienen en el tiempo. Para ello necesitamos ir más allá de una teoría lineal y analizar el proceso de inestabilidad por teoría no lineal. En lo que sigue daremos una breve descripción de un posible camino a seguir.

Transformamos nuestro problema a variables y parámetros adimensionales y nos restringimos a 2 dimensiones:

$$(64) \quad \begin{aligned} Vz/D &= \bar{z} & ; & & Vx/D &= \bar{x} & ; & & V t/d &= \bar{t} \\ Dv/V &= \bar{v} & ; & & C/C_0 &= \bar{C} & ; & & V\phi/D &= \bar{\phi} \\ GD/VC_0 m &= W(k-1) & ; & & VT_f \Gamma / DC_0 m &= \beta(k-1) \end{aligned}$$

en términos de estas variables, si llamamos  $w = \delta/\delta$  y  $\phi = \exp(w\bar{t} + ik\bar{x})$ , obtenemos

$$(65) \quad w \bar{t} = (1 - W - k^2) \cdot [(1/4 + k^2 + w)^{1/2} + k - 1/2] - k$$

La transición a interfaz inestable ocurre para  $W = W_C = 1$ . En la región de inestabilidad, para pequeños valores de  $W_C - W$  es

$$k \sim (W_C - W)^{1/2} \quad ; \quad w \sim k \sim (W_C - W)^2$$

de modo que la estructura perturbada es casi-estacionaria y casi-unidimensional. En este límite, la relación de dispersión (65) se escribe

$$(66) \quad w \bar{t} = (W_C - W) k^2 - \beta k^4 - k$$

y se muestra esquemáticamente en figura 6:

De aquí se observa que existen modos inestables de los cuales predominan aquellos con mayor valor de  $w$ .

Para realizar un análisis no lineal, se transforman las coordenadas a sistema // curvilíneo fijo a la interfaz, definiendo

$$\bar{z} = \phi(x,t) + \bar{z}$$

Escribimos  $W = W_C(1 - e)$ . de modo de considerar explícitamente pequeños apartamientos de la condición crítica.

Se busca solución de la forma

$$(67) \quad C = \alpha e^2 + (1 - \alpha e^2) \exp(-\xi) + e u(\xi, \zeta, \tau, \beta)$$

$$u = u^0 + e u^1 + e^2 u^2 + \dots$$

$$\tilde{\phi} = e F(\xi, \zeta, e) = e(F^0 + e F^1 + e^2 F^2 + \dots)$$

donde  $\xi = x \sqrt{e}$  ;  $\zeta = \tilde{z}$  ;  $\tilde{\tau} = e \tilde{t}$  ;  $K = \alpha e$  ,  $\mathcal{K} = \text{curvatura}$

Para  $F^0$  se halla la siguiente ecuación:

$$(68) \quad F_{\tau}^0 + \beta F_{\xi\xi\xi\xi}^0 + [(1 - F^0) F_{\xi}^0]_{\xi} + \alpha F^0 = 0$$

Si efectuamos la transformación

$$F^0 = f/2 \quad ; \quad \tau = 4\beta \tilde{\tau} \quad ; \quad \xi = \sqrt{2\beta} \tilde{\xi} \quad ; \quad \mathcal{K} = 1/4 \beta \alpha$$

nos queda

$$(69) \quad f_{\tilde{\tau}} + f_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + [(2 - f) f_{\tilde{\xi}}]_{\tilde{\xi}} + \alpha f = 0$$

Por consideraciones de simetría e invariancia, en tres dimensiones debe tener la forma:

$$f_{\tau} + \nabla^4 f + \nabla[(2 - f)\nabla f] + \alpha f = 0$$

La amplificación inicial de pequeñas perturbaciones es debido al signo positivo de  $2 - f$ . En secciones de la interfaz en que  $f > 0$ , la inestabilidad se vuelve menor a medida que la amplitud crece. Donde  $f < 0$ , la inestabilidad se vuelve mayor.

Resolviendo numéricamente para  $\alpha = 1.01$  e imponiendo una perturbación inicial, / con condiciones de contorno periódicas en el intervalo  $0 < \tilde{\xi} < 11\pi$ , se halló que se generaba estructura celular semejante a la de figura 7 a medida que transcurría el tiempo. Se observa que la estructura es muy parecida a la estructura celular que se obtiene en experiencias con materiales orgánicos que solidifican en pequeños espesores, y contiene las características que se esperan en casos más generales: las partes salientes son de menor curvatura y los surcos son pronunciados y profundos.

A estos métodos aquí esbozados se le suman en la actualidad otros que se concentran en lo que sucede en la capa límite, obteniendo una ecuación de movimiento para / la interfaz, que luego es integrada numéricamente en función del tiempo, pero los hechos salientes están mencionados en el presente panorama.

Amén de la solidificación unidireccional, es de interés la solidificación de líquidos sobreenfriados, aislados del exterior, lo cual da origen a la solidificación / dendrítica. En este caso la situación se complica aún más dado que no se llega a una situación de verdadero estado estacionario, sino que la geometría evoluciona en el // tiempo. Únicamente cerca de las puntas de las dendritas puede aceptarse que se establece una situación de estado cuasi-estacionario, pero en el resto hay modos inestables de formación de ramas que evolucionan continuamente.

## Referencias:

- Bertorello, H.R. y Balzaretti, D.: Scripta Met., vol. 18 (1984) p. 1085.
- Chalmers, B.: "Principles of solidification", John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- Darken, L.S. y Gurry, R.W.: "Physical Chemistry of Metals", Mc Graw-Hill Book Co., 1953.
- Flemings, M.C.: "Solidification Processing", Mc Graw-Hill Book Co., 1974.
- Langer, J.S.: Rev. of Modern Physics, vol. 52 (1980) p. 1.
- Mullins, W.W. y Sekerka, R.F.: J. Appl. Phys., vol 35 (1964) p. 444.
- Rao, C.N.R. y Rao, K.J.: "Phase transitions in solids", Mc Graw-Hill Inc., 1978.
- Shimoji, M.: "Liquid Metals", Academic Press, 1977.
- Sivashinsky, G.I.: Physica, 8D (1983) p. 24.
- Swalin, R.A.: "Thermodynamics of solids", John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- Ubbelohde, A.R.: "The molten state of matter", John Wiley & Sons, Inc., 1978.
- Wollkind, D.J. y Segel, L.A.: Phil. Transc. Royal Soc. (Lond.), vol. 268 (1970) p. 351.



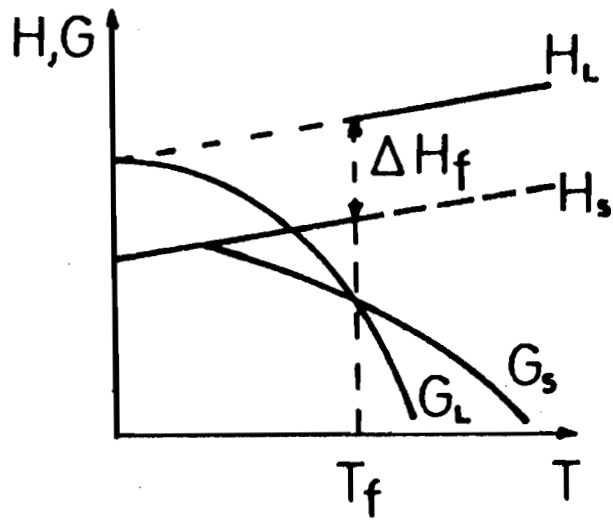


Figura 1

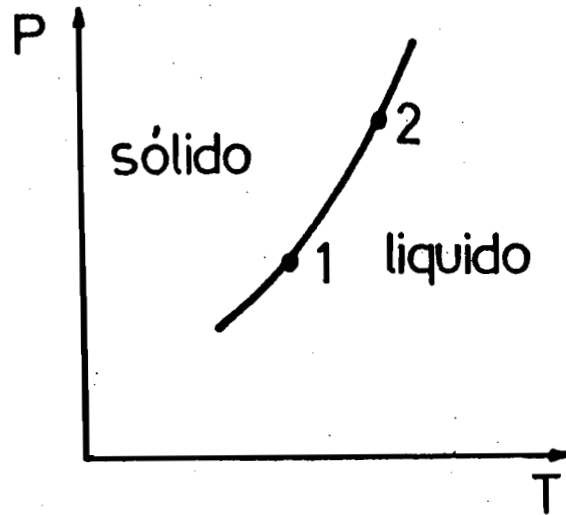


Figura 2

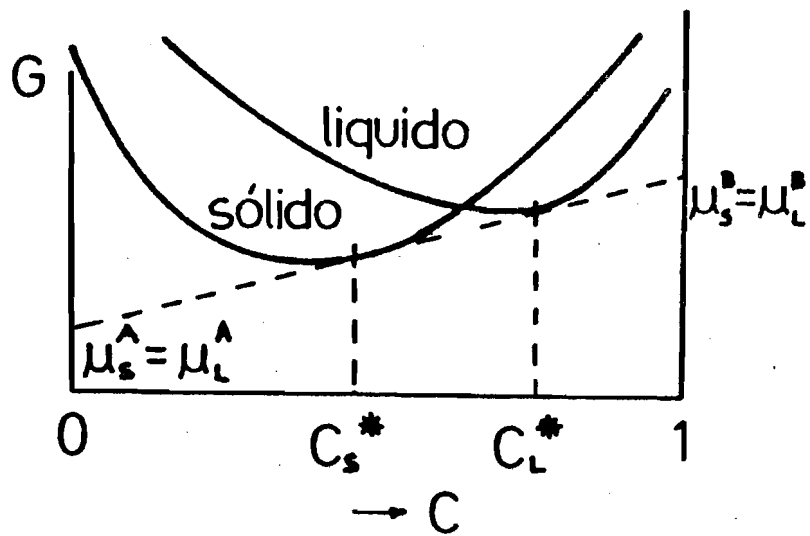


Figura 3

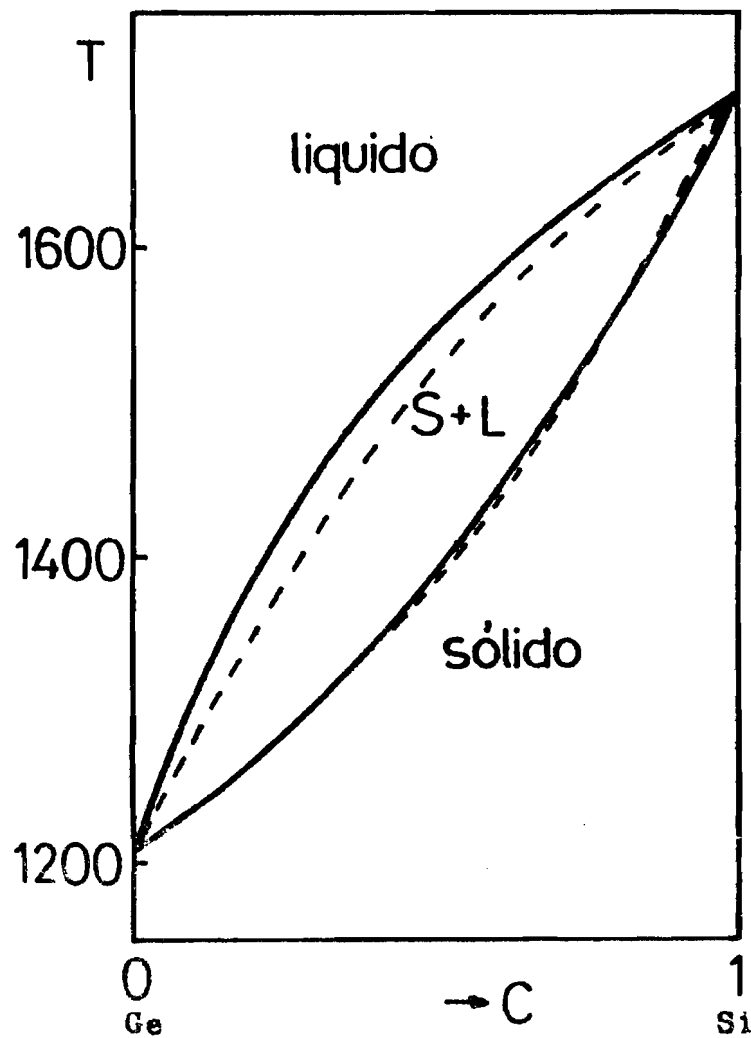


Figura 4

Diagrama de equilibrio del sistema Germanio-Silicio

— Experimental

- - - Teórico

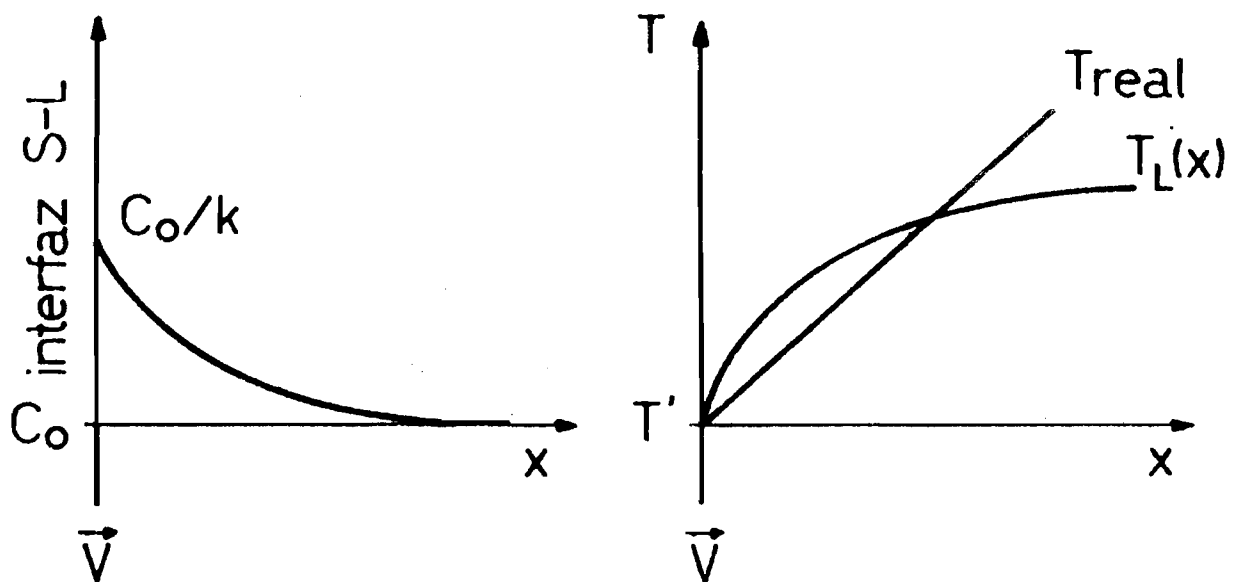


Figura 5

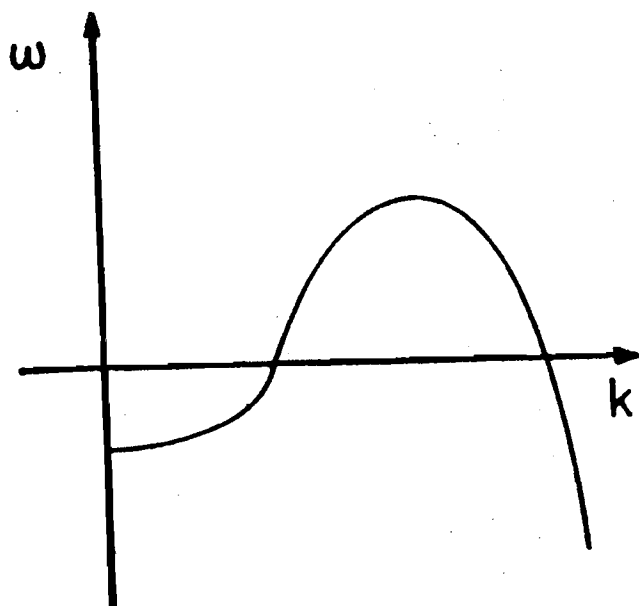


Figura 6

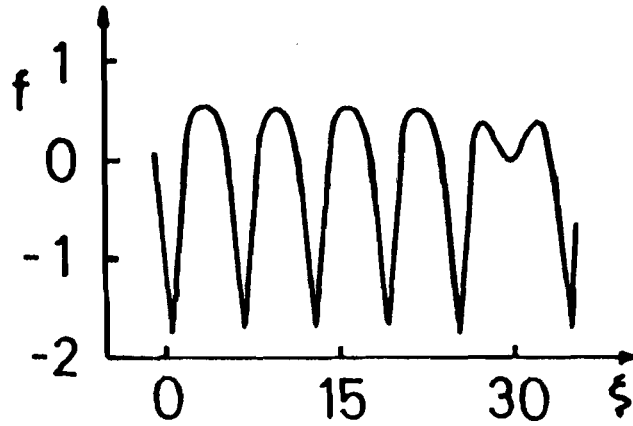


Figura 7

Facultad de Matemática, Astronomía y Física,  
Universidad Nacional de Córdoba  
Ciudad Universitaria,  
(5000) Córdoba.



COMPARACION DE SOLUCIONES  
DE ECUACIONES PARABOLICAS

Julio E. BOUILLET

En estas conferencias nos proponemos demostrar dos resultados de comparación de soluciones de problemas de contorno para ecuaciones del tipo

$$c(u(x,t)) \cdot u_t(x,t) = (k(u(x,t))u_x(x,t))_x, \quad (0.1)$$

con  $c(u) > 0$ ,  $k(u) > 0$ ; el dominio de las variables independientes es  $x > 0$ ,  $t > 0$ . Estas comparaciones son, en realidad, resultados sobre

(i) la dependencia monótona del flujo total a través de las curvas de nivel  $\{(x,t) : u^i(x,t) = w = \text{constante}\}$  para dos soluciones  $u^i(x,t)$  de respectivas ecuaciones

$$u_t^i(x,t) = (k^i(u(x,t))u_x(x,t))_x, \quad i = 1, 2, \quad (0.2)$$

sabiendo que se cumple  $k_1(z) > k_2(z) > 0$ , todo  $z$ ; y

(ii) la dependencia de las soluciones  $u^i(x,t)$  de ecuaciones

$$c_i(u(x,t)) \cdot u_t^i(x,t) = u_{xx}^i(x,t), \quad i = 1, 2, \quad (0.3)$$

en términos de los "calores específicos"  $c_1(u)$ , sabiendo que  $c_1(z) > c_2(z)$ , todo

Observemos que tanto en (i) como en (ii) sólo uno de los coeficientes  $c(u)$ ,  $k(u)$  que figuran en (0.1) es modificado.

Los datos de contorno son del tipo

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \psi(x), \quad x > 0; \\ u(0,t) &= \theta(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Sobre ellos y las soluciones  $u^1(x,t)$ ,  $u^2(x,t)$  de

caso (i): (0.2) y (0.4);

y caso (ii): (0.3) y (0.4),

impondremos la siguiente

#### Hipótesis H:

Sólo consideraremos soluciones  $u(x,t)$  que sean *monótonas decrecientes en  $x$*  para  $t > 0$  fijo, y *monótonas crecientes en  $t$*  para  $x > 0$  fijo; supondremos que estas soluciones  $u(x,t)$  son continuas en  $x > 0$ ,  $t > 0$  (luego  $\psi(x)$  es no creciente y  $\theta(t)$  no decreciente), y que tienen sentido las operaciones indicadas en (0.1). Nótese que  $u^1(x,t)$  y  $u^2(x,t)$  tienen los mismos datos del contorno.

Esto equivale a suponer una razonable bondad de las soluciones  $u^1, u^2$ , más un comportamiento que sería dable esperar, por ejemplo, en un proceso de calentamiento de un medio semiinfinito ubicado en  $x > 0$ , con la profundidad  $x$  como única dimensión relevante, en el cual la superficie  $x = 0$  es mantenida a temperatura  $\theta(t)$  para  $t > 0$ : si la distribución inicial de temperaturas fuera  $\psi = 0$  sería natural que, en cada plano  $x = \text{constante} > 0$ , la temperatura creciera con  $t$ , mientras que el perfil de temperaturas a  $t = \text{constante} > 0$ , fuera decre

ciente de  $\theta(t)$  para  $x = 0$  a  $0 = \psi$  en  $x \rightarrow +\infty$ .

Consecuencia de nuestra hipótesis es que las curvas de nivel  $\{(x, t) : u^i(x, t) = w = \text{constante}\}$ , tanto para  $u^1$  como para  $u^2$ , son curvas  $x = x(t)$  ó  $t = t(x)$  definidas por funciones no decrecientes.

Caso (i).

Si  $u^1(x, t)$ ,  $u^2(x, t)$  verifican (0.2), (0.4) con  $k_1(z) \geq k_2(z)$ , no necesariamente resulta que  $u^1(x, t) \geq u^2(x, t)$ : uno puede pensar a los  $k^i$  como difusividades térmicas, eso es, el cociente de una conductividad por un calor específico, y lo que "se gana" con una mayor conductividad se puede "perder" con un mayor calor específico.

Se puede probar, en cambio, que, bajo ciertas hipótesis, el flujo total de calor hasta tiempo  $t$  a través de curvas de nivel  $u^i = w = \text{constante}$  sí respeta el orden de los coeficientes  $k^i$ :

$$k^1 \geq k^2 \quad \text{implica} \quad \int_0^t (-k_1(w) u_x^1) \Big|_{u^1(x,s) = w} ds \geq \int_0^t (-k_2(w) u_x^2) \Big|_{u^2(x,s) = w} ds \quad (1.1)$$

(cf. [B1]).

En esta exposición veremos un caso particular de empleo de resultados como (1.1), a problemas de Stefan de una fase, en los cuales, si  $x = x^i(0, t)$  es la curva  $\{(x, t) : u^i(x, t) = 0\}$  resulta (cf. [T 1,2]) :

$$\int_0^t (-k_1(0) u_x^1) \Big|_{u^1(x,s) = 0} ds = \lambda^1(x^1(0, t) - x^0); \quad (1.2)$$

$$\int_0^t (-k_2(0) u_x^2) \Big|_{u^2(x,s) = 0} ds = \lambda^2(x^2(0, t) - x^0).$$

Para simplificar la exposición, y siempre bajo la hipótesis (H), pen-



saremos que  $\theta(t) = \theta = \text{constante} > 0$  en (0.4),  $u^i(x,0) = \psi(x) > 0$  en  $[0, x^0)$  y  $\psi(x) \equiv 0$  en  $[x^0, +\infty)$  ( $\psi$  es monótona decreciente). Entonces las curvas de nivel  $u^i(x,t) = 0$ , es decir  $x^i(0,t)$ , parten de  $x^0 = x^i(0,0)$ ,  $i = 1, 2$ .

La idea del método consiste en tomar, en cada caso  $i = 1, 2$ , la función inversa  $x = x(u,t)$  de  $u = u(x,t)$ , y transformar las condiciones (0.4) en condiciones dadas en el plano  $(u,t)$ ,  $u \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . Probaremos el

Teorema. Si  $k_1(z) \geq k_2(z)$ , todo  $z$ , y además  $\lambda^1 \geq \lambda^2 > 0$ , entonces se tiene la siguiente acotación por defecto de la frontera libre  $x^1(x,t)$  correspondiente a la solución  $u^1(x,t)$  del proceso de fusión con coeficiente  $k_1$ :

$$x^1(0,t) \geq \frac{\lambda^2}{\lambda^1} x^2(0,t) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^1}\right) x^0. \quad (1.3)$$

(N.B. Ensayemos una interpretación: dos materiales, que, luego de adecuados cambios de escala y/u origen se encuentran en fase sólida a la temperatura de fusión en  $[x^0, \infty)$ , y en fase líquida en  $[0, x^0)$ , son calentados en  $x = 0$ : el calor "se conduciría más rápido" para el material  $i = 1$ , cuya interfase  $x^1(0,t)$  tendería a superar a la  $x^2(0,t)$  del material  $i = 2$ .

Pero el calor necesario para cambiar de fase al material  $i = 1$  es proporcional a  $\lambda^1$ , y  $\geq$  que el correspondiente  $\lambda^2$  del otro material: los calores latentes juegan "en contra", por así decirlo, a las conductividades, y esto da lugar al compromiso (1.3).

Discuta el lector los casos más obvios:  $k_1 \equiv k_2$  y  $\lambda^1 > \lambda^2$ , y  $k_1 > k_2$  y  $\lambda^1 = \lambda^2$ ).

Demostración: Si  $x(u,t)$  satisface  $u(x(u,t),t) \equiv u$ , resulta  $u_x = 1/x_u$  y  $u_x \cdot x_t + u_t = 0$  (las funciones son evaluadas en los puntos

correspondientes). Entonces  $u_t = (k(u)u_x)_x$  se escribe así

$$\left( \frac{k(u)}{x_u(u,t)} \right)_u = -x_t(u,t). \quad (1.4)$$

en la región siguiente:

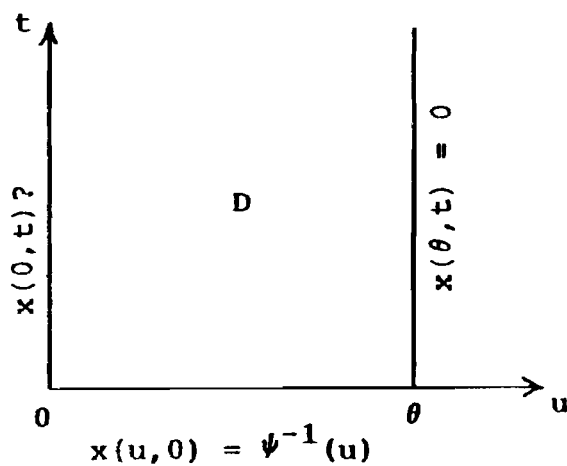


Figura 1

El dibujo en  $(x, t, u)$  sería

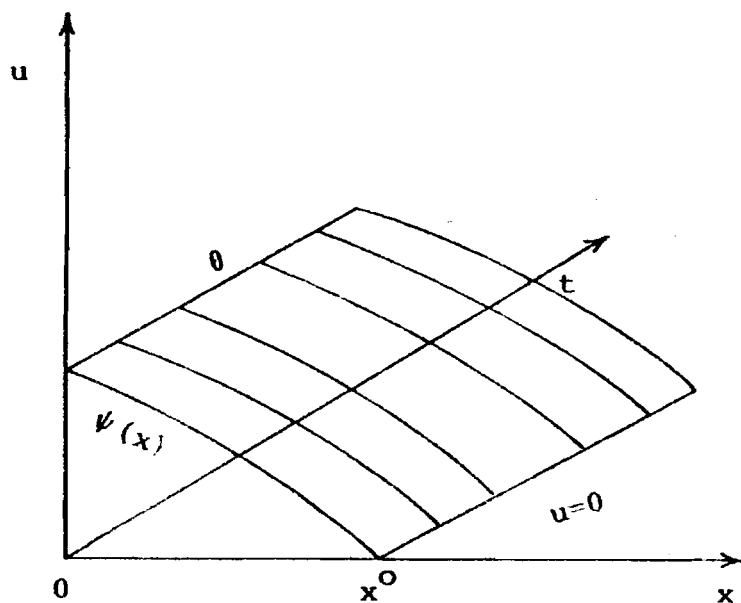


Figura 2

Integrando (1.4) se obtiene

$$-\int_0^u x_t(v,t)dv = \frac{k(u)}{x_u(u,t)} - \frac{k(0)}{x_u(0,t)} \quad (1.5)$$

y definiendo

$$V(u,t) := \int_0^t x(v,t)dv + \int_0^t \frac{-k(0)}{x_u(0,s)} ds \quad (1.6)$$

(1.5) se puede escribir

$$V_t(u,t) = -k(u)/x_u(u,t) = -k(u)/V_{uu}(u,t),$$

o bien:

$$V_t(u,t) \cdot V_{uu}(u,t) = -k(u). \quad (1.7)$$

Recordando que  $(u,t)$  son variables independientes, pongamos, para  $i = 1, 2$ ,  $k = k_i$ ,  $V = V^i(u,t)$ ,  $x = x^i(u,t)$  las respectivas funciones. En tonces

$$V_t^2 \cdot V_{uu}^2 - V_t^1 \cdot V_{uu}^1 = k_1(u) - k_2(u) \geq 0,$$

que se puede poner

$$(-V_{uu}^2)W_t - (V_t^1)W_{uu} > 0, \quad \text{con } W(u,t) := V^1(u,t) - V^2(u,t)$$

o bien:

$$W_t - a(u,t)W_{uu} > 0 \quad (1.8)$$

con  $a(u,t) = V_t^1(u,t)/(-V_{uu}^2(u,t)) = k_1(u) \cdot u_x^1(x^1,t) \cdot u_x^2(x^2,t) > 0$  con  $u_x^1, u_x^2$  evaluadas en puntos donde  $u^1(x^1,t) = u^2(x^2,t) = u$ .

Es fácil ver que las condiciones de contorno para  $W$  son

$$\begin{aligned}
 1) \quad W(u, 0) &= \psi^{-1}(u) - \psi^{-1}(u) = 0; \\
 2) \quad W_u(\theta, t) &= 0; \\
 3) \quad W_u(0, t) &= x^1(0, t) - x^2(0, t).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pero recordando que  $-k_i(0)/x_u^i(0, s) = -k_i(0)u_x^i \Big|_{u^i=0} > 0$  la definición (1.6) (con  $u = 0$ ) y (1.2), resulta

$$\begin{aligned}
 W(0, t) &= \lambda^1(x^1(0, t) - x^2(0, t)) + (\lambda^1 - \lambda^2)x^2(0, t) - (\lambda^1 - \lambda^2)x^0 \\
 &= \lambda^1 W_u(0, t) + (\lambda^1 - \lambda^2)(x^2(0, t) - x^0)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

y como  $(\lambda^1 - \lambda^2)(x^2(0, t) - x^0) > 0$ ,

$$3') \quad W(0, t) > \lambda^1 W_u(0, t) \tag{1.9}$$

Entonces debe ser  $W(u, t) > 0$  en  $D$ : si hubiera puntos  $(u, t) \in D$  donde  $W < 0$ , el mínimo  $< 0$  no puede alcanzarse en  $D$  ni en  $u = \theta$ , pues allí  $W_u = 0$  (principio fuerte del mínimo para la inecuación (1.8)). Tampoco puede alcanzarse en  $t = 0$  ( $W = 0$ ), ni en puntos  $(0, \bar{t})$ ,  $\bar{t} > 0$ : en ellos sería  $0 > W(0, \bar{t}) > \lambda^1 W_u(0, \bar{t})$  por 3' (1.9), y la derivada interior  $W_u(0, \bar{t}) < 0$  indicaría que hay valores de  $W$  en  $D$  que son menores que el mínimo  $W(0, \bar{t})$ , absurdo.

Como  $W(u, t) \geq 0$  en  $D$ , también  $W(0, t) \geq 0$ : de (1.10) concluimos

$$0 < \lambda^1(x^1(0, t) - x^2(0, t)) + (\lambda^1 - \lambda^2)(x^2(0, t) - x^0),$$

y de aquí nuestra acotación (1.3).

Caso (ii).

Consideramos ahora el problema (0.3), (0.4). Observemos previamente que se podría haber estudiado la(s) ecuación(es)

$$c_i(u)u_t = (k(u)u_x)_x \quad (0.3 \text{ bis})$$

con el mismo  $k(u) > 0$ , pues el problema se reduce a comparar soluciones de (0.3), mediante el cambio de variable  $v := \alpha(u) := \int_0^u k(r)dr$ : como  $k = \alpha' > 0$ , sea  $\beta$  tal que  $\beta(\alpha(u)) \equiv u$ . Es fácil ver que (0.3 bis) se escribe

$$c_i(\beta(v))\beta'(v) \cdot v_t = v_{xx} \quad \text{con } \beta' > 0;$$

por lo tanto  $c_1(u) > c_2(u)$  si y sólo si  $c_1(\beta(v))\beta'(v) > c_2(\beta(v))\beta'(v)$ . Es decir, se tiene la situación del caso (ii).

El resultado que buscamos es el

Teorema. Si  $u^1(x,t)$ ,  $u^2(x,t)$  son soluciones de (0.3), (0.4) con  $c_1(z) > c_2(z) > 0$ , todo  $z$ , entonces

$$u^2(x,t) > u^1(x,t) \quad \text{en } x > 0, \quad t > 0.$$

Idea de la Demostración. Supongamos que no fuera así: el conjunto  $X = \{(x,t) : u^2(x,t) < u^1(x,t)\}$  sería un abierto no vacío del cuadrante  $x > 0, t > 0$ ; en los puntos de su frontera  $u^1(x,t) = u^2(x,t)$ , aunque tengan  $x > 0, t > 0$ :  $u^1$  y  $u^2$  satisfacen las mismas condiciones (0.4).

Formamos

$$E_i(z) = \int_0^z c_i(r)dr, \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

y, observando que  $\frac{\partial}{\partial t} E_i(u^i(x,t)) = c_i(u^i(x,t)) \cdot \frac{\partial u^i}{\partial t}(x,t)$ , restamos

las respectivas ecuaciones (0.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \{E_1(u^1(x,t)) - E_2(u^2(x,t))\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{u^1(x,t) - u^2(x,t)\}, \quad (2.2)$$

multiplicamos m.a.m. por la función característica  $X(x,t)$  del conjunto  $X \cap \{(x,t) : t < T\}$  e integramos en  $x > 0$ ,  $0 < t < T$ , con  $T$  arbitrario:

$$\begin{aligned} \iint X(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{E_1(u^1(x,t)) - E_2(u^2(x,t))\} dt dx = \\ = \iint X(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^1 - u^2)(x,t) dx dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

Estudiamos el signo de la integral a la derecha: integrando primero en  $dx$ , con  $t$  fijo,  $0 < t < T$ , resulta

$$\int X(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^1 - u^2)(x,t) dx = \sum_j \frac{\partial}{\partial x} (u^1 - u^2)(x,t) \Big|_{x=x_j}^{x=x^j}, \quad (2.4)$$

donde  $X \cap \{t\} =$  unión disjunta y a lo sumo numerable

de  $\{(x,t) : x_j < x < x^j\}$

(para simplificar, suponemos que todo  $x^j < +\infty$ ).

Pero como  $u^1 - u^2 > 0$  en  $X \cap \{t\}$ , resulta  $(u^1 - u^2)(x,t) > 0$  en  $x_j < x < x^j$ , con  $(u^1 - u^2)(x_j, t) = (u^1 - u^2)(x^j, t) = 0$ : entonces  $\frac{\partial}{\partial x} (u^1 - u^2)(x^j, t) < 0$  y  $\frac{\partial}{\partial x} (u^1 - u^2)(x_j, t) > 0$ , resultado  $< 0$  la integral en  $dx$ , para todo  $t < T$ . Integrandolo ahora en  $dt$ ; tendremos que el miembro derecho de (2.3) es  $< 0$ , cualquiera sea  $T > 0$ .

Veamos el signo del miembro izquierdo de (2.3), para un  $T$  tal que  $X \cap \{T\} = X \cap \{(x,t) : t = T\} \neq \emptyset$ : esto dice que hay un abierto

$\Delta C (x > 0)$  tal que para  $x \in A$ ,

$$u^1(x, T) - u^2(x, T) > 0$$

de donde obtenemos, debido a que  $E_2' = c_2 > 0$ , y  $E_1(z) - E_2(z) = \int_0^z (c_1(r) - c_2(r)) dr \geq 0$  por hipótesis:

$$E_1(u^1(x, T)) \geq E_2(u^1(x, T)) > E_2(u^2(x, T)), \quad (2.5)$$

$$\text{es decir, para } x \in A, \quad E_1(u^1(x, T)) - E_2(u^2(x, T)) > 0 \quad (2.6)$$

Si ahora calculamos la integral a la izquierda de (2.3), integrando primero en  $dt$  en forma análoga a lo hecho en (2.4),

$$\sum_k \left[ E_1(u^1(x, t)) - E_2(u^2(x, t)) \right]_{t=t_k(x)}^{t=t_k^k(x)}, \quad (2.7)$$

donde, para  $x$  fijo,

$$\begin{aligned} X \cap \{x\} = & \text{(unión disjunta a lo sumo numerable} \\ & \text{de } \{(x, t) : t_k < t < t_k^k, k > 1\}) \\ & \cup \{(x, t) : t_1 < t \leq T, x \in A\} \end{aligned}$$

Observemos que  $U_1(x) := u^1(x, t_1) = u^2(x, t_1) < u^2(x, T) < u^1(x, T)$ , y, para  $k > 1$ ,  $U_k(x) := u^1(x, t_k) = u^2(x, t_k) < u^1(x, t_k^k) = u^2(x, t_k^k) =: U^k(x)$ .

Entonces vemos que la expresión en (2.7) se puede escribir así (el lector puede confundirse aún más estudiando la figura 3)

$$\begin{aligned} & (E_2(u^1(x, T)) - E_2(u^2(x, T))) + [(E_1(u^1(x, T)) - E_2(u^1(x, T))) - \\ & - (E_1(U_1(x)) - E_2(U_1(x)))] + [(E_1(U^2(x)) - E_2(U^2(x))) - \end{aligned}$$

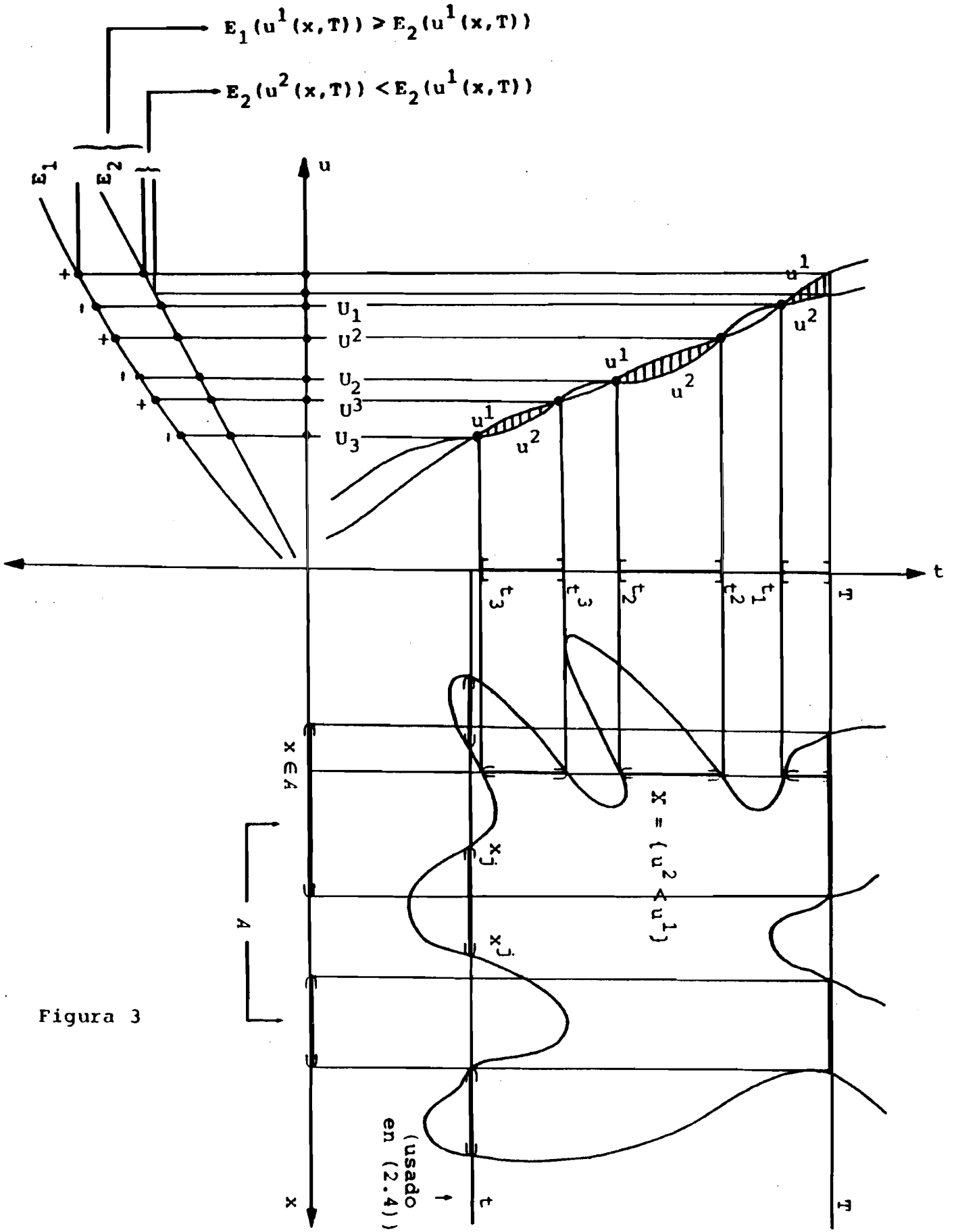


Figura 3



$$- \int (E_1(U_2(x)) - E_2(U_2(x))) + \dots \quad (2.8)$$

donde, dado que  $E_1(z) - E_2(z) \geq 0$  para todo  $z$ , los corchetes son  $\geq 0$ , para todo  $x$  fijo.

Pero el primer término es estrictamente positivo cuando  $x \in A$  (por (2.5)), y por lo tanto, integrando (2.7) = (2.8) ahora en  $dx$ ,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_A (E_2(u^1(x, T)) - E_2(u^2(x, T))) dx \leq \\ &\leq \iint X(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \{E_1(u^1(x, t)) - E_2(u^2(x, t))\} dx dt = \\ &= \iint X(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^1(x, t) - u^2(x, t)) dx dt \leq 0 \quad (\text{por (2.4)}), \end{aligned}$$

una contradicción debida a que  $X \cap \{(x, t) : t = T\} \neq \emptyset$ : este conjunto debe ser entonces vacío para todo  $T > 0$ , y entonces  $X = \{(x, t) : u^1(x, t) < u^2(x, t)\}$  es vacío. El teorema está demostrado, si excluimos la posibilidad de que  $X$  contenga semirrectas  $\{x > x_j\}$  (es decir, aceptamos que todo  $x_j^i < +\infty$ ). Esta objeción, y otras relacionadas con la existencia de las derivadas que hemos integrado, pueden ser salvadas (cf. [BA]).

Caso (ii), con variaciones.

A lo visto en el Caso (ii) se le puede formular la objeción siguiente: como las funciones  $E(u) = \int_0^u c(r) dr$  son continuas, el fenómeno de fusión descrito por (0.3) (0.4) no incluye cambios de fase de las substancias que ocupan el medio  $x > 0$ . Para que esto ocurra habría que aceptar que

$$E_i(u) = \int_0^u c_i(r) dr + \lambda^i H(u - u_*^i), \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

donde indicamos con  $H(\cdot)$  al salto de Heaviside que tiene lugar en  $u = u_*^1$ , la temperatura crítica,  $i = 1, 2$ . Por ejemplo,  $\frac{\partial}{\partial t} E_i(u^1(x, t))$  y  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^1(x, t)$ , tendrán que ser interpretadas como *medidas* ("δ de Dirac") en puntos  $(x, t)$  donde  $u^1(x, t) = u_*^1$ .

Supongamos, para simplificar, que sólo  $E_1$  contiene un salto en  $u_*^1$ , y que  $u^1(x, t)$  es una solución clásica de (0.3) fuera de la curva  $u^1(x, t) \equiv u_*^1$  dada por  $x = x^1(u_*^1, t)$ .

El argumento del caso (ii) falla cuando, e.g., el intervalo  $\{(x, t) : t_k < t < t^k\} \subset X = \{u^1 > u^2\}$  es atravesado por la curva  $x = x^1(u_*^1, t)$ , pues entonces

$$\int_{t_k}^{t^k} \frac{\partial}{\partial t} E_1(u^1(x, t)) dt < E_1(u^1(x, t^k)) - E_1(u^1(x, t_k))$$

(ies =  $E_1(u^1(x, t^k)) - E_1(u^1(x, t_k)) - \lambda^1$ !). (3.2)

Una objeción análoga merecería el cálculo de

$$\int_{x_j}^{x^j} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} (u^1 - u^2) \right) dx \text{ en (2.4),}$$

ya que  $\frac{\partial}{\partial x} u^1$  debe experimentar un salto en  $(x^1(u_*^1, t), t)$ , para que  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^1$  nos dé una  $\delta$  en ese punto.

En cambio no habría dificultades si la curva  $x = x^1(u_*^1, t)$  sólo toca ra la frontera de  $X$ , ya que sólo interesan límites laterales en (3.2), por ejemplo.

Ensayamos una variante del argumento del caso (ii), ahora para la hipótesis

$$0 < (E_1(u) - E_2(u)) \text{ estrictamente creciente con } u \quad (3.3)$$

aceptando que sólo  $E_1$  experimenta un salto en  $u = u_*^1$  (queda sin con

considerar el caso en que ambas  $E_1$  y  $E_2$  salten en  $u_*^1$ ; es claro que por (3.3) no puede ocurrir que, en un  $u = \tilde{u}$ , salte  $E_2$  y sea continua  $E_1$ . Si la línea de nivel  $x = x^1(u_*^1, t)$  corta a  $X \cap \{x\}$  en el segmento  $\{(x, t) : t_k < t < t^k\}$ , aceptaremos que

$$\int_{t_k}^{t^k} \frac{\partial}{\partial t} E_1(u^1(x, t)) dt = E_1(u^1(x, t^k)) - E_1(u^1(x, t_k))$$

Esto sería equivalente a considerar a  $\frac{\partial}{\partial t} E_1(u^1(x, \cdot))$  como una medida no negativa en la variable  $t$ .

Si aceptamos esto la demostración sigue como en (2.8).

Ahora veamos qué hacer con la integración de

$$\int X(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} (u^1 - u^2)(x, t) \right) dx$$

si  $x = x^1(u_*^1, t)$  cruza a  $X \cap \{t\}$  en  $\{(x, t) : x_j < x < x^j\}$ .

Escribimos

$$\begin{aligned} \int &= \int_{x_j}^{x^1(u_*^1, t)} + \int_{x^1(u_*^1, t)}^{x^j} = - \frac{\partial}{\partial x} (u^1 - u^2)(x_j, t) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} u^1(x^1(u_*^1, t)^-, t) - \frac{\partial}{\partial x} u^2(x^1(u_*^1, t)) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} u^1(x^1(u_*^1, t)^+, t) + \frac{\partial}{\partial x} u^2(x^1(u_*^1, t)) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (u^1 - u^2)(x^j, t). \end{aligned}$$

Aquí, los sumandos primero y último son  $\leq 0$ , como en (2.4); el tercero y el quinto se cancelan, y aplicando la condición de interfase a los restantes tenemos

$$- \frac{\partial}{\partial x} u^1(x^1(u_*^1, t)^+, t) - \left( - \frac{\partial}{\partial x} u^1(x^1(u_*^1, t)^-, t) \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} x^1(u_*^1, t) \cdot |E_1(u_*^1-) - E_1(u_*^1+)| ;$$

aquí observamos que, por la hipótesis H,  $E(u^1(x^1(u_*^1, t))^+, t) = E(u_*^1-)$  y lo mismo para  $u_*^1+$ , y que también  $\frac{d}{dt} x^1(u_*^1, t) \geq 0$ .

Como el salto  $E_1(u_*^1+) - E_1(u_*^1-) > 0$ , no cambia el signo  $\leq 0$  de la integral a la derecha en (2.3), y la demostración seguiría de la misma forma.

Para concluir, observemos un hecho válido para soluciones  $u = u(x/\sqrt{t})$  de

$$E_i(u^i)_t = (\alpha(u^i))_{xx} = (\alpha'(u^i)u_x^i)_x, \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

con  $u^i \Big|_{x=0} = \theta > 0$ ,  $u^i \Big|_{t=0} = 0 = \psi$  :

Se puede probar que  $E_1(u) \geq E_2(u)$  implica  $u^1(x/\sqrt{t}) \leq u^2(x/\sqrt{t})$ , sin necesidad de suponer que  $0 \leq E_1 - E_2$  es creciente, como en (3.3). Esto se debe a la posibilidad de obtener las soluciones  $u(\eta)$ ,  $\eta = x/\sqrt{t}$  de (3.4) mediante la ecuación integral

$$(\eta(u))^2 = 4 \int_u^0 \frac{d\alpha(r)}{E(r) + 2 \int_0^r \frac{d\alpha(s)}{(\eta(s))^2}},$$

ver [B2,3]. Las soluciones "autosemejantes"  $u = u(\eta) = u(x/\sqrt{t})$  cumplen con la hipótesis H, salvo la continuidad en  $x = 0$ ,  $t = 0$ .

Referencias

- [B1] J. E. Bouillet, Heat-flux comparison based on properties of the medium, *Advances in Applied Mathematics* 2(1981), 76-90.
- [B2] J. E. Bouillet, Soluciones autosemejantes con cambio de fase, en [T1].
- [B3] J. E. Bouillet, Self-similar solutions, having jumps and intervals of constancy, of a diffusion-heat conduction equation, IMA preprint series # 230, U. Minnesota, March 1986.
- [BA] J. E. Bouillet, C. Atkinson, A generalized diffusion equation: radial symmetries and comparison theorems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 95(1) (1983), 37-68.
- [T1,2] "Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", D. A. Tarzia, editor. Cuadernos del Inst. de Matemática "Beppo Levi" Nos. 11 y 12, Rosario, 1984.

Julio E. Bouillet

I.A.M. - CONICET

Viamonte 1636 - 2° piso.

1055 - Buenos Aires, y

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad de Buenos Aires.

ESTUDIOS TEORICOS BASICOS EN EL  
PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL  
A DOS FASES

Domingo Alberto TARZIA

En este cursillo se realizarán estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases para un cuerpo semi-infinito o finito. Debido a la escasez de tiempo de exposición, se indicarán sólo las propiedades básicas remitiéndose al lector a la bibliografía citada donde encontrará mayores detalles; cabe destacarse que en [2, 36, 38] se ha realizado la formulación del problema y se han estudiado diversas soluciones exactas y diferentes métodos teóricos como así también propiedades básicas que se tendrán en cuenta en lo que se desarrollará a continuación.

Sin pérdida de generalidad se tomará que la temperatura del cambio de fase es nula. Además, se considerará que con el sub-índice  $i=1$  ( $i=2$ ) se referirán propiedades referentes a la fase sólida (líquida). La nomenclatura utilizada es la dada en [36].

I. Desarrollo en serie

En [11], se considera el siguiente problema de Stefan a dos fases:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} T_{2t} - \alpha_2 T_{2_{xx}} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ T_{1t} - \alpha_1 T_{1_{xx}} = 0, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = 0, \quad t > 0 \\ k_2 T_{2_x}(s(t), t) - k_1 T_{1_x}(s(t), t) = L \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ T_1(x, 0) = h(x), \quad x > 0 \quad \text{con} \quad h(0) = 0 \\ T_{2_x}(0, t) = g(t), \quad t > 0 \\ s(0) = 0, \end{array} \right.$$

entonces se tiene el siguiente

EJERCICIO 1. Si se supone que  $g=g(t)$  y  $h=h(x)$  son funciones expresables por su serie de Taylor alrededor de  $t=0$  y  $x=0$  respectivamente con un radio de convergencia infinito, entonces la serie que representa  $s=s(t)$  está dada de la siguiente manera:

$$(2) \quad s(t) = C_1 t + \frac{C_2}{2} t^2 + \dots$$

donde

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = [k_2 g(0) - k_1 h'(0)] / L \\ C_2 = \frac{1}{L} \left[ k_2 (g'(0) - \frac{g(0)}{\alpha_2} C_1^2) - k_1 (\alpha_1 h'''(0) + C_1 h''(0)) \right]. \end{array} \right.$$

OBSERVACION 1. En [33] se plantea un problema de solidificación a dos fases para un cuerpo semi-infinito con coeficientes térmicos constantes en cada fase que se encuentra inicialmente en estado líquido a una temperatura  $V=V(x) \geq \theta_f$ , y que en el borde fijo  $x=0$  se le impone una temperatura  $U=U(t) \leq \theta_f$  para  $t > 0$ , donde  $\theta_f$  representa la temperatura de cambio de fase.

Si se supone que  $U=U(t)$  y  $V=V(x)$  son funciones analíticas de sus respectivos argumentos y que verifican algunas otras hipótesis complementarias, se pueden hallar las temperaturas de las fases sólida  $T_1=T_1(x, t)$  y líquida  $T_2=T_2(x, t)$  como series convergentes de las variables  $x/2\sqrt{\alpha_1 t}$  y  $x/2\sqrt{\alpha_2 t}$  respectivamente, y la frontera libre

$s(t) = 2\sqrt{\alpha_1 t} \chi(t)$  donde  $\chi(t)$  viene dada por una serie de potencia convergente. Si en  $x=0$  se impone una condición de flujo, el problema es tratado en [34].

Últimamente, se han estado realizando numerosos trabajos con la utilización de una metodología análoga a la descripta.

## II. Problema de solidificación con densidades diferentes

Se considera el problema de Stefan a dos fases (caso solidificación) para un cuerpo semi-infinito con coeficientes térmicos constantes pero que tenga en cuenta el salto de densidad bajo un cambio de fase, es decir  $\rho_1 \neq \rho_2$ .

Si la temperatura inicial es  $T_0 > 0$  y sobre el borde fijo  $x=0$  se impone una temperatura  $-D < 0$ , entonces el problema consiste en hallar la frontera libre  $s=s(t) > 0$ , definida para  $t > 0$ , y la temperatura

$$(4) \quad T(x,t) = \begin{cases} T_1(x,t) < 0 & \text{si } 0 < x < s(t) \text{ , } t > 0 \\ 0 & \text{si } x = s(t) \text{ , } t > 0 \\ T_2(x,t) > 0 & \text{si } x > s(t) \text{ , } t > 0 \end{cases}$$

definida para  $x > 0$  y  $t > 0$ , de manera que satisfagan las siguientes condiciones [3]:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \alpha_1 T_{1_{xx}} = T_{1_t} \text{ , } 0 < x < s(t) \text{ , } t > 0 \\ \text{ii) } \alpha_2 T_{2_{xx}} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} s(t) T_{2_x} = T_{2_t} \text{ , } x > s(t) \text{ , } t > 0 \\ \text{iii) } T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = 0 \text{ , } t > 0 \\ \text{iv) } k_1 T_{1_x}(s(t), t) - k_2 T_{2_x}(s(t), t) = \rho_1 l s(t) \text{ , } t > 0 \\ \text{v) } T_2(x, 0) = T_0 > 0 \text{ , } x > 0 \\ \text{vi) } s(0) = 0 \\ \text{vii) } T_1(0, t) = -D < 0 \text{ , } t > 0 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 2. Verificar que la solución del problema (5) está dada por:



$$(6) \begin{cases} T_1(x,t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(x/2a_1\sqrt{t}) \\ T_2(x,t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(\delta_1 + x/2a_2\sqrt{t}) \\ s(t) = 2\sigma\sqrt{t}, \quad \sigma > 0 \end{cases}$$

donde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  están expresados en función del coeficiente  $\sigma$  de la siguiente manera:

$$(7) \begin{cases} A_1(\sigma) = -D, \quad B_1(\sigma) = \frac{D}{\operatorname{erf}(\sigma/a_1)} \\ A_2(\sigma) = -B_2(\sigma)\operatorname{erf}(\sigma/a_0), \quad B_2(\sigma) = \frac{T_0}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_0)} \\ \varepsilon = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2, \quad \delta_1 = \sigma|c|/a_2 \\ a_0 = a_2/(1+|\varepsilon|), \quad a_i^2 = \sigma_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i} \quad (i=1,2) \end{cases}$$

siendo  $\sigma$  la única solución de la ecuación no-lineal:

$$(8) \quad F(x) = lx, \quad x > 0$$

con

$$(9) \quad F(x) = \frac{k_1}{\rho_1 a_1 \sqrt{\pi}} B_1(x) \exp(-x^2/a_1^2) - \frac{k_2}{\rho_1 a_2 \sqrt{\pi}} B_2(x) \exp(-x^2/a_2^2)$$

que satisface las siguientes propiedades:

$$(10) \quad F(0^+) = +\infty, \quad F(+\infty) = -\infty, \quad F' < 0 \quad \blacksquare$$

Se define una nueva variable espacial, introduciendo la cantidad de materia  $\mu$  que hay en el intervalo  $(0,x)$ , definida por [25]:

$$(11) \quad \mu = \begin{cases} \rho_1 x & \text{si } 0 < x < s(t) \\ \rho_1 s(t) + \rho_2 (x - s(t)) & \text{si } x > s(t) \end{cases}$$

cuya dimensión física es

$$[\mu] = \text{masa/área transversal}$$

y su transformación inversa está dada por:

$$(12) \quad x = \begin{cases} \mu/\rho_1 & \text{si } 0 < \mu < e(t) \\ [\mu + (\rho_2 - \rho_1)s(t)]/\rho_2 & \text{si } \mu > e(t) \end{cases}$$

con

$$(13) \quad e(t) = \rho_1 s(t) \quad , \quad t > 0 .$$

Si se realiza el cambio de variables (11), (13) y

$$(14) \quad \begin{cases} W_1(\mu, t) = T_1(\mu/\rho_1, t) \quad , \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ W_2(\mu, t) = T_2\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} s(t) + \frac{\mu}{\rho_2}, t\right) \quad , \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

entonces el problema (5) se transforma en (EJERCICIO 3.)

$$(15) \quad \begin{cases} D_1 W_{1\mu\mu} = W_{1t} \quad , \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ D_2 W_{2\mu\mu} = W_{2t} \quad , \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \\ W_1(e(t), t) = W_2(e(t), t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ K_1 W_{1\mu}(e(t), t) - K_2 W_{2\mu}(e(t), t) = 1 \dot{e}(t) \quad , \quad t > 0 \\ W_2(\mu, 0) = T_0 \quad , \quad \mu > 0 \\ e(0) = 0 \\ W_1(0, t) = -D \quad , \quad t > 0 \end{cases}$$

donde

$$(16) \quad D_i = k_i \rho_i / c_i \quad , \quad K_i = k_i \rho_i \quad (i=1,2)$$

son respectivamente los nuevos coeficientes de difusión y de conducción térmica.

OBSERVACION 2. Teniendo en cuenta (15) se observa que un problema de Stefan a dos fases con coeficientes térmicos  $k_1, \alpha_1, l, \rho_1 \neq \rho_2$  se transforma en otro con coeficientes térmicos  $K_1, D_1, l, \rho_1 = \rho_2 = 1$ , es decir, con densidades iguales a 1.

EJERCICIO 4. Se considera el problema (5bis), en el cual se reemplaza la condición (5vii) por [1]:

$$(5viibis) \quad k_1 T_{1x}(0, t) = h_0 / \sqrt{t} \quad , \quad t > 0 \quad (h_0 > 0).$$

(1) Si

$$(17) \quad h_0 > k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi} = T_0 \sqrt{k_2 \rho_2 c_2 / \pi}$$

entonces el problema de solidificación (5bis) tiene por solución a

$$(18) \quad \begin{aligned} T_1(x,t) &= C_1 + D_1 \operatorname{erf}(x/2a_1 \sqrt{t}) \\ T_2(x,t) &= C_2 + D_2 \operatorname{erf}(\delta_2 + x/2a_2 \sqrt{t}) \\ s(t) &= 2 \omega \sqrt{t}, \quad \omega > 0 \end{aligned}$$

donde  $C_1, C_2, D_1, D_2$  están expresados en función del coeficiente  $\omega$  de la siguiente manera

$$(19) \quad \begin{cases} C_1(\omega) = -D_1(\omega) \operatorname{erf}(\omega/a_1) & , & D_1(\omega) = a_1 h_0 \sqrt{\pi} / k_1 \\ C_2(\omega) = D_2(\omega) \operatorname{erf}(\omega/a_0) & , & D_2(\omega) = \frac{T_0}{\operatorname{erfc}(\omega/a_0)} \\ \delta_2 = \omega |\epsilon| / a_2 \end{cases}$$

siendo  $\omega$  la única solución de la ecuación no-lineal:

$$(20) \quad F_0(x) = x, \quad x > 0$$

con

$$(21) \quad F_0(x) = \frac{h_0}{l\rho_1} \exp(-x^2/a_1^2) - \frac{k_2 T_0}{l\rho_1 a_2 \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2/a_2^2)}{\operatorname{erfc}(x/a_0)}$$

que satisface las siguientes propiedades:

$$(22) \quad \begin{cases} F_0(0^+) = (h_0 - k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi}) / l\rho_1, \\ F_0(+\infty) = -\infty, \quad F_0' < 0. \end{cases}$$

(ii) Si  $h_0 \leq k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi}$  no existe solución al problema de solidificación (5bis); se tiene realmente un problema de conducción del calor en la fase líquida inicial. Más aún, el caso  $h_0 = k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi}$  corresponde al caso límite del problema (5) cuando  $l \rightarrow \infty$ .

(iii) La desigualdad (17) también puede obtenerse como sigue: Se plantea el siguiente problema de conducción del calor para el material semi infinito, que inicialmente está en la fase líquida a la temperatura constante  $T_0 > 0$ , es decir [30]:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 T_{xx} = T_t, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ T(x, 0) = T_0, \quad x > 0 \\ k_2 T_x(0, t) = h_0/\sqrt{t}, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

La solución de (23) está dada por:

$$(24) \quad T(x, t) = T_0 - h_0 a_2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(x/2a_2\sqrt{t})/k_2$$

siendo la temperatura en el borde fijo

$$(25) \quad T(0, t) = T_0 - h_0 a_2 \sqrt{\pi}/k_2, \quad t > 0$$

la cual es constante en el tiempo. Por lo tanto, el material semi-infinito que está inicialmente a una temperatura  $T_0$ , y que está siendo enfriado por un flujo de calor  $h_0/\sqrt{t}$  en el borde fijo  $x=0$ , tendrá un cambio de fase si y sólo si vale la desigualdad (17).

(iv) Otro método para obtener la desigualdad (17) consiste en realizar el cambio de variables (11), (13) y (14), y luego aplicar la desigualdad válida para el caso en que las densidades de masa sean iguales [35]. Más aún, la condición (5viibis) se transforma en

$$(26) \quad K_1 W_{1\mu}(0, t) = h_0/\sqrt{t}, \quad t > 0.$$

(v) Si se relacionan los problemas (5) y (5bis), se obtiene para el coeficiente  $\sigma$  de la frontera libre (6) la siguiente desigualdad:

$$(27) \quad \operatorname{erf}(\sigma/a_1) < \frac{D}{T_0} \frac{\rho_1 c_1 k_1}{\rho_2 c_2 k_2}.$$

EJERCICIO 5. Se realiza el cambio de variables (11), (13) y

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1(\mu, t) = c_1 T_1(\mu/\rho_1, t), \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ V_2(\mu, t) = c_2 T_2\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} s(t) + \frac{\mu}{\rho_2}, t\right), \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \end{array} \right.$$

entonces [25]:

(1) problema (5) se transforma en

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} D_1 V_{1\mu\mu} = V_{1t}, \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ D_2 V_{2\mu\mu} = V_{2t}, \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \\ V_1(e(t), t) = V_2(e(t), t) = 0, \quad t > 0 \\ D_1 V_{1\mu}(e(t), t) - D_2 V_{2\mu}(e(t), t) = 1 \dot{e}(t), \quad t > 0 \\ V_2(\mu, 0) = c_2 T_0, \quad \mu > 0 \\ e(0) = 0 \\ V_1(0, t) = -c_1 D, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

Más aún, si se considera la condición (5viibis), ésta se transforma en

$$(30) \quad D_1 V_{1\mu}(0, t) = h_0 / \sqrt{t}, \quad t > 0.$$

(ii) Si un material semi-infinito tiene sus coeficientes térmicos distintos en la transición de fase, es decir  $k_1 \neq k_2$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  y  $\rho_1 \neq \rho_2$  pero verifican que  $\frac{k_1 \rho_1}{c_1} = \frac{k_2 \rho_2}{c_2}$  entonces el problema de Stefan a dos fases correspondiente se transforma en uno con los tres coeficientes térmicos iguales.

(iii) Si se tiene en cuenta (i) y (ii), se puede deducir la desigualdad (17) para el coeficiente  $h_0$  para que el problema (5bis) tenga una solución que represente un problema con cambio de fase.

### III. Sobre un modelo de solidificación de una aleación binaria

Se considera un material semi-infinito de una aleación binaria consistente en dos componentes A y B. Sea C la concentración del componente A. Se supone que la solidificación de la aleación está gobernada por un diagrama de equilibrio de fase consistente en una curva "liquidus"  $T=f_L(C)$  y una curva "solidus"  $T=f_S(C)$  con  $0 < C < 1$ . Se asume que  $f_L$  y  $f_S$  son funciones crecientes de la variable C con

$$(31) \quad \begin{cases} f_S(C) < f_L(C), \quad \forall C \in (0,1) \\ f_L(0) = f_S(0) = T_{cr}^A, \quad f_L(1) = f_S(1) = T_{cr}^B. \end{cases}$$

El material se encuentra en la fase sólida (líquida) si  $T \leq f_S(C)$  ( $T \geq f_L(C)$ ). Si se tiene que  $f_S(C) < T < f_L(C)$ , entonces el estado del material no está bien definido; se lo conoce con el nombre de zona pastosa (en inglés: mushy zone). (Ver más detalles en [12]).

Se considera que la aleación se encuentra inicialmente en estado líquido a la temperatura constante  $T_{in}$  y a la concentración constante  $C_{in}$  con  $T_{in} \geq f_L(C_{in})$ . Luego una temperatura  $T_B < T_{cr}^A$  es impuesta en el borde fijo  $x=0$  con lo cual un frente de solidificación  $x=s(t)$  comienza separando la aleación en estado sólido ( $x < s(t)$ ) del estado líquido ( $x > s(t)$ ). La formulación matemática de este proceso de solidificación consiste en hallar la temperatura  $T=T(x,t)$  y la concentración  $C=C(x,t)$ , ambas definidas para  $x > 0$  y  $t > 0$ , y la frontera libre  $s=s(t)$ , definida para  $t > 0$ , de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1t} = D_1 C_{1xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ C_{2t} = D_2 C_{2xx}, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ T_{1t} = \alpha_1 T_{1xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ T_{2t} = \alpha_2 T_{2xx}, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ T_{cr} = T_1(s(t), t) = f_S[C_1(s(t), t)], \quad t > 0 \\ T_{cr} = T_2(s(t), t) = f_L[C_2(s(t), t)], \quad t > 0 \\ D_2 C_{2x}(s(t), t) - D_1 C_{1x}(s(t), t) = \\ = [C_1(s(t), t) - C_2(s(t), t)] \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ k_1 T_{1x}(s(t), t) - k_2 T_{2x}(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} T_1(0,t) = T_B < T_{cr}^A, \quad t > 0 \\ T_2(x,0) = T_{in} > f_L(C_{in}), \quad t > 0 \\ C_2(x,0) = C_{in}, \quad x > 0 \\ C_{1x}(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ s(0) = 0. \end{array} \right.$$

PROPIEDAD 1. Existe una solución del problema (32) cualesquiera sean los datos inicial y de borde, y parámetros térmicos y de difusión. Más aún, para esta solución las concentraciones solidus y liquidus

$$(33) \quad C_S = C_1(s(t),t), \quad C_L = C_2(s(t),t)$$

como así también la temperatura de cambio de fase

$$(34) \quad T_{cr} = T_1(s(t),t) = T_2(s(t),t)$$

son constantes en el tiempo.

DEMOSTRACION. (EJERCICIO 6.) Verificar que esta solución viene dada de la siguiente manera:

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} C_1(x,t) = C_S, \quad T_{cr} = f_S(C_S) = f_L(C_L), \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_1 t} \\ C_2(x,t) = C_{in} + (C_L - C_{in}) \frac{\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{D_2 t})}{\operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\alpha_1/D_2})} \\ T_1(x,t) = T_B + (T_{cr} - T_B) \frac{\operatorname{erf}(x/2\sqrt{\alpha_1 t})}{\operatorname{erf}(\lambda)} \\ T_2(x,t) = T_{in} + (T_{cr} - T_{in}) \frac{\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{\alpha_2 t})}{\operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\alpha_1/\alpha_2})} \end{array} \right.$$

donde  $\lambda$  y  $T_{cr}$  (ó  $C_S$  y  $C_L$ ) satisfacen las siguientes condiciones

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_{in} - C_L}{C_S - C_L} = G(\lambda\sqrt{\alpha_1/D_2}) \\ T_{cr} = W_1(\lambda) \end{array} \right.$$

donde

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} G(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad , \quad A = \rho l \alpha_2 / k_2 \\ W_1(x) = T_B + \left[ (T_{in} - T_B) + A G(x\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}) \right] \frac{\phi(x)}{1+\phi(x)} \\ \phi(x) = \frac{k_2 \alpha_1 \sqrt{\pi}}{k_1 \alpha_2} \frac{x \exp(x^2) \operatorname{erf}(x)}{G(x\sqrt{\alpha_1/\alpha_2})} . \end{array} \right.$$

El sistema de ecuaciones (36) tiene una solución [27, 30], teniendo en cuenta las propiedades:

$$(38) \quad W_1(0^+) = T_B \quad , \quad W_1(+\infty) = T_{in} + \frac{1}{c_2} \quad , \quad W_1' > 0 .$$

#### IV. Solución autosemejante de un problema de Stefan multifase

Siguiendo [39] se considera un cuerpo semi-infinito ocupando la región  $x > 0$ . En el rango de temperaturas  $(T_{i-1}, T_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) el material existe en una fase con conductividad y difusividad térmica  $k_i$  y  $\alpha_i$  respectivamente. En el instante inicial  $t=0$  todo el cuerpo se encuentra a la temperatura uniforme  $T_n$ , y para  $t > 0$  el borde fijo  $x=0$  es mantenido a la temperatura constante  $T_0$  ( $T_0$  y  $T_n$  no son necesariamente temperaturas de cambio de fase). En la frontera libre  $s_i = s_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), que separa las fases  $i$  y  $(i+1)$ , se genera calor de acuerdo a la condición de Stefan correspondiente, teniendo en cuenta al calor latente por unidad de volumen  $L_i$  del pasaje de la fase  $(i+1)$  en la fase  $i$ .

Si, por conveniencia de notación, se introducen  $y_0(t)=0$ ,  $y_n(t)=+\infty$ , entonces el problema consiste en hallar la temperatura  $u_i = u_i(x, t)$  de la fase  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) y la frontera libre  $s_j = s_j(t)$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:



$$(39) \left\{ \begin{array}{l} u_{i_t} - \alpha_i u_{i_{xx}} = 0, \quad s_{i-1}(t) < x < s_i(t), \quad t > 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ u_i(s_{i-1}(t), t) = T_{i-1}, \quad t > 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ u_i(s_i(t), t) = T_i, \quad t > 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ k_i \frac{\partial u_i}{\partial x}(s_i(t), t) - k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}(s_i(t), t) = L_i \dot{s}_i(t), \quad t > 0, \\ \hspace{20em} (i=1, \dots, n-1) \\ u_n(x, 0) = T_n, \quad x > 0. \end{array} \right.$$

EJERCICIO 7. Verificar que

$$(40) \quad \begin{aligned} u_i(x, t) &= B_i + A_i \operatorname{erf}(\beta_i x / \sqrt{t}) \quad (i=1, \dots, n) \\ s_i(t) &= C_i \sqrt{t} \quad (i=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

es solución de (39), con

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i = (T_i - T_{i-1}) / \delta_i \\ B_i = T_{i-1} \operatorname{erf}(C_i \beta_i) - T_i \operatorname{erf}(C_{i-1} \beta_i) / \delta_i \\ \delta_i = \operatorname{erf}(C_i \beta_i) - \operatorname{erf}(C_{i-1} \beta_i) \\ \beta_i = 1 / 2\sqrt{\alpha_i} \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right.$$

donde las constantes  $C_i$  deben satisfacer el siguiente sistema de  $(n-1)$  ecuaciones no-lineales:

$$(42) \quad \begin{aligned} k_i \beta_i A_i \exp(-C_i^2 \beta_i^2) - \frac{k_{i+1} \beta_{i+1}}{\delta_{i+1}} (T_{i+1} - T_i) \exp(-C_{i+1}^2 \beta_{i+1}^2) = \\ = \frac{L_i C_i \sqrt{\pi}}{4} \quad (i=1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

OBSERVACION 3. En [39] no fue considerada la cuestión de existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones (42) con  $0 < C_i < C_{i+1}$ .

Este problema fue estudiado en [40] y [41] para densidades de masa iguales y diferentes respectivamente. Más aún, se considera un salto  $\Delta_i$  en

la transición de fases ( $i=1, \dots, n-1$ ) para la temperatura.

El presente análisis de problemas con multifases aparecen generalmente en aleaciones.

#### V. Función de error modificada

La función de error, definida por

$$(43) \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

es bien conocido que resulta ser la única función que es solución del problema:

$$(44) \quad \begin{cases} y''(x) + 2x y'(x) = 0, & x > 0 \\ y(0) = 0, & y(+\infty) = 1. \end{cases}$$

Se define la función de error modificada de parámetro  $\beta > 0$  como la única función solución del problema [10, 22]:

$$(45) \quad \begin{cases} \text{i) } \left\{ [1 + \beta y(x)] y'(x) \right\}' + 2x y'(x) = 0, & x > 0 \\ \text{ii) } y(0) = 0, & y(+\infty) = 1. \end{cases}$$

A dicha función se la nota por

$$(46) \quad y = \Phi_\beta(x)$$

que para  $\beta=0$  se reduce a la función de error ( $\Phi_0 = \text{erf}$ ).

**EJERCICIO 8.** Verificar que la función

$$(47) \quad T(x) = T_0 + (T_\infty - T_0) \Phi_\delta \left( \frac{x}{\sqrt{1 + \beta T_0}} \right)$$

con

$$(48) \quad 1 + \beta T_0 > 0, \quad \delta = \frac{\beta(T_\infty - T_0)}{1 + \beta T_0} (\geq -1)$$

satisface la ecuación diferencial (45i) con las condiciones de contorno siguientes:

$$(49) \quad T(0) = T_0, \quad T(+\infty) = T_\infty.$$

Una generalización del Ejercicio anterior puede darse

por

EJERCICIO 9. Se designa con  $y = \phi_{\beta\gamma n}(x)$  la solución del problema

$$(50) \quad \begin{cases} \text{i) } (D(y) y'(x))' + 2x y'(x) = 0 \\ \text{ii) } y(0) = 0, \quad y(+\infty) = 1 \end{cases}$$

donde

$$(51) \quad D(y) = (1 + \beta y + \gamma y^2)^n$$

Entonces la función, definida por

$$(52) \quad T(x) = T_0 + (T_\infty - T_0) \phi_{\delta \epsilon n}(\alpha x)$$

donde

$$(53) \quad \begin{cases} \delta = \frac{(\beta + 2\gamma T_0)(T_\infty - T_0)}{1 + \beta T_0 + \gamma T_0^2}, & \epsilon = \frac{\gamma(T_\infty - T_0)^2}{1 + \beta T_0 + \gamma T_0^2} \\ \alpha = (1 + \beta T_0 + \gamma T_0^2)^{-n/2} \end{cases}$$

es la solución de la ecuación diferencial (50i) que satisface las condiciones de contorno (49). Más aún, se tiene que:

$$(54) \quad \begin{aligned} \text{i) } \phi_{\beta 0 1} &= \phi_\beta, & \text{ii) } \gamma = 0 &\Rightarrow \epsilon = 0, \\ \text{ii) } \beta = 0, \quad \gamma &\neq 0, & T_\infty &\neq T_0, \quad T_0 \neq 0 &\Rightarrow \delta \neq 0. \end{aligned}$$

## VI. Problemas con coeficientes térmicos variables

En primer lugar, se considera un problema de Stefan (caso solidificación) a una fase con coeficientes térmicos constantes excepto la conductividad térmica que depende en forma afín de la temperatura, cuya formulación matemática está dada por

$$(55) \quad \begin{cases} T_t = (\alpha(T) T_x)_x, & 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ T(0, t) = T_0 < T_f, & t > 0 \\ T(s(t), t) = T_f, & t > 0 \\ k_f T_x(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), & t > 0 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

donde

$$(56) \quad \begin{cases} \alpha(T) = \frac{k(T)}{\rho c} = \alpha_0 \left( 1 + \beta \frac{T-T_0}{T_f-T_0} \right), & \alpha_0 = \frac{k_0}{\rho c} \\ k_f = k(T_f) = k_0 (1 + \beta). \end{cases}$$

EJERCICIO 10. Si se define

$$(57) \quad \theta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

entonces una solución de (55), (56) está dada por:

$$(58) \quad \begin{cases} \theta = \theta(\eta) = \frac{\phi_\delta(\eta)}{\phi_\delta(\lambda)}, & \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}} \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_0 t} \end{cases}$$

donde los coeficientes  $\delta$  y  $\lambda$  deben satisfacer el sistema de ecuaciones no-lineales siguiente:

$$(59) \quad \begin{cases} \delta \phi_\delta(\lambda) = \beta \\ \frac{\phi'_\delta(\lambda)}{\lambda \phi_\delta(\lambda)} = \frac{2}{Ste (1 + \beta)}, & (Ste = c(T_f - T_0)/l). \end{cases}$$

Se considera ahora un problema de solidificación a dos fases con coeficientes térmicos constantes, excepto para la conductividad térmica que depende en forma afín de la temperatura, pero que pueden ser diferentes para fases distintas, en particular se tiene en cuenta que  $\rho_1 \neq \rho_2$  [10]. La formulación matemática consiste en hallar  $T_1 = T_1(x,t)$ ,  $T_2 = T_2(x,t)$  y  $s = s(t)$  de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(60) \quad \begin{cases} T_{1t} = (\alpha_1(T_1) T_{1x})_x, & 0 < x < s(t), t > 0 \\ T_{2t} = (\alpha_2(T_2) T_{2x})_x + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} s(t) T_{2x}, & x > s(t), t > 0 \\ T_2(x, 0) = T_{in} > T_f, & x > 0 \\ T_1(0, t) = T_0 < T_f, & t > 0 \\ T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = T_f, & t > 0 \end{cases}$$

$$(60) \quad \begin{cases} k_1 T_{1x}(s(t), t) - k_2 T_{2x}(s(t), t) = \rho_1 \dot{s}(t), & t > 0 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

donde

$$(61) \quad \begin{cases} \alpha_i(T_i) = \frac{k_i(T_i)}{\rho_i c_i} = \alpha_{0i} \left(1 + \beta_i \frac{T_i - T_0}{T_{in} - T_0}\right) \\ \alpha_{0i} = \frac{k_{0i}}{\rho_i c_i}, \quad k_i = k_i(T_{in}) = k_{0i}(1 + \beta_i) \end{cases}$$

EJERCICIO 11. Si se definen

$$(62) \quad \begin{cases} \theta_i(x, t) = \frac{T_i(x, t) - T_0}{T_{in} - T_0}, \quad \theta_f = \frac{T_f - T_0}{T_{in} - T_0}, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_{01} t}} \\ h = \frac{\rho_1 l \alpha_{01}}{k_1(T_{in} - T_0)}, \quad k_{12} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad c_{12} = \frac{c_2}{c_1} \end{cases}$$

entonces una solución de (60), (61) está dada de la siguiente manera:

$$(63) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\eta) = \theta_f \frac{\Phi_\delta(\eta)}{\Phi_\delta(\lambda)}, \quad 0 < \eta < \lambda \\ \theta_2 = \theta_2(\eta) = 1 - (1 - \alpha) \left[ 1 - \Phi_\epsilon \left( \frac{\eta + \left(\frac{1}{\rho_{12}} - 1\right)\lambda}{\sqrt{\alpha_{12}(1 + \beta_2\alpha)}} \right) \right], \quad \eta > \lambda \\ s(t) = 2 \lambda \sqrt{\alpha_{01} t} \end{cases}$$

donde los parámetros  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\epsilon$  deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$(64) \quad \begin{cases} \epsilon = \frac{\beta_2(1 - \alpha)}{1 + \beta_2\alpha}, \quad \delta \Phi_\delta(\lambda) = \beta_1 \theta_f, \quad \Phi_\epsilon(\xi) = \frac{\theta_f - \alpha}{1 - \alpha} \\ \frac{\Phi'_\delta(\lambda)}{\lambda \Phi_\delta(\lambda)} - \frac{1 - \theta_f}{\theta_f} \frac{c_{12}}{1 + \beta_2\alpha} \frac{\Phi'_\epsilon(\xi)}{1 - \Phi_\epsilon(\xi)} = \frac{2h}{\theta_f} \end{cases}$$

donde el coeficiente  $\xi$  está dado por

$$(65) \quad \xi = \frac{\lambda}{\rho_{12} \sqrt{\alpha_{12}(1 + \beta_2\alpha)}}.$$

OBSERVACION 4. En [19, 26], se estudia el problema unidimensional a dos fases con coeficientes térmicos no-lineales del tipo Storm [32].

La condición de Storm está dada por [19]

$$(66) \quad \frac{1}{S(T)} \frac{d}{dT} \left( \sqrt{S(T)/k(T)} \right) = \text{cte}$$

o en su forma equivalente (EJERCICIO 12.) por [26]:

$$(67) \quad \frac{1}{k(T)S(T)} \frac{d}{dT} \left[ \log \sqrt{S(T)/k(T)} \right] = \text{cte}$$

donde  $S(T) = \rho c(T)$ ,  $c(T)$  es el calor específico,  $k=k(T)$  es la conductividad térmica y  $\rho$  es la densidad de masa constante.

### VII. El problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito con condiciones de temperatura

Se considera un material finito, representado por el intervalo  $(0,1)$ , que inicialmente consta de una parte  $(0,b)$  constituida por agua y la restante  $(b,1)$  constituida por hielo. A dicho sistema se le imponen temperaturas dadas sobre los bordes  $x=0$  y  $x=1$ . El problema consiste en hallar dos funciones  $u=u(x,t)$  y  $v=v(x,t)$ , la frontera libre  $x=S(t)$  con  $S(0)=b$  y un instante de tiempo  $T>0$ , de manera que se satisfagan las siguientes condiciones [6]:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \alpha_2 u_{xx} - u_t = 0, \quad 0 < x < S(t), \quad 0 < t < T \\ \text{ii) } \alpha_1 v_{xx} - v_t = 0, \quad S(t) < x < 1, \quad 0 < t < T \\ \text{iii) } u(S(t), t) = v(S(t), t) = 0, \quad 0 < t < T \\ \text{iv) } \dot{S}(t) = K_1 v_x(S(t), t) - K_2 u_x(S(t), t), \quad 0 < t < T \\ \text{v) } u(0, t) = f(t) > 0, \quad 0 < t < T \\ \text{vi) } v(1, t) = g(t) < 0, \quad 0 < t < T \\ \text{vii) } u(x, 0) = \phi(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq b \\ \text{viii) } v(x, 0) = \psi(x) \leq 0, \quad b \leq x \leq 1 \\ \text{ix) } S(0) = b, \quad 0 < b < 1 \end{array} \right.$$

donde  $0 < b < 1$ ,  $K_i = k_i / \rho \ell$ ,  $\alpha_i = k_i / \rho c_i$  ( $i=1,2$ ).

EJERCICIO 13. Si las condiciones (68i-iii, v-ix) permanecen inalteradas, entonces la condición de Stefan (68iv) es equivalente a la siguiente condición integral:

$$(69) \quad S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^t [K_1 v_x(x_1, \tau) - K_2 u_x(x_2, \tau)] d\tau \\ - \frac{K_2}{\alpha_2} \int_{x_2}^{S(t_0)} u(x, t) dx + \frac{K_1}{\alpha_1} \int_{S(t)}^{x_1} v(x, t) dx + \\ + \frac{K_2}{\alpha_2} \int_x^{S(t)} u(x, t) dx + \frac{K_1}{\alpha_1} \int_{S(t_0)}^{x_1} v(x, t_0) dx$$

donde  $0 < x_2 \leq S(\tau) \leq x_1 < 1$ ,  $0 < t_0 \leq \tau \leq t$ .

Se supone que los datos del problema satisfacen las hipótesis siguientes:

(A) Las funciones  $f=f(t)$  y  $g=g(t)$  son continuas a trozos y existen cuatro constantes  $A_i$ ,  $B_i$  ( $i=1,2$ ) de manera que

$$(70) \quad 0 < A_1 < f(t) < B_1, \quad -B_2 < g(t) < -A_2 < 0, \quad t \in (0, T].$$

(B) Las funciones  $\phi=\phi(x)$  y  $\psi=\psi(x)$  son continuas a trozos y existen cuatro constantes  $a_i$ ,  $\eta_i$  ( $i=1,2$ ) de manera que

$$(71) \quad \begin{cases} 0 \leq \phi(x) \leq a_1 [1 - \exp(-\eta_1(b-x)/\alpha_2)] & , \quad x \in [0, b] \\ 0 > \psi(x) > -a_2 [1 - \exp(-\eta_2(x-b)/\alpha_1)] & , \quad x \in [b, 1] \end{cases}$$

Las dos condiciones dadas en (71) indican que  $\phi(b) = \psi(b) = 0$  y que las funciones  $\phi$  y  $\psi$  son localmente Lipschitz en  $x=b$ .

(C) Se asume que

$$(72) \quad \Gamma = \text{Max}(2 K_2 \varepsilon_1 / \alpha_2, 2 K_1 \varepsilon_2 / \alpha_1) < 1$$

donde

$$(73) \quad \varepsilon_1 = \text{Max}(B_1, a_1), \quad \varepsilon_2 = \text{Max}(B_2, a_2).$$

DEFINICION 1. Por una solución  $u$ ,  $v$ ,  $S$  del problema de Stefan (68), se entiende que:

i) Las derivadas de  $u$  y  $v$  que aparecen en las ecuaciones (68i,ii)

son funciones continuas en sus respectivos dominios de definición;  $u$  y  $v$  son continuas en la clausura de tales dominios excepto en los puntos de discontinuidad de los datos, en los cuales debe verificarse que

$$0 \leq \underline{\lim} u \leq \lim u < +\infty, \quad -\infty < \underline{\lim} v \leq \lim v \leq 0$$

cuando los puntos del dominio se acercan a tales puntos de discontinuidad.

ii)  $S \in C^1(0,T) \cap C^0[0,T]$  con  $S(0)=b$  y  $0 < S(t) < 1$  en  $[0,T]$  (Si las derivadas de  $\phi$  y  $\psi$  son continuas en un entorno de  $x=b$ , entonces  $S \in C^1[0,T]$ ).

iii) Las funciones  $u$ ,  $v$  y  $S$  satisfacen las ecuaciones y condiciones dadas en (68). ■

OBSERVACION 5. Para una dada función  $S$  Lipschitz en  $[0,T]$  se puede definir un problema auxiliar del (68) consistente en hallar  $u$  y  $v$  que verifican i) de la definición anterior y satisfacen las condiciones (68 i-iii, v-ix). Según [5, 18], la solución del problema auxiliar existe y es única bajo las hipótesis (A) y (B). Más aún,  $u_x(S(t),t)$  y  $v_x(S(t),t)$  existen y son continuas en  $(0,T]$ . Por otra parte, si las derivadas de  $\phi$  y  $\psi$  son continuas en un entorno de  $x=b$ , entonces  $u_x(S(t),t)$  y  $v_x(S(t),t)$  existen y son continuas en  $[0,T]$ . ■

PROPIEDAD 2. Bajo las hipótesis (A), (B) y (C) existe una solución  $u,v,S$  del problema de Stefan (68) para todo  $T > 0$ .

DEMOSTRACION. Se utiliza el método del argumento retardado. Para cada  $\theta$ , suficientemente pequeño, se define:

$$(74) \quad \chi_\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq b-\theta \\ 0 & \text{si } b-\theta < x < b+\theta \\ 1 & \text{si } b+\theta \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Se extienden las funciones  $\phi$  y  $\psi$  al intervalo  $[0,1]$  por cero fuera de sus respectivos dominios de definición, y se definen las funciones  $\phi_\theta = \phi \chi_\theta$  y  $\psi_\theta = \psi \chi_\theta$ . Se considera el intervalo de tiempo



$[0, \theta]$  y se definen  $u_\theta$  y  $v_\theta$  como la solución del problema auxiliar con datos  $f, g, \phi_\theta, \psi_\theta$  y frontera móvil  $S_\theta$  dada por  $S_\theta(t) = b$  en  $[0, \theta]$ . Luego se define  $S_\theta$  en el intervalo  $[\theta, 2\theta]$  retardando el argumento en la condición de Stefan (68iv), a través de

$$(75) \quad \begin{cases} S_\theta(t) = b + \int_0^t \left[ K_1 v_{\theta x}(S_\theta(\tau - \theta), \tau - \theta) - K_2 u_{\theta x}(S_\theta(\tau - \theta), \tau - \theta) \right] d\tau \\ \theta \leq t \leq 2\theta \end{cases}$$

y así sucesivamente.

**EJERCICIO 14.** Completar la demostración ([6]). ■

**PROPIEDAD 3.** Sean  $u_i, v_i, S_i$  soluciones del problema de Stefan (68) para los datos  $f_i, g_i, \phi_i, \psi_i$  y  $b_i$  ( $i=1,2$ ) que satisfacen las hipótesis (A), (B) y (C). Se asume además que  $\phi_i$  y  $\psi_i$  ( $i=1,2$ ) satisfacen las hipótesis:

$$(D) \quad \phi \in C^1[0, \gamma], \quad \psi \in C^1[1-\gamma, 1], \quad \gamma > 0$$

entonces se tienen las siguientes conclusiones:

i) Existe una constante  $C = C(T, \alpha_i, K_i, A_i, B_i, a_i, \eta_i, \gamma, b_0)$  con  $b_0 = \min(b_1, b_2, 1-b_1, 1-b_2)$  de manera que para  $t \in [0, T]$  se tiene el siguiente resultado de estabilidad:

$$(76) \quad |S_1(t) - S_2(t)| \leq C \left[ |b_1 - b_2| + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (|f_1(\tau) - f_2(\tau)| + |g_1(\tau) - g_2(\tau)|) \right. \\ \left. + \sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{0 \leq x \leq \gamma} |\phi_1'(x) - \phi_2'(x)| + \sup_{1-\gamma \leq x \leq 1} |\psi_1'(x) - \psi_2'(x)| \right]$$

donde ( $i=1,2$ ):

$$(77) \quad \phi_i(x) = \begin{cases} \frac{K_2}{\alpha_2} \phi_i(x) = \frac{c_2}{\ell} \phi_i(x), & 0 \leq x \leq b_i \\ \frac{K_1}{\alpha_1} \psi_i(x) = \frac{c_1}{\ell} \psi_i(x), & b_i \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ii) Bajo las hipótesis (A), (B), (C) y (D) la solución del problema de Stefan (68) es única.

iii) Si los datos verifican que  $f_1 \leq f_2, g_1 \leq g_2, \phi_1 \leq \phi_2, \psi_1 \leq \psi_2$  y  $b_1 \leq b_2$ ,

entonces las fronteras libres satisfacen la monotonía  $S_1 \leq S_2$ .

iv) Si los datos  $f$  y  $g$  verifican la condición

$$(78) \left\{ \begin{array}{l} \int_1^{+\infty} [(f(t)-f_\infty)^2 + (g(t)-g_\infty)^2] dt < +\infty \\ \text{con } 0 < A_1 < f_\infty < B_1, \quad -B_2 < g_\infty < -A_2 < 0 \end{array} \right.$$

entonces la solución  $u, v, S$  del problema de Stefan (68) tiende asintóticamente a la solución estacionaria.

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} u_\infty(x) = f_\infty(1-x/S_\infty), \quad x \in [0, S_\infty] \\ v_\infty(x) = -g_\infty(S_\infty-x)/(1-S_\infty), \quad x \in [S_\infty, 1] \\ 0 < S_\infty = \frac{k_2 f_\infty}{k_2 f_\infty - k_1 g_\infty} < 1. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION. i) EJERCICIO 15. ([6]).

ii) Surge como corolario de i).

iii) Se supone en primer lugar que  $b_1 < b_2$ . Entonces se verá que  $S_1(t) < S_2(t)$  para  $t > 0$ . Por el absurdo se supone que existe un primer tiempo  $t_0$  de manera que  $S_1(t_0) = S_2(t_0)$  y  $\dot{S}_2(t_0) \leq \dot{S}_1(t_0)$ . Por el principio del máximo se tiene que  $u_2 - u_1 > 0$  en  $0 < x < S_1(t)$ ,  $0 < t < t_0$ . Como  $u_2(S_1(t_0), t_0) = u_1(S_1(t_0), t_0) = 0$ , resulta ser que  $(S_1(t_0), t_0)$  es un punto de mínimo para  $u_2 - u_1$ , y por ende se deduce que  $u_{2x}(S_1(t_0), t_0) < u_{1x}(S_1(t_0), t_0)$ . Análogamente se tiene que  $v_2 - v_1 > 0$  en  $S_2(t) < x < 1$ ,  $0 < t < t_0$  y por ende se deduce que  $v_{2x}(S_1(t_0), t_0) > v_{1x}(S_1(t_0), t_0)$ , con lo cual se obtiene

$$(80) \begin{aligned} \dot{S}_2(t_0) &= K_1 v_{2x}(S_2(t_0), t_0) - K_2 u_{2x}(S_2(t_0), t_0) > \\ &> K_1 v_{1x}(S_1(t_0), t_0) - K_2 u_{1x}(S_1(t_0), t_0) = \dot{S}_1(t_0) \end{aligned}$$

que resulta ser una contradicción.

En cambio, si se tiene  $b_1 = b_2$ , el resultado surge de la propiedad de estabilidad con datos correspondientes a  $i=1$  y  $f_2, g_2, \phi_2, \psi_2$ ,

$b_2 + \epsilon$ , y del pasaje al límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

iv) EJERCICIO 16. ([6, 15, 16]).

VIII. El problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito con condiciones de flujo de calor

Se considera el mismo problema presentado en (68) excepto que las condiciones (68v, vi) de temperatura son reemplazadas por condiciones de flujo de calor en  $x=0$  y  $x=1$  respectivamente, estando entonces su formulación dada por:

$$(81) \begin{cases} (68i-iv, vii-ix) \\ v) k_2 u_x(0,t) = f(t), \quad 0 < t \leq T \\ vi) k_1 v_x(1,t) = g(t), \quad 0 < t \leq T \end{cases}$$

La definición de solución, para este caso, es similar a la dada en VII; con respecto a los datos del problema, las hipótesis (B) resulta inalterada, en cambio las hipótesis (A) y (C) se reemplazan por las siguientes:

(A') Las funciones  $f=f(t)$  y  $g=g(t)$  son acotadas y continuas a trozos y existen dos constantes  $A_1, A_2 > 0$  de manera que

$$(82) \quad -A_1 < f(t) \leq 0, \quad -A_2 < g(t) \leq 0, \quad t > 0.$$

(C') Se asume que

$$(83) \quad \Gamma = \text{Máx} (2K_2\epsilon_1(2+2\alpha_2/\eta_1)/\alpha_2; 2K_1\epsilon_2(2+2\alpha_1/\eta_2)/\alpha_1) < 1$$

donde

$$(84) \quad \epsilon_1 = \text{Máx} (A_1/k_2; a_1), \quad \epsilon_2 = \text{Máx} (A_2/k_1; a_2).$$

EJERCICIO 17. Si las condiciones (81i-iii, v-ix) permanecen inalteradas, entonces la condición de Stefan (81iv) es equivalente a la siguiente condición integral:

$$(85) \quad \begin{aligned} S(t) = & b + \int_0^1 \phi(x) dx + \frac{1}{\rho l} \int_0^t [g(\tau) - f(\tau)] d\tau - \\ & - \int_0^{S(t)} \frac{c_2}{l} u(x,t) dx - \int_{S(t)}^1 \frac{c_1}{l} v(x,t) dx \end{aligned}$$

donde

$$(86) \quad \phi(x) = \begin{cases} c_2 \phi(x)/\ell & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ c_1 \psi(x)/\ell & \text{si } b \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Siguiendo la metodología dada en §VII, se obtienen los siguientes resultados

**PROPIEDAD 4.** i) Bajo las hipótesis (A'), (B) y (C') existe  $T_0 > 0$  de manera que el problema de Stefan (81) tiene una solución para  $t \in (0, T_0)$ . Más aún,  $T_0$  está dado por

$$(87) \quad T_0 = \sup_{0 < \delta < \min(b; 1-b)} T_\delta$$

donde

$$(88) \quad T_\delta = \inf\{t > 0 / S(t) = \delta \text{ ó } S(t) = 1 - \delta\}.$$

ii) Sean  $u_i, v_i, S_i$  soluciones de (81) para los datos  $f_i, g_i, \phi_i, \psi_i$  y  $b_i$  ( $i=1,2$ ) que satisfacen las hipótesis (A'), (B) y (C'). Entonces, para  $0 < T < T_0$ , existe una constante  $C_1 = C_1(T, \alpha_i, K_i, a_i, A_i, \eta_i, b_0)$  de manera que para  $t \in [0, T]$  se tiene el siguiente resultado de estabilidad:

$$(89) \quad |S_1(t) - S_2(t)| \leq C_1 \left[ |b_1 - b_2| + \int_0^1 |\phi_1(x) - \phi_2(x)| dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho \ell} \int_0^t (|f_1(\tau) - f_2(\tau)| + |g_1(\tau) - g_2(\tau)|) d\tau \right].$$

iii) Bajo las hipótesis (A'), (B), (C') existe una única solución del problema de Stefan (81) para  $t \in (0, T_0)$ .

iv) Si los datos verifican que  $f_2 \leq f_1, g_2 \geq g_1, \phi_2 \geq \phi_1, \psi_2 \geq \psi_1$  y  $b_2 \geq b_1$ , entonces  $S_1 \leq S_2$  en  $[0, T_0)$ .

**DEMOSTRACION.** EJERCICIO 18. ([7]).

A continuación se verán algunos resultados concernientes a la permanencia de las dos fases, sólida y líquida, comportamiento asintótico y desaparición de una fase.

**PROPIEDAD 5.** i) Si los datos verifican además

$$(90) \quad -b < \int_0^1 \phi(x) dx + \frac{1}{\rho l} \int_0^t [g(\tau) - f(\tau)] d\tau < 1-b, \quad t > 0$$

entonces  $T_0 = +\infty$ .

Más aún, si  $f$  y  $g$  satisfacen las condiciones

$$(91) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0$$

entonces se tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$(92) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = b + \int_0^1 \phi(x) dx + \int_0^{+\infty} [g(\tau) - f(\tau)] d\tau.$$

ii) Si existe  $T_2 > 0$  de manera que

$$(93) \quad \int_0^1 \phi(x) + \frac{1}{\rho l} \int_0^{T_2} [g(\tau) - f(\tau)] d\tau - \frac{c_2}{l} \int_0^1 U(x, T_2) dx > 1-b$$

entonces  $T_0 \leq T_2$ , donde  $U$  es la solución del problema

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 U_{xx} - U_t = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ U(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ k_2 U_x(0, t) = f(t), \quad t > 0 \\ U(x, 0) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } b \leq x \leq 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

iii) Si existe  $T_1 > 0$  de manera que

$$(95) \quad \int_0^1 \phi(x) dx + \frac{1}{\rho l} \int_0^{T_1} [g(\tau) - f(\tau)] d\tau - \frac{c_1}{l} \int_0^1 V(x, T_1) dx < -b$$

entonces  $T_0 \leq T_1$ , donde  $V$  es la solución del problema

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 V_{xx} - V_t = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ V(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ k_1 V_x(0, t) = g(t), \quad t > 0 \\ V(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ \psi(x) & \text{si } b \leq x \leq 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

IX. El problema de Stefan para un cuerpo infinito

En [4] se presenta un problema de Stefan en el cual dos fronteras libres pueden intersectarse. El problema describe un cuerpo infinito consistente en un trozo de hielo sumergido en agua. Dependiendo de las condiciones iniciales, el trozo de hielo puede fundirse totalmente en un tiempo finito o el agua puede solidificarse en cada una de las interfaces sólido-líquido. Dado los datos  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, b_1$  y  $b_2$ , el problema consiste en hallar las funciones  $u=u(x,t), v=v(x,t), w=w(x,t), S_1=S_1(t), S_2=S_2(t)$  y  $T>0$ , de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 u_{xx} - u_t = 0, \quad -\infty < x < S_1(t), \quad 0 < t \leq T \\ \alpha_1 v_{xx} - v_t = 0, \quad S_1(t) < x < S_2(t), \quad 0 < t \leq T \\ \alpha_2 w_{xx} - w_t = 0, \quad S_2(t) < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T \\ u(S_1(t), t) = v(S_1(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq T \\ v(S_2(t), t) = w(S_2(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \phi_1(x) \geq 0, \quad -\infty < x \leq b_1 \\ v(x, 0) = \phi_2(x) \leq 0, \quad b_1 \leq x \leq b_2 \\ w(x, 0) = \phi_3(x) \geq 0, \quad b_2 \leq x < +\infty \\ k_1 v_x(S_1(t), t) - k_2 u_x(S_1(t), t) = \dot{S}_1(t), \quad 0 < t \leq T \\ k_1 v_x(S_2(t), t) - k_2 w_x(S_2(t), t) = \dot{S}_2(t), \quad 0 < t \leq T \\ S_1(0) = b_1 < S_2(0) = b_2 \end{array} \right.$$

y en el caso en que exista  $T>0$  de manera que  $S_1(T)=S_2(T)$  y  $S_1(t)<S_2(t)$  en  $[0, T)$  (desaparición de la fase sólida) entonces se debe hallar también la función  $U=U(x,t)$  que satisface las condiciones

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 U_{xx} = U_t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad T < t \\ U(x, T) = \begin{cases} u(x, T), & -\infty < x \leq S_1(T) = S_2(T) \\ w(x, T), & S_1(T) \leq x < +\infty \end{cases} \end{array} \right.$$

En [4] se estudia la existencia global (a través del método del argumento retardado) y unicidad de la solución, la dependencia continua y

monótona de las fronteras libres respecto de los datos, el comportamiento de  $S_2(t)-S_1(t)$  en  $t=T$  y la relación entre el valor crítico  $T$  con la energía inicial en el sistema agua-hielo-agua.

#### X. El problema de Stefan a dos fases con calor latente despreciable

Se analizará la relación entre las soluciones del problema de Stefan a dos fases, con densidades diferentes en cada fase, correspondientes a los casos en que el calor latente de fusión  $l$  sea positivo o sea despreciable, es decir  $l=0$  [37].

Para el caso  $l>0$ , sean  $T_1=T_1(x,t,l)$ ,  $T_2=T_2(x,t,l)$  y  $S_1=S_1(t)=2\sigma_1\sqrt{t}$ , la solución del problema de solidificación (5) con  $\rho_1\neq\rho_2$ , cuya solución está dada por (6) y (7), donde el coeficiente  $\sigma_1$  es la única solución de (8).

Para el caso  $l=0$ , sean  $T_1=T_1(x,t)$ ,  $T_2=T_2(x,t)$  y  $S_0=S_0(t)$ , la solución del problema de solidificación (5) con  $\rho_1\neq\rho_2$  y  $l=0$ , cuya solución viene dada de la siguiente manera (EJERCICIO 20.)

$$(99) \quad \begin{cases} T_1(x,t) = -D + \frac{D}{\operatorname{erf}(\sigma_0/a_1)} \operatorname{erf}(x/2a_1\sqrt{t}) \\ T_2(x,t) = \frac{T_0}{\operatorname{erfc}(\sigma_0/a_0)} \left[ \operatorname{erf}(\delta_0+x/2a_2\sqrt{t}) - \operatorname{erf}(\sigma_0/a_0) \right] \\ S_0(t) = 2\sigma_0\sqrt{t}, \quad \sigma_0 > 0, \quad \delta_0 = \frac{\sigma_0|\epsilon|}{a_2} \end{cases}$$

donde  $\sigma_0$  es la única solución de la ecuación:

$$(100) \quad F(x)=0, \quad x>0.$$

Entonces se obtienen las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 6. La función  $\sigma_1=\sigma(l)>0$ , definida en el intervalo  $(0,+\infty)$ , satisface las siguientes condiciones:

i)  $\sigma_1=\sigma(l)$  es una función decreciente con  $l>0$  y verifica que

$$(101) \quad \sigma(0^+) = \sigma_0, \quad \sigma(+\infty) = 0.$$

ii) Se tiene el siguiente resultado

$$(102) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \sigma_1 = \sigma_0 .$$

Más aún, existe una constante  $C_1 > 0$  (independiente de  $l$ ) de manera que

$$(103) \quad 0 < \sigma_0 - \sigma_1 \leq C_1 l , \quad \forall l \in (0, l_0) .$$

iii) Existe una constante  $C_2 > 0$  (independiente de  $l$ ), de manera que las fronteras libres  $S_0$  y  $S_1$  están relacionadas a través de la siguiente estimación:

$$(104) \quad 0 < \frac{S_0(t) - S_1(t)}{\sqrt{t}} \leq C_2 l , \quad \forall l \in (0, l_0) .$$

DEMOSTRACION. Teniendo en cuenta

$$(105) \quad C_1 = \sigma_0 B_0 , \quad C_2 = 2 C_1$$

donde

$$(106) \quad B_0 = \max_{x \in [\sigma_{l_0}, \sigma_0]} \frac{1}{|F'(x)|} > 0$$

se deduce la propiedad (EJERCICIO 21.).

PROPIEDAD 7. Las temperaturas de las fases sólida y líquida correspondientes a los casos  $l > 0$  y  $l = 0$  satisfacen las siguientes estimaciones:

$$(107) \quad 0 < T_1(x, t, l) - T_1(x, t) \leq C_3 l , \quad 0 < x < S_1(t) , \quad t > 0$$

$$(108) \quad |T_2(x, t, l) - T_2(x, t)| \leq C_4 l , \quad x > S_0(t) , \quad t > 0$$

donde  $C_3$  y  $C_4$  son dos constantes positivas independientes de  $l$ .

DEMOSTRACION. (EJERCICIO 22. ([37])).

## XI. Comentarios finales

A continuación se darán algunas particularidades, relacionadas con lo visto anteriormente, y que por motivos de espacio y alejarse de los objetivos de este cursillo, sólo se indicarán las respectivas referencias bibliográficas:



i) En [8], se estudia la regularidad de la frontera libre (infinita diferenciabilidad) para los problemas planteados en §VII y VIII. Otros trabajos sobre el tema son [14, 17, 28].

ii) En [9], se estudia la aparición de la fase líquida en un cuerpo finito que se encuentra inicialmente en fase sólida.

iii) En [14, 21], se estudia el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito con condiciones iniciales, de contorno y sobre la frontera libre muy generales.

iv) En [14-16, 20, 24] se utiliza el concepto de solución débil.

v) En [29, 31], se estudia la formulación del problema de Stefan a dos fases a través de la ecuación hiperbólica del calor.

vi) En [23], se estudia el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito cuando una de las dos fases tiene signo cambiado, es decir líquido sobre-enfriado o sólido sobre-calentado.

#### REFERENCIAS

- [1] A.B.BANCORA - D.A.TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free boundary", Lat.Am.J. Heat Mass Transf., 9(1985), 215-222.
- [2] J.E.BOUILLET, "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Rosario (1984), No. 11, 63-74.
- [3] H.S.CARSLAW - J.C.JAEGER, "Conduction of heat in solids", Oxford University Press, London (1959).
- [4] J.R.CANNON - J.DOUGLAS, Jr. - C.D.HILL, "A multi-boundary Stefan problem and the disappearance of phases", J.Math.Mech., 17(1967), 21-33.
- [5] J.R.CANNON - C.D.HILL, "Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation", J. Math.Mech., 17(1967), 1-19.
- [6] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A two phase Stefan problem with

- temperature boundary conditions", *Annali Mat. Pura Appl.*, 88(1971) 177-191.
- [7] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A two phase Stefan problem with flux boundary conditions", *Annali Mat. Pura Appl.*, 88(1971), 193-205.
- [8] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A two-phase Stefan problem: regularity of the free boundary", *Annali Mat. Pura Appl.*, 88(1971), 217-228.
- [9] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A Stefan problem involving the appearance of a phase", *SIAM J. Math. Appl.*, 4(1973), 141-148.
- [10] S.H.CHO - J.E.SUNDERLAND, "Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity", *J. Heat Transfer*, 96C(1974), 214-217.
- [11] G.W.EVANS, II - E.ISAACSON - J.K.L.MacDONALD, "Stefan-like problems", *Quart.Appl.Math.*, 8(1950), 312-319.
- [12] A.FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", en *II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones*, CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No.13, Rosario (1987).
- [13] A.FASANO - M.PRIMICERIO, "General free-boundary problems for the heat equation, III", *J.Math.Anal.Appl.*, 59(1977), 1-14.
- [14] A.FASANO - M.PRIMICERIO - S.KAMIN, "Regularity of weak solutions of one-dimensional two-phase Stefan problems", *Annali Mat. Pura Appl.*, 115(1977), 341-348.
- [15] A.FRIEDMAN, "The Stefan problem in several space variables", *Trans.Amer.Math.Soc.*, 132(1968), 51-87. Correction, *Ibid*, 142 (1969), 557.
- [16] A.FRIEDMAN, "One dimensional Stefan problems with nonmonotone free boundary", *Trans.Amer.Math.Soc.*, 133(1968), 89-114.
- [17] A.FRIEDMAN, "Analyticity of the free boundary for the Stefan problem", *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 61(1976), 97-125.
- [18] M.GEVREY, "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", *J.Math. Pures Appl.*, (6) 9(1913), 305-471; (6) 10(1914),

105-148.

- [19] J.M.HILL - V.G.HART, "The Stefan problem in nonlinear heat conduction", ZAMP, 37(1986), 206-229.
- [20] S.L.KAMENOMOSTSKAJA, "On Stefan's problem", Mat.Sb., 53(95)(1965), 485-514.
- [21] P.KNABNER, "Global existence in a general Stefan-like problem", J.Math.Anal.Appl., 115(1986), 543-559.
- [22] V.J.LUNARDINI, "Heat transfer in cold climates", Van Nostrand Reinhold Company, New York (1981).
- [23] P.R.MARANGUNIC - C.V.TURNER, "The behavior of the solutions of a two-phase Stefan problem and the value of an energy integral", Fisica Matematica, Suppl. Bollettino Un. Mat. Italiana, To appear.
- [24] O.A.OLEINIK, "A method of solution of the general Stefan problem", Soviet Math. Dokl., 1(1960), 1350-1354.
- [25] D.QUILGHINI, "Una analisi fisico-matematica del proceso del cambiamento di fase", Annali Mat. Pura Appl., 67(1965), 33-74.
- [26] C.ROGERS, "Application of a reciprocal transformation of a two-phase Stefan problem", J. Physics A: Math.Gen., 18(1985), L 105-L 109.
- [27] L.I.RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Trans. Math. Monographs, Vol. 27, American Mathematical Society, Providence (1971).
- [28] L.I.RUBINSTEIN - M.SHILLOR, "Analyticity of the free boundary for the one-phase Stefan problem with strong nonlinearity", Fisica Matematica, Suppl. Bollettino Un. Mat. Italiana, 1(1981), 47-68.
- [29] M.SADD - J.DIDLAKE, "Non-Fourier melting of a semi-infinite solid", J. Heat Transfer, 99C(1977), 25-28.
- [30] A.D.SOLOMON - D.G.WILSON - V.ALEXIADES, "Explicit solutions to phase change problems", Quart.Appl.Math., 41(1983), 237-243.
- [31] A.D.SOLOMON - V.ALEXIADES - D.G.WILSON - J.DRAKE, "On the formulation of hyperbolic Stefan problems", Quart.Appl.Math., 43(1985), 295-304.

- [32] M.L.STORM, "Heat conduction in simple metals", J.Appl. Physics, 22(1951),940-951.
- [33] L.N.TAO, "The Stefan problem with arbitrary initial and boundary conditions", Quart.Appl.Math., 36(1978), 223-233.
- [34] L.N.TAO, "On free boundary problems with arbitrary initial and flux conditions", ZAMP, 30(1979), 416-426.
- [35] D.A.TARZIA, "An inequality of the coefficient  $\sigma$  of the free boundary  $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$  of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart.Appl.Math., 39(1981-82), 491-497.
- [36] D.A.TARZIA, (a) "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Rosario (1984), No.11, 5-32; (b) "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", Ibid, No.11, 33-61; (c) "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", Ibid, No.12, 5-36; (d) "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", Ibid, No.12, 37-85.
- [37] D.A.TARZIA - L.T.VILLA, "Mathematical considerations on the heat transfer with phase change with negligible latent heat", To appear.
- [38] L.T.VILLA, "El problema inverso de Stefan", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Rosario (1984), No.11, 105-131.
- [39] J.H.WEINER, "Transient heat conduction in multiphase media", British J. Appl. Physics, 6(1955), 361-363.
- [40] D.G.WILSON, "Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multiphase Stefan problems", SIAM J. Appl. Math., 35(1978), 135-147.
- [41] D.G.WILSON, "Lagrangian coordinates for moving boundary problems", SIAM J. Appl. Math., 42(1982), 1195-1201.

PROMAR (CONICET-UNR),  
 Instituto de Matemática "B.  
 Levi",  
 Avda Pellegrini 250,  
 (2000) Rosario, Argentina.



# EL PROBLEMA DE STEFAN MULTIDIMENSIONAL A UNA FASE.

Domingo Alberto TARZIA.

## I. INTRODUCCION.

En este cursillo se estudiará el problema de Stefan multidimensional a una fase a través de la teoría de las inecuaciones variacionales parabólicas (IVP). Esta formulación se debió a Duvaut en 1973 [Du1, Du2], previa transformación de la función incógnita temperatura. Esta brillante transformación dió origen a numerosos estudios posteriores, ya sea desde un punto de vista teórico, numérico o de las aplicaciones, algunos de los cuales serán mencionados al final del presente trabajo.

Merece también ser señalado el hecho de que dos años antes, es decir en 1971, Baiocchi en [Ba1, Ba2, BaCa] estudió el llamado problema del dique poroso (problema de frontera libre en hidráulica) a través de una inecuación variacional elíptica (IVE) realizando una transformación de función incógnita que hoy lleva su nombre.

Estos hechos permitieron que la teoría de las IV se transformara en una herramienta útil para el estudio de ciertos problemas de frontera libre, eliminando ciertas dificultades en el estudio del problema en su formulación original (por ejemplo, en la nueva formulación del problema, la frontera desaparece por completo). Una introducción a la teoría de las IV puede verse en el cursillo CG3 del presente Seminario, como así también en los libros [Du6, DuLi, EkTe, EIOc, Fri2, KiSt, Li, Ta2]; para el caso unidimensional, puede citarse [Ma].

Debido a la importancia del trabajo [Du1, Du2] y teniendo en cuenta el tiempo asignado, el presente cursillo se centralizará en dicha teoría, indicándose además nuevas propiedades y aplicaciones que se realizaron a posteriori; mas detalles podrán verse en [Ta3].

## II. PLANTEO DEL PROBLEMA.

Siguiendo [Du1, Du2] se considera un cuerpo en estado sólido (hielo a 0 C) que ocupa una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  con frontera  $\Gamma$  regular. Se supone que  $\Gamma$  está compuesta de tres partes  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  con  $\text{med}(\Gamma_3) > 0$  y  $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \emptyset$ .

Se busca la evolución del bloque de hielo suponiendo que:  $\Gamma_2$  es una pared impermeable al calor, sobre  $\Gamma_3$  se impone una temperatura nula y sobre  $\Gamma_1$  existe un flujo de calor del tipo de ley de Newton siendo  $\theta_1 = \text{const.} > 0$  la temperatura exterior. Se

desprecia la variación de volumen debido a la fusión del hielo y se designa con  $L(t)$  la superficie de cambio de fase, la cual, debido a la monotonía del problema, está representada por la ecuación  $t=R(x_1, x_2, x_3)$  que es una incógnita suplementaria del problema.

El problema consiste en hallar la temperatura  $\theta=\theta(x,t)$  ( $x=(x_1, x_2, x_3)$ ), definida en  $Q=\Omega \times (0, T)$  con  $T>0$ , por:

$$(1) \quad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta(x,t)>0 & \text{si } t>R(x), x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } t \leq R(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

y la frontera libre  $t=R(x)$  de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i) } \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = 0, & \text{en } t>R(x), x \in \Omega, \\ \text{ii) } \theta = 0 & \text{sobre } t=R(x), \\ \text{iii) } -k \frac{\partial \theta}{\partial n} = \rho l v_n & \text{sobre } t=R(x), \\ \text{iv) } -k \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_1 = \alpha (\theta - \theta_1), \\ \text{v) } \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_2 = 0, & \theta / \Gamma_3 = 0, \\ \text{vi) } \theta(x,0) = 0, & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $c$  el calor específico,  $k$  la conductividad térmica,  $l$  el calor latente y  $v_n$  la velocidad normal en  $\mathbb{R}^3$  de la superficie  $t=R(x)$ .

OBSERVACION 1. Generalmente, cuando se estudia el problema de Stefan unidimensional, la frontera libre se representa por la ecuación  $x=s(t)$ ; en nuestro caso, debido a la monotonía del problema, es preferible trabajar con  $t=R(x)$ , siendo  $R$  la función inversa de  $s$  ( $R=s^{-1}$ ).

OBSERVACION 2. De ahora en adelante se supondrá que se ha realizado un cambio de variables de manera que  $\rho=c=k=l=1$ , donde  $\alpha>0$  y  $\theta_1>0$  son dos constantes dadas.

OBSERVACION 3. La condición de Stefan (iii) puede ser también escrita de la siguiente manera (EJERCICIO 1):

$$(3) \quad -\nabla \theta \cdot \nabla R = 1, \text{ sobre } t=R(x).$$

Si se realiza el siguiente cambio de función incógnita (Transformación de Duvaut):

$$(4) \quad u(x,t) = \int_0^t \Theta(x,\tau) d\tau = \begin{cases} \int_{R(x)}^t \Theta(x,\tau) d\tau & \text{si } t > R(x) \\ 0 & \text{si } t \leq R(x) \end{cases}$$

entonces se obtienen los siguientes resultados:

EJERCICIO 2. Si  $t > R(x)$ , se deduce que:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_{x_i}(x,t) = \int_{R(x)}^t \Theta_{x_i}(x,\tau) d\tau \quad (i=1, 2, 3) \\ \text{ii) } u_{x_i x_i}(x,t) = \int_{R(x)}^t \Theta_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau - \Theta_{x_i}(x,R(x)) R_{x_i}(x) \\ \text{iii) } \Delta u(x,t) = 1 + \Theta(x,t) \\ \text{iv) } u_t(x,t) = \Theta(x,t). \end{array} \right.$$

EJERCICIO 3. i) La nueva función incógnita  $u=u(x,t)$  satisface, en  $\Omega \times (0,T) = Q$ , al siguiente problema:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} u=0, \quad t \leq R(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t - \Delta u = -1, \quad t > R(x), \quad x \in \Omega, \\ u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } t=R(x) \\ u/\Gamma_3 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}/\Gamma_2 = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial n}/\Gamma_1 = a(u - \Theta_1 t) \\ u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

ii) Más aún,  $u$  satisface en  $Q$  al siguiente problema de complementariedad:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u + 1 \geq 0, \quad u \geq 0 \quad \text{en } Q, \\ u(u_t - \Delta u + 1) = 0 \quad \text{en } Q. \end{array} \right.$$



iii) Por otra parte, si  $v=v(x) \geq 0$  en  $\Omega$ , entonces se verifica:

$$(8) \quad (u_t - \Delta u + 1)(v - u) \geq 0 \quad \text{en } Q.$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se deduce el

**LEMA 1.** La función vectorial  $u=u(t)$  ( $u(t): t \in [0, T] \rightarrow u=u(x, t) \in V$ ) satisface a la siguiente IVP.

$$(9) \quad \begin{cases} (u'(t), v - u(t)) + a_\alpha(u(t), v - u(t)) \geq L_\alpha(v - u(t)), \forall v \in K, t \in [0, T], \\ u(t) \in K, u(0) = 0 \end{cases}$$

donde:

$$(10) \quad \begin{cases} V = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_3} = 0\}, \quad H = L^2(\Omega) \quad (\text{Espacios de Hilbert}), \\ K = \{v \in V / v \geq 0 \text{ en } \Omega\} \quad (\text{Convexo cerrado}), \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u v \, d\gamma, \\ L(v) = - \int_{\Omega} v \, dx, \quad (u, v) = \int_{\Omega} u v \, dx, \\ L_\alpha(v) = L(v) + \alpha \theta_1 \int_{\Gamma_1} v \, d\gamma, \end{cases}$$

adoptándose como notación  $u' = u_t$

**DEMOSTRACION.** Si se integra, en  $\Omega$ , la desigualdad (8) utilizando la fórmula de Green

$$(11) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_i} v \, d\gamma$$

y las condiciones (6) que  $u$  verifica sobre  $\Gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), entonces se deduce la IVP (9) (EJERCICIO 4).

**EJERCICIO 5.** Si se reemplaza la condición (2 iv) para la temperatura sobre  $\Gamma_1$  por la siguiente

$$(12) \quad \theta|_{\Gamma_1} = \theta_1$$

quedando las otras condiciones inalteradas, entonces si se realiza el cambio de función incógnita (4) se obtiene para  $u$  la IVP siguiente:

$$(13) \quad \begin{cases} (u'(t), v-u(t)) + a(u(t), v-u(t)) \geq L(v-u(t)), \forall v \in K_1, t \in (0, T), \\ u(t) \in K_1, u(0) = 0 \end{cases}$$

donde

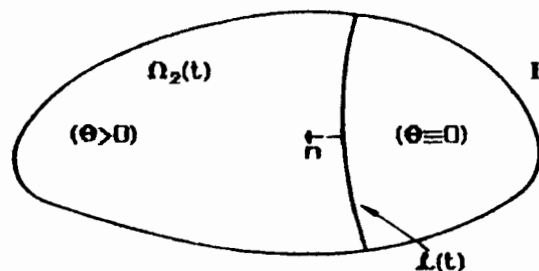
$$(14) \quad K_1(t) = \{v \in K / v / \Gamma_1 = \theta_1 t\}.$$

**OBSERVACION 4.** Es importante mencionar que con la condición (12), en lugar de la (2 iv), el convexo en la IVP, para la función  $u$ , depende del tiempo.

Cuando no se conoce a priori una cierta monotonia de la frontera libre, su ecuación no es de la forma  $t=R(x)$ , sino que estará dada implícitamente por una ecuación del tipo  $S(x,t)=0$ . En este caso se puede utilizar una metodología general para la transformación del problema de la variable  $\theta$  a la variable  $u$ .

Si se introducen los conjuntos:

$$(15) \quad \begin{cases} \Omega_2(t) = \{x \in \Omega / \theta(x,t) > 0\}, \\ Q_2 = \Omega \times (0, T), \quad Q_2 = \bigcup_{0 < t < T} [\Omega_2(t) \times \{t\}], \\ \mathcal{L}(t) = \partial \Omega_2(t) \cap \Omega, \end{cases}$$



entonces las condiciones (2 i-iii) pueden escribirse en la forma:

$$(16) \quad \begin{cases} C \theta_t - k \Delta \theta = 0 & \text{en } Q_2, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \mathcal{L}(t), \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial n} = L v \cdot n & \text{sobre } \mathcal{L}(t), \end{cases}$$

donde  $C = \rho c$ ,  $L = \rho l$ ,  $v$  es la velocidad de la superficie  $\mathcal{L}(t)$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $n$  es un versor normal a  $\mathcal{L}(t)$ . Entonces se obtiene el:

**TEOREMA 2.** i) La temperatura  $\theta$  satisface en el sentido de las distribuciones en  $Q$ , la ecuación siguiente:

$$(17) \quad C\theta_t - k \Delta \theta = -L \frac{\partial \chi_{Q_2}}{\partial t} \quad \text{en } D'(Q_2)$$

donde con  $\chi_A$  se simboliza la función característica del conjunto  $A$ .

ii) Si  $\theta$  satisface (17) y (2 iv-vi), y se define la nueva función incógnita:

$$(18) \quad \int_0^t k \theta(x, \tau) d\tau, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0, T]$$

entonces se obtiene, para  $u$ , las siguientes condiciones:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \frac{C}{k} u'(t) - \Delta u(t) = -L \chi_{Q_2} \\ \text{ii) } u|_{\Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = \alpha (u - \theta_1 t), \\ \text{iii) } \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad u(0) = 0, \end{array} \right.$$

cuya formulación variacional viene dada por la IVP siguiente:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{C}{k} u'(t) \cdot v - u(t) \right) + a(u(t), v - u(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u(t) - \theta_1 t)(v - u) d\Gamma_2 \\ \geq (-L, v - u(t)), \quad \forall v \in K, \quad t \in [0, T], \\ u(t) \in K, \quad u(0) = 0. \end{array} \right.$$

**DEMOSTRACION.** La ecuación (17) se obtiene expresando  $C\theta_t - k\Delta\theta$  en el sentido de las distribuciones en  $Q$  y utilizando una fórmula de Green. Para obtener la ecuación que satisface  $u$ , se integra en el tiempo la de  $\theta$ . La IVP (20) se obtiene multiplicando (19 i) por  $v - u(t)$ , con  $v \in K$ , integrando en  $\Omega$ , utilizando la fórmula de Green (11) y el hecho siguiente (EJERCICIO 6):

$$(21) \quad (-L \chi_{Q_2}(t), v - u(t)) = \int_{\Omega_2(t)} -L(v - u(t)) dx \geq \chi(-L, v - u(t)), \quad \forall v \in K, \quad t \in [0, T].$$

**OBSERVACION 5.** La IVP (20) se reduce a (9) cuando  $C=L=k=1$ .

**OBSERVACION 6.** Cuando  $\theta_1$  depende del tiempo, es decir  $\theta_1 = \theta_1(t) > 0$ , la IVP para  $u$  es la (9) o (13) reemplazando en la integral sobre  $\Gamma_1$  el factor  $(u(t) - \theta_1 t)$  por  $(u(t) - u_1(t))$ , donde  $u_1$  viene definido por (EJERCICIO 7):

$$(22) \quad u_1(t) = \int_0^t \theta_1(\tau) d\tau.$$

**OBSERVACION 7.** Una metodología análoga a la desarrollada más arriba puede utilizarse para transformar el problema de Stefan a dos fases en una IVP (Du3, Du4, Tall

Antes de pasar al estudio de las IVP (9) y (13), se hará un resumen de resultados conocidos sobre las ecuaciones variacionales parabólicas de tipo monótono, que se explicitarán y se usarán con más detalles en este caso particular.

### III. TEORIA DE LAS ECUACIONES E INECUACIONES VARIACIONALES PARABOLICAS DE TIPO MONOTONO.

Se consideran dos espacios de Hilbert  $V$  y  $H$  sobre los reales, de manera que  $V$  es denso en  $H$  y la inyección  $V \rightarrow H$  es continua. Entonces, si se identifica  $H$  con su dual  $H'$ , resulta  $V \rightarrow H \cong H' \rightarrow V'$ . En este caso cada espacio es denso en el otro y las inyecciones son continuas. Este resultado surge del

**EJERCICIO 8.** i) Si  $f \in H$ , entonces la aplicación

$$(23) \quad \tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R} / \tilde{f}(v) = (f, v)_H, \quad \forall v \in V,$$

es lineal y continua en  $V$ , es decir  $\tilde{f} \in V'$ .

ii) El operador

$$(24) \quad S : H \rightarrow V' / S(f) = \tilde{f}, \quad \forall f \in H,$$

(donde  $\tilde{f}$  está dada por (23) para cada  $f \in H$ ) es lineal, continua e inyectiva.

iii) Se puede identificar  $H$  con un subespacio de  $V'$ .

iv) Un caso típico es el que se presenta cuando  $V = H_0^1(\Omega)$  y  $H = L^2(\Omega)$ , siendo

$$(25) \quad H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega).$$

**OBSERVACION 8.** Con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se simboliza la dualidad  $V' \times V$  como así también el producto escalar en  $H$ .

Se considera un operador  $A : V \rightarrow V'$ ; y se introducen las siguientes definiciones:

i)  $A$  es un operador monótono si y sólo si

$$(26) \quad \langle Av - Au, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

ii)  $A$  es un operador hemicontinuo si y sólo si la aplicación

$$(27) \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle \in \mathbb{R}$$

es continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , cualesquiera sean  $u, v, w \in V$ .

iii)  $A$  es un operador acotado si y sólo si existen dos constantes  $c_1, c_2 \geq 0$  de manera que

$$(28) \quad \|Av\|_{V'} \leq c_1 \|v\|_V + c_2, \quad \forall v \in V.$$

iv)  $A$  es un operador coercitivo si y sólo si existen dos constantes  $\alpha > 0, \lambda \geq 0$  de manera que

$$(29) \quad \langle Av, v \rangle \geq \alpha \|v\|_V^2 - \lambda \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V.$$

**EJERCICIO 9.** Sean los espacios  $H = L^2(\Omega)$  y  $V = H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ , y la forma bilineal y simétrica  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las hipótesis siguientes:

i)  $a$  es continua, es decir:

$$(30) \quad \exists M > 0 / |a(u, v)| \leq M \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_1}, \quad \forall u, v \in V,$$

donde  $\| \cdot \|_{H_1}$  representa la norma en el espacio de Hilbert  $H^1(\Omega)$ , dada por

$$(31) \quad \|u\|_{H_1} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

ii)  $a$  es coercitiva, es decir:

$$(32) \quad \exists \alpha_0 > 0 / a(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|_{H_1}^2, \quad \forall v \in V.$$

Entonces, el operador  $A : V \rightarrow V'$  definido por

$$(33) \quad \langle Au, v \rangle = a(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$

satisface las 4 definiciones anteriores. Más aún,  $A$  es fuertemente monótono, es decir

$$(34) \quad \langle Av - Au, v - u \rangle \geq \alpha_0 \|v - u\|_V^2, \quad \forall u, v \in V.$$

**TEOREMA 3.** Si  $T > 0, u_0 \in H, f \in L^2(0, T; V')$  y el operador  $A : V \rightarrow V'$  verifica las hipótesis anteriores, entonces existe una única función  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  con  $u' \in L^2(0, T; V')$  de manera que se satisfaga

$$(35) \quad \begin{cases} u'(t) + A u(t) = f(t) & , t \in (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

DEMOSTRACION (EJERCICIO 10. [Ar, Du6, L1], ver Apéndice)

OBSERVACION 9. Como  $u \in L^2(0, T; V)$  y  $u' \in L^2(0, T; V')$ , entonces la aplicación  $t \in (0, T) \rightarrow u(t) \in H$  es continua, con lo cual  $u(0) = u_0$  tiene sentido [L1] Mal

A continuación se dará un resultado general referente a las IVP de tipo monótono.

TEOREMA 4. Sea  $\phi \neq \emptyset \subset K \subset V$  un conjunto convexo y cerrado de manera que  $0 \in K$ , y  $u_0 \in K$ . El operador  $A: V \rightarrow V'$  satisface las 4 definiciones anteriores y la hipótesis suplementaria

$$(36) \quad \exists \alpha_1 > 0, \lambda_1 \geq 0 \quad / \quad \langle Av - Au, v - u \rangle \geq \alpha_1 \|v - u\|_V^2 - \lambda_1 \|v - u\|_V^2, \quad \forall u, v \in V.$$

Si  $T > 0$  y  $f, f' \in L^2(0, T; V')$  con  $f(0) - Au_0 \in H$ , entonces existe una única solución  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  con  $u' \in L^2(0, T; V') \cap L^\infty(0, T; H)$  de la IVP siguiente:

$$(37) \quad \begin{cases} (u'(t), v - u(t))_{V'} + \langle Au(t), v - u(t) \rangle \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle, \quad \forall v \in K, t \in (0, T), \\ u(t) \in K, \quad u(0) = u_0. \end{cases}$$

DEMOSTRACION. a) Unicidad: Se supone que  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones de la IVP (37). Si se reemplaza  $v = u_2(t)$  en la IVP correspondiente a la de  $u_1$  y  $v = u_1(t)$  en la IVP correspondiente a la de  $u_2$ , se suman ambas desigualdades, se reemplaza  $w = u_2 - u_1$  y se utiliza (36), entonces se deduce que

$$(38) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|w(t)\|_H^2) \leq \lambda_1 \|w(t)\|_H^2, \quad t \in (0, T)$$

A partir de la desigualdad anterior y utilizando una de las desigualdades de Gronwall se obtiene  $w = 0$  en  $[0, T]$ , es decir  $u_1 = u_2$ .

b) Existencia: Sea  $\beta: V \rightarrow V'$  un operador de penalización del convexo  $K$ , es decir que  $\beta$  es un operador acotado, monótono, hemicontinuo que tiene la siguiente propiedad [L1]:

$$(39) \quad \beta(v) = 0 \Leftrightarrow v \in K$$

Se define para cada  $\epsilon > 0$  (parámetro destinado a tender a cero) el problema penalizado (aproximado de (37)) siguiente:

$$(40) \quad \begin{cases} u_\varepsilon'(t) + A u_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon(t)) = f(t), & t \in (0, T], \\ u_\varepsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

que es utilizado en tres pasos (EJERCICIO 11. [Du6, Li]) para obtener la existencia de solución:

- i) Existe una única solución  $u_\varepsilon$  de (40) por la teoría de las EVP de tipo monótono.
- ii) Se obtienen las siguientes estimaciones a priori:
  - a)  $\{u_\varepsilon\} \subset \text{conj. acotado de } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ ,
  - b)  $\{u_\varepsilon'\} \subset \text{conj. acotado de } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ .
- iii) Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene  $u_\varepsilon \rightarrow u$  y se deduce que  $u$  satisface la IVP (37).

Se verá un ejemplo de operador de penalización en el

**EJERCICIO 12.** Sea  $V$  un espacio de Hilbert y  $\emptyset \neq K \subset V$  un conjunto convexo y cerrado. Entonces  $\beta: V \rightarrow V$ , definido por  $\beta = I - P_K$ , donde  $I$  es la identidad y  $P_K$  es el operador de proyección sobre  $K$ , es un operador de penalización de  $K$ . Más aún,  $\beta$  es un operador continuo, pues verifica:

$$(41) \quad \|\beta(v) - \beta(w)\| \leq 2 \|v - w\|, \quad \forall v, w \in V.$$

**EJERCICIO 13.** i) Si  $\text{med}(\Gamma_2) > 0$ , entonces la forma bilineal  $a$  es coercitiva sobre  $V$ .

ii) Si  $\text{med}(\Gamma_2) = 0$ , pero además se cumple que  $\text{med}(\Gamma_1) > 0$ , entonces la forma bilineal  $a_\alpha$ , definida para  $\alpha = 1$  en (10), es coercitiva sobre  $V = H^1(\Omega)$ , es decir que existe una constante  $\lambda_1 > 0$  tal que

$$(42) \quad a_1(v, v) \geq \lambda_1 \|v\|_1^2, \quad \forall v \in V.$$

Más aún, la forma bilineal  $a_\alpha$  es coercitiva sobre  $V$ , obteniéndose

$$(43) \quad \begin{cases} a_\alpha(v, v) \geq \lambda_\alpha \|v\|_1^2, & \forall v \in V, \\ \lambda_\alpha = \lambda_1 \min(1, \alpha) > 0. \end{cases}$$

#### IV. ESTUDIO DE LA IVP (9).

Se dará a continuación el

**TEOREMA 5.** Para cada  $\alpha > 0$  fijo, existe una única solución  $u = u_\alpha(x, t)$  de la IVP (9) que satisface

$$(44) \quad u_\alpha, u_\alpha' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

**DEMOSTRACION. a) Unicidad:** Si se supone que  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones de la IVP (9), reemplazando  $v=u_2(t)$  y  $v=u_1(t)$  en las IVP correspondientes a la de  $u_1$  y  $u_2$  respectivamente, sumando ambas desigualdades y reemplazando  $w=u_2-u_1$ , entonces resulta:

$$(45) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{H^1}^2 + a(w(t), w(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} w^2(t) d\Gamma \leq 0 \quad , \quad t \in (0, T]$$

Integrando en el intervalo  $(0, t)$  se obtiene que  $w=0$  en  $[0, T]$ , es decir  $u_1=u_2$ .

**b) Existencia:** Se utilizará una metodología que es general en este tipo de IVP, consistente en penalizar el convexo, realizar estimaciones a priori sobre la solución aproximada y pasar al límite sobre el parámetro de penalización para hallar la solución del problema en cuestión.

i) Se utiliza el siguiente operador de penalización:

$$(46) \quad \beta(v) = \frac{1}{\epsilon} |v| \quad , \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

y se define  $u=u_\epsilon$  (para cada  $\epsilon > 0$ ) como la solución del problema penalizado (cuando no haya confusión es útil evitar el uso innecesario de los subíndices  $\epsilon > 0$  y  $\alpha > 0$  para la función  $w$ ):

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u'(t), v) + a_\alpha(u(t), v) + \frac{1}{\epsilon} (\beta(u(t)), v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, t \in (0, T], \\ u(0) = 0, \quad u(t) \in V \end{array} \right.$$

Se sabe que la función  $u=u_\epsilon$  (para cada  $\epsilon > 0$ ) existe y es única, por lo demostrado en §III. El operador  $A$  está definido en este caso por:

$$(48) \quad \langle Au, v \rangle = a(u, v) + \frac{1}{\epsilon} (\beta u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u v d\Gamma$$

ii) Se obtendrán, en dos etapas, estimaciones a priori para  $u=u_\epsilon$ .

En primer lugar, se reemplaza  $v=u(t)$  en (47), teniendo en cuenta

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \exists \alpha_0 > 0 / a(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|_1^2, \quad \forall v \in V, \\ b) (\beta(u(t)), u(t)) \geq 0, \quad \forall t \in (0, T], \\ c) \int_{\Gamma_1} u^2(t) d\Gamma \geq 0, \quad \forall t \in (0, T], \\ d) - \int_{\Omega} u(t) dx \leq \sqrt{\text{med}(\Omega)} \|u(t)\|_{H^1}, \\ e) \alpha \theta_1 t \int_{\Gamma_1} u(t) d\Gamma \leq \alpha \theta_1 T \sqrt{\text{med}(\Gamma_1)} \|1\|_{L^2} \|u(t)\|_1 \end{array} \right.$$



donde  $\gamma_0: H^1(\Omega) \rightarrow \Gamma$  es el operador traza, y utilizando la desigualdad

$$(50) \quad x y \leq \frac{\lambda^2}{2} x^2 + \frac{1}{2\lambda^2} y^2, \quad \forall \lambda > 0,$$

al integrar en el intervalo  $(0, t)$ , se obtiene la siguiente desigualdad

$$(51) \quad \frac{1}{2} \|u(t)\|_{H^1}^2 + \frac{\alpha_0}{2} \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C_1, \quad \forall t \in (0, T),$$

donde  $C_1$  es una adecuada constante independiente de  $\epsilon > 0$ . En virtud de lo anterior resulta

$$(52) \quad \{u_\epsilon\} \subset \text{conj. acotado de } L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Es importante señalar que si  $\text{med}(\Gamma_3) = 0$  la condición a) no es válida, pero siguen siéndolo las acotaciones realizadas debido a la coercitividad de  $a_\alpha$  sobre  $H^1(\Omega)$ .

En segundo lugar, sean  $t \in (0, T)$  y  $h > 0$  de manera que  $t+h \in (0, T)$ . Si en la IVP (47) al instante  $t$  ( $t+h$ ) se reemplaza  $v = u(t+h) - u(t) \in V$  ( $v = u(t) - u(t+h) \in V$ ), se suman ambas desigualdades, se utiliza la monotonía del operador  $\beta$ , se divide ambos miembros por  $h^2$  y se pasa al límite  $h \rightarrow 0$ , entonces se deduce que

$$(53) \quad \frac{1}{2} \|u'(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t a(u'(s), u'(s)) ds + \alpha \int_0^t \int_{\Gamma_1} (u'(s))^2 ds d\Gamma \leq \\ \leq \alpha \theta_1 \int_0^t \int_{\Gamma_1} u'(s) ds d\Gamma + \frac{1}{2} \|u'(0)\|_{H^1}^2, \quad t \in (0, T)$$

Tomando  $t=0$  en (47), se obtiene

$$(54) \quad (u'_\epsilon(0), v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

con lo cual  $\|u'_\epsilon(0)\|_{H^1} \leq C_2$ , donde  $C_2$  es una constante independiente de  $\epsilon$ . Si se utiliza en (53) la desigualdad (50), se obtienen las siguientes estimaciones:

$$(55) \quad \{u'_\epsilon\} \subset \text{conj. acotado de } L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

De (47), resulta

$$(56) \quad \frac{1}{\epsilon} (\beta(u_\epsilon(t)), v) = - (u'_\epsilon(t), v) - a_\alpha(u_\epsilon(t), v) + L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

y, por lo tanto

$$(57) \quad \left\{ \frac{1}{\epsilon} \beta(u_\epsilon) \right\} \subset \text{conj. acotado de } L^2(0, T; V').$$

iii) Debido a las estimaciones (52), (55) y (57) puede deducirse, por aplicación de teoremas clásicos del análisis funcional que existe una sub-sucesión (por conveniencia, será igualmente notada por  $u_\epsilon$ ) tal que, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se tiene

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon \rightarrow u \text{ en } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ débil,} \\ u'_\epsilon \rightarrow u' \text{ en } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ débil y en } L^\infty(0,T;H) \text{ débil estrella,} \\ \beta(u_\epsilon) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0,T;V') \text{ fuerte.} \end{array} \right.$$

De (58) se deduce que  $u(0)=0$  y  $u(t) \in K$ ,  $\forall t \in (0,T)$ .

Sea el conjunto  $\mathcal{K}$ , definido por:

$$(59) \quad \mathcal{K} = \{w \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) / w(t) \in K, \forall t \in (0,T)\}$$

Si se elige  $v_\epsilon(t) = u_\epsilon(t)$  en (47), con  $w \in \mathcal{K}$ , se utiliza el hecho que  $\beta(w(t))=0$  y que el operador  $\beta$  es monótono, se integra en el intervalo  $[0,T]$  y se tienen en cuenta las estimaciones siguientes:

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T (u'_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|u_\epsilon(T)\|_{H^1}^2 \geq \frac{1}{2} \|u(T)\|_{H^1}^2 = \\ \int_0^T (u'(t), u(t)) dt, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T a_\alpha(u_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) dt \geq \int_0^T a_\alpha(u(t), u(t)) dt. \end{array} \right.$$

pasando al límite inferior en los dos miembros, se obtiene

$$(61) \quad \int_0^T (u'(t), w(t) - u(t)) dt + \int_0^T a_\alpha(u(t), w(t) - u(t)) dt \geq \\ \geq \int_0^T L_\alpha(w(t) - u(t)) dt, \quad \forall w \in \mathcal{K}.$$

Sean  $v \in K$ ,  $t \in (0,T)$  y  $w \in \mathcal{K}$  definido por:

$$(62) \quad w(s) = \begin{cases} v & \text{si } s \in (t-h, t+h), \\ u(s) & \text{si } s \notin (t-h, t+h), \end{cases}$$

donde  $h > 0$  es un parámetro destinado a tender a cero.

Entonces, si se utiliza  $w$  en (61), se divide por  $2h$  y se pasa al límite  $h \rightarrow 0$  aplicando un lema tipo de Lebesgue, se deduce (9) excepto positivamente en un conjunto de medida nula.

EJERCICIO 14. Completar las demostraciones no realizadas en el Teorema 5 [Du2].

A continuación se estudiará el comportamiento de la solución  $u_\alpha$  de (9), recientemente obtenida, en función del parámetro real  $\alpha > 0$  y se verá que cuando  $\alpha \rightarrow +\infty$  la función  $u_\alpha$  converge a la solución de la IVP (13).

**V. ESTUDIO DE LA IVP (13).**

Se demostrará el siguiente

TEOREMA 6. Sea  $u_\alpha = u_\alpha(x, t)$  la solución de la IVP (9) para cada  $\alpha > 0$ , dada por el Teorema 5.

i) Si  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$  entonces:

$$(63) \quad 0 \leq u_{\alpha_1}(x, t) \leq u_{\alpha_2}(x, t) \leq t H(x) \text{ en } \bar{Q},$$

donde  $H = H(x) \geq 0$  es la solución del siguiente problema:

$$(64) \quad \begin{cases} \Delta H = 0 \text{ en } \Omega, \\ H/\Gamma_1 = \theta_1, \quad \frac{\partial H}{\partial n_1}/\Gamma_2 = 0, \quad H/\Gamma_3 = 0. \end{cases}$$

ii) Se tiene que:

$$(65) \quad 0 \leq u'_\alpha(x, t) \leq H(x) \text{ en } \bar{Q}.$$

iii) Cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , la sucesión  $u_\alpha$  converge a la única solución  $u$  de la IVP (13).

DEMOSTRACION. i) a) En primer lugar, se verá que  $u_\alpha(x, t) \leq t H(x)$  en  $\bar{Q}$ ,  $\forall \alpha > 0$ , lo cual es equivalente a que  $w \equiv 0$ , donde

$$(66) \quad w(x, t) = (u_\alpha(x, t) - t H(x))^+.$$

Se sabe que  $0 \leq w \leq u_\alpha$  en  $\bar{Q}$ ,  $w/\Gamma_3 = 0$  y por ende  $w \in V$ . Si en (9) se pone  $v = u_\alpha - w \in K$ , se obtiene:

$$(67) \quad (u'_\alpha(t), w(t)) + a(u_\alpha(t), w(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t \theta_1) w(t) d\gamma \leq L(w(t)) \leq 0.$$

Teniendo en cuenta que:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1) a(u_\alpha(t), w(t)) = a(u_\alpha(t) - H t, w(t)) + a(H t, w(t)) = \\ \quad = a(w(t), w(t)) + t a(H, w(t)) = \\ \quad = a(w(t), w(t)) + t \int_{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial n} w(t) d\Gamma \geq \\ \quad \geq a(w(t), w(t)), \\ a_2) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t \theta_1) w(t) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} w^2(t) d\Gamma, \\ a_3) (u'_\alpha(t), w(t)) = (w'(t), w(t)) + (H, w(t)) \geq (w'(t), w(t)), \end{array} \right.$$

entonces se deduce que

$$(69) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{\Gamma_1}^2 + a(w(t), w(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} w^2(t) d\Gamma \leq 0, \quad t \in [0, T],$$

que, conjuntamente con la condición  $w(0) = 0$ , se obtiene que  $w \equiv 0$  en  $\bar{Q}$ .

b) En segundo lugar se verá que  $u_1 \leq u_2$  en  $\bar{Q}$ , donde  $u_i = u_{\alpha_i}$  para  $i=1, 2$ .

Sea  $w = (u_1 - u_2)^+ \in K$ . Si en las IVP (9) correspondientes a  $u_1$  y  $u_2$  se reemplazan  $v = u_1 - w \in K$  y  $v = u_2 + w \in K$  respectivamente (siempre al instante  $t$ ), se suman ambas desigualdades, entonces se obtiene

$$(70) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{\Gamma_1}^2 + a(w(t), w(t)) + \int_{\Gamma_1} w(t) [\alpha_1 (u_1(t) - \theta_1 t) - \alpha_2 (u_2(t) - \theta_2 t)] d\Gamma \leq 0, \quad t \in [0, T]$$

Como el integrando en la integral sobre  $\Gamma_1$  es no-negativo, y  $w$  verifica la condición  $w(0) = 0$ , entonces resulta  $w \equiv 0$ .

ii) a) Sean  $t \in [0, T]$  y  $h > 0$  de manera que  $t+h \in [0, T]$ . Se verifica además  $0 \leq w(x, t) = (u_\alpha(x, t+h) - u_\alpha(x, t))^+ \in K$ .

Si en la IVP (9) al instante  $t$  se pone  $v = u_\alpha(t) - w(t) \in K$  y en la correspondiente al instante  $t+h$  se pone  $v = u(t+h) - w(t) \in K$ , sumando ambas desigualdades, resulta:

$$(71) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{\Gamma_1}^2 + a(w(t), w(t)) \leq -\alpha \int_{\Gamma_1} w^2(t) d\Gamma \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

Teniendo en cuenta que  $w(0) = u^-(x, h) = 0$  en  $\Omega$ , entonces  $w(t) \equiv 0$  en  $\Omega$ , es decir  $u_\alpha(x, t) \leq u_\alpha(x, t+h)$ , y por lo tanto  $u'_\alpha \geq 0$ .

b) Sea  $U(x, t) = t H(x) - u_\alpha(x, t) \geq 0$ . Sean  $t \in [0, T]$  y  $h > 0$  de manera que  $t+h \in [0, T]$ . Se considera  $w(x, t) = (U(x, t+h) - U(x, t))^+$ . De una manera análoga a lo anterior se concluye que  $w \equiv 0$  con lo cual  $U' \geq 0$ , es decir  $u'_\alpha \leq H$ .

iii) La unicidad de solución de la IVP (13) se demuestra en forma

similar a lo utilizado para la IVP (9). Se verá, a continuación, que la existencia de solución de la IVP (13) se calculará como el límite de la sucesión  $u_\alpha$  cuando  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Para ello se obtendrán estimaciones a priori sobre  $u_\alpha$  que permitirán el pasaje al límite.

Sea  $w(x,t) = u_\alpha(x,t) - t H(x)$ . Si se reemplaza  $v = t H(x)$  en (9), suponiendo  $\alpha > 1$  (al estar destinado a tender a infinito), y utilizando la igualdad

$$(72) \quad a_\alpha(u,v) = a_1(u,v) + (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} u v \, d\Gamma,$$

al integrar en el intervalo  $[0,t]$ , utilizando la coercitividad de  $a_1$  y la desigualdad (50), resulta

$$(73) \quad \frac{1}{2} \|w(t)\|_{H_1}^2 + \frac{\lambda_1}{2} \int_0^t \|w(s)\|_{H_1}^2 \, ds + (\alpha-1) \int_0^t \int_{\Gamma_1} w^2(s) \, ds \leq C, \quad t \in [0,T],$$

donde  $C$  es una constante adecuada independiente de  $\alpha$ . De (73), se obtienen para  $w$  (y por ende para  $u_\alpha$ ) las siguientes estimaciones a priori:

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_\alpha) \text{ C conj. acotado de } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \\ (\alpha-1) \int_0^t \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(s) - \theta_1 s)^2 \, d\Gamma \, ds \leq C. \end{array} \right.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (63) y (65), se tiene que

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_\alpha) \text{ es creciente en } \alpha \text{ y acotada por } t H(x), \\ (u'_\alpha) \text{ C conj. acotado de } L^\infty(Q). \end{array} \right.$$

En virtud de las estimaciones precedentes se puede pasar al límite  $\alpha \rightarrow +\infty$ , obteniéndose la existencia y unicidad de la solución de la IVP (13) en la clase

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \\ u' \in L^2(0,T;H). \end{array} \right.$$

Además,  $u_\alpha \rightarrow u$  en  $L^2(0,T;H)$  fuerte y en  $L^2(0,T;V)$  débil, y  $u'_\alpha \rightarrow u'$  en  $L^\infty(Q)$  débil estrella cuando  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

**EJERCICIO 15.** Completar las demostraciones no realizadas en el Teorema 6 (D.12)

Más aún, demostrar que la solución  $u$  de (13) verifica que  $0 \leq u(x,t) \leq t H(x)$  en  $\bar{Q}$  y que  $0 \leq u'(x,t) \leq H(x)$  en  $\bar{Q}$ .

## VI. GENERALIZACIONES, APLICACIONES Y COMENTARIOS FINALES.

A continuación se indicarán trabajos desarrollados como consecuencia de los visto anteriormente (la lista no pretende ser completa; en cada ítem se citan en general, los primeros trabajos realizados; pueden obtenerse más referencias en la bibliografía de los trabajos dados, en particular en [Ta4]):

A) Sobre el problema de Stefan multidimensional a una fase:

i) En [FrKi] se extienden los resultados al caso en que  $\theta/\Gamma_1 = \theta_1(x,t)$  y  $\theta(x,0) = \theta_0(x)$ .

ii) Estudio de la regularidad de solución: En [Ca] se prueba que la frontera libre  $t=R(x)$  está representada por una función localmente Lipschitz, cuya constante de Lipschitz depende de la propia solución, y que para el caso bidimensional la temperatura  $\theta = u_t$  es una función continua a través de la frontera libre. En [CaFr] se extiende este último resultado para cualquier dimensión. En [Ya] se demuestra que  $t=R(x)$  es uniformemente Lipschitz continua con una constante que depende solamente de los datos.

OBSERVACION 10. Lo realizado para el problema de Stefan a una fase fue extendido al de dos fases utilizando el siguiente cambio de función incógnita:

$$(77) \quad \int_0^t [k_2 \theta^+(x,s) - k_1 \theta^-(x,s)] ds,$$

donde  $k_2$  y  $k_1$  son la conductividad térmica de la fase líquida y sólida respectivamente, y  $\theta = \theta(x,t)$  representa la temperatura. Cabe señalar que la IVP que se obtiene para  $u$  es de tipo II, pues en ella aparece  $(v - u'(t))$  en lugar de  $(v - u(t))$ , y además, es ahora  $u'(t)$  la función que pertenece al conjunto convexo en cuestión.

B) Sobre el problema de Stefan multidimensional a dos fases:

i) Planteo del problema a través de la teoría de las IVP [Da, Du3, Du4, Fre1, Pa1, Ta1]

ii) Planteo con región pastosa (mushy region): [Aofr, Fre2]

iii) Planteo a través de una formulación débil [Fri1, Ka, O1]

C) Sobre algunas aplicaciones:

i) Problema de la colada continua [Br1, Br2, Ro1, Ro2, Ru, Sa2]

ii) Problema de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos [Du4, Du5]

iii) Flujo en una celda de Hele-Shaw [EJJa]

iv) Problema de mecanismo electroquímico [E1].

v) Problemas de control óptimo con cambio de fase [Bar, PaZ, Sa1, Sa2].

vi) Análisis numérico de iv (tería general) [Ci, G1, G1LiTr], aplicación al problema de Stefan [Bo, Fe, IckI, Je, JeRo, Kilc, NiPa, No, OdKi, PiVe].

## APENDICE

### ESPACIO DE FUNCIONES A VALORES VECTORIALES

Sea  $V$  un espacio de Banach sobre el conjunto de los números reales con norma  $\| \cdot \|_V$ . Se define al espacio  $(1 \leq p < +\infty)$ :

$$(A_1) \quad L^p(0, T; V) = \{f: (0, T) \rightarrow V \mid f \text{ es medible, } \|f\| < +\infty\}$$

donde

$$(A_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|f\| = \left( \int_0^T \|f(t)\|_V^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\| = \text{Sup}_{t \in (0, T)} \|f(t)\|_V, \quad p = +\infty \end{array} \right.$$

Puede notarse que  $L^p(0, T; L^q(\Omega)) = L^p((0, T) \times \Omega)$ .

Se demuestra que  $L^p(0, T; V)$  es un espacio de Banach; para  $1 < p < +\infty$ , es además, reflexivo, si  $V$  lo es, y su dual puede identificarse con  $L^q(0, T; V')$ , donde  $q^{-1} + p^{-1} = 1$ .

Se define el espacio de las distribuciones sobre  $(0, T)$  a valores en  $V$  como

$$(A_3) \quad D'(0, T; V) = \{f: D(0, T) \rightarrow V \mid f \text{ es lineal y continua}\},$$

donde  $D(0, T)$  representa el espacio de las distribuciones sobre el intervalo  $(0, T)$ .

Se puede definir el siguiente operador:

$$(A_4) \quad F: L^p(0, T; V) \rightarrow D'(0, T; V) \mid F(f) = \tilde{f}$$

donde

$$(A_5) \quad \tilde{f}(\phi) = \int_0^t f(t) \phi(t) dt, \quad \forall \phi \in D(0, T).$$

El operador  $F$  es lineal e inyectivo y, por lo tanto se puede identificar  $f \in L^p(0, T; V)$  con la distribución  $\tilde{f} \in D'(0, T; V)$ , es decir que:

$$(A_6) \quad L^p(0, T; V) \subset D'(0, T; V).$$

Para toda distribución  $f \in D'(0, T; V)$  se define su derivada  $n$ -ésima con respecto a

la variable  $t$  de la siguiente manera:

$$(A_7) \quad f^{(n)}(\phi) = \frac{d^n f(\phi)}{dt^n} = (-1)^n f\left(\frac{d^n \phi}{dt^n}\right), \quad \forall \phi \in D(0, T).$$

Se definen los espacios de Sobolev a valores vectoriales por  $(m=0, 1, \dots)$ :

$$(A_8) \quad H^m(0, T; V) = \{f: (0, T) \rightarrow V \text{ medibles} / f^{(i)} \in L^2(0, T; V), i=0, 1, \dots, m\},$$

que resultan ser espacios de Hilbert con el producto escalar siguiente:

$$(A_9) \quad (f, g)_{H^m(0, T; V)} = \sum_{i=0}^m \int_0^T (f^{(i)}(t), g^{(i)}(t))_V dt.$$

En el caso en que sea  $m=0$  se utiliza la notación  $L^2(0, T; V)$ .

## REFERENCIAS

[Ar] M. ARTOLA: "Evolution equations: First order linear equations and monotonic parabolic problems", in Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, ICTP, Trieste (Sept.-Nov. 1976).

[Ag Fr] J. AGUIRRE PUENTE—M. FREMOND: "Frost propagation in wet porous media", in Lecture Notes in Mathematics, N° 503, Springer-Verlag, Berlin (1976), 137-147.

[Bai 1] C. BAIOCCHI: "Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux", C.R Acad. Sc. Paris, 273A (1971), 1215-1217.

[Bai 2] C. BAIOCCHI: "Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica", Annali Mat. Pura Appl., 92 (1972), 107-127.

[Ba Ca] C. BAIOCCHI—A. CAPELO: "Diseguazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1, 2, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[Bar] V. BARBU: "Optimal control of variational inequalities", Research Notes in Mathematics N° 100, Pitman, London (1984).

[Bo] J. F. BOURGAT: "Résolution du problème de Stefan à deux phases par une inéquation variationnelle", Travail inédit.

[Br 1] T. BRIERE: "Application des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un metal fondu s'écoulant dans une gaine de refroidissement", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI, Paris (Juin 1976).



[Br 2] T. BRIERE: "Application des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un métal par passage dans une gaine de refroidissement", *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 2 (1980), 219-247.

[Ca] L.A. CAFFARELLI: "Some aspects of the one-phase Stefan problem", *Indiana Univ. Math. J.*, 27 (1978), 73-77.

[Ca Fr] L.A. CAFFARELLI—A. FRIEDMAN: "Continuity of the temperature in the Stefan Problem", *Indiana Univ. Math. J.*, 28 (1979), 53-70.

[Ci] P.G. CIARLET: "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).

[Da] A. DAMLAMIAN: "Problèmes aux limites non linéaires du type du problème de Stefan, et inéquations variationnelles d'évolution", dans Thèse d'Etat "Résolution de certaines inéquations variationnelles stationnaires et d'évolution", Univ. Paris VI, Paris (Mai 1976).

[Du 1] G. DUVAUT: "Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zéro degré)", *C.R. Acad. Sc. Paris*, 276A (1973), 1461-1463.

[Du 2] G. DUVAUT: "Etude de problèmes unilatéraux en mécanique par des méthodes variationnelles", in *New Variational Techniques in Mathematical Physics*, CIME, Bressanone (16-17 June 1973), 45-102.

[Du 3] G. DUVAUT: "The solution of a two-phase Stefan Problem by a variational inequality", in *Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion*, J.R. Ockendon—W.R. Hodgkins (Eds.), Clarendon Press, Oxford (1975), 173-181.

[Du 4] G. DUVAUT: "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", 2ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1975). Rapport de Recherche N° 185, LABORIA-IRIA, Le Chesnay (1976).

[Du 5] G. DUVAUT: "Diffusion de l'oxygène dans les tissus vivants", *C.R. Acad. Sc. Paris*, 282A (1976), 33-36.

[Du 6] G. DUVAUT: "Méthodes variationnelles, initiation et applications", Cours du DEA, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), Paris (1979).

[Du Li] G. DUVAUT—J.L. LIONS: "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod, Paris (1972).

[Ek Te] I. EKELAND—R. TEMAN: "Analyse convexe et problèmes variationnels", Dunod—Gauthier Villars, Paris (1973).

[El] C.M. ELLIOTT: "On a variational inequality formulation of an electrochemical machining moving boundary problem and its approximation by the finite element method", *J. Inst. Math. Appl.*, 25 (1980), 121-131.

- [EJ Ja] C.M. ELLIOTT—V. JANOVSKY: "A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary", *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 88A (1981), 93–107.
- [EJ Oc] C.M. ELLIOTT—J.R. DICKENDON: "Weak and variational methods for moving problems", *Research Notes in Mathematics* N° 59, Pitman, London (1982).
- [Fe] L. FERRAGUT: "Resolución del problema de Stefan mediante métodos variacionales", Tesis, Univ. de Zaragoza, Zaragoza (setiembre 1982).
- [Fre 1] M. FREMOND: "Variational formulation of the Stefan problem. Coupled Stefan problem—frost propagation in porous media", in *Computational Methods in Non-linear Mechanics*, J.T. Oden et. al. (Eds.), The Texas Inst. for Computational Mechanics (Sept. 1974), 341–350.
- [Fre 2] M. FREMOND: "Diffusion problems with free boundaries", in *Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics*, I.C.T.P., Trieste (1976).
- [Fri 1] A. FRIEDMAN: "The Stefan problem in several space variables", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 132 (1968), 51–87.
- [Fri 2] A. FRIEDMAN: "Variational principles and free-boundary problems", J. Wiley, New York (1982).
- [Fr Ki] A. FRIEDMAN—D. KINDERLEHRER: "A one-phase Stefan problem", *Indiana Univ. Math. J.*, 24 (1975), 1005–1035.
- [GI] R. GLOWINSKI: "Numerical methods for nonlinear variational problems", Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [GI Li Tr] R. GLOWINSKI—J.L. LIONS—R. TREMOUÏERES: "Analyse numérique des inéquations variationnelles", Tome 1, 2, Dunod, Paris (1976).
- [Ic Ki] Y. ICHIKAWA—N. KIKUCHI: "A one-phase multidimensional Stefan problem by the method of variational inequalities", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 14 (1979), 1197–1220.
- [Je] J.W. JEROME: "Approximation of nonlinear evolution systems", Academic Press, New York (1983).
- [Je Ro] J.W. JEROME—M. ROSE: "Error estimates for the multidimensional two-phase Stefan problem", *Math. Comp.*, 39 (1982), 377–414.
- [Ka] S.L. KAMENOMOSTSKAJA: "On the Stefan problem", *Mat. Sb.*, 53 (1961), 489–514 (in Russian).
- [Ki Ic] N. KIKUCHI—Y. ICHIKAWA: "Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 14 (1979), 1221–1239.
- [KI St] D. KINDERLEHRER—G. STAMPACCHIA: "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[Li] J.L. LIONS: "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod-Gauthier Villars, Paris (1969).

[Li Ma] J.L. LIONS—E. MAGENES: "Problèmes aux limites non homogènes et applications", Vol. I, Dunod, Paris (1968).

[Ma] E. MAGENES: "Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems", in *Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations*, H.G. Garnier (Ed.), R. Reidel Publ. Comp., Dordrecht (1976), 239–312.

[Ni Pa] M. NIEZGODKA—I. PAWLOW: "Numerical analysis of degenerate Stefan problems", *Control and Cybernetics*, 14 (1985), 119–143.

[No] R.H. NOCHETTO: "Análisis numérico del problema de Stefan multidimensional a dos fases por el método de regularización", Tesis, Univ. de Buenos Aires, Buenos Aires (Setiembre 1983).

[Od Ki] J.T. ODEN, N. KIKUCHI: "Finite element methods for certain free boundary-value problems in mechanics", in *Moving Boundary Problems*, D.G. Wilson—A.D. Solomon—B.T. Boggs (Eds.), Academic Press, New York (1978), 147–164.

[Ol] D.A. OLEINIK: "A method of solution of the general Stefan problem", *Soviet Math. Dokl.*, 1 (1960), 1350–1354.

[Pa 1] I. PAWLOW: "A variational inequality approach to generalized two-phase Stefan problem in several space variables", *Ann. Mat. Pura Appl.*, 131 (1982), 333–373.

[Pa 2] I. PAWLOW: "Variational inequality formulation and optimal control of nonlinear evolution systems governed by free boundary problems", in *Applied Nonlinear Functional Analysis*, K.H. Hoffmann—R. Gorenflo (Eds.), Verlag Peter Lang, Frankfurt (1983), 213–250.

[Pi Ve] P. PIETRA—C. VERDI: "Convergence of the approximated free boundary for the multidimensional one-phase Stefan problem", *Publicazione N° 440, Istituto di Analisi Numerica, Pavia* (1985).

[Ro 1] J.F. RODRIGUES: "Sur un problème à frontière libre stationnaire traduisant la cristallisation d'un métal", *C.R. Acad. Sc. Paris*, 290A (1980), 823–825.

[Ro 2] J.F. RODRIGUES: "Sur la cristallisation d'un métal en coulée continue par des méthodes variationnelles", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI, Paris (Octobre 1980).

[Ru] L.I. RUBINSTEIN: "The Stefan problem", *Trans. Math. Monographs*, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).

[Sa 1] C. SAGUEZ: "Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Applications à des problèmes de frontière libre", *Rapport de Recherche N° 191, IRIA, Rocquencourt* (Octobre 1976).

[Sa 2] C. SAGUEZ: "Contrôle optimal de systèmes à frontière libre", Thèse d'Etat, Univ. de Compiègne, Compiègne (Septembre 1980).

[Ta 1] D.A. TARZIA: "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI, Paris (Mars 1979); CR. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941-944.

[Ta 2] D.A. TARZIA: "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI-CONICET, N° 5, Buenos Aires (1981).

[Ta 3] D.A. TARZIA: "Introducción a las inecuaciones variacionales parabólicas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", en preparación.

[Ta 4] D.A. TARZIA: "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981/82), 147-241. Ver también "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan problem", Technical Report of Instituto Matemático "U. Dini", Univ. di Firenze, Florence (1987), con 2500 referencias.

[Ya] C. YA-ZHE: "Global Lipschitz continuity of free boundaries in the one-phase Stefan problem", Annali Mat. Pura Appl., 142 (1985), 197-213.

PROMAR (CONICET - UNR),  
 Instituto de Matemática "Beppo Levi",  
 Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,  
 Universidad Nacional de Rosario,  
 Avda. Pellegrini 250,  
 (2000) Rosario - Argentina.



LA ECUACION DE LA DIFUSION Y SU  
APLICACION A PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Luis T. VILLA

1. INTRODUCCION

En este cursillo nos referiremos a ciertos problemas de frontera libre para una ecuación parabólica unidimensional (conocida como ecuación de la difusión), esencialmente de la forma.

$$(1.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla_x^2 c, \quad (x, t) \in \Omega ;$$

pudiendo en (1.1), eventualmente estar también presente términos convectivos y de fuente o sumidero.

$C = C(x, t)$  denota una concentración del componente que difunde según la 1ra. ley de Fick,  $t$  la variable tiempo,  $x$  la variable espacial en la dirección según la cual se considera la difusión.  $\Omega$  será un dominio simple o compuesto y siempre, al menos algún borde o frontera no será fijo al transcurrir el tiempo, moviéndose con una ley desconocida a priori lo que es una característica de los problemas de frontera libre.  $D$  es la difusividad.

Una deducción de (1.1) puede verse por ejemplo en [1].

En particular vamos a considerar para (1.1) problemas surgidos al formular la descripción de procesos de frecuente ocurrencia en la industria como lo son por ejemplo los de difusión-transformación homogéneos u heterogéneos.

## 2. DESCRIPCIÓN ESQUEMÁTICA DE ALGUNOS SISTEMAS Y MODELOS MATEMÁTICOS POSIBLES

En primer lugar es dable destacar que ya en 1928 A.V. Hill en [2] analiza un problema de difusión de oxígeno y ácido láctico a través de tejidos, básicamente con un modelo de frontera libre.

También W. Jander [3] en 1927 mediante un modelo del tipo precedente para reacciones sólido-sólido y sólido-gas controladas por difusión, desarrolló ecuaciones cinéticas para describir el proceso y resultaron de gran utilidad para la correlación de datos experimentales. Una de ellas es la siguiente:

$$(2.1) \quad [1 - (1 - f)^{1/3}]^2 = \frac{K \cdot t}{R^2}$$

donde R es el radio inicial de la pastilla sólida esférica a transformar, K una constante y f la fracción de sólido transformado al tiempo t.

A medida que se avance con el desarrollo del tema, el significado de (2.1) se aclarará naturalmente. Por ahora podemos adelantar que la referida ecuación puede relacionarse con la dinámica de por ejemplo un proceso de reducción directa de óxido de hierro. Al respecto, pueden entre otros verse los siguientes trabajos que usan un modelo de frontera libre para interpretar el precipitado proceso: W.H. Ray, Q.T. Tsay, J. Szekely en [4]; J. Szekely, J.W. Evans en [5].

### 2.1. Sistema isotérmico no catalítico gas-sólido no poroso [6]

Textos tradicionales que dedican al tema parte de su contenido son [6, 7, 8, 9, 10].

Por otra parte, en los trabajos [11, 12] se puede ver una amplia lista de referencias sobre esta cuestión.

Es de destacar que en este sistema el sólido que se considera no poroso, es el aún no transformado químicamente, en cambio, el ya transformado de estar presente (producto o inerte) se considera poroso y como se verá luego, dicha porosidad podrá bajo ciertas condiciones tener una importante influencia sobre la velocidad global del proceso al que pasamos a explicitar. El gas reactante difunde desde la fase gas hacia la interfase gas-sólido,

luego hasta la superficie reactiva de éste, con la que reacciona químicamente y de generarse un gas producto, éste difunde hacia la fase gas.

2.1a) La pastilla sólida se va consumiendo en el transcurso de la reacción manteniendo su forma inicial. De formarse producto sólido este se remueve tan pronto como se genere.

El esquema reactivo sería:

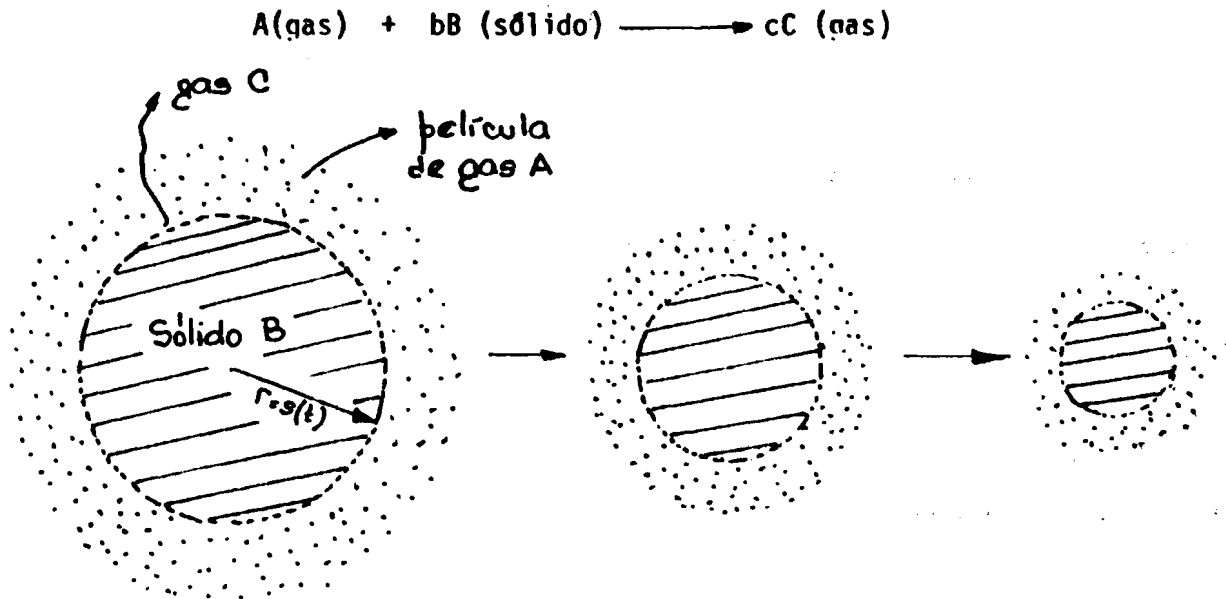


FIGURA 1

$S(t)$  denota la coordenada de la frontera libre al tiempo  $t$ .

Ejemplos prácticos de este subcaso lo constituyen por ejemplo la combustión y gasificación de carbón, disolución de sólidos en líquidos, etc.

### Modelo Matemático [ 6 ]

#### Para Control por Reacción Química

En este caso simple la velocidad global del proceso puede expresarse como la velocidad de desaparición de A debido a la reacción química superficial, esto es

$$(2.2) \quad V = k \left[ C_{AS}^n - \frac{C_{CS}^m}{K_E} \right] \quad \text{ó en general } V = F(C_{AS}, C_{CS})$$

$V$  es entonces la velocidad de reacción y se expresa en moles de A por uní



dad de tiempo y área superficial de B.  $C_{AS}$  y  $C_{CS}$  denotan la concentración del gas reactivo y producto en el frente de reacción o frontera libre,  $K_E$  es la constante de equilibrio (si  $K_E \rightarrow +\infty$  la reacción es irreversible),  $k$  es la constante de velocidad.

Por otra parte, para la velocidad de desaparición de B se tiene

$$(2.3) \quad b \cdot V = \rho_S \frac{dS}{dt}$$

siendo  $\rho_S$  la densidad molar del sólido B.

Teniendo presente (2.2), (2.3) y que por considerarse despreciable la resistencia a la transferencia de materia, se puede poner

$$(2.4) \quad C_{AS} = C_{A0} \quad ; \quad C_{CS} = C_{C0}$$

donde  $C_{A0}$  y  $C_{C0}$  son las concentraciones de los gases en fase gas, se puede escribir el siguiente modelo matemático descriptivo del proceso:

$$(2.5) \quad \frac{d\sigma}{d\zeta} = -1$$

$$(2.6) \quad \sigma(0) = 1$$

donde

$$(2.7) \quad \sigma(\zeta) = \frac{A_p}{F_p V_p} S(\zeta) \quad ; \quad \zeta = \left( \frac{bk}{\rho_S} \right) \left( \frac{A_p}{F_p V_p} \right) \left[ C_{A0}^n - \frac{C_{C0}^m}{K_E} \right] t$$

$A_p$  y  $V_p$  denotan respectivamente el área superficial inicial y el volumen del sólido y  $F_p$  el factor de forma ( $F_p = 1$  pastilla plana,  $F_p = 2$  cilindros largos,  $F_p = 3$  esfera).

Nótese que en este caso, la solución de (1.1) referida al gas reactante y producto es trivial, es decir simplemente  $C_A = C_{A0}$ ,  $C_C = C_{C0}$ .

La cantidad de sólido transformado hasta el tiempo  $\zeta$  referida a la cantidad inicial se define como la conversión, la que denotándola con  $f$ , resulta ser la siguiente para una pastilla esférica de radio inicial  $R$ :

$$(2.8) \quad f(\zeta) = 1 - \frac{S(\zeta)^3}{R^3} = 1 - \sigma(\zeta)^3$$

En general se tiene obviamente que

$$(2.9) \quad f(\zeta) = 1 - \sigma(\zeta)^{F_p}$$

y a partir de (2.5) y (2.9) se obtiene

$$(2.10) \quad f(\zeta) = 1 - (1 - \zeta)^{F_p}$$

o

$$(2.11) \quad \zeta = 1 - (1 - f)^{1/F_p}$$

Por ejemplo en [10] se pueden encontrar discutidos más casos del tipo presentado precedentemente.

#### Control Químico y Difusivo (en régimen cuasiestacionario)

En este caso la velocidad global del proceso es la misma que la de reacción química interfacial y que la de transporte de materia. Entonces:

$$(2.12) \quad -a \int_S \frac{dS}{dt} = k (C_{AS}^n - \frac{C_{CS}^m}{K_E}) = k_D (C_{A0} - C_{AS}) = k_D (C_{CS} - C_{C0})$$

para  $n = 1$ ,  $m = 1$ , a partir de (2.12) se encuentra

$$(2.13) \quad C_{AS} - \frac{C_{CS}}{K_E} = \frac{k_D}{k(1 + \frac{1}{K_E}) + k_D} (C_{A0} - \frac{C_{C0}}{K_E})$$

Para reacción irreversible se tendría

$$(2.14) \quad C_{AS} = \frac{k_D}{k + k_D} C_{A0}$$

Siendo las ecuaciones de movimiento de la frontera libre, respectivamente las siguientes

$$(2.15) \quad -a \int_S \frac{dS}{dt} = \frac{C_{A0} - C_{C0} / K_E}{[(1 + \frac{1}{K_E}) / k_D] + \frac{1}{k}}$$

$$(2.16) \quad -a \int_S \frac{dS}{dt} = \frac{k k_D C_{A0}}{k + k_D}$$

$k_D$  es el coeficiente de transferencia de materia y depende del tamaño de la pastilla sólida, de la fluidodinámica del gas y sus propiedades. Para procesos como el que nos ocupa,  $k_D$  será entonces en particular, función de la posición de la frontera libre, siendo la siguiente una correlación frecuentemente usada

$$(2.17) \quad k_D \frac{S(t)}{D} = 1 + \lambda \sqrt{S(t)}$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusividad del gas y  $\lambda$  es una constante positiva que tiene en cuenta los factores vinculados con la fluidodinámica del gas. En particular, si el sólido está inmerso en una atmósfera de gas estática se tiene  $\lambda = 0$  y en consecuencia se sigue que

$$(2.18) \quad k_D(S) = \frac{D}{S}$$

Considerando reacción de 1er. orden irreversible con sólido inmerso en atmósfera de gas estática debemos entonces escribir

$$(2.19) \quad -a \int_S \frac{dS}{dt} = \frac{k C_{A0}}{1 + \frac{k}{D} S(t)}$$

o mejor aún, introduciendo  $\sigma = \sigma(t)$  definida como

$$(2.20) \quad \sigma(t) = \frac{S(t)}{R}$$

donde  $R$  es el semiespesor inicial de la pastilla (esto es  $S(0) = R$ ), se tiene

$$(2.21) \quad -a \int_S R \frac{d\sigma}{dt} = \frac{k C_{A0}}{1 + \frac{k}{D} R \sigma(t)}$$

integrando en (2.21) sale

$$(2.22) \quad a \int_S (1 - \sigma(t)) + \frac{\theta}{2} (1 - \sigma(t)^2) = \alpha \cdot t$$

donde los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  vienen dados como:

$$(2.23) \quad \beta = a \rho_S R \frac{k}{D}; \quad \alpha = k \frac{C_{A0}}{R}$$

Es interesante el hecho de que en general se puede esperar que para valores suficientemente grandes de  $\beta$  el control sea difusivo, al contrario es químico [los experimentalistas han determinado que en el intervalo  $1 \leq \beta \leq 100$  ambos fenómenos difusivo y químico pueden ser determinantes de la velocidad del proceso]. Para el caso de control difusivo, es decir cuando la etapa que impone la velocidad global es la difusión del gas a través de la película que rodea al sólido se tiene que  $D \ll k$  y  $\beta$  puede llegar a ser lo suficientemente alto como para justificar lo que clásicamente se usa en las aplicaciones como aproximación de (2.22), esto es

$$(2.24) \quad \frac{\beta}{2} (1 - \sigma(t)^2) = \alpha t$$

OBSERVACION 2. En las aplicaciones resulta práctico expresar sea (2.22) que (2.24) en términos de la conversión o fracción de sólido transformado  $f$ , concepto ya introducido previamente.

Así se tiene, para una pastilla esférica respectivamente.

$$(2.25) \quad \alpha t = a \rho_S \left[ 1 - (1 - f)^{1/3} \right] + \frac{\beta}{2} \left[ 1 - (1 - f)^{2/3} \right]$$

$$(2.26) \quad \alpha t = \frac{\beta}{2} \left[ 1 - (1 - f)^{2/3} \right]$$

OBSERVACION 3. Es dable puntualizar que el resultado expresado por (2.22) puede también encontrarse resolviendo para estado estacionario el pertinente modelo de frontera libre para un caso límite (ver C.Y. Wen [13]).

En efecto, suponiendo reacción de primer orden irreversible respecto del gas, se puede escribir el siguiente modelo descriptivo del proceso.

$$(2.27) \quad \frac{\partial C_A}{\partial t} = D \nabla_x^2 C_A \text{ en } \Omega = \{ (x,t) : S(t) < x < +\infty, 0 < t < T \}$$

$$(2.28) \quad C_A(+\infty, t) = C_{A0}, 0 < t < T$$

$$(2.29) \quad -a \rho_S \dot{S} = k C_{AS}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.30) \quad -D \frac{\partial C_A}{\partial x} (S(t), t) = [a \rho_S + C_{AS}] \dot{S}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.31) \quad S(0) = R$$

La condición (2.29) expresa simplemente el hecho de que el gas que se consume en la interfase o frontera libre por reacción química, transforma una cantidad equivalente de sólido).

La (2.30) expresa un principio de conservación de materia que pasamos a explicitar.

Sea  $t > 0$  un dado instante de tiempo y sea  $\Delta t$  un tiempo infinitamente pequeño (destinado a tender a cero). Consideremos el sólido representado por el intervalo material  $(S(t), S(t + \Delta t))$ . Dicha porción de sólido será puro al instante  $t$  y totalmente transformado o inerte al instante  $t + \Delta t$ .

Entonces, por la conservación de materia se tiene

$$\left[ D \frac{\partial C}{\partial x} (S^+(t), t) - D \frac{\partial C}{\partial x} (\bar{S}(t + \Delta t), t) \right] \Delta t = \\ - \Delta S C(S(t), t) - a \rho_S \Delta S$$

Teniendo presente que desde la superficie  $S(t + \Delta t)$  no ingresa gas al sólido, pasando al límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  en la expresión anterior se concluye

$$-D \frac{\partial C}{\partial x} (S^+(t), t) = [C(S^+(t), t) + a \rho_S] \dot{S}$$

que es la condición anunciada por (2.30) recordando que  $C(S^+(t), t) = C_{AS}$

El modelo de C.Y.Wen (caso límite) se obtiene simplemente si en (2.30) se desprecia  $C_{AS}$  en la suma  $a \rho_S + C_{AS}$ .

De hecho, dicha aproximación tiene razonabilidad en el caso que nos interesa fundamentalmente debido a que el modelo mismo de frontera libre es tanto más válido cuanto mayor es el control difusivo y cuanto más rápida es la reacción

química, y si a esto le agregamos el hecho de que en general en los sistemas gas-sólido la relación concentración de gas a la del sólido es usualmente pequeña, tenemos la justificación de la aproximación precitada.

Entonces, el modelo de Wen sería:

$$(2.32) \quad \frac{\partial C_A}{\partial t} = D \nabla_x^2 C_A \quad \text{en } \Omega = \{ (x,t); S(t) < x < +\infty, 0 < t < T \}$$

$$(2.33) \quad C_A(+\infty, t) = C_{A0}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.34) \quad D \frac{\partial C_A}{\partial x}(S(t), t) = k C_{AS}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.35) \quad -D \frac{\partial C_A}{\partial x}(S(t), t) = a \rho_s \dot{S}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.36) \quad S(0) = R$$

el perfil  $C_A = C_A(x, t)$  de concentración del gas para el estado estacionario de (2.32) - (2.36) se encuentra inmediatamente como

$$C_A(x, t) = C_{A0} - \frac{k C_{A0} S^2(t)}{k S(t) + D} \cdot \frac{1}{x}$$

En consecuencia resulta

$$(2.38) \quad C_{AS} = \frac{C_{A0}}{1 + \frac{k}{D} S(t)}$$

y entonces a partir de (2.34) sigue

$$(2.39) \quad -a \rho_s \frac{dS}{dt} = \frac{k C_{A0}}{1 + \frac{k}{D} S(t)}$$

Observamos ahora que (2.39) coincide precisamente con (2.19) a partir de la cual se obtuvo (2.22).

OBSERVACION 4. Si en (2.19), en el denominador del 2do. miembro se desprecia el 1 en la suma  $1 + \frac{k}{D} S(t)$ , la aproximación equivale precisamente a reemplazar

la condición (2.34) del modelo de Wen por la que expresa la condición de reacción química instantánea, esto es:

$$(2.40) \quad c_{A_S} = 0, \quad 0 < t < T$$

lo que conlleva a la siguiente ecuación de movimiento para la frontera libre

$$(2.41) \quad -a \rho_S \dot{S} = \frac{D C_{A_0}}{S(t)}$$

Por otra parte, (2.19) se puede escribir como

$$(2.42) \quad -a \rho_S \dot{S} = \frac{\frac{D C_{A_0}}{S(t)}}{1 + \frac{D}{k \cdot S(t)}}$$

se ve entonces que (2.41) provee una velocidad del frente de reacción mayor que la del modelo de Wen como era natural esperar.

Obviamente, el modelo de Wen con (2.40) en el lugar de (2.34) se transforma en el clásico modelo de Stefan unidimensional a una fase para la ecuación de la difusión.

OBSERVACION 5. Es importante remarcar que el modelo (2.27) - (2.31), simplemente reemplazando (2.28) por  $C_A(L,t) = C_{A_0}$ , es del tipo de modelo descriptivo del hinchamiento por absorción de solvente de un polímero vítreo, modelo este que es analizado matemáticamente en [14], [15], [16] y [17]. Allí se ve que introduciendo la función acumulación de materia

$$(2.43) \quad C(x,t) = \int_{S(t)}^x [a \rho_S + C_A(\xi,t)] d\xi$$

se obtiene un problema tipo Stefan para  $C_A = C_A(x,t)$ , al estilo del que se analiza por ej. en [18].

Para el caso de tratarse de la combustión de una pastilla sólida en atmósfera estática de gas, habría en principio que contemplar los gradientes térmicos, lo que llevaría a acoplar con (2.27) - (2.31) las ecuaciones para la temperatura.

En [19] se analiza un problema del tipo antes citado cuando se tiene presente el gradiente térmico en la fase gaseosa.

2.1b) El tamaño global de la pastilla sólida se mantiene y al transcurrir el proceso se va formando una capa inerte de sólido ya transformado por reacción química, quedando el corazón de sólido aún no reaccionado rodeado por dicha capa y la frontera libre ubica al frente de reacción superficial separatrix de ambas regiones. En la Figura 2 se esquematiza el proceso

■: Sólido inerte (transformado)  
 ▨: Sólido aún no transformado

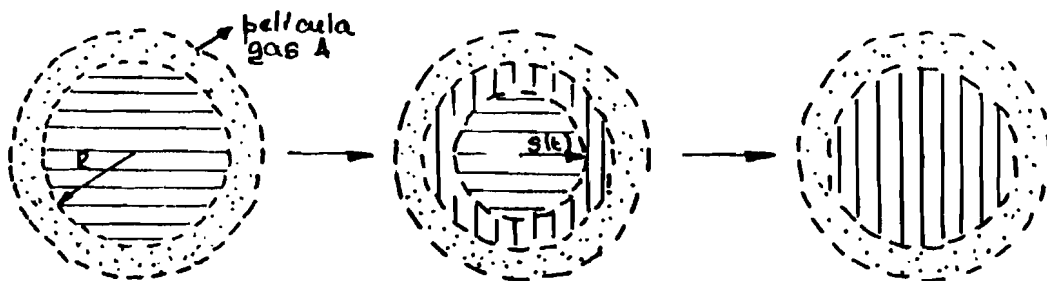


FIGURA 2

siendo el siguiente el esquema reactivo



Este tipo de proceso se encuentra frecuentemente en la industria química y metalúrgica como por ejemplo en reducción de óxidos metálicos, oxidación de metales, regeneración y desactivación de catalizadores, etc. En [13] se detalla aspectos químicos.

Hay que tener presente que ahora están comprometidas 3 etapas en serie: difusión del gas a través de la película externa, difusión a través de la capa sólida inerte, reacción química superficial en el frente de reacción o frontera libre. Naturalmente, según el particular sistema y condiciones operativas, algunas o alguna de las etapas antedichas pueden ser controlantes de la velocidad global del proceso o ser competitivas.

### Modelo Matemático [13]

Para una pastilla sólida de semiespesor  $R$  se puede escribir el siguiente modelo matemático descriptivo del proceso antes explicitado (suponiendo



que el sólido participa a concentración constante en la reacción superficial y la reacción es irreversible de primer orden respecto del gas reactivo):

$$(2.44) \quad \frac{\partial C_A}{\partial t} = De \nabla_x^2 C_A, \quad \Omega \equiv \{ (x,t): S(t) < x < R, 0 < t < T \}$$

$$(2.45) \quad De \frac{\partial C_A}{\partial x} (R,t) = k_D [C_{A0} - C_A(R,t)], \quad 0 < t < T$$

$$(2.46) \quad De \frac{\partial C_A}{\partial x} (S(t),t) = a k \rho_S C_A(S(t),t), \quad 0 < t < T$$

$$(2.47) \quad - De \frac{\partial C_A}{\partial x} (S(t),t) = a \rho_S \frac{dS}{dt}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.48) \quad S(0) = R$$

donde  $De$  es una difusividad efectiva,  $k_D$  un coeficiente de transferencia de materia.

En [13] puede verse un detallado análisis sobre la solución estacionaria de (2.44) - (2.48) incluyendo casos límites de diversos tipos de control.

Una generalización del modelo precedente sería la siguiente:

$$(2.49) \quad \frac{\partial C_A}{\partial t} = De \nabla_x^2 C_A \quad \text{en} \quad \Omega \equiv \{ (x,t): S(t) < x < R, 0 < t < T \}$$

$$(2.50) \quad \frac{\partial C_A}{\partial x} (R,t) = f(C_A(R,t),t) \quad \delta \quad C_A(R,t) = g(t), \quad 0 < t < T$$

$$(2.51) \quad \frac{\partial C_A}{\partial x} (S(t),t) = F(C_A(S(t),t)), \quad 0 < t < T$$

$$(2.52) \quad - De \frac{\partial C_A}{\partial x} (S(t),t) = a \rho_S \frac{dS}{dt}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.53) \quad S(0) = R$$

debiendo la función  $F$  satisfacer los requisitos fundamentales

$$(2.54) \quad F(0) = 0, \quad F(C_A(S(t), t)) > 0 \quad \text{si } C_A(S(t), t) > 0$$

La solución estacionaria de (2.49) - (2.53), en el caso en que  $f(C_A(R, t), t)$  tiene la forma dada por (2.45) y la ley cinética es del tipo  $F(C_A) = k C_A^n$  con  $n$  cualquier  $n^\circ$  real mayor que cero, se analiza en [20] y en [21] se analiza existencia y unicidad de solución.

### 2.3. Crecimiento de cristales a partir de una solución líquida sobresaturada [22] (cristales cilíndricos)

Dada una solución líquida sobresaturada, si con  $C_\infty$  se denota la concentración de sobresaturación del soluto,  $C_0$  la de equilibrio en interfase sólido precipitado-solución,  $C_S$  la concentración de soluto en el sólido, con  $C = C(x, t)$  la concentración de soluto, con  $S = S(t)$  la coordenada que ubica la frontera libre o separatriz de la fase sólida con la fase líquida, se puede escribir el siguiente modelo matemático descriptivo:

$$(2.55) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial C}{\partial x} \right], \quad \Omega \equiv \left\{ (x, t) : S(t) < x < +\infty, 0 < t < T \right\}$$

$$(2.56) \quad C(S(t), t) = C_0, \quad 0 < t < T$$

$$(2.57) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x, t) = C_\infty, \quad 0 < t < T$$

$$(2.58) \quad D \frac{\partial C}{\partial x}(S(t), t) = (C_S - C_0) \frac{dS}{dt}, \quad 0 < t < T$$

$$(2.59) \quad S(0) = 0$$

La solución puede verse por ejemplo en [23] y resulta

$$(2.60) \quad C(x, t) - C_\infty = \frac{(C_0 - C_\infty)}{E_i(-\lambda^2)} \cdot \left\{ E_i \left[ - \left( \frac{\lambda x}{S(t)} \right)^2 \right] \right\}$$

donde

$$- E_i(-y) = \int_y^\infty u^{-1} e^{-u} du$$

$$S(t) = 2 \lambda \sqrt{Dt}$$

$$\lambda^2 \exp(\lambda^2) E_i(-\lambda^2) + \frac{c_\infty - c_0}{c_s - c_0} = 0$$

En [24] y [25] se discute el crecimiento de cristales elipsoidales en cuanto a la preservación de forma durante el crecimiento y se dan referencias sobre cuestiones de estabilidad de la interfase.

## REFERENCIAS

- [1] J. Crank "The Mathematics of Diffusion", Clarendon Press, Oxford (1956).
- [2] A.V. Hill "The diffusion of oxygen and lactic acid through tissues". Proc. Royal Soc. London A, 104(1928), 39-96.
- [3] W. Jander "Z. Anorg. Allgen Chem", 1927, Vol. 163, p 1 y vol.166, p 31.
- [4] Q.T. Tsay, W.H. Ray, J. Szekely "The Modeling of Hematite Reduction with Hydrogen Plus Carbon Monoxide Mixtures" Part I. The Behavior of Single Pellets. AIChE Journal, Vol. 22, N° 6, 1976.
- [5] J. Szekely and J.W. Evans "Studies in Gas-Solid Reactions: Part I. A Structural Model for the Reaction of Porous Oxides with a Reducing Gas". Metallurgical Transactions, Vol.2, June 1971.
- [6] J. Szekely, J.W. Evans, H.Y. Sohn "Gas-Solid Reactions" Academic Press, 1976.
- [7] O. Levenspiel "Chemical Reaction Engineering", Wiley N.Y., 1962.
- [8] J.J. Carberry "Ingenieria de las Reacciones Químicas y Catalíticas"
- [9] G. Froment, K. Bischoff "Chemical Reactor Analysis and Design" J.Wiley Sons.
- [10] F. Habashi "Extractive Metallurgy", Vol.1, General Principles. Gordon and Breach N.Y., 1961.
- [11] P.A. Ramachandran and L.K. Doraiswamy "Modeling of Noncatalytic Gas-Solid Reaction", AIChE Journal Vol.28, N°6, 1982.
- [12] B.S. Sampath, R. Hughes "A Review of Mathematical Models in Single Particle Gas-Solid Noncatalytic Reactions". The Chemical Engineer, October, 1973.
- [13] C. Y. Wen "Noncatalytic Heterogeneous Solid Fluid Reaction Models", Vol.60 N° 9, Sep. 1968.
- [14] A. Fasano "Study of one-dimensional Mathematical Scheme for Sorption of Swelling Solvents in Polymers". Applied Nonlinear Functional Analysis.
- [15] M. Primicerio "Sorption of Swelling Solvents by Glassy Polymers". Mathematics in Industry.
- [16] E. Comparini and R. Ricci "On the Swelling of a Glassy Polymer in Contact with a well-stirred solvent". Math. Meth in the Appl. Sci. 7(1985).
- [17] A. Fasano, G.N. Meyer, M. Primicerio "On a problem in the polymer industry: Theoretical and Numerical Investigation of Swelling". SIAM. J. Math. Anal. Vol.17, N° 4, July, 1986.
- [18] A. Fasano, M. Primicerio "Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions" J. Math. Anal. Appl. 72 (1979). 247-273.
- [19] J. Cannon, J.C. Cavendish, A. Fasano; "A free boundary value problem related to the combustion of a solid". SIAM J, Appl. Math., Vol. 45, N°5, Oct. 1985.

- [20] L.T. Villa, O.D. Quiroga "Dependence upon the parameters of the moving interface in the shrinking core model for non-catalytic heterogeneous gas - solid reactions". En preparación.
- [21] D. Tarzia, L.T. Villa "Existencia y Unicidad de Solución en el Modelo de Frontera Libre de Men para Procesos no Catalíticos de Difusión-Reacción gas-sólido". En preparación.
- [22] R.L.Parker "Solid State Physics". Advances in Research and Applications. Vol. 25, 1970.
- [23] Carslaw and Jaeger "Conduction of heat in solids". Clarendon Press, Oxford (1959).
- [24] F.S. Ham, J. Phys. Chem. Solids. 6, 335(1958) y 30, 1518 (1959).
- [25] F.S. Ham. Quart. Appl. Math. 17, 137 (1959).

INIQUI (CONICET-UNSa),  
Fac. de Ciencias Tecnológicas,  
Buenos Aires 177,  
(4400) Salta, ARGENTINA.

EL METODO DE ALT  
PARA EL PROBLEMA DEL DIQUE POROSO

Néstor AGUILERA

### **1. Introducción**

Como es sabido, el problema del dique poroso es uno de los primeros ejemplos de problema de frontera libre que puede ser reducido a un problema de desigualdades (ó inecuaciones) variacionales, gracias a la transformación introducida por Baiocchi [B1], y que actualmente lleva su nombre. No es casualidad que poco tiempo después del trabajo de Baiocchi, una transformación similar fuera propuesta por Duvaut [D1] para reducir el problema de Stefan de una fase a un problema de desigualdades variacionales.

Nuestro interés es presentar una técnica introducida por Alt [A1] para el tratamiento numérico del problema del dique poroso, que puede utilizarse también para dar una demostración teórica de existencia de soluciones. La idea principal es la de utilizar dos incógnitas relacionadas entre sí: la presión y la función característica de la zona húmeda. Con modificaciones adecuadas, esta técnica puede ser utilizada para resolver numéricamente el problema de Stefan de dos fases (ver por ejemplo los trabajos de Nochetto a partir de [N1]), por lo que me ha parecido interesante contarles informalmente una versión sencilla, sin demostraciones, del mencionado trabajo de Alt.

### **2. Planteo matemático**

Comencemos por la geometría del problema del dique poroso, esquematizada en la figura 1.

El dique es denotado por  $\Omega$ , que suponemos acotado y de borde,  $\partial\Omega$ , suave.  $\Omega$  está rodeado por arriba y hacia los costados por aire, y llamamos  $S_0$  a esa parte del  $\partial\Omega$  que está en contacto con el aire. A la izquierda,  $\Omega$  linda con agua y la parte de superficie de  $\partial\Omega$  correspondiente se

llama  $S_+$ . Por debajo,  $\Omega$  está rodeado por una zona que suponemos, para simplificar, impermeable. Dentro del dique, tenemos a su vez dos zonas: una húmeda, denotada por  $A$ , por la cual fluye el agua, y otra seca.

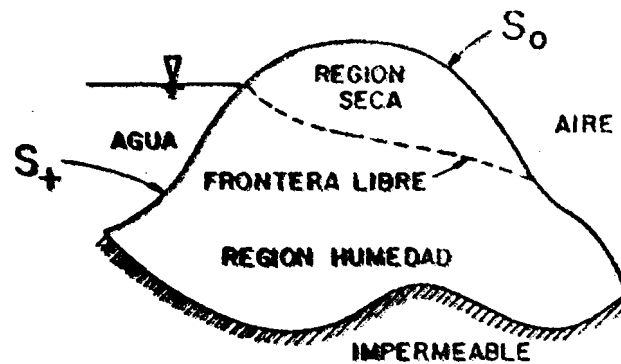


Fig. 1

El problema del dique poroso consiste justamente en encontrar las zonas húmedas y secas de  $\Omega$ , y la frontera que las separa, que como forma parte de las incógnitas, se llama frontera libre.

Para plantear matemáticamente el problema, vamos a suponer que es válida la ley de D'Arcy:

Si suponemos que la densidad del agua es uno,  $u$  es la presión del agua dentro de  $\Omega$  (en la parte húmeda),  $h$  la altura, y  $a$  es la matriz de permeabilidad, entonces la velocidad  $v$  satisface

$$v = -a \nabla (u + h)$$

A esta ecuación dada por la ley de D'Arcy debemos agregar la de continuidad (o de conservación):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Para nuestra presentación, vamos a suponer que la matriz  $\mathbf{a}$  es uniformemente elíptica y diagonal, es decir, el medio es isotrópico pero vamos a permitirle que sea inhomogéneo. Vamos a suponer también que la presión está normalizada, de modo que la presión capilar en el medio poroso es cero. Si  $\mathbf{v}$  es la normal exterior en  $\partial\Omega$ , imponemos las siguientes condiciones de borde:

$$u = u_0 \quad \text{en } S_+,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega - (S_0 \cup S_+),$$

$$u \leq u_0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad \text{y} \quad (u - u_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } S_0.$$

Podemos reescribir este problema en forma variacional introduciendo el espacio

$$M(u_0) = \{ v \in H^{1,2}(\Omega) : v = u_0 \text{ en } S_+, v \leq u_0 \text{ en } S_0 \}$$

y una función  $\chi$ , que será incógnita juntamente con la función  $u$ , de modo que el problema es encontrar las funciones  $u$  y  $\chi$  tales que

$$u \in M(u_0), \quad u \geq 0,$$

$$\chi \in L^\infty(\Omega), \quad 0 \leq \chi \leq 1 \text{ en } \{u > 0\}$$

y satisfacen la desigualdad

$$\int_{\Omega} \nabla(v-u) \mathbf{a} (\nabla u + \chi \mathbf{e}) \geq 0 \quad (2.1)$$

para toda  $v \in M(u_0)$ , donde  $\mathbf{e}$  es el vector  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ .



Formalmente tenemos que  $u$  y  $\gamma$  satisfacen las condiciones mencionadas anteriormente, excepto que la ecuación proveniente de la ley de D'Arcy ahora es

$$\mathbf{v} = -a (\nabla u + \gamma \mathbf{e})$$

### 3. El problema discreto

Vamos a tratar de encontrar aproximaciones discretas al problema planteado, basándonos en el método de elementos finitos. Suponemos que hay una sucesión de números positivos  $h$  que convergen hacia 0. Estos  $h$  van a ser utilizados básicamente como parámetros.

Asociados a cada  $h$  tenemos:

1) un conjunto finito de índices  $P_h$ .

2) un conjunto  $\Omega_h$  abierto acotado y de frontera Lipschitz.

3) Funciones  $\omega_h^i \in H^{1,2}(\Omega_h) \cap C^0(\bar{\Omega}_h)$  para cada  $i \in P_h$  que satisfacen

$$i) \omega_h^i \geq 0, \sum \omega_h^i = 1 \text{ en } \Omega_h$$

$$ii) \text{ Existen puntos (nodos) } x_h^i \in \bar{\Omega}_h \text{ tales que } \omega_h^i(x_h^i) = 1$$

4) Funciones características  $\chi_h^i \in L^\infty(\Omega_h)$  para cada  $i \in P_h$  con  $\sum_i \chi_h^i = 1$  en  $\Omega_h$

5) Espacios de dimensión finita:

$$H_h = \left\{ v = \sum v_i \omega_h^i : v_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_h = \left\{ \gamma = \sum \gamma_i \chi_h^i : \gamma_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Está claro que los espacios  $H_h$  y  $L_h$  son aproximaciones de los espacios  $H^{1,2}$  y  $L^\infty$

respectivamente.

Las condiciones en el borde son introducidas mediante dos subconjuntos de  $P_h$ ,  $P_{0h}$  y  $P_{+h}$ , que representan de alguna manera a los nodos en  $S_0$  y  $S_+$ , respectivamente. El dato en el borde para cada  $h$  será  $u_{0h} \in H_h$ , con  $u_{0h} \geq 0$  para cada  $i \in P_h$ . Suponemos que la correspondiente matriz de permeabilidad discreta  $a_h$  está acotada y es definida positiva uniformemente en  $h$ . El espacio de funciones admisibles en el caso discreto es

$$M_h(u_{0h}) = \{ v \in H_h : v^i = u_{0h}, i \in P_{+h} \text{ y } v^i \leq u_{0h}, i \in S_0 \}$$

Definimos ahora los coeficientes  $a_h^{ij}$  y  $e_h^{ij}$  para  $i, j \in P_h$  por

$$a_h^{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla \omega_h^i a_h \nabla \omega_h^j$$

$$e_h^{ij} = \int_{\Omega_h} \chi_h^i \nabla \omega_h^j a_h e$$

(si bien los coeficientes  $a_h^{ij}$  forman una matriz, no hay que confundirlos con los de la matriz  $a_h$ ; por ejemplo, las dimensiones son totalmente distintas).

Estamos en condiciones ahora de plantear el problema discreto, cuya solución es nuestro objetivo principal:

**Problema:** Encontrar funciones  $u_h \in M_h(u_{0h})$  y  $\gamma_h \in L_h$  tales que

$$0 \leq \gamma_h \leq 1 \quad \text{con} \quad \gamma_h = 1 \quad \text{si} \quad u_h > 0$$

y

$$\int_{\Omega_h} \nabla(v-u_h) a_h \nabla(u_h + \tau_h e) \geq 0$$

para todo  $v \in M_h(u_{0h})$ .

Para resolver este problema, Alt ha desarrollado un algoritmo de tipo monótono para resolver la desigualdad (no lineal, discreta) resultante. Para que todo salga bien es necesario imponer algunas condiciones a los elementos finitos. Empezamos por suponer que:

Para todo  $i \in P_h$ ,  $a_h^{ii} > 0$  y  $e_h^{ii} \geq 0$ , y si  $i, j \in P_h$ ,  $i \neq j$ ,  $a_h^{ij} \leq 0$  y  $e_h^{ij} \leq 0$

Pasando ahora a la descripción del algoritmo, puesto que los espacios  $H_h$  y  $L_h$  son de dimensión finita, podemos poner

$$u_h = \sum_i u_h^i \omega_h^i, \quad \tau_h = \sum_i \tau_h^i \chi_h^i, \quad v_h = \sum_i v_h^i \omega_h^i$$

para obtener que el problema es equivalente a encontrar coeficientes  $u_h^i$  y  $\tau_h^i$  tales que para todo  $i \in P_h$ ,

$$\sum a_h^{ij} u_h^j + e_h^{ij} \tau_h^j \begin{cases} = 0 \\ \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

valiendo la igualdad si  $i \in P_h - (P_{0h} \cup P_{+h})$  ó  $i \in P_{0h}$  es tal que  $u_h^i < u_{0h}$ , y la desigualdad si  $i \in P_{0h}$  y  $u_h^i = u_{0h}$ .

Dado que  $\tau_h^i = 1$  cuando  $u_h^i > 0$ , es natural reemplazar las incógnitas  $u$  y  $\tau$  por la nueva variable  $w = w_h^i$  definido por

$$w_h^i = u_h^i + \gamma_h^i$$

por lo que  $w_h^i \geq 0$  y podemos recuperar  $u$  y  $\gamma$  a partir de  $w$  usando las fórmulas

$$u_h^i = \max \{ w_h^i, 0 \} \quad \text{y} \quad \gamma_h^i = \min \{ w_h^i, 1 \}$$

Si en la ecuación 3.1 pesamos los términos de la suma donde  $j > i$ , y reemplazando por  $w$ , obtenemos en el miembro derecho el término

$$C_h^i(w) = - \sum_{j \neq i} [ a_h^{ij} \max \{ w_h^j - 1, 0 \} + e_h^{ij} \min \{ w_h^j, 0 \} ]$$

por lo que 3.1 se puede escribir como

$$a_h^{ii} \max \{ w_h^i - 1, 0 \} + e_h^{ii} \min \{ w_h^i, 0 \} = C_h^i(w)$$

transformándose la igualdad en desigualdad dependiendo de  $i$ .

Ahora los  $C_h^i$  son no-decrecientes con  $w$ , por lo que podemos poner la última ecuación como

$$w_h^i = B_h^i(w)$$

donde

$$B_h^i(w) = \begin{cases} (a_h^{ii})^{-1} (C_h^i(w) - e_h^{ii}) + 1 & \text{si } C_h^i(w) \geq e_h^{ii} \\ (e_h^{ii})^{-1} C_h^i(w) & \text{si } 0 \leq C_h^i(w) < e_h^{ii} \end{cases}$$

si pedimos que

$$\gamma_h^i = 1 \quad \text{cuando} \quad e_h^{ii} = 0$$

Por lo tanto bastará encontrar  $w$  tal que

$$w_h^i = B_h^i(w) \quad \text{si } i \in P_h - (P_{0h} \cup P_{+h}),$$

$$w_h^i = u_{0h} + 1 \quad \text{si } i \in P_{+h},$$

$$w_h^i = \min \{B_h^i(w), u_{0h} + 1\} \quad \text{si } i \in P_{0h}$$

condiciones que escribimos como

$$w_h = A_h(w)$$

donde el operador no lineal  $A_h$  es monótono en el siguiente sentido: si  $w \geq \tilde{w}$  para todo  $i \in P_h$

entonces también:  $A_h^i(w) \geq A_h^i(\tilde{w})$  para todo  $i \in P_h$ . Bajo estas condiciones, un punto fijo de  $A$

puede construirse encontrando una "subsolución"  $w_0$ , es decir tal que  $A_h^i(w_0) \geq w_0$  para todo

$i$ , y una "supersolución"  $\tilde{w}_0$ , es decir tal que  $A_h^i(\tilde{w}_0) \leq \tilde{w}_0$  para todo  $i$ . En esas condiciones

podríamos definir

$$w_n = A_h(w_{n-1}) \quad \text{para } n \geq 1$$

y análogamente,

$$\tilde{w}_n = A_h(\tilde{w}_{n-1}) \quad \text{para } n \geq 1$$

y tendríamos

$$w_{n-1}^i \leq w_n^i \leq \tilde{w}_{n-1}^i \leq \tilde{w}_n^i \quad \text{para todo } n \text{ y todo } i.$$

Así quedarían definidos dos límites,  $w$  y  $\tilde{w}$ , con  $w \leq \tilde{w}$ , y ambos puntos fijos para  $A_h$ .

Observamos que las soluciones no son necesariamente únicas, propiedad que se mantiene en el

caso continuo. Tenemos que construir ahora una subsolución  $w_0$  y una supersolución  $\tilde{w}_0$  para  $A_h$ ,

tales que  $w_0 \leq \tilde{w}_0$  para todo  $i$ .

Observamos que  $w_0 = 0$  es una subsolución. Para construir una supersolución no-negativa

$\tilde{w}_0$ , definimos

$$C_h = \max_{i \in P_h} (x_h^i - e + u_{0h})$$

Y

$$\tilde{w}_h^i = C_h - x_h^i - e + 1$$

Como no es nuestra intención dar todos los detalles (para eso está el trabajo de Alt), vamos a creer que tomando este tipo de soluciones puede demostrarse usando estimaciones a-priori, bajo algunas condiciones más o menos usuales sobre los elementos finitos y los datos en el borde, que cuando  $h \rightarrow 0$ , las  $u_h$  y  $v_h$  obtenidas a partir de  $w_h$  (ó  $\tilde{w}_h$ ) convergen a una solución de la desigualdad variacional 2.1.

Para finalizar, vamos a describir una familia de elementos finitos en dos dimensiones que satisfacen las condiciones sobre los coeficientes  $a_h^{ij}$  y  $e_h^{ij}$ , sin las cuales el operador  $A_h$  no es necesariamente monótono (en el sentido que estamos considerando).

#### 4. Elementos finitos en dos dimensiones

Como anticipamos, damos ahora un ejemplo de familia de elementos finitos en dos dimensiones. Recordemos las condiciones requeridas sobre los coeficientes  $a_h^{ij}$  y  $e_h^{ij}$ :

$$\text{Para todo } i \in P_h, a_h^{ii} > 0 \text{ y } e_h^{ii} \geq 0, \text{ y si } i, j \in P_h, i \neq j, a_h^{ij} \leq 0 \text{ y } e_h^{ij} \leq 0$$

Nuestro ejemplo (uno de los tantos en el trabajo de Alt) es el que se observa en la figura 2.

Tomando como base un hexágono regular de lado  $h$ , consideramos como función base asociada, la función continua  $\omega_h$  que vale 1 en el centro, es lineal en cada uno de los triángulos que forman el hexágono y se anula fuera del éste, en particular sobre el borde externo, formando una especie de pirámide en tres dimensiones. Recubrimos el conjunto  $\Omega$  lo mejor posible con estos hexágonos, formando el conjunto  $\Omega_h$ . Por supuesto, como pedimos que

$$\sum \omega_h^j = 1$$

habrá que tener cuidado en los bordes.

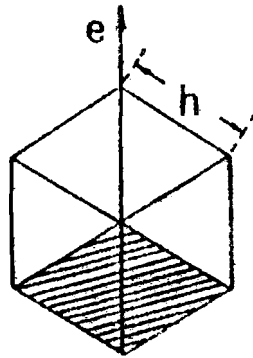


Fig. 2

Por ejemplo, si pensamos nada más que en los nodos en el interior, en el caso en que  $a_h$  es la matriz identidad los coeficientes

$$a_h^{ij} = \int_{\Omega} \nabla \omega_h^i a_h \nabla \omega_h^j$$

tomarán los valores

$$a_h^{ij} = \begin{cases} 2\sqrt{3} & \text{si } i=j \\ -\sqrt{3}/3 & \text{si } i \neq j \text{ pero son vecinos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora tenemos que definir las funciones  $\chi_h^i$ . Siempre referido a la figura 2, si  $x_h^i$  es el nodo en el centro del hexágono, tomamos a  $\chi_h^i$  como la función característica del rombo sombreado. Nuevamente habremos de tener cuidado con los bordes, eventualmente esa parte puede no existir para algún nodo  $x_h^i$ , ó existir sólo la mitad.

Siguiendo con el ejemplo de los nodos en el interior y en el caso en que  $a_h$  es la matriz

identidad, los coeficientes

$$e_h^{ij} = \int_{\Omega} \chi_h^i \nabla \omega_h^j a_h \cdot e$$

tomarán los valores

$$e_h^{ij} = \begin{cases} \sqrt{3}h/2 & \text{si } i = j \\ -\sqrt{3}h/2 & \text{si } x_h^i \text{ es el nodo debajo de } x_h^j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El lector que haya hecho los cálculos comprobará que una pequeña deformación de los elementos finitos puede cambiar las propiedades requeridas. Por supuesto, esto no quiere decir que necesariamente el método no funcionará, pero sí que el análisis teórico se hará más complicado. En otras palabras, si por alguna razón se desea implementar prácticamente el método, los elementos podrán cambiarse un poco, pero teniendo en cuenta que puede no haber una teoría detrás que garantice los resultados. Estas cuestiones están de alguna manera relacionadas con el llamado "principio del máximo discreto", que se utiliza muchas veces en la teoría de análisis numérico (de ecuaciones elípticas y parabólicas) y que hacen la teoría un tanto "dura" desde el punto de vista de las aplicaciones, pero que, como en el caso continuo son muy convenientes para la teoría.

## 5. Bibliografía

- [A1] H. W. Alt: Numerical solution of steady-state porous flow free boundary problems. *Numer. Math.* 36, 73-98 (1980).
- [B1] C. Baiocchi: Su un problema a frontiera libera connesso a questioni di idraulica. *Ann. Mat. Pura Appl.* 92, 107-127 (1972).
- [D1] G. Duvaud: Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré). *C. R. Acad. Sci. Paris* 276, 1461-1463 (1973).
- [N1] R. H. Nochetto: Análisis numérico del problema de Stefan multidimensional a dos



fases por el método de regularización. *Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires* (1983).

PENA-INTEC,  
Güemes 3450,  
(3000) Santa Fe, Argentina.

# LAS INECUACIONES VARIACIONALES ELIPTICAS

Graciela G. Garguichevich

## I INTRODUCCION

En este trabajo pretendemos presentar una introducción a la teoría de las inecuaciones variacionales estacionarias o elípticas. Su origen está estrechamente ligado al cálculo de variaciones, aunque su formulación abstracta permite desvincularla de los problemas de minimización de funcionales e incluir otro tipo de problemas, en particular los llamados *Problemas de Frontera Libre* entre los que se cuenta el problema de Stefan, objeto de este Seminario.

Una introducción al tema puede encontrarse en el cuaderno N°1 de esta misma colección [8] y también en los números 6 y 9 ( [7] , [3] ) ( el último referido al tratamiento numérico de las mismas ). Para un análisis más completo se puede recurrir a los libros de D. Kinderlehrer - G Stampacchia [5] , C. Baiocchi - A Capelo [1], G Duvaut - J. L. Lions [2] , D. A. Tarzia [9], R. Glowinski - J. L. Lions - R. Tremolières [4], como también a la bibliografía sugerida en los mismos.

Comenzaremos por introducir algunos ejemplos que nos permitirán ir comprendiendo la naturaleza de las inecuaciones variacionales y de los problemas de frontera libre asociados.

### Ejemplo 1.

Sea  $f \in C^1(a,b)$ , real, entonces existe al menos un punto  $\bar{x} \in (a,b)$  tal que:

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in (a,b)} f(x).$$

Si se desea caracterizar, de algún modo, un punto minimal  $\bar{x}$ , observamos que solo puede presentarse alguno de los tres casos siguientes:

$$1^\circ) \bar{x} \in (a,b) \Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$$

$$2^\circ) \bar{x} = a \Rightarrow f'(\bar{x}) \geq 0$$

$$3^\circ) \bar{x} = b \Rightarrow f'(\bar{x}) \leq 0$$

Las tres situaciones se resumen en la siguiente inecuación que denominaremos *Inecuación Variacional*

$$(1) \quad \begin{cases} \tilde{x} \in [a,b] \\ f'(\tilde{x})(x-\tilde{x}) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \end{cases}$$

Observamos que si  $\tilde{x}$  es solución de la (1) no es necesariamente un punto de mínimo de  $f$ , pero todo punto que minimice  $f$  debe ser solución de la inecuación variacional.

### Ejemplo 2.

Sea  $K$  convexo, cerrado y no vacío de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(K)$  real. Se desea nuevamente caracterizar  $\tilde{x} \in K$  tal que  $f(\tilde{x}) = \min_{x \in K} f(x)$ .

Si existe un punto minimal  $\tilde{x}$  (esto es inmediato si  $K$  es acotado), entonces por ser  $K$  convexo,  $\forall x \in K$  el segmento  $(1-t)\tilde{x} + tx = \tilde{x} + t(x-\tilde{x}) \subset K$ ,  $t \in [0,1]$  y la función  $\phi \in C^1[0,1]$  definida por

$$\phi(t) = f(\tilde{x} + t(x-\tilde{x})) \quad t \in [0,1]$$

asume su mínimo en  $t=0$ .

Luego, debe verificarse que  $\phi'(0) = (\nabla f(\tilde{x}), x-\tilde{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K$

Es decir que, si  $\tilde{x}$  es un punto minimal de  $f$  en  $K$ , debe satisfacer la inecuación variacional:

$$(2) \quad \begin{cases} \tilde{x} \in K \\ (\nabla f(\tilde{x}), x-\tilde{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K \end{cases}$$

### Ejemplo 3.

Proyección sobre un conjunto convexo y cerrado en un espacio de Hilbert.

#### Lema 1

Sea  $V$  un espacio de Hilbert,  $K \subset V$ ,  $K$  convexo, cerrado y no vacío. Si  $x \in V$ , entonces existe y es único  $u \in K$  tal que:

$$\|u-x\| = \min_{v \in K} \|v-x\|$$

Tal  $u$  se denomina la proyección ortogonal de  $x$  sobre  $K$  y se simboliza

$$u = P_K x$$

Dem:

Sea  $0 \leq d = \inf_{v \in K} \|v - x\|$ , luego existe una sucesión minimizante  $\{v_k\}$  tal que:

$$d^2 \leq \|v_k - x\|^2 \leq d^2 + 1/k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Esta sucesión es de Cauchy ya que, por la ley del paralelogramo

$$\begin{aligned} \|v_k - v_h\|^2 &= 2\|x - v_k\|^2 + 2\|x - v_h\|^2 - 4\|x - 1/2(v_k + v_h)\|^2 \leq 2(d^2 + 1/k) + 2(d^2 + 1/h) - 4d^2 = \\ &= 1/k + 1/h \end{aligned}$$

o sea que  $\|v_k - v_h\| \rightarrow 0$  si  $h, k \rightarrow \infty$ .

Por ser  $V$  un espacio completo existe  $u \in V$  tal que  $v_k \rightarrow u$  en  $V$  y como  $\{v_k\} \subset K$  y  $K$  es cerrado, resulta  $u \in K$  y

$$d \leq \|u - x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - x\| = d$$

Además  $u$  es único ya que si  $v \in K$  y  $\|v - x\| = d$  entonces

$$0 \leq \|v - u\|^2 = 2\|x - v\|^2 + 2\|x - u\|^2 - 4\|x - 1/2(v + u)\|^2 \leq 0 \quad \blacksquare$$

Deseamos ahora caracterizar la proyección ortogonal  $u$  de  $x$  sobre  $K$  y como es la que minimiza la distancia a  $x$ , siguiendo la idea del ejemplo 2, por ser  $K$  convexo,  $\forall v \in K$  el segmento  $(1-t)u + tv = u + t(v-u) \subset K \quad t \in [0, 1]$ , y la función  $\phi$  definida por

$$\phi(t) = \|x - u - t(v-u)\|^2 = \|x - u\|^2 - 2t(x-u, v-u) + t^2\|v-u\|^2$$

asume su mínimo en  $t=0$ , por lo que debe ser

$$\phi'(0) = -2(x-u, v-u) \geq 0$$

Es decir que, si  $u = P_K x$ , debe verificarse la inecuación variacional

$$(3) \quad \begin{cases} u \in K \\ (x-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Pero además, si  $u$  es solución de (3):

$$(x-u, v-u) = (x-u, (v-x) + (x-u)) = \|x-u\|^2 + (x-u, v-x) \leq 0$$

$$\|x-u\|^2 \leq (x-u, x-v) \leq \|x-u\| \|x-v\|$$

$$\|x-u\| \leq \|x-v\| \quad \forall v \in K \quad \text{y resulta } u = P_K x.$$

O sea que, a diferencia de lo que ocurre en los ejemplos 1 y 2,  $u = P_K x$  si y solo si  $u$  es solución de (3).

## Ejemplo 4

El problema del obstáculo.

Sea  $\Omega$  acotado en  $\mathbb{R}^n$  y  $\partial\Omega$  su frontera;

$\alpha: \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x) \geq 0$  y  $\alpha(x) \leq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$ ;

$$K = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) / v(x) \geq \alpha(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad v(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega\}$$

Se desea caracterizar (si existe)  $u \in K$  tal que:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \min_{v \in K} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Observando que  $K$  es un convexo y razonando como en los ejemplos anteriores, si  $u \in K$  es la solución del problema de mínimo, entonces la función

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla(u + t(v-u))|^2 dx \quad t \in [0, 1]$$

asume su mínimo en  $t=0$  y esto implica  $\Phi'(0) \geq 0$ , lo que conduce a la inecuación variacional

$$(4) \quad \begin{cases} u \in K \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla(v-u) dx \geq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

La función  $u$  puede interpretarse como la posición de equilibrio de una membrana elástica homogénea que yace sobre un cuerpo  $\{(x, x_{n+1}) : x \in \Omega, x_{n+1} \leq \alpha(x)\}$  y está fija en  $\partial\Omega$ ; de aquí el nombre de *Problema del obstáculo*.

La solución  $u$  de (4) permite definir un conjunto denominado *de coincidencia*

$$I = \{x \in \Omega : u(x) = \alpha(x)\}$$

La presencia de este conjunto distingue a  $u$  de la solución de un problema de contorno y su frontera  $\partial I$  es la *frontera libre* del problema.

La existencia de solución para este ejemplo dependerá de las condiciones fijadas para  $\alpha$  y  $K$ . La no existencia de solución para un  $\alpha$  dado puede superarse redefiniendo el conjunto de funciones admisibles  $K$ .

En efecto, observemos que si se considera

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v - \alpha \geq 0 \text{ en } \Omega\}$$

con la norma en  $H_0^1(\Omega)$  definida por

$$M = \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

éste es un caso particular del ejemplo 3; la solución existe, es única y es  $u = P_K 0$ .

### Ejemplo 5

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $\Gamma = \partial\Omega$ , se desea determinar la temperatura estacionaria  $u$  que sea solución del siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \quad \text{y} \quad u \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Este es un problema de frontera libre ya que sobre  $\Gamma$  existen dos regiones donde se verifica  $u=0$  y  $\partial u/\partial n=0$  respectivamente, pero que se desconocen a priori.

Para hallar una formulación equivalente, consideremos

$$K = \{v \in H^1(\Omega) / v \geq 0\} \quad \text{sobre } \Gamma$$

que es un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Si multiplicamos la ecuación diferencial por  $v-u$ , con  $v \in K$ , e integramos sobre  $\Omega$ , obtenemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u (v-u) dx = \int_{\Omega} f(v-u) dx$$

y aplicando la fórmula de Green al primer miembro

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-u) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v-u) d\Gamma = \int_{\Omega} f(v-u) dx$$

Como, por las condiciones de contorno, debe ser:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v-u) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K$$

toda solución  $u$  del problema deberá verificar la inecuación variacional:

$$(5) \quad \begin{cases} u \in K \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-u) dx - \int_{\Omega} f(v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Puede probarse que, bajo algunas hipótesis de regularidad, la solución  $u$  de (5) es solución del problema planteado (1).

Los ejemplos 1, 2 y 3, si  $\dim V$  es finita, pueden resolverse con elementos del cálculo. En el caso del ejemplo 3 con  $\dim V = \infty$  y de los ejemplos 4 y 5, el problema es similar al del cálculo de variaciones y se resuelve en general por técnicas de aproximación numérica aplicada a la formulación variacional (ver [3], [4]).

## II. INECUACIONES VARIACIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT.

Sean:

$V$ : espacio de Hilbert

$K \subset V$ , convexo, cerrado y no vacío

$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  forma bilineal

$L : V \rightarrow \mathbb{R}$  operador lineal

Se denomina inecuación variacional al problema

$$(6) \quad \begin{cases} u \in K \\ a(u, v-u) \geq \langle L, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

Nos proponemos determinar hipótesis bajo las cuales pueda garantizarse la existencia y unicidad de solución de (6).

### Caso 1.

$$a(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_V$$

$L : V \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continuo (LEV).

En este caso, la existencia y unicidad de solución es una consecuencia directa del lema 1.

En efecto, por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento  $x_L \in V$  /  $\langle L, v \rangle = (x_L, v) \quad \forall v \in V$ , luego:

$$a(u, v-u) = (u, v-u) \geq (x_L, v-u) \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_L - u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K \quad \Leftrightarrow \quad u = P_K x_L$$

## Caso 2.

Sean:

(7)  $L \in V'$

(8)  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilineal y continua :  
 $\exists M > 0 / |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in V$

(9)  $a$  es coercitiva o  $V$ -elíptica :  
 $\exists \alpha > 0 / a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V$

(10)  $a$  simétrica :  
 $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in V.$

## Lema 2.

Bajo las hipótesis (7), (8), (9) y (10) existe una única solución de (6)

Dem:

Es trivial verificar que bajo las hipótesis (8), (9) y (10) la forma bilineal  $a$  define en  $V$  un nuevo producto escalar  $((u,v)) = a(u,v)$  y la norma  $\|v\| = \sqrt{a(v,v)}$  es equivalente a la norma de  $V$  ya que resulta

$$\alpha \|v\|^2 \leq ((v,v)) \leq M \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Luego, por el teorema de representación de Riesz, existe un único

$$\tilde{x}_L \in V / \langle f, v \rangle = ((\tilde{x}_L, v)) \quad \forall v \in V$$

y se tiene, como en el caso 1:

$$a(u, v-u) = ((u, v-u)) \geq ((\tilde{x}_L, v-u)) \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow$$

$$((u - \tilde{x}_L, v-u)) \leq 0 \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad u = \tilde{P}_K \tilde{x}_L,$$

donde  $\tilde{P}_K$  es el operador de proyección  $\tilde{P}_K : V \rightarrow V$  con respecto al producto escalar  $(( , ))$ , y la tesis sigue del lema 1 ■

Veamos ahora otra caracterización de la solución  $u$  de (6) vinculada a los ejemplos vistos en el párrafo anterior.

## Lema 3.

Bajo las hipótesis (7), (8), (9) y (10),  $u$  es solución de (6) si y solo si es solución del problema de mínimo:

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v), \quad \text{donde } J(v) = a(v,v) - 2\langle L, v \rangle.$$



Dem:

$$\begin{aligned}
 u \text{ solución de (6)} &\Leftrightarrow u = \tilde{P}_K \tilde{x}_L \Leftrightarrow \|u - \tilde{x}_L\| = \min_{v \in K} \|v - x_L\| \\
 &\Leftrightarrow \|v - x_L\|^2 - \|u - x_L\|^2 = \langle (v,v) \rangle - 2\langle (x_L,v) \rangle + 2\langle (x_L,u) \rangle - \langle (u,u) \rangle = \\
 &= a(v,v) - 2\langle f,v \rangle - a(u,u) + 2\langle f,u \rangle = J(v) - J(u) \geq 0 \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Observación.**

Esta última caracterización de  $u$ , al igual que el estudio de la inecuación variacional a través de su operador de proyección, son una consecuencia de la simetría de la forma bilineal  $a$ , que bajo esta hipótesis resulta un producto escalar en  $V$ . Esto no será posible si  $a$  no es simétrica y se tendrán entonces inecuaciones variacionales que no se corresponden con un problema de mínimo.

**Caso 3.**

Estudiaremos ahora el caso general donde la forma bilineal  $a$  no es necesariamente simétrica.

**Lema 4. (Teorema de Lions-Stampachia) [6]**

Bajo las hipótesis (7), (8) y (9) existe una única solución de (6).

Dem:

**Unicidad.** Sean  $u_1, u_2 \in K$  dos soluciones de (6), entonces resulta:

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq L(u_2 - u_1)$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq L(u_1 - u_2)$$

y sumando

$$a(u_2 - u_1, u_1 - u_2) \geq 0$$

luego

$$0 \leq \alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

de donde  $u_1 = u_2$ 

**Existencia.** Apelando nuevamente al teorema de representación de Riesz, se tiene:

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} i) \exists ! x_L \in V / \langle L, v \rangle = \langle x_L, v \rangle \quad \forall v \in V \\ ii) \exists ! A : V \rightarrow V \text{ lineal y continuo} / a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in V \end{array} \right.$$

Luego  $u$  es solución de (6)  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (Au, v-u) \geq (x_L, v-u) \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho (Au - x_L, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K, \rho > 0 \\ u \in K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((u - \rho(Au - x_L)) - u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K, \rho > 0 \\ u \in K \end{cases}$$

$$(12) \Leftrightarrow u = P_K (u - \rho(Au - x_L)), \rho > 0$$

El problema (12) caracteriza a  $u$  como punto fijo del operador

$$T_\rho : V \rightarrow K / T_\rho(v) = P_K(v - \rho(Av - x_L)), \rho > 0.$$

Bastará probar entonces, para algún  $\rho > 0$ , la existencia de un punto fijo de  $T_\rho$  y para ello es suficiente mostrar que existe  $\rho > 0$  tal que  $T_\rho$  resulta una contracción.

En efecto, por ser  $P_K$  un operador no expansivo, se tiene:

$$\begin{aligned} \|T(v_1) - T(v_2)\|^2 &= \|P_K(v_1 - \rho(Av_1 - x_L)) - P_K(v_2 - \rho(Av_2 - x_L))\|^2 \leq \\ &\leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|^2 = \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) + \\ &+ \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

o sea

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|^2 \leq C(\rho) \|v_1 - v_2\|^2$$

$$C(\rho) = (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2)$$

y eligiendo  $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$  resulta  $0 < C(\rho) < 1$ , luego  $T_\rho$  es una contracción y queda probada la existencia de  $u$  solución de (12) y de su equivalente (6) ■

#### Observación

Si  $K=V$ , entonces es fácil mostrar que (6) es equivalente a la ecuación variacional

$$(13) \quad \begin{cases} a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

y el lema 4 para (13) no es otro que el conocido Teorema de Lax Milgram.

Además, usando la caracterización (11) resulta (13) equivalente a:

$$\begin{cases} Au = x_L \in V \\ u \in V \end{cases}$$

que bajo las hipótesis (7), (8) y (9) nos dice que  $A$  es biyectiva, resultando  $\|A^{-1}\| \leq 1/\alpha$ .

Hemos demostrado así, bajo las hipótesis dadas, la existencia y unicidad de solución de la inecuación variacional (6). Para los problemas de aproximación numérica de dicha solución y el estudio de regularidad de la misma, así como para un estudio más profundo nos remitimos a la bibliografía citada.

## BIBLIOGRAFIA

[1] C. BAIOCCHI — A. CAPELO: "Diseguazioni Variazionali e Quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1, 2, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[2] G. DUVAUT — J. L. LIONS: "Les inéquations en Mécanique et en Physique", Dunod, Paris (1972).

[3] R. GLOWINSKI: "Introducción a la aproximación de Inecuaciones Variacionales Elípticas", Cuaderno No 9 del Instituto de Matemática "Beppo Levi", U.N.R., Rosario (1978).

[4] R. GLOWINSKI — J. L. LIONS — R. TREMOIERES: "Analyse numérique des inéquations variationnelles", Tome 1, 2, Dunod, Paris (1976).

[5] D. KINDERLEHRER — G. STAMPACCHIA: "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[6] J. L. LIONS — G. STAMPACCHIA: "Variational inequalities", Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), pp. 493-519.

[7] E. ROFMAN: "Desigualdades variacionales, existencia y aproximación numérica de soluciones", en Cuaderno No 6 del Instituto de Matemática "Beppo Levi", U.N.R., Rosario (1974), pp. 59-86.

[8] G. STAMPACCHIA: "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales", Cuaderno No 1 del Instituto de Matemática "Beppo Levi", U.N.R., Rosario (1971).

[9] D. A. TARZIA: "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", CLAMI 5, CONICET, Argentina, Buenos Aires (1981).

## DISTRIBUCIONES

Y

## ESPACIOS DE SOBOLEV

Pedro Roberto MARANGUNIC

### 1. INTRODUCCION

Estas notas pretenden reflejar la exposición de igual título realizada el 13/10/86, en el marco del II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones.

La misma tuvo por objeto proporcionar una visión de nivel introductorio de estas teorías y sus aplicaciones, que fuese de utilidad durante el Seminario, pero fundamentalmente que sirviese de base a posteriores lecturas, haciéndolas más accesibles.

Dado que algunos asistentes no poseían un adecuado manejo previo de Teoría de la Medida y de la Integral de Lebesgue, se explicaron al comienzo (aunque en forma muy rápida) algunas nociones básicas para que los mismos pudiesen entender el tema específico de la charla. En esa etapa preliminar se abordaron, entre otras, las cuestiones siguientes:

- i) Significado de las expresiones "conjunto de medida nula" y "en casi todo punto".
- ii). La integral de Riemann se introduce trabajando con particiones en el dominio de la función considerada. Lebesgue percibió que allí estaba la causa de las dificultades con que se tropieza al trabajar con la integral en el sentido de Rie-

mann, y que en cambio convenía trabajar con adecuadas particiones en el codominio.

iii) Generalidades sobre la definición de integral en el sentido de Lebesgue, a partir del comentario anterior.

iv) Toda función integrable Riemann es también integrable Lebesgue, y las correspondientes integrales tienen el mismo valor. Es decir: la integral de Lebesgue es una extensión de la de Riemann.

v) Definición de los espacios de Lebesgue  $L^1(\Omega)$  y  $L^p(\Omega)$  para  $p \geq 1$  - Todos ellos son de Banach - Además  $L^2(\Omega)$  es de Hilbert.

vi) Funciones localmente integrables - Espacio  $L^1_{loc}(\Omega)$  - Comparación con los anteriores.

No desarrollaremos tales cuestiones en estas notas, limitándonos a recomendar que, en caso de necesidad, se recurra a la bibliografía sugerida en nuestro trabajo publicado en el No. 12 de la presente colección CUADERNOS.

En cambio ampliaremos lo referente al tema específico, aunque siempre dentro del nivel introductorio y el lenguaje intuitivo de la exposición antes mencionada.

Para entrar en materia, comencemos observando que cuando se cambia de un tema a otro en el Análisis Matemático o en sus aplicaciones, no siempre interesa el mismo conjunto de funciones. Dependiendo del problema particular que se esté considerando, a veces interesa trabajar con todas las funciones integrables, otras veces con las continuas, otras sólo con las derivables, etc. Incluso hay casos en que la índole del problema exige imponer condiciones muy restrictivas a las funciones (por ejemplo, que sean infinitamente derivables), por lo que el conjunto de funciones admisibles resulta más "pequeño". En otras ocasiones, por el contrario, no se impone ninguna condición. Vale decir: al pasar de un problema a otro suele variar el grado de generalidad de las fun-

ciones con las que se trabaja.

Pero hay casos en que aunque se trabaje con la máxima generalidad, el concepto clásico de función no alcanza. Para ilustrar esto, supongamos que se pretende determinar una distribución de masas en una recta mediante la densidad de tal distribución. Obviamente ninguna función "usual" va a poder describir la densidad si hay algunos puntos donde están concentradas masas positivas (es decir, si se mezclan el caso discreto con el continuo).

Otro ejemplo: supongamos que algún paso de la resolución de un problema nos exige derivar una cierta función. Ahora bien, si esta función no es derivable en uno o más puntos de su dominio, no se la va a poder derivar, si entendemos como su derivada una función "usual".

Se podría alegar que en este segundo ejemplo lo natural sería restringir el conjunto de funciones admisibles (tomando por ejemplo las funciones derivables). Sin embargo, a veces esta restricción no es conveniente (por otras características del problema).

Todo esto motivó que se extendiera el concepto de función, introduciéndose lo que denominamos funciones generalizadas o distribuciones.

La manera de presentar las distribuciones que se verá en las secciones siguientes, nace aproximadamente en 1935 con un trabajo de S. L. Sobolev. Posteriormente L. Schwartz imprimió gran desarrollo a esta teoría, en la segunda mitad de la década siguiente.

Para finalizar esta Introducción, queremos recalcar lo que en cierto modo insinuamos a través de ejemplos: la aparición de las distribuciones no se debió a una caprichosa intención de generalizar por generalizar, sino a necesidades planteadas por problemas prácticos.

Más aún, como en otros ejemplos históricos, estos conceptos se usaron informalmente en la Física bastante antes de que la Matemática les diera una cuidadosa formalización.

## 2. ESPACIO DE FUNCIONES DE PRUEBA

En todo lo que sigue,  $\Omega$  indicará un subconjunto abierto y conexo (no necesariamente acotado) de  $\mathbb{R}^n$ , siendo  $n \geq 1$ . Consideraremos funciones definidas en  $\Omega$  y a valores reales (el caso complejo es análogo).

Comenzaremos definiendo el soporte de una función como el menor conjunto cerrado fuera del cual la función es idénticamente nula. Con lenguaje más preciso:

DEFINICION 1. Llamamos soporte de una función  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a la clausura del conjunto de puntos donde la función no es nula. En símbolos:

$$(1) \quad \text{sop } f = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}} .$$

Por ejemplo, si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } |x| \leq 2\pi \\ 0 & \text{si } |x| > 2\pi , \end{cases}$$

tenemos  $\text{sop } f = [-2\pi, 2\pi]$ . Nótese que en  $\text{sop } f$  existen cinco puntos (tres de ellos interiores) donde  $f$  se anula, lo que ilustra el significado de haber tomado la clausura en (1).

Siguiendo con el mismo ejemplo, nos planteamos el problema de ver cuán suave es la función en los puntos de empalme  $x = -2\pi$  y  $x = 2\pi$ . En tales puntos la función dada es continua pero no derivable. En cambio, en los intervalos abiertos  $(-\infty, -2\pi)$ ,  $(-2\pi, 2\pi)$  y  $(2\pi, \infty)$ , es infinitamente derivable. Es fácil percibir que cambiando levemente el ejemplo (sólo dentro del soporte) conseguiríamos mejorar el empalme, de modo que la función así modificada fuera también derivable en  $x = -2\pi$  y en  $x = 2\pi$ . Naturalmente, la derivada de la nueva función sería nula en ambos puntos. Pero entonces cabría preguntarse si en dichos puntos existe la derivada segunda, y luego la tercera, y así sucesivamente.

Consideremos otro ejemplo. Fijemos un natural  $k \geq 2$ , y sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} /$

$$g(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^k & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Tenemos que  $\text{sop } g = [-1, 1]$  y que  $g$  es infinitamente derivable en todo su dominio salvo  $x = -1$  y  $x = 1$ . En estos últimos puntos existen y son nulas las derivadas de  $g$  hasta el orden  $k-1$  inclusive, pero ya no existe la derivada  $k$ -ésima.

¿Habría alguna función de soporte  $[-1, 1]$ , que sea infinitamente derivable incluso en los extremos de su soporte? A primera vista, parecería demasiado exigir que todas las derivadas sean nulas en  $x = -1$  y en  $x = 1$ , y sin embargo la función no sea nula en  $(-1, 1)$ . De modo que la intuición nos tentaría a contestar que no existe ninguna función en tales condiciones. Pero la intuición a veces nos engaña: lo cierto es que tales funciones existen y, hablando informalmente, son muchas más de lo que desprevenidamente se pueda creer. Comencemos viendo una tal función, cuyo gráfico se asemeja a una campana:

$$\phi(x) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde la constante  $C_1$  usualmente se elige de modo que  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$ .

Una generalización de este ejemplo, pero ahora con soporte  $[-r, r]$ , donde  $r > 0$ , es

$$\phi_r(x) = \frac{C_1}{r} \phi\left(\frac{x}{r}\right),$$

siendo  $\phi$  y  $C_1$  las mismas de antes (se trata de campanas de diferente base y diferente altura, pero igual área). Más general aún es

$$\phi_{r, x_0}(x) = \frac{C_1}{r} \phi\left(\frac{x-x_0}{r}\right),$$

con soporte centrado en  $x_0$ .

Generalicemos a  $n$  dimensiones (sin excluir la posibilidad  $n=1$ ). La función

$$\phi(x) = \begin{cases} C_n e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$



con  $C_n$  elegida de modo que  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ , es infinitamente derivable en  $\mathbb{R}^n$  y su soporte es  $\overline{B_1(0)}$  (la bola cerrada de centro en el origen y radio 1). Este ejemplo se generaliza rápidamente a

$$(2) \quad \phi_{r, x_0}(x) = C_n \cdot r^{-n} \cdot \phi\left(\frac{x-x_0}{r}\right).$$

El factor  $r^{-n}$  se usa, como antes el factor  $\frac{1}{r}$ , para mantener igual a 1 la integral de la función. Aunque no lo veremos en estas notas, a veces este detalle tiene su importancia.

Pasemos a un  $\Omega$  genérico. Indicaremos con  $C^\infty(\Omega)$  el espacio de todas las funciones  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que sean infinitamente derivables en  $\Omega$  (el símbolo  $C^\infty$  alude a que tales funciones poseen en  $\Omega$  derivadas continuas de todos los órdenes). Para dichas funciones no se tiene asegurado que  $\text{sop } \phi$  sea un subconjunto de  $\Omega$  (la Def. 1 garantiza tan sólo que  $\text{sop } \phi \subset \overline{\Omega}$ ). En lo que sigue interesará el caso de las funciones infinitamente derivables en  $\Omega$  cuyo soporte es un subconjunto acotado de  $\Omega$  (en cuyo caso resultará compacto, pues en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , compacto equivale a cerrado y acotado). El correspondiente espacio de funciones, que introducimos a continuación, se denota indistintamente  $D(\Omega)$  o  $C_0^\infty(\Omega)$ . Usaremos la primera notación.

DEFINICION 2.  $D(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) / \text{sop } \phi \text{ es un subconjunto acotado de } \Omega\}$ . A este espacio se lo suele llamar espacio de las funciones de prueba.

Cualquiera sea el  $\Omega$ ,  $D(\Omega)$  resulta no vacío, ya que la función constantemente nula de dominio  $\Omega$  pertenece a  $D(\Omega)$ , pues es infinitamente derivable y su soporte es el conjunto vacío, que es compacto. Pero subsiste la duda, antes planteada, sobre si podrá haber muchas otras funciones en  $D(\Omega)$ . La respuesta es un duro golpe a nuestra intuición. Por de pronto, es inmediato probar que  $D(\Omega)$  es un espacio vectorial con las operaciones usuales, y que está contenido en  $L^p(\Omega)$ , cualquiera sea  $p \geq 1$ . Después, no es difícil probar que el espacio  $D(\Omega)$  es

infinito-dimensional. Y por otra parte, se demuestra que toda función de  $L^p(\Omega)$  se puede aproximar por funciones de  $D(\Omega)$ . Con más precisión:  
 PROPIEDAD 1.  $\forall p \geq 1$   $D(\Omega)$  es denso en  $L^p(\Omega)$ . Vale decir que dada  $f \in L^p(\Omega)$ , existe una sucesión  $\{\phi_k\} \subset D(\Omega)$  tal que

$$\|f - \phi_k\|_{L^p(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |f(x) - \phi_k(x)|^p dx \right]^{1/p} \longrightarrow 0.$$

La demostración (que sólo esbozaremos) de que  $D(\Omega)$  es infnito-dimensional, se basa en que la restricción a  $\Omega$  de la función  $\phi_{r,x_0}$  de (2) pertenece a  $D(\Omega)$  si tenemos la precaución de elegir  $x_0$  y  $r$  de modo que la bola cerrada  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . Pero por ser  $\Omega$  abierto, para cada  $x_0 \in \Omega$  existen infinitos valores de  $r > 0$  tales que  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . El resto de la demostración es hacer variar  $r$  o  $x_0$  para construir sistemas linealmente independientes en el espacio  $D(\Omega)$ .

La demostración de la Prop. 1 puede verse, por ejemplo, en Mijáilov [7], pág. 123 a 125, viendo antes las pág. 11 a 14. En verdad, allí está hecha para  $p=1$  y  $p=2$ , pero las ideas de fondo sirven para cualquier  $p \geq 1$ . Friedman [1] trabaja con  $p$  genérico en forma de ejercicio guiado, pág. 103 y 104.

No introduciremos en  $D(\Omega)$  una norma, pero sí una noción de convergencia de sucesiones:

DEFINICION 3. Sea  $\{\phi_k\}$  sucesión en  $D(\Omega)$  y sea  $\phi \in D(\Omega)$ . Diremos que la sucesión  $\{\phi_k\}$  converge a  $\phi$  en  $D(\Omega)$ , y lo simbolizaremos  $\phi_k \rightarrow \phi$  en  $D(\Omega)$ , si se cumplen

$$(3) \quad \exists K \text{ compacto } \subset \Omega / \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{sop } \phi_k \subset K, \text{ y}$$

$$(4) \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad D^\alpha \phi_k \longrightarrow D^\alpha \phi \text{ uniformemente en } \Omega.$$

En (4) debe entenderse que  $\alpha$  es un multi-índice de derivación ( $n$ -upla de enteros no negativos), y la notación  $D^\alpha f$  significa

$$\frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} f^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

El hecho de no haber presentado la noción de convergencia a través de una norma, no nos permite utilizar directamente las propiedades de las sucesiones convergentes en los espacios normados. Sin embargo, se puede mostrar que ellas subsisten en este caso; por ejemplo, es fácil probar que

$$(5) \quad \phi_k + \psi, \psi_k + \psi \Rightarrow \phi_k + \psi_k + \phi + \psi, \text{ y que}$$

$$(6) \quad \phi_k + \phi, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \phi_k + \lambda \phi.$$

### 3. DISTRIBUCIONES

DEFINICION 4. Una aplicación  $T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  recibe el nombre de distribución (o función generalizada) sobre  $\Omega$  si cumple las dos condiciones siguientes:

$$(7) \quad T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \phi, \psi \in D(\Omega);$$

$$(8) \quad \phi_k \rightarrow \phi \text{ en } D(\Omega) \Rightarrow T(\phi_k) \rightarrow T(\phi) \text{ en } \mathbb{R}.$$

La condición (7) expresa que  $T$  es lineal. A la condición (8) la denominaremos condición de continuidad (respecto de la convergencia de sucesiones introducida en la Def. 3).

Al espacio de todas las distribuciones sobre  $\Omega$  lo denotaremos  $D'(\Omega)$ . O sea:

$$D'(\Omega) = \{T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} / T \text{ es lineal y continua}\}.$$

Usando (5) y (6), se prueba fácilmente que  $D'(\Omega)$  es un espacio vectorial con las operaciones usuales, el cual está contenido en el espacio de todas las aplicaciones lineales de  $D(\Omega)$  en  $\mathbb{R}$ .

Si  $T \in D'(\Omega)$  y  $\phi \in D(\Omega)$ , para indicar el valor que  $T$  asume en  $\phi$  se usan indistintamente las notaciones  $T(\phi)$  y  $\langle T, \phi \rangle$ . Veamos ahora cómo el concepto de distribución generaliza al concepto de función. En realidad, no

generalizaremos a todas las funciones, pero sí a las funciones localmente integrables, condición que por ser tan poco restrictiva, es cumplida por la casi totalidad de las funciones que aparecen en las aplicaciones físicas y técnicas. Para indicar que una función  $f$  es localmente integrable, nos tomaremos la licencia de escribir  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , aunque no es la función  $f$  quien pertenece a  $L^1_{loc}(\Omega)$ , sino la clase de equivalencia de  $f$ , formada por todas las funciones que son iguales a  $f$  en casi todo punto de  $\Omega$ .

Intentamos asignar a cada  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  una  $T_f \in D'(\Omega)$ , de modo que esta asignación resulte inyectiva, con lo que  $L^1_{loc}(\Omega)$  se identificará a un subconjunto (que veremos que es subespacio) de  $D'(\Omega)$ . Dada una  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  proponemos

$$T_f : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad \forall \phi \in D(\Omega) \quad T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx.$$

Esta integral (de Lebesgue) siempre tiene sentido, pues  $\text{supp } \phi$  es compacto. De las propiedades de la integral de Lebesgue, surge de inmediato que esta  $T_f$  cumple las condiciones (7) y (8) de la Def. 4, por lo que es realmente una distribución sobre  $\Omega$ .

También se prueba fácilmente, usando las propiedades de la integral, que:

$$a) \quad \forall f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\Omega) \quad T_{f_1+f_2} = T_{f_1} + T_{f_2}$$

$$b) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall f \in L^1_{loc}(\Omega) \quad T_{cf} = c \cdot T_f$$

Si  $f=0$  en  $L^1_{loc}(\Omega)$  (lo que significa que  $f$  es nula en casi todo punto de  $\Omega$ ), obviamente resulta  $T_f=0$  (distribución nula). Veamos la recíproca: si para una  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  se tiene que  $T_f=0$ , se prueba, usando adecuadamente la Prop. 1, que

$$\int_K |f(x)|^2 dx = 0 \quad \forall K \text{ compacto } \subset \Omega,$$

lo que permite concluir que  $f=0$  en casi todo punto de  $\Omega$ . Vale decir:

$$T_f = 0 \text{ en } D'(\Omega) \implies f = 0 \text{ en } L^1_{\text{loc}}(\Omega),$$

lo que nos da la inyectividad esperada.

Los últimos resultados podemos resumirlos así:

PROPIEDAD 2. La correspondencia

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \longmapsto T_f \in D'(\Omega)$$

es lineal e inyectiva.

Después de esto  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  está en correspondencia con un subespacio de  $D'(\Omega)$ . De ahora en más, convendremos en mirar a  $f$  como si fuera igual a la correspondiente  $T_f$ . Luego de esta identificación, pasa a ser legítimo escribir  $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset D'(\Omega)$ .

Aparentemente, esto último ya nos dice que el concepto de distribución generaliza al concepto de función, pero en rigor falta eliminar la posibilidad de que ocurra que  $L^1_{\text{loc}}(\Omega) = D'(\Omega)$ , pues en tal caso las distribuciones serían esencialmente la misma cosa que las funciones localmente integrables. Para resolver esta cuestión traigamos a colación un ejemplo que se ubica, históricamente, entre las motivaciones que dieron lugar al nacimiento de esta teoría: dado  $x_0 \in \Omega$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \phi(x_0) \end{aligned}$$

es una distribución, que solemos llamar distribución de Dirac. En el caso  $x_0 = 0$ , escribimos simplemente  $\delta$ . Se demuestra que no existe ninguna  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  tal que  $T_f = \delta$  (y análogamente para  $\delta_{x_0}$ ), por lo que  $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \neq D'(\Omega)$ .

De ahora en más, dada una función localmente integrable, tendremos la doble posibilidad de mirarla como función (en el sentido usual) o como distribución, según convenga en cada caso particular.

#### 4. DERIVACION DE DISTRIBUCIONES

Sea  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Por ser  $f$  y  $f'$  continuas en  $\mathbb{R}$ , tenemos que ambas pertenecen a  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  y, en consecuencia, podemos hablar de las distribuciones  $T_f$  y  $T_{f'}$ . Usando integración por partes y la compacidad del soporte de cada  $\phi$ , tenemos que

$$\forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad T_{f'}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( \int_{-a}^a f(x)\phi(x)dx \right) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx = -T_f(\phi')$$

Nada más natural que aspirar a que la derivada distribucional de una función  $f$  coincida con la derivada clásica, al menos para  $f$  suficientemente regular. Nuestra expresión de deseos es, en símbolos,

$$(T_f)' = T_{f'} \quad ,$$

pero el primer miembro por ahora carece de un significado preciso. No obstante, las consideraciones precedentes nos motivan a dar la definición siguiente:

DEFINICION 5. Sea  $T \in D'(\Omega)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}$ . Llamamos derivada de  $T$ , y la denotamos  $T'$ , a la aplicación de  $D(\Omega)$  en  $\mathbb{R}$  dada por la expresión

$$\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle \quad \forall \phi \in D(\Omega) \quad .$$

Es inmediato ver que la aplicación  $T'$  así definida, satisface las condiciones (7) y (8) de la Def. 4, de modo que también es una distribución. Observamos, entonces, que toda distribución posee derivada en el campo de las distribuciones, mientras que en la teoría clásica una función podía no ser derivable.

Algunas propiedades elementales de la teoría clásica siguen valiendo, por ejemplo la relativa a la derivada de una combinación lineal:

$$(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S' \quad .$$

En forma natural se definen las derivadas de orden superior, y se obtiene que toda distribución es infinitamente derivable (se entiende en el campo de las distribuciones). Tenemos además:

$$\langle T^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle T, \phi^{(n)} \rangle .$$

Nótese que una función continua que no sea derivable en sentido clásico, es sin embargo infinitamente derivable en el sentido distribucional (también llamado sentido débil).

Pasemos a más dimensiones, y sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Si tomamos una  $f$  suficientemente regular y hacemos un trabajo semejante al hecho en una dimensión, obtendremos para las derivadas parciales de primer orden, la expresión

$$T \frac{\partial f}{\partial x_1} (\phi) = - T \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) .$$

Análogamente, obtendríamos fórmulas similares para las derivadas de mayor orden. A esta altura, es más que previsible la siguiente definición de  $D^\alpha T$ , siendo  $T \in D'(\Omega)$  y  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  cualquier  $n$ -upla de enteros no negativos:

DEFINICION 6.  $\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle$ , siendo  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  el orden del multi-índice  $\alpha$ .

También  $D^\alpha T$  resulta ser una distribución, y entonces  $T$  es infinitamente derivable, como en el caso unidimensional. Una consecuencia de esto es que siempre tiene sentido el Laplaciano de una distribución. Con cálculos sencillos se obtiene que:

$$\langle \Delta T, \phi \rangle = \langle T, \Delta \phi \rangle .$$

Como se ve, hemos elegido un modo de presentación del concepto de derivada de una distribución, que no se basa en la idea de límite de un cociente incremental. Este último camino es también perfectamente viable, aunque más difícil: exige introducir antes una noción de convergencia en  $D'(\Omega)$ . No lo trataremos acá.

Para fijar ideas, volvemos hasta nuevo aviso al caso unidimensional y a  $\Omega = \mathbb{R}$ . Consideremos el ejemplo de la función de Heaviside:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

que al ser seccionalmente continua, es localmente integrable. Pongamos en evidencia quién es  $(T_f)'$ .

$$\begin{aligned} \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad \langle (T_f)', \phi \rangle &= - \langle T_f, \phi' \rangle = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle \end{aligned}$$

$$\therefore (T_f)' = \delta$$

Con esto hemos exhibido una distribución que está en  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , cuya derivada no está en  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . De paso, observemos que la derivada clásica (o fuerte) de  $f$  no existe para  $x=0$ , pero existe y es nula para los restantes puntos, de modo que  $f'=0$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}$ , por lo que  $T_{f'}=0$ . Antes vimos  $(T_f)'=\delta$ , así que  $(T_f)' \neq T_{f'}$ .

Vemos entonces que hay funciones que no satisfacen la expresión de deseos del principio de esta Sección, la que en cambio es satisfecha, gracias a la fórmula usada en la Def. 5, por las funciones suficientemente regulares. Comenzamos a percibir que algunas cosas cambian en esta teoría respecto de la clásica. Por ejemplo (generalizando la situación de la función de Heaviside), si una  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que:

- i)  $f$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x_0$  (límites laterales diferentes);
- ii)  $f$  posee derivada clásica continua en  $(-\infty, x_0)$  y en  $(x_0, \infty)$ ; y
- iii)  $f'$  posee límites laterales finitos en  $x_0$  (condición que podría rebajarse bastante);

entonces se prueba fácilmente (con la misma técnica de integración por partes) que la derivada débil de  $f$  no coincide con la fuerte:

$(T_f)' \neq T_{f'}$ . Más precisamente,

$$(T_f)' = T_{f'} + s.\delta_{x_0},$$



siendo  $s=f(x_0^+) - f(x_0^-)$  (salto de  $f$  en  $x_0$ ).

Pero no debe tomarse esto como desalentador. Por el contrario, muchas propiedades valen como para las funciones usuales. Damos a continuación dos muestras de la "bondad" de esta teoría.

PROPIEDAD 3. Sea  $T \in D'(\mathbb{R}) / T' = 0$ . Entonces  $T$  es una constante, o sea

$$\exists C \in \mathbb{R} / \forall \phi \in D(\Omega) \quad \langle T, \phi \rangle = C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx .$$

Vemos así que las únicas distribuciones con derivada nula son las funciones constantes (o iguales en casi todo punto a una función constante).

PROPIEDAD 4. Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $\mathbb{R}$  y  $g$  es la derivada débil de  $f$ , es decir  $(T_f)' = T_g$ , entonces  $f$  es derivable en sentido clásico y  $f' = g$ .

Cuando en el enunciado anterior decimos que  $f$  y  $g$  son continuas en  $\mathbb{R}$ , debe entenderse que existen funciones continuas en  $\mathbb{R}$  que coinciden con ellas en casi todo punto.

Por razones de comodidad, estábamos hasta aquí en el caso unidimensional, y además  $\Omega$  era toda la recta. Ya es momento de levantar estas restricciones y de realizar los comentarios más importantes de estas notas, que nos conduzcan (o al menos nos acerquen) a la razón de ser de esta teoría.

Reparemos en el enunciado de la Prop. 4: a partir de alguna información sobre la derivada débil, se deducen ciertas propiedades (más aún, la existencia) de la derivada fuerte. Los resultados de este tipo son llamados resultados de regularidad.

Estos resultados se vinculan directamente con la posibilidad de aplicar las distribuciones a la resolución de innumerables problemas físicos y técnicos, en el sentido que se explica a continuación. La resolución de tales problemas conduce, por lo general, a la búsqueda de la solución fuerte de la correspondiente formulación o modelo matemático

(por ejemplo, una ecuación diferencial con ciertas condiciones iniciales o de contorno). Pero esto puede llegar a ser muy difícil, y en muchos casos conviene entonces trabajar con la formulación débil de dicho problema. Una vez que se tiene la solución débil, se presenta la cuestión de determinar cuán regular es para ver si es también solución fuerte del problema. Y aquí es donde juegan su parte los teoremas de regularidad.

En resumen: la idea fundamental es buscar soluciones débiles (o generalizadas), luego estudiar su regularidad, y tratar de concluir que tales soluciones débiles son también soluciones fuertes del problema. La idea también es aplicable a aquellos casos en que no interesa la determinación efectiva de la solución, sino tan sólo probar su existencia.

Para ejemplificar todo lo dicho, enunciaremos a continuación un teorema de regularidad usualmente llamado Lema de Weyl, que es muy sencillo en su enunciado y muy importante por sus aplicaciones.

PROPIEDAD 5.  $\Delta u = 0$  en  $D'(\Omega) \Rightarrow \Delta u = 0$  en sentido clásico.

En palabras: si una distribución  $u$  satisface la ecuación de Laplace en sentido débil, entonces esa distribución es una función y satisface la ecuación de Laplace en sentido fuerte (y en consecuencia es infinitamente derivable). Más breve: toda solución débil de la ecuación de Laplace es también solución fuerte de la misma.

En muchos problemas de regularidad, hay un paso intermedio que consiste en probar que una cierta distribución pertenece a  $L^2(\Omega)$ . Dado que  $L^2(\Omega)$  es subespacio de  $L^1_{loc}(\Omega)$  y por consiguiente de  $D'(\Omega)$ , interesa dar alguna forma de caracterizar a las distribuciones que pertenecen a  $L^2(\Omega)$ . La propiedad siguiente provee un criterio habitualmente cómodo de aplicar.

PROPIEDAD 6. Sea  $T \in D'(\Omega)$ . Entonces, existe  $f \in L^2(\Omega)$  tal que  $T = T_f$ , si y sólo si

$$\exists C > 0 / \forall \phi \in D(\Omega) \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

No es casual que el comentario anterior lo hayamos hecho para el caso  $p=2$ , pues éste es el caso de mayor interés. Sin embargo,  $\forall p \geq 1$   $L^p(\Omega)$  es subespacio de  $L^1_{loc}(\Omega)$ , de modo que dicho comentario se puede extender a  $p$  genérico. No estudiaremos en estas notas generalizaciones de la Prop. 6, pero aprovechamos para señalar su directa vinculación con la sección siguiente.

## 5. ESPACIOS DE SOBOLEV

A continuación presentamos los espacios de Sobolev, más precisamente una familia bi-paramétrica de espacios, donde los dos parámetros serán un número entero no negativo  $m$  y un número real  $p \geq 1$ . La notación  $D^\alpha$  significará derivada distribucional correspondiente al multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\Omega$  será un abierto y conexo en  $\mathbb{R}^n$ , y al ser la dimensión  $n \geq 1$ , no trataremos las derivadas ordinarias separadamente de las parciales.

DEFINICION 7.  $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}$

En palabras, una distribución está en  $W^{m,p}(\Omega)$  si ella y todas sus derivadas hasta el orden  $m$  inclusive, son funciones pertenecientes a  $L^p(\Omega)$ .

Es inmediato ver que, cualesquiera sean  $m \in \mathbb{N}_0$  y  $p \geq 1$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  es un espacio vectorial. En el caso  $m=0$  es obvio que  $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ . Si  $j \leq m$ , es trivial la inclusión

$$(9) \quad W^{m,p}(\Omega) \subset W^{j,p}(\Omega) .$$

Con  $C^m(\Omega)$  indicamos el conjunto de todas las funciones continuas en  $\Omega$  que poseen, como mínimo, derivadas continuas en  $\Omega$  hasta el orden  $m$  inclusive. Dichas derivadas acá se pueden entender indistintamente en el sentido habitual o en el distribucional, dado que por ser continuas coinciden. La intersección de  $C^m(\Omega)$  con  $W^{m,p}(\Omega)$  nos da

$$C^{m,p}(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\} ,$$

conjunto que será considerado más adelante.

Hay varias maneras de introducir una norma en los espacios  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Las más usuales son:

$$(10) \quad \|u\|_{m,p} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p}$$

$$(11) \quad |||u|||_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Para  $m$  y  $p$  fijos, se prueba que existen dos constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  tales que

$$\forall u \in W^{m,p}(\Omega) \quad C_1 \|u\|_{m,p} \leq |||u|||_{m,p} \leq C_2 \|u\|_{m,p}.$$

Se trata, entonces, de lo que se denomina normas equivalentes. Ambas normas definen los mismos conjuntos abiertos (generan la misma topología). Por ende, toda sucesión en  $W^{m,p}(\Omega)$  que sea convergente respecto de una de las normas, lo será también respecto de la otra, y con igual límite. Análogamente, ambas normas definen las mismas sucesiones de Cauchy, de modo que en la propiedad siguiente no hace falta mencionar la norma utilizada. Otras normas que a veces se usan, son también equivalentes a las dos dadas.

PROPIEDAD 7. Los espacios  $W^{m,p}(\Omega)$  son de Banach.

Ya vimos la igualdad  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ . Más aún, los espacios de Sobolev generalizan a los de Lebesgue como espacios vectoriales normados, pues para  $m=0$  las normas de (10) y (11) coinciden con la de  $L^p(\Omega)$ .

Comentábamos antes la especial importancia del caso  $p=2$ . Para ese valor de  $p$ , la norma de (10) satisface la "igualdad del paralelogramo" y, en consecuencia, proviene de un producto interno. Más precisamente:

PROPIEDAD 8. Cualquiera sea  $m \in \mathbb{N}_0$ , el espacio  $W^{m,2}(\Omega)$  es de Hilbert con el producto interno

$$(u,v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

y la norma generada por este producto interno es, precisamente, la dada

en (10).

En cambio, la norma dada en (11) no proviene de ningún producto interno.

Hay otras vías para introducir los espacios de Sobolev. Mencionaremos sólo una de ellas: la que define, en realidad, los espacios  $H^{m,p}(\Omega)$ . Se basa en la idea de completar un espacio métrico (normado), y la exponemos muy resumidamente. El antes mencionado espacio  $C^{m,p}(\Omega)$ , provisto de la métrica inducida por (10), no resulta completo. Entonces llamamos  $H^{m,p}(\Omega)$  a la completación de  $C^{m,p}(\Omega)$  respecto de dicha métrica.

Hasta aquí la presentación resumida de  $H^{m,p}(\Omega)$ . Para ampliar un poco más, puede verse por ejemplo Friedman [1], pág. 102 a 105, con tres salvedades de imprenta:

- i) en la expresión (3.3.10) falta el exponente  $p$ ;
- ii) en el Lema 3.3.2 debe decir  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ;
- iii) debiera usarse otro subíndice para las sucesiones, pues  $m$  ya es un número fijo, para evitar situaciones poco claras como p.ej. las expresiones (3.3.9) y (3.3.10).

Ahora bien, una sucesión en  $C^{m,p}(\Omega)$  que sea de Cauchy respecto de la métrica inducida por (10), obviamente también resultará ser sucesión de Cauchy en  $L^p(\Omega)$ . De allí surge inmediatamente, si pensamos en lo que significa una completación, que los elementos de  $H^{m,p}(\Omega)$  se pueden identificar con funciones de  $L^p(\Omega)$  que tienen propiedades especiales, lo que conduce naturalmente a preguntarse si después de tal identificación  $H^{m,p}(\Omega)$  coincidirá con  $W^{m,p}(\Omega)$ . La respuesta es:

PROPIEDAD 9 (Teorema de Meyers-Serrin).

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

Claramente  $D(\Omega)$  es un subespacio de  $W^{m,p}(\Omega)$ , cualesquiera sean  $m$  y  $p$ . Al ser  $W^{m,p}(\Omega)$  un subespacio de  $L^p(\Omega)$ , tenemos por Prop. 1 que toda función de  $W^{m,p}(\Omega)$  se puede aproximar por una sucesión de funciones de  $D(\Omega)$  que converge a ella en la norma de  $L^p(\Omega)$ ; pero esto no significa que lo haga en la norma de  $W^{m,p}(\Omega)$ , pues para ello se deben cumplir más condiciones. A la adherencia o clausura de  $D(\Omega)$  como subespacio de  $W^{m,p}(\Omega)$ , o sea con respecto a la norma (10), la denotaremos  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

Obviamente  $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ . Pero tal como el comentario previo ya lo hacía intuir, la inclusión inversa no siempre se cumple. Sin embargo, es válida para algunos dominios particulares. Por ejemplo:

PROPIEDAD 10.  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

En realidad, la Prop. 10 no es más que un inmediato corolario de una propiedad más general, que se demuestra imponiéndole a  $\Omega$  ciertas condiciones (de todos modos poco restrictivas) sobre los puntos de su frontera, y que en particular  $\mathbb{R}^n$  cumple trivialmente pues su frontera es vacía. Bajo tales hipótesis, que dado el propósito de estas notas no creemos necesario detallar, se tiene lo siguiente:

PROPIEDAD 11. El conjunto de las restricciones a  $\Omega$  de todas las funciones de  $D(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Aclaración: el conjunto de las restricciones a  $\Omega$  de las funciones de  $D(\mathbb{R}^n)$  no debe confundirse con  $D(\Omega)$ , si bien lo contiene. Entonces, el hecho de que el primer conjunto (más "amplio") sea denso en  $W^{m,p}(\Omega)$ , no implica que el segundo (más "pequeño") tenga que serlo. Lo que la Prop. 11 dice, en otras palabras, es que toda función de  $W^{m,p}(\Omega)$  se puede aproximar, en la norma de  $W^{m,p}(\Omega)$ , por funciones infinitamente derivables de soporte compacto, pero los respectivos soportes no necesariamente están contenidos en  $\Omega$ .

Una clara consecuencia de esta Prop. es que  $C^\infty(\bar{\Omega})$  es denso en  $W^{m,p}(\Omega)$ . Con mayor razón,

$$C^k(\bar{\Omega}) \text{ es denso en } W^{m,p}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 .$$

Hemos hablado antes de la importancia del caso  $p=2$ . Usualmente, cuando no se menciona el valor de  $p$ , se sobreentiende que vale 2. Así escribimos  $H^m(\Omega)$  en vez de  $H^{m,2}(\Omega)$  o  $W^{m,2}(\Omega)$ , y también  $H_0^m(\Omega)$  en lugar de  $W_0^{m,2}(\Omega)$ . Por ejemplo:

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) / \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i=1, \dots, n\} .$$

A este espacio se lo suele denominar espacio de Beppo Levi. Si se nos disculpa que nos apartemos del tema, queremos recordar que este ilustre matemático italiano (1875-1961), trabajó sus últimos años en Rosario, donde fundó y dirigió el Instituto que hoy lleva su nombre y edita la presente colección CUADERNOS.

## 6. CUESTIONES DE REGULARIDAD

Si hemos de aspirar a que estos espacios sirvan para resolver problemas de tipo práctico, la pregunta obligada es cuán regulares son las funciones de  $W^{m,p}(\Omega)$ . De modo que tal pregunta no puede ser calificada como una superflua curiosidad o un detalle puramente teórico. Ya fue señalada en la Sec. 4 la importancia de esta cuestión.

El hecho de que una función y sus derivadas distribucionales hasta el orden  $m$  pertenezcan a  $L^p(\Omega)$ , no parece a primera vista preanunciar que esa función (mejor dicho, una de su clase de equivalencia) sea continua en  $\Omega$ , ni mucho menos que posea allí derivadas continuas. Sin embargo, bajo ciertas hipótesis de regularidad de la frontera  $\partial\Omega$ , han sido probados resultados que revelan que cuanto más grande sea el producto  $m.p$  respecto de la dimensión  $n$  (después daremos una relación más precisa entre estos tres números), tanto más suaves resultarán las funciones de  $W^{m,p}(\Omega)$ . De ahora en más, suponemos que  $\partial\Omega$  satisface todas las condiciones de regularidad que hagan falta en cada caso.

Un caso particular ( $m=1$ ) de lo recién afirmado es la propiedad que sigue.

PROPIEDAD 12.  $\forall p > n \quad W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ .

Tomando  $p=2$  y  $n=1$  en la Prop. anterior, se obtiene que, en el caso unidimensional, las funciones de  $H^1(\Omega)$  son continuas (con más propiedad, equivalentes a una continua). Por ejemplo, si  $\Omega=(a,b)$

$$f \in H^1(\Omega) \Rightarrow f \in C([a,b]) .$$

Siempre en el caso  $n=1$ , tenemos que toda  $f \in H^2(\Omega)$  es continua en  $\bar{\Omega}$ , pues por (9)  $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ . Pero veamos que una tal  $f$  es algo más que continua en  $\bar{\Omega}$ : llamando  $g$  a la derivada distribucional de  $f$ , tenemos que  $g \in H^1(\Omega)$  por ser  $f \in H^2(\Omega)$ . Entonces también  $g$  es continua en  $\bar{\Omega}$ , y estamos así en las condiciones de la Prop. 4, por lo que resulta  $f'=g$ . Por ende,  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ . Si ahora tuviéramos  $f \in H^3(\Omega)$ , argumentos similares nos llevarían a que  $f \in C^2(\bar{\Omega})$ . Más generalmente,

PROPIEDAD 13. Si  $n=1$ , entonces  $H^m(\Omega) \subset C^{m-1}(\bar{\Omega}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ .

Los razonamientos recién hechos para el caso unidimensional, siguen valiendo cuando  $n \geq 2$ , salvo obvias modificaciones (por ejemplo, hay que adaptar la Prop. 4 al caso de derivadas parciales). Obtendríamos así:

PROPIEDAD 14. Si  $p > n$ , entonces  $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{m-1}(\bar{\Omega}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ .

Observemos que en las últimas propiedades teníamos  $p > n$ , con lo que también era  $m \cdot p > n \quad \forall m \in \mathbb{N}$ . En realidad, el interés no reside en la condición  $p > n$ , sino en  $m \cdot p > n$ , o sea

$$m - \frac{n}{p} > 0 ,$$

y en lo grande que pueda ser la diferencia  $m - \frac{n}{p}$ . Lo pone de manifiesto

la propiedad que sigue, que generaliza a las tres anteriores.

PROPIEDAD 15. Sea  $j \in \mathbb{N}_0$  tal que  $m - \frac{n}{p} > j$ . Entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^j(\bar{\Omega}) .$$



Las propiedades enunciadas en esta Sección, junto con varios otros resultados, se agrupan bajo el título común de Teoremas de inmersión de Sobolev. Bajo adecuadas hipótesis, estos teoremas afirman no sólo que  $W^{m,p}(\Omega)$  está contenido en un determinado espacio, en el sentido de que toda función de  $W^{m,p}(\Omega)$  es equivalente (igual en casi todo punto) a una función de tal espacio, sino además que la función inclusión es continua respecto de las normas que en cada caso correspondan.

En la bibliografía adecuada, por ej. Adams [8], pueden verse enunciados más completos y las correspondientes demostraciones de estos resultados de regularidad, detallando las hipótesis sobre  $\partial\Omega$  que aquí hemos preferido omitir y explicitando en cada caso las normas que hacen continua a la función inclusión. Por el momento, las versiones dadas en las Prop. 12 a 15, pese a ser muy incompletas, son suficientes para nuestros propósitos, que no son más que dar una primera idea de los teoremas de regularidad, y comentar que las propiedades de inmersión de los espacios de Sobolev son, en cierto modo, el factor definitorio para que estos espacios resulten tan usados en el Análisis.

## 7. CONDICIONES DE CONTORNO

Analicemos una situación de aparición muy frecuente cuando se resuelven problemas físicos con la teoría clásica. Se plantea una ecuación diferencial en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , acompañada de una condición de contorno. Para fijar ideas, supongamos que  $\Omega = B_r(x_0)$  y que la condición de contorno es  $f/\partial\Omega = 0$ . Entonces, estamos buscando una función  $f$  continua en la bola cerrada  $\overline{B_r(x_0)}$  que verifique lo siguiente:

- i)  $f$  es suficientemente derivable en la bola abierta  $B_r(x_0)$ , y allí satisface la ecuación diferencial dada.
- ii)  $f$  restringida a  $\partial\Omega$  es idénticamente nula.

Reparemos en el último detalle: " $f$  restringida a  $\partial\Omega$ ". Esta expresión tiene sentido porque  $f$  es una función y  $\partial\Omega$  es un subconjunto del domi-

nio de dicha función. Pero deja de tener sentido cuando  $f$  es un elemento de  $W^{m,p}(\Omega)$ , pues en tal caso  $f$  es una clase de equivalencia de funciones que coinciden salvo conjuntos de medida nula, y precisamente  $\partial\Omega$  es un conjunto de medida nula en  $\mathbb{R}^n$ . Es decir: dos funciones definidas en  $\bar{\Omega}$  que coincidan en  $\Omega$  y difieran en  $\partial\Omega$ , son equivalentes entre sí y por ende, si pertenecen a  $W^{m,p}(\Omega)$ , deben ser miradas como un mismo elemento de dicho espacio.

La discusión anterior pierde todo interés si  $m.p > n$ , en vista de la Prop. 15, por lo que en adelante supondremos  $m.p \leq n$ . Retomando el tema, debemos encontrar una manera de interpretar en sentido débil la expresión  $f|_{\partial\Omega}$  (que llamaremos "traza de  $f$  en  $\partial\Omega$ "), pero de un modo tal que coincida con la restricción usual en el caso de que  $f$  sea continua en  $\bar{\Omega}$ .

Explicaremos a grandes rasgos cómo se logra esto, pero ahora para un  $\Omega$  genérico. En la Sec. 5 se vio que una función  $f$  de  $W^{m,p}(\Omega)$  se puede aproximar por una sucesión  $\{f_k\}$  contenida en  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , pues este espacio es denso en aquél. Ahora bien, como tales  $f_k$  son continuas en  $\bar{\Omega}$ , tiene perfecto sentido considerar sus restricciones a  $\partial\Omega$ . Llamando  $g_k = f_k|_{\partial\Omega}$ , tenemos que  $\{g_k\}$  es una sucesión de funciones continuas definidas en  $\partial\Omega$ . Luego se averigua si la sucesión  $\{g_k\}$  es convergente en al algún conveniente espacio de funciones de  $\partial\Omega$ , por ejemplo  $L^p(\partial\Omega)$ , y en tal caso el límite de la sucesión  $\{g_k\}$  es tomado como la buscada traza de  $f$  en  $\partial\Omega$ .

Hasta aquí, un esbozo de la idea. Desde luego, existe el peligro potencial de que la sucesión  $\{g_k\}$  no converja, o que siendo convergente su límite dependa de la elección de la sucesión  $\{f_k\}$  aproximante de la  $f$ . Pero esto ha sido satisfactoriamente estudiado y se han demostrado algunos teoremas de traza. El estudio es relativamente sencillo si la frontera de  $\Omega$  es acotada, caso que involucra a todos los  $\Omega$  acotados y a ciertos  $\Omega$  no acotados (hay dominios no acotados, por ej. el exterior de una bola, que tienen frontera acotada). Cuando  $\partial\Omega$  no es acota-

da, una manera de caer al caso anterior es intersecar  $\Omega$  con adecuadas bolas, de modo de obtener subdominios acotados e ir así considerando  $\partial\Omega$  a trozos.

A título de ejemplo, damos un teorema de traza para  $H^1(\Omega)$  (es muy útil para  $n \geq 2$ , pero carece de interés para  $n=1$ , por lo antes apuntado). Bajo adecuadas condiciones de regularidad de  $\partial\Omega$ , ha sido probado que toda  $f \in H^1(\Omega)$  posee una traza en  $\partial\Omega$ , perteneciente a  $L^2(\partial\Omega)$ . Más aún:

PROPIEDAD 16. Existe una aplicación lineal y continua (única además)

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

tal que si  $f \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ ,  $\gamma_0(f)$  coincide con  $f|_{\partial\Omega}$ .

PROPIEDAD 17. La clausura de  $D(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$  coincide con el núcleo de  $\gamma_0$ , es decir

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) / \gamma_0(f) = 0\}$$

Vemos así que los elementos de  $H_0^1(\Omega)$  no son otra cosa que las funciones de  $H^1(\Omega)$  que, en sentido débil o generalizado, se anulan en  $\partial\Omega$ .

Hay un resultado de interés, referido al espacio  $H_0^1(\Omega)$ , que se conoce como Desigualdad de Poincaré (o de Steklov) y dice que existe una constante  $C$ , dependiente sólo de  $\Omega$ , tal que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} |u|^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

En  $H_0^1(\Omega)$  tenemos hasta ahora la norma de (10) y el producto interno de la Prop. 8, heredados ambos de  $H^1(\Omega)$ . Equipado con ellos,  $H_0^1(\Omega)$  es de Hilbert. Pero además, como consecuencia de la desigualdad recién vista, se obtiene que la expresión

$$\|u\| = \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right]^{1/2},$$

que no es una norma en  $H^1(\Omega)$ , es sin embargo una norma en  $H_0^1(\Omega)$  equivalente a la de (10). Por lo tanto,  $H_0^1(\Omega)$  también es de Banach con esta nueva norma, que se suele indicar  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ .

Por otra parte, la nueva norma también cumple la "igualdad del paralelogramo", por lo que proviene de un producto interno, a saber

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad ,$$

y entonces, con este nuevo producto interno,  $H_0^1(\Omega)$  también es de Hilbert.

No queremos finalizar estas notas sin antes comentar que es aconsejable ver algunos ejemplos de aplicación de todas estas ideas, luego de lo cual el lector se sentirá más motivado a profundizar estos temas. Un primer ejemplo puede encontrarse en la conferencia dictada por G.G. Garguichevich en este mismo Seminario, que aparece publicada en la presente edición de CUADERNOS. Allí también puede verse otra manera de buscar soluciones débiles a un problema de contorno, la cual consiste en plantear adecuadas ecuaciones o inecuaciones variacionales. Para el mismo fin es muy recomendable leer el trabajo de Stampacchia [5], tanto por lo breve (escasas 30 páginas) como por lo ilustrativo.

## 8. BIBLIOGRAFIA

En el No. 12 de la Serie CUADERNOS hemos sugerido una lista bastante amplia de textos. Cada tema de los tratados en las presentes notas está de algún modo representado en dicha Bibliografía, ya sea en una o varias obras, con mayor o menor profundidad. Recomendamos, por tanto, releer esa nómina de títulos.

De todas maneras, creemos oportuno repetir a modo indicativo algunas pocas de esas referencias, y agregar otras más específicas.

a) Para Medida e Integral de Lebesgue, y para todos los temas básicos del Análisis Funcional, son excelentes:

[1] A.FRIEDMAN: Foundations of Modern Analysis; Holt, Rinehart and

Winston, 1970.

- [2] A.N.KOLMOGOROV - S.V.FOMIN: Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, 2 vol., Graylock Press, 1957 y 1961.  
: Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, MIR, 1975.

En [1] también se introducen los espacios  $H^{m,p}(\Omega)$ , como ya se dijo en la Sec. 5. En [2] hay una presentación elemental de las distribuciones.

b) Para Distribuciones pueden verse:

- [3] U.MOSCO: Transformada de Fourier y Distribuciones, CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 3, 1972.  
[4] H.BREMERMANN: Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms, Addison-Wesley, 1965.

Los dos primeros capítulos de [4] (unas 20 páginas) tratan lo básico de Distribuciones. Algún otro capítulo puede ser de interés de acuerdo a la especialidad de cada lector.

c) En forma muy breve se trata todo un abanico de temas, con sus mutuas relaciones, en los siguientes trabajos:

- [5] G.STAMPACCHIA: Introducción a las Ecuaciones en derivadas parciales e Inecuaciones Variacionales, CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 1, 1971.  
[6] L.A.MEDEIROS: Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", parte del No. 6, 1974.

Los dos introducen espacios de Sobolev (el segundo también Distribuciones). Si bien hay fuerte intersección entre los dos trabajos, convendría leer primero [5].

d) Para ampliar sobre espacios de Sobolev y distintos espacios funcionales:

- [7] V.P.MIJAILOV: Ecuaciones Diferenciales en derivadas parciales, MIR, 1978.

El capítulo II trata sobre la integral de Lebesgue y temas relativos a espacios normados y de Hilbert. El III sobre espacios funcionales, en particular los  $H^m(\Omega)$ . Debemos advertir que tiene defectos de traducción, pero eso no traerá mayores inconvenientes a quien lea con sentido crítico (única manera de estudiar Matemática). Por ejemplo, más de una definición es del estilo "Designemos con tal notación un conjunto de funciones que satisfacen tal propiedad", cuando la traducción debiera haber dicho "...el conjunto de todas las funciones etc.". En varios teoremas también aparece "un" cuando debiera ir "el" (también se ve el error inverso, aunque con menor frecuencia). Es fácil de comprender que esto cambia el significado matemático de una afirmación. Pero insistimos: con sólo poner un poco de cuidado en la lectura, este libro resultará muy provechoso.

e) Una obra de mayor nivel es

- [8] R.A.ADAMS: Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.

Como lo sugiere el título, se trata de un texto especializado. De todos modos, los tres primeros capítulos son bastante accesibles. El primero hace una síntesis de temas básicos de Análisis Funcional, el segundo trata de espacios  $L^p(\Omega)$ , y el tercero trae la presentación y las primeras propiedades de los espacios  $W^{m,p}(\Omega)$ .

f) También puede ser de utilidad por su enfoque

- [9] R.D.MILNE: Applied Functional Analysis (An introductory treatment), Pitman, 1980.

PROMAR (CONICET-UNR)  
 Instituto de Matemática "Beppo Levi"  
 Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería  
 Avda. Pellegrini 250  
 2000 ROSARIO - ARGENTINA.



## TEORIA ESPECTRAL CONICA

Eduardo H. ZARANTONELLO

Conferencia extraída de la memoria del autor "Conical spectral theory", aparecida en el "Quaderno" de la Scuola Normale Superiore di Pisa que lleva el título "Topics in Functional Analysis 1980-81", cuya introducción en traducción al Castellano dice lo siguiente:

### INTRODUCCION

La teoría espectral cónica es una extensión del dominio de lo no lineal de la teoría espectral clásica para operadores autoadjuntos positivos. Del mismo modo como un operador autoadjunto positivo puede ser sintetizado a partir de proyectores ortogonales sobre espacios lineales mediante una integral con respecto a una familia creciente de tales aplicaciones elementales:

$$T = \int_0^{\infty} \lambda \, dP_{\lambda},$$

los "operadores espectrales cónicos" - los objetos de la nueva teoría - son obtenidos por integración con respecto a una familia creciente de "proyectores sobre conos convexos cerrados", dándole a los proyectores la significación de aplicaciones de mínima distancia. Esta generalización se apoya en el hecho capital de retener los proyectores cónicos todas las propiedades formales de los proyectores lineales ordinarios necesarias para la construcción de una teoría de integración. Los nuevos operadores resultantes - entre los cuales deben ser contados los operadores autoadjuntos positivos - si bien no son lineales en general,



se comportan en gran medida como sus predecesores lineales. Notable es su obediencia a un cálculo funcional mediante el cual las funciones de los operadores espectrales cónicos son manipulados como funciones reales en la recta.

Los operadores espectrales cónicos son atípicos en cuanto a que, contrariamente a lo que ocurre con la mayoría de los operadores, son llamados a existencia por su estructura, proporcionada por la representación espectral integral, más bien que por sus propiedades. De esta suerte para revelar su naturaleza básica se hace necesaria una investigación de sus fuentes. Hasta este momento esta búsqueda ha mostrado que los tres ingredientes básicos que entran en la composición de los operadores autoadjuntos positivos están presentes en el armado de los operadores espectrales cónicos, los cuales debidamente separados y cuidadosamente dosificados sirven para caracterizarlos:

1. "Positividad", bajo el requerimiento de que el operador  $T$  sea maximal monótono y todas sus potencias  $T, T^2, T^3, \dots$  sean monótonas;
2. "Linealidad", expresada por  $T(aI + bT) = (aI + bT)T, a, b \geq 0$ ;
3. "Simetría", contenida en las relaciones

$$\langle T^h x, T^k x \rangle = \langle T^{h'} x, T^{k'} x \rangle, \quad h+k = h'+k', \quad h, k, h', k' = 0, 1, 2, \dots$$

Estas notas de clase de un curso dado en la Universidad de Pisa contienen una versión actualizada de la teoría esbozada y originalmente presentada hace diez años en mi memoria "Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory" [5].

Al material básico - tomado, o más bien, extraído de la versión original donde aparece imbricado en espesa maraña con una discusión general de proyectores sobre conjuntos convexos - he agregado varios desarrollos posteriores, perfeccionamientos y simplificaciones, algunos de los cuales fueron ya impresos [6], [7], [8], [9], y otros aparecen aquí por primera vez. Entre éstos el más significativo es tal vez la caracterización de los operadores espectrales cónicos antes descrita, la cual además de echar luz sobre su naturaleza hace buen camino hacia el facilitamiento de su identificación, por tanto hacia la eliminación de la más seria limitación de la teoría. En verdad, hasta el presente con los criterios disponibles a mano ha sido casi imposible reconocer a un operador como cónico espectral a menos que aparezca en todo el atuendo de su representación espectral integral. Quitada

esta dificultad, el camino hacia las aplicaciones, si hubiese algunas, está ahora abierto.

Me he esforzado por mantener la simplicidad de mi presentación a la que he despojado de todo lo accesorio. A diferencia de la actitud tomada en la exposición anterior aquí he hecho uso de la teoría de los operadores monótonos toda vez que fue necesario, por entender que hoy día esta disciplina es parte del equipo técnico de todo aquel que trabaje en análisis funcional no lineal. Mas allá de una cierta familiaridad con los operadores autoadjuntos nada se necesita para la comprensión de estas notas de curso, el tratamiento del material es autocontenido.

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) BREZIS, H., Operateurs maximaux monotones, Mathematics Studies N°5 , North Holland 1973.
- (2) DUNFORD, N., and SCHWARTZ J., Linear operators, parts I and II, Interscience Publishers, New York 1956, 1963 .
- (3) RIESZ F. and NAGY B.Sz., Lecons d'analyse fonctionelle, Akademia Kiado, Budapest 1965.
- (4) RUDIN W., Real and complex analysis, McGraw Hill, Inc., New York 1966.
- (5) ZARANTONELLO E.H., Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E.H.Zarantonello, Editor, Academic Press, New York 1971, pp. 237-424.
- (6) ZARANTONELLO E.H., The product of commuting conical projections is a projection, Proc.Am.Math.Soc.38 (1973) pp. 591-594.
- (7) ZARANTONELLO E.H., L'algebre des projecteurs coniques, in Analyse Convexe et ces Applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems N°102, Springer Verlag. 1974, pp. 232-243.
- (8) ZARANTONELLO E.H., The meaning of the Cauchy-Schwartz-Buniakovsky inequality, Proc.Am.Math.Soc.,58 (1976) pp.133-138.
- (9) ZARANTONELLO E.H., Projectors on convex sets in reflexive Banach spaces, Mathematics Research Center Technical Summary Report N°1768, July 1977.

CRICYT

Casilla de Correo 131

5500 Mendoza

Rep. Argentina

Serie: CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi".

Coordinador: D.A. TARZIA.

NUMEROS APARECIDOS:

1. G. STAMPACCHIA, "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales".
2. C. PROCESI, "Teoría de Galois elemental".
3. U. MOSCO, "Transformada de Fourier y distribuciones".
4. P. BERNHARD, "Introducción a la teoría de Control Optimo".
5. P. FAURRE, "Teoría de Control. Filtrado estadístico e Introducción al Control Estocástico".
6. "Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", Rosario, 2-7 de julio de 1973.
7. A. BENSOUSSAN, "Teoría moderna de Control Optimo".
8. C. BAIOCCHI, "Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi-variacional y numérico".
9. A. GLOWINSKI, "Introducción a la aproximación de inecuaciones variacionales elípticas".
10. H. SAMARA, "Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Formulación variacional del método TAU".
11. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1.
12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2.
13. A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", en "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 1.
14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986. Volumen 2.

CONTENIDO DE NUMEROS ESPECIALES.

6. "Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", Rosario, 2-7 de julio de 1973:
  - 6.1. U. D'AMBROSIO, "Superficies generalizadas no cálculo das variacoes", p. 5-24.
  - 6.2. L.A. MEDEIROS, "Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales", p. 25-58.
  - 6.3. E. ROFMAN, "Desigualdades variacionales. Existencia y aproximación numérica de soluciones", p. 59-86.
  
11. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1:
  - 11.1. D.A. TARZIA, "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", p. 5-32.
  - 11.2. D.A. TARZIA, "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", p. 33-61.
  - 11.3. J.E. BOUILLET, "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", p. 63-74.
  - 11.4. J.E. BOUILLET, "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", p. 75-104.
  - 11.5. L.T. VILLA, "El problema inverso de Stefan", p. 105-131.
  - 11.6. L.T. VILLA, "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase", p. 133-142.
  - 11.7. R.H. NOCHETTO, "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", p. 143-166.
  - 11.8. G.G. GARGUICHEVICH-M.C. SANZIEL, "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", p. 167-177.
  
12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2:
  - 12.1. D.A. TARZIA, "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", p. 5-36.
  - 12.2. D.A. TARZIA, "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", p. 37-85.
  - 12.3. P.R. MARANGUNIC, "Algunos conceptos básicos del análisis funcional", p. 87-118.
  - 12.4. H.R. BERTORELLO, "Sobre la solidificación de aleaciones binarias", p. 119-142.

- 12.5. L. CRIVELLI-S. IDELSOHN-C. BAIGORRIA, "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales", p. 143-170.
- 12.6. E.E. ALANIS, "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar", p. 171-177.
- 12.7. M.B. STAMPELLA, "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase", p. 179-193.
14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2:
- 14.1. H. BERTORELLO, "Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido", p. 9-27.
- 14.2. J.E. BOUILLET, "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas", p. 29-44.
- 14.3. D.A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases", p. 45-75.
- 14.4. D.A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", p. 77-99.
- 14.5. L.T. VILLA, "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre", p. 101-116.
- 14.6. N. AGUILERA, "El método de Alt para el problema del dique poroso", p. 117-128.
- 14.7. G.G. GARGUCHEVICH, "Las inecuaciones variacionales elípticas", p. 129-138.
- 14.8. P.R. MARANGUNIC, "Distribuciones y espacios de Sobolev", p. 139-165.
- 14.9. E. ZARANTONELLO, "Teoría espectral cónica", p. 167-169.

---

Nota: Para intercambiar esta serie con publicaciones similares, dirigirse a:

CUADERNOS del  
Instituto de Matemática "Beppo Levi",  
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,  
Avda. Pellegrini 250,  
2000 Rosario, Argentina.

Note: To exchange this serie with similar publications, please write to:

CUADERNOS del  
Instituto de Matemática "Beppo Levi",  
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,  
Avda. Pellegrini 250,  
2000 Rosario, Argentina.

Se terminó de imprimir en el mes de Abril  
de 1988 en los talleres propios del IRICE - Bv.  
27 de Febrero 210 bis 2000 Rosario Prov. de Sta.  
Fe - República Argentina.

