

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 4 al 8 de JULIO - 1983

12

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
1984

PREFACIO

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años (ver Anexo I), el Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario PROMAR (CONICET-UNR), que se desarrolla en el Instituto de Matemática "Beppo Levi", emprendió, a través del proyecto "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática", la organización del interdisciplinario Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones (*), realizado en la ciudad de Rosario (Argentina) durante el período del 4 al 8 de julio de 1983.

El Comité Organizador estuvo compuesto por H.R. BERTORELLO (IMAF, Córdoba), J.E. BOUILLET (IAM-UBA, Buenos Aires), E.A. GARCIA (CNEA, Buenos Aires), D.A. TARZIA (PROMAR, Rosario) (responsable) y L.T. VILLA (UNSa, Salta).

Se contó con valiosos aportes de parte de A. CASSANO, H. PORTA y R. SCARPARO, directores del INTEC, IAM y PROMAR respectivamente.

La Secretaría estuvo a cargo de A.B. BANCORA, P.R. MARANGUNIC (responsable), M.C. SANZIEL y C.V. TURNER, además del apoyo administrativo de C.B. MARTINEZ, todos del PROMAR.

Este Seminario ha sido realizado gracias a un subsidio que a tal efecto otorgó el CONICET. Además, se ha contado con la ayuda que de una u otra manera dieron las Instituciones Auspiciantes siguientes:

- 1) CAMAT - Comité Argentino de Transferencia de Calor y Materia.
- 2) CERIDER - Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Rosario.
- 3) CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.
- 4) Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario.
- 5) Escuela de Graduados de la Facultad de Ciencias Básicas (UNR).
- 6) Escuela de Graduados de la Facultad de Ingeniería (UNR).

(*) Este Seminario fue una de las actividades que el PROMAR llevó a cabo en conmemoración del 25° aniversario del CONICET.

- 7) IAM - Instituto Argentino de Matemática (Buenos Aires).
- 8) INTEC - Instituto Tecnológico para el desarrollo de la Industria Química (Santa Fe).
- 9) Municipalidad de Rosario.
- 10) UNR - Universidad Nacional de Rosario.
- 11) UNSa - Universidad Nacional de Salta.

Además, se contó con el apoyo de la SUBCYT a través de los subsidios anuales otorgados al proyecto "Problemas de frontera libre de la Física-Matemática".

En el Seminario han participado más de 50 personas provenientes de 10 ciudades argentinas.

Los *objetivos* del presente Seminario fueron:

- 1) Gestar un *encuentro anual* de las personas y grupos que trabajan en el problema de Stefan (cambio de fase) en el país, a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos.
- 2) No limitar el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia, sino también, y muy especialmente, despertar el interés y el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*.

Por lo señalado anteriormente, esta primera edición del Seminario estuvo constituida por cursillos intensivos sobre los aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones (ver Anexo II). En años sucesivos, los cursillos versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numérico (no tratados en Seminarios anteriores) y los principios teóricos irán, paulatinamente, dando lugar a las aplicaciones.

Para finalizar, se agradece a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA
Rosario, Marzo 1984.

ANEXO I

¿Qué es el problema de Stefan?

El problema de Stefan estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida (ejemplo: hielo y agua en procesos de fusión o solidificación). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. La superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, es una incógnita suplementaria del problema sobre la cual existe una condición que surge del principio de conservación de la energía.

El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha superficie de separación entre las fases, a la cual se la llama la *frontera libre* del problema, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Entre las múltiples *aplicaciones* del problema de Stefan se pueden mencionar: Problemas con cambio de fase, solidificación de aleaciones binarias, oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares en caso de accidentes, almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase, problema de la colada continua (solidificación de metales), solidificación del pavimento, problemas de control óptimo, procesos de ablación térmica, solidificación de la corteza terrestre, etc..

Por todo ello, en los últimos años ha concitado el interés de matemáticos, físicos, químicos e ingenieros de todo el mundo, lo que ha redundado en un importante desarrollo del tema. Es así que se presentan trabajos en Congresos de Matemática (sobre Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional, Análisis Numérico, Matemática Aplicada), Física, Transferencia de Calor y Materia, etc., y se realizan numerosas publicaciones en más de 150 revistas especializadas en dichas disciplinas. Para mayores detalles puede verse la reciente publicación del último simposio internacional sobre problemas de frontera libre: A. FASANO - M. PRIMICERIO (Ed.)

"Free Boundary Problems: Theory and Applications", Pitman, London (1983).

ANEXO II

CONTENIDO DEL SEMINARIO

"Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", D.A. TARZIA.

CURSILLOS:

C1) "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", (3 horas), D.A. TARZIA.

C2) "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", (3 horas), J.E. BOUILLET.

C3) "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", (3 horas), D.A. TARZIA.

C4) "El problema inverso de Stefan", (3 horas), Luis T. VILLA.

C5) "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", (3 horas), D.A. TARZIA.

C6) "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", (3 hs), J.E. BOUILLET.

C7) "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase", (3 horas), L.T. VILLA.

Conferencias generales sobre diferentes métodos aproximados y numéricos utilizados en el problema de Stefan:

CG1) "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", (1 hora), G.G. GARGUICHEVICH-M.C. SANZIEL.

CG2) "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", (1 hora), R.H. NOCHETTO.

Conferencias sobre diferentes aplicaciones en las cuales aparece el problema de Stefan:

CA1) "Sobre la oxidación del zirconio en reactores nucleares en caso de accidentes", (1 hora), E.A. GARCIA.

CA2) "Sobre la solidificación de aleaciones binarias", (1 hora), H. R. BERTORELLO.

CA3) "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales", (1 hora), L. CRIVELLI-S. IDELSOHN-C. BAIGORRIA.

CA4) "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar", (1 hora), E.E. ALANIS.

CA5) "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase", (1 hora), M.B. STAMPELLA.

Clase de apoyo para no matemáticos:

CA) "Algunos conceptos básicos del análisis funcional", (1.30 horas), P.R. MARANGUNIC.

SOLUCIONES EXACTAS DEL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL

Domingo Alberto TARZIA

Continuando la Introducción del presente Seminario, en este Cursillo se estudiarán las soluciones exactas correspondientes al problema de Stefan unidimensional a una y dos fases. Todas las notaciones que no cambian no serán repetidas; por (I-n), se hará referencia a la fórmula (n) de la Introducción.

Se estudiarán las soluciones explícitas de Lamé-Clapeyron [18, 37-39] y de Neumann [3,4,29,37,51] y sus propiedades, correspondientes al problema de Stefan unidimensional a una y dos fases, respectivamente. Se analizará sólo lo referente a la *existencia de soluciones explícitas*; el análisis de la *unicidad* de solución en el problema de Stefan a una fase será tratado en el Cursillo C5 y en cambio el correspondiente a dos fases será dejado para el próximo Seminario.

I. LA SOLUCION DE LAME-CLAPEYRON DEL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE Y SUS PROPIEDADES.

A) Lamé-Clapeyron estudiaron en [18] el problema de la solidificación por enfriamiento de un globo líquido, cuya formulación matemática está dada por el problema de hallar la frontera libre $s=s(t)$ y la temperatura $\theta=\theta(x,t)$ de la fase sólida, definida

por (I-1), de manera que se satisfagan las condiciones (I-2 i-v).

EJERCICIO 1.

Si $\{\theta, s\}$ es la solución de (I-2) entonces se tiene (utilizar el principio del máximo):

- i) $\theta_0 < \theta(x,t) < \theta_f$ en $D = (x,t) / 0 < x < s(t), t > 0$
- ii) $\dot{s}(t) > 0, \forall t > 0.$
- iii) $\theta_x(x,t) > 0, \theta_t(x,t) < 0, \theta_{xx}(x,t) < 0$ en D. ■

Utilizando el método de semejanza (ver Apéndice 6 de la Introducción) se obtiene el resultado siguiente:

LEMA 1:

La solución del problema (I-2) está dada por:

$$(1) \quad \begin{cases} \theta(x,t) = \theta_0 + \frac{\theta_f - \theta_0}{f(\xi)} f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2a\xi\sqrt{t} \quad (a^2 = \frac{k}{\rho c}) \end{cases}$$

siendo ξ la única solución de la ecuación:

$$(2) \quad E(x) = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

donde:

$$(3) \quad \begin{cases} f(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du: \text{función de error} \\ E(x) = x f(x) \exp(x^2), \\ Ste = \frac{c(\theta_f - \theta_0)}{l} : \text{número de Stefan.} \end{cases}$$

DEMOSTRACION:

Se propone como solución del problema (I-2) a:

$$(4) \quad \theta(x,t) = A + B f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad s(t) = 2a\xi\sqrt{t} \quad (\xi > 0)$$

donde las tres constantes A, B, ξ deben determinarse usando las condiciones (I-2 iii-v) las cuales imponen las siguientes ecuaciones:

$$(5) \quad \begin{cases} A = \theta_0, \quad A + B f(\xi) = \theta_f, \\ \frac{k B}{a\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) = \rho l a \xi. \end{cases}$$

Eliminando las constantes A y B en función de ξ , se tiene:

$$(6) \quad A(\xi) = \theta_0, \quad B(\xi) = \frac{\theta_f - \theta_0}{f(\xi)},$$

donde ξ es la única solución de la ecuación (2), pues la función E tiene las propiedades siguientes:

$$(7) \quad E(0) = 0, \quad E(+\infty) = +\infty, \quad E' > 0.$$

OBSERVACION 1.

La solución (1) del problema de Stefan unidimensional a una fase (I-2) es conocida como *solución de Lamé-Clapeyron* [18].

OBSERVACION 2.

El coeficiente ξ , que caracteriza la frontera libre $s(t)$, depende sólo del número de Stefan Ste .

OBSERVACION 3.

El simple modelo (I-2) puede utilizarse para dar un *cálculo aproximado de la edad de la Tierra* (se supone que $t = 0$ es el instante inicial como planeta) una vez conocido:

- i) El valor $R = s(t)$ de la corteza sólida en este momento.
- ii) Los coeficientes a, Ste (para cada valor de θ_0) de la fase sólida, la cual se supone que es una sustancia isótropa y homogénea.

Con dichos datos, un valor aproximado de la edad del planeta Tierra puede obtenerse mediante la expresión:

$$(8) \quad t = \frac{R^2}{4a^2\xi^2}$$

donde ξ es la única solución de la ecuación (2).

EJERCICIO 2.

Suponiendo que $R = 50$ km (el radio de la Tierra es de 6.400 km) y que la sustancia más apropiada es el cuarzo hallar una estimación de la edad de la Tierra para diferentes valores de θ_0 . Hacerlo también para otras sustancias cuyos coeficientes térmicos sean fácilmente obtenidos en Tablas y realizar una comparación de los resultados obtenidos.

Mediante otros métodos se obtiene que la edad de la Tierra oscila entre 5 y 10 mil millones de años. ■

B) Uno de los métodos teóricos utilizados en el estudio del problema de Stefan es el llamado *método de la inmovilización del domo*

nio, el cual mediante el cambio de variable

$$(9) \quad y = \frac{x}{s(t)}$$

transforma el intervalo $(0, s(t))$ en el $(0,1)$. Se busca la temperatura como una función de la sola variable y , es decir:

$$(10) \quad \theta(x,t) = \psi(y).$$

Teniendo presente que:

$$(11) \quad \begin{cases} \theta_x(x,t) = \frac{\psi'(y)}{s(t)} & , \quad \theta_{xx}(x,t) = \frac{\psi''(y)}{s^2(t)} \\ \theta_t(x,t) = -y \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} \psi'(y) & \quad (\psi' = \frac{d\psi}{dy}) \end{cases}$$

se tiene la equivalencia siguiente: $\{\theta, s\}$ es solución de (I-2) si y solo si $\{\psi, s\}$ es solución del problema (12) , donde:

$$(12) \quad \begin{cases} \text{i)} & a^2 \psi''(y) + s(t) \dot{s}(t) \psi'(y) = 0 \\ \text{ii)} & \psi(0) = \theta_0 < \theta_f \\ \text{iii)} & \psi(1) = \theta_f \\ \text{iv)} & \psi'(1) = \frac{\rho l}{k} s(t) \dot{s}(t) \\ \text{v)} & s(0) = 0. \end{cases}$$

Llamando con s_0 a la constante $s(t) \dot{s}(t)$, a ser determinada, se obtiene:

$$(13) \quad s^2(t) = 2 s_0 t = 4a^2 \xi^2 t, \quad \xi^2 = \frac{s_0}{2a^2}.$$

Integrando la ecuación (12 i), y teniendo en cuenta la condición (12 iv), se deduce:

$$(14) \quad \psi'(y) = \frac{\rho l s_0}{k} \exp(\xi^2 t) \exp(-\xi^2 y^2)$$

La cual, con la condición (12 ii) se transforma en:

$$(15) \quad \psi(y) = \theta_0 + \frac{\rho l \sqrt{\pi}}{c} \xi \exp(\xi^2 t) f(\xi y).$$

La condición (12 iii) da para el coeficiente desconocido ξ la ecuación (2), con lo cual ψ viene dado por:

$$(16) \quad \psi(y) = \theta_0 + \frac{\theta_f - \theta_0}{f(\xi)} f(\xi y),$$

que coincide con la obtenida por el método de semejanza (1) pues se tiene $\xi y = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$. (EJERCICIO 3: Completar los cálculos de la pre-

sente Observación).

OBSERVACION 4.

Cuando las condiciones de contorno no son constantes, el método de la inmovilización del dominio es también aplicable con la única dificultad de que la ecuación diferencial es más complicada, al no poderse determinar ψ como función de la sola variable $y = \frac{x}{s(t)}$. En dicho caso, se buscará ψ como función de las variables y, t es decir $\psi = \psi(y, t)$. ■

C) Cuando el número de Stefan $Ste = \frac{c(\theta_f - \theta_o)}{\ell}$ es pequeño ($Ste \ll 1$) la solución ξ de la ecuación (2) puede calcularse usando las aproximaciones de primer orden siguientes:

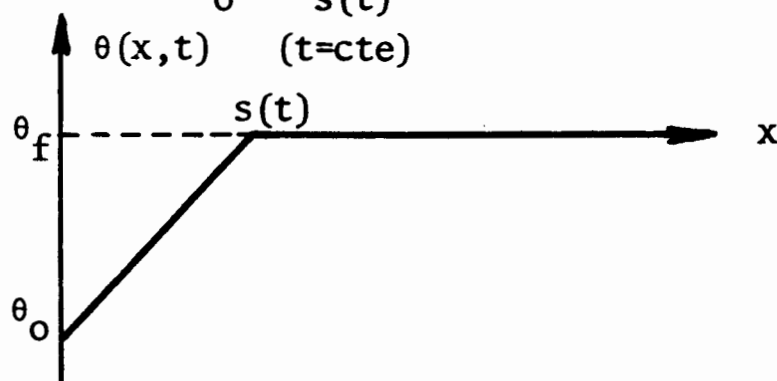
$$(17) \quad \exp(x^2) \approx 1, \quad f(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, \quad 0 \ll x \ll 1$$

con lo cual se obtiene

$$(18) \quad \xi^2 = \frac{Ste}{2} = \frac{c(\theta_f - \theta_o)}{2\ell}.$$

Por otra parte, este resultado puede ser obtenido usando una aproximación física, metodología conocida como *método cuasi-estacionario* [37,38]. Este método supone que la temperatura de la fase sólida es la que correspondería al caso estacionario en el intervalo $(0, s(t))$, es decir una función afín de la variable x . Bajo esta hipótesis, se tiene:

$$(19) \quad \theta(x, t) = \theta_o + \frac{\theta_f - \theta_o}{s(t)} x \quad \text{en } [0, s(t)].$$



Por lo tanto, la condición de Stefan (I-2 iv) se reduce a

$$(20) \quad k \frac{\theta_f - \theta_o}{s(t)} = \rho \ell \dot{s}(t)$$

que resulta ser una ecuación diferencial en $s(t)$, de cuya integración, se tiene:

$$(21) \quad s^2(t) = \frac{2k(\theta_f - \theta_o)}{\rho \ell} t = 4a^2 \frac{Ste}{2} t$$

obteniéndose de este modo (18).

LEMA 2.

El flujo de calor total $Q(t)$, para la solución de Lamé-Clapeyron, por unidad de área transversal y durante un tiempo t , en el borde fijo $x = 0$, está dado por:

$$(22) \quad Q(t) = \rho \ell s(t) \exp(\xi^2).$$

DEMOSTRACION:

Por definición, $Q(t)$ viene dado por

$$(23) \quad Q(t) = \int_0^t k \theta_x(0, \tau) d\tau$$

que después de simples cálculos (Ejercicio 4), puede expresarse por (22).

COROLARIO 3. [33]:

Cuando el número de Stefan es pequeño, éste da una indicación de la razón del calor sensible al calor latente almacenado en el material durante el proceso de cambio de fase.

DEMOSTRACION.

Se tiene la relación siguiente:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(t) = Q_s(t) + Q_\ell(t) \\ Q_\ell(t) = \rho \ell s(t): \text{ Calor latente total almacenado al tiempo } t \\ Q_s(t): \text{ Calor sensible total almacenado por la variación de la temperatura.} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, utilizando (18), válido cuando $Ste \ll 1$, se deduce:

$$(25) \quad \frac{Q_s(t)}{Q_\ell(t)} = \frac{Q(t)}{Q_\ell(t)} - 1 = \exp(\xi^2) - 1 \sim \xi^2 \sim \frac{Ste}{2}.$$

EJERCICIO 5.

El método cuasi-estacionario, utilizado por Stefan en sus trabajos [37,38], es también válido en el caso en que la temperatura sobre el borde fijo $x = 0$ es una función del tiempo, es decir:

$$(26) \quad \theta(0, t) = \theta_0(t) < \theta_f, \quad t > 0.$$

Verificar que se tienen las siguientes expresiones:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \theta(x, t) = \theta_0(t) + \frac{\theta_f - \theta_0(t)}{s(t)} x \\ \text{ii) } s(t) = \left\{ \frac{2k}{\rho \ell} \int_0^t [\theta_f - \theta_0(\tau)] d\tau \right\}^{1/2} \\ \text{iii) } Q(t) = \rho \ell s(t). \end{array} \right.$$

OBSERVACION 5.

El flujo de calor total $Q(t)$, para la solución cuasi-estacionaria (27), por unidad de área transversal y durante un tiempo t , en el borde fijo $x = 0$, no depende del hecho si la temperatura θ_0 es constante o variable en el tiempo; más aún, la energía, por unidad de área transversal, necesaria para solidificar una región de amplitud $s(t)$ es simplemente la energía $Q_l(t)$ debida sólo al calor latente. Esto está en contraste con la solución exacta, la cual muestra que $Q(t)/s(t) = \rho l \exp(\xi^2)$ es igual a la energía por calor latente más la energía que se necesita para bajar la temperatura de la región solidificada. Con la solución cuasi-estacionaria ($Ste \ll 1$), ésta última energía no es tenida en cuenta. ■

D) A continuación se verán algunas desigualdades que serán útiles en posteriores estudios.

LEMA 4.

Sean E y f las funciones definidas por (3). Sea G la función definida por

$$(28) \quad G(x) = x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad , \quad x > 0$$

entonces se tienen los siguientes resultados:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad E(x) > \frac{\exp(x^2) - 1}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad \forall x > 0 \\ \text{ii)} \quad G(0) = 0, \quad G(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \text{iii)} \quad G(x) < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad \forall x > 0 \\ \text{iv)} \quad G''(x) = 4 \left[G(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] + 2x G'(x) \\ \text{v)} \quad G'(x) > 0 \quad , \quad \forall x > 0. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION.

i) y iii) se deducen de las siguientes desigualdades:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{u}{x} \exp(-u^2) du = \frac{1 - \exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-u^2) du < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{u}{x} \exp(-u^2) du = \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}}$$

válidas $\forall x > 0$. Las demás propiedades quedan como EJERCICIO 6. ■

B) Sea el caso particular del problema de Lamé-Clapeyron (I-2) con

$$(30) \quad \theta_f = 0 \quad , \quad \theta_0 = -B < 0,$$

cuya solución está dada, para cada valor $\ell > 0$ de calor latente de fusión, por:

$$(31) \quad \theta(x,t,\ell) = -B \left[1 - \frac{f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)}{f(\xi_\ell)} \right], \quad s(t,\ell) = 2a\xi_\ell\sqrt{t}$$

donde ξ_ℓ es la única solución de (2) con

$$(32) \quad Ste = \frac{Bc}{\ell}.$$

En [31] se estudia el comportamiento de la solución (31) cuando $\ell \rightarrow 0^+$, obteniéndose que $\xi_\ell \rightarrow +\infty$ con lo cual la frontera libre $s(t,\ell)$ avanza muy rápidamente en la fase líquida. Esto es físicamente aceptable pues la fase líquida se encuentra a la temperatura de fusión $\theta_f = 0$ y el calor latente ℓ es pequeño, con lo cual la energía que se libera al solidificar un trozo de material es despreciable. Además, la temperatura $\theta(x,t,\ell)$ decrece hacia el límite $\theta(x,t,0)$, dado por:

$$(33) \quad \theta(x,t,0) = \lim_{\ell \rightarrow 0^+} \theta(x,t,\ell) = -B \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$$

que resulta ser la solución del siguiente problema de conducción de calor para la fase sólida:

$$(34) \quad \begin{cases} a^2 u_{xx} = u_t, & x > 0, \quad t > 0 \quad (a^2 = \frac{k}{\rho c}) \\ u(0,t) = -B, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

Por otra parte, se obtienen las siguientes estimaciones:

LEMA 5.

$$i) \quad s(t,\ell) \sim 2a \sqrt{t \log \frac{1}{\ell}} \quad \text{para cada } t > 0, \text{ cuando } \ell \rightarrow 0^+.$$

Más aún, se tiene la doble estimación (36) y (37) para el coeficiente ξ_ℓ .

$$(35) \quad ii) \quad 0 < \theta(x,t,\ell) - \theta(x,t,0) < \frac{\ell}{c}, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0.$$

DEMOSTRACION.

i) Por definición de ξ_ℓ y de la desigualdad (29 i) se tiene $Bc/\ell = \sqrt{\pi} E(\xi_\ell) > \exp(\xi_\ell^2) - 1$, de donde surge la acotación:

$$(36) \quad \xi_\ell < \left[\log \left(1 + \frac{Bc}{\ell} \right) \right]^{1/2}.$$

Además, se tiene

$$\frac{Bc}{\ell} = \sqrt{\pi} E(\xi_\ell) < \sqrt{\pi} \left[\log\left(1 + \frac{Bc}{\ell}\right) \right]^{1/2} \exp(\xi_\ell^2)$$

obteniéndose de este modo una segunda acotación para ξ_ℓ , dada por:

$$(37) \quad \xi_\ell > \left\{ \log\left(\frac{Bc}{\ell\sqrt{\pi}}\right) - \frac{1}{2} \log \log\left(1 + \frac{Bc}{\ell}\right) \right\}^{1/2}.$$

ii) Por definición y usando (29) se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 < B f\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right) \left[\frac{1}{f(\xi_\ell)} - 1 \right] &= \theta(x, t, \ell) - \theta(x, t, 0) < \\ < B \frac{\operatorname{erfc}(\xi_\ell)}{f(\xi_\ell)} < \frac{B}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\xi_\ell^2)}{\xi_\ell f(\xi_\ell)} &= \frac{\ell}{c} \end{aligned}$$

con lo cual se deduce la desigualdad (35). ■

F) En [34], se plantea un simple modelo de zona pastosa para el problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase, el cual admite una solución explícita. El término de zona pastosa se refiere a una zona donde la fase sólida y la líquida coexisten, la cual proviene de la forma compleja en que el material líquido se solidifica. Esta zona puede ser muy larga o muy corta, dependiendo del material y de las condiciones bajo las cuales se solidifica.

Se considera un material unidimensional semi-infinito $x > 0$ que se encuentra inicialmente en estado líquido a su temperatura de fusión θ_f . A partir del instante inicial, se impone una temperatura $\theta_0 < \theta_f$, en el borde $x = 0$, con lo cual el proceso de solidificación comienza pudiendo ser distinguidas tres regiones distintas:

i) La fase líquida, a temperatura $\theta = \theta_f$, se encuentra en la región $x \geq r(t)$, $t > 0$.

ii) La fase sólida, a temperatura $\theta < \theta_f$, se encuentra en la región $0 \leq x \leq s(t)$, $t > 0$, donde $s(t) \leq r(t)$.

iii) La región pastosa ocupa la región $s(t) \leq x \leq r(t)$, $t > 0$, a la temperatura $\theta = \theta_f$. Esta región es isotérmica y se hacen dos hipótesis sobre su estructura:

a) El material en la zona pastosa contiene una fracción fija $\epsilon \ell$ ($0 < \epsilon < 1$, constante) del calor latente de fusión ℓ por unidad de masa.

b) El ancho de la zona pastosa es inversamente proporcional al gradiente de la temperatura en $x = s(t)$, llamando con $\gamma > 0$ a dicha constante de proporcionalidad ($[\gamma] = \text{temperatura}$).

EJERCICIO 7.

i) Utilizando un método análogo a la deducción de la condición de Stefan (Ver I-Apéndice 2), se obtiene:

$$(38) \quad k\theta_x(s(t),t) = \rho l [\epsilon \dot{s}(t) + (1-\epsilon) \dot{r}(t)], \quad t > 0.$$

ii) Además se tiene:

$$(39) \quad \theta_x(s(t),t) (r(t) - s(t)) = \gamma, \quad t > 0.$$

Por lo tanto, de acuerdo al modelo anterior, el problema consiste en hallar las fronteras libres $s = s(t)$, $r = r(t)$ y la temperatura $\theta = \theta(x,t)$, definida por (I-1), de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$(40) \quad \begin{cases} \text{(I-2i, ii, iii), (38), (39)} \\ s(0) = r(0) = 0. \end{cases}$$

EJERCICIO 8.

Las funciones $\theta(x,t)$, $s(t)$ y $r(t)$, que satisfacen el problema (40), pueden encontrarse a través del método de semejanza como:

$$(41) \quad \begin{cases} \theta(x,t) = \theta_0 + \frac{(\theta_f - \theta_0)}{\text{erf}(\xi)} \text{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2\xi a\sqrt{t}, \quad r(t) = 2\mu a\sqrt{t} \end{cases}$$

donde:

$$(42) \quad \mu = \xi + \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2(\theta_f - \theta_0)} \text{erf}(\xi) \exp(\xi^2)$$

y ξ es la única solución de la ecuación:

$$(43) \quad D(x) = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0$$

con

$$(44) \quad \begin{cases} D(x) = x \text{erf}(x) \exp(x^2) + \frac{\gamma(1-\epsilon)\sqrt{\pi}}{2(\theta_f - \theta_0)} [\exp(x^2) \text{erf}(x)]^2 \\ \text{Ste} = \frac{c(\theta_f - \theta_0)}{l} : \text{número de Stefan.} \end{cases}$$

OBSERVACION 6.

El clásico modelo de Lamé-Clapeyron para el problema de Stefan a una fase se obtiene haciendo:

$$(45) \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = 0.$$

EJERCICIO 9.

Si el número de Stefan es pequeño, entonces una solución aproximada para ξ, μ viene dada por:

$$(46) \quad \xi = \left\{ \frac{\text{Ste}}{2[1+\gamma(1-\epsilon)/(\theta_f-\theta_o)]} \right\}^{1/2}, \quad \mu = \xi[1+\gamma/(\theta_f-\theta_o)]. \quad \blacksquare$$

G) A continuación se analizará el caso de un líquido super-enfriado [4]. Se supone que el cuerpo semi-infinito $x > 0$ se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme θ_i , con $\theta_i < \theta_f$ (temperatura de fusión), y que la solidificación comienza a la temperatura θ_f en el borde $x = 0$ y se mueve hacia la derecha. El problema consiste en hallar la frontera libre $s = s(t)$ y la temperatura $\theta = \theta(x, t)$, definida por:

$$(47) \quad \theta(x, t) = \begin{cases} \theta_f & \text{si } 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \theta(x, t) < \theta_f & \text{si } x > s(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 \theta_{xx} = \theta_t, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ \theta(x, 0) = \theta_i, \quad x > 0 \\ \theta(s(t), t) = \theta_f, \quad t > 0 \\ k \theta_x(s(t), t) = -\rho l \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ s(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde los coeficientes térmicos k, ρ, l , $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ son los correspondientes a la fase líquida. Entonces se tiene el siguiente resultado:

EJERCICIO 10.

Si $\text{Ste} = \frac{c(\theta_f - \theta_i)}{l} < 1$, entonces la solución está dada por:

$$(49) \quad \theta(x, t) = \theta_i + (\theta_f - \theta_i) \frac{\text{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)}{\text{erfc}(\xi)}, \quad s(t) = 2a\xi\sqrt{t}$$

donde ξ es la única solución de la ecuación:

$$(50) \quad G(x) = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

EJERCICIO 11.

i) Verificar que si la temperatura inicial de un líquido super-

enfriado es uniforme e igual a $-h$ con $0 < h < 1$, entonces

$$(51) \quad \begin{cases} u(x,t) = -h + \frac{h}{\operatorname{erfc}(\sigma)} \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right), \\ s(t) = 1 - 2\sigma\sqrt{t} \end{cases}$$

es solución del siguiente problema en variables adimensionalizadas [13]:

$$(52) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < s(t), & 0 < t < T = \frac{1}{4\sigma^2} \\ u(x,0) = -h, & 0 \leq x < 1 \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t < T \\ u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t), & 0 < t < T \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

donde σ es la única solución de la ecuación.

$$(53) \quad G(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

ii) Analizar $u(0,t)$ y $u_x(0,t)$. ■

H) Un ejemplo de solución exacta con datos no constantes está dado por [17]:

EJERCICIO 12.

Verificar que

$$(54) \quad \theta(x,t) = W\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}\right), \quad s(t) = M\sqrt{t+1} \quad (M > 0)$$

es solución del problema (I-9 bis), donde

$$(55) \quad \begin{cases} W(z) = A_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\right) - A_2 \\ A_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} M \exp(M^2/4), \quad A_2 = \sqrt{\pi} G\left(\frac{M}{2}\right) \end{cases}$$

con

$$(56) \quad \begin{cases} h(x) = W(x), \quad S(0) = M \text{ (en lugar de } s(0) = 1) \\ f(t) = W(0) = A_1 - A_2 = \sqrt{\pi} E\left(\frac{M}{2}\right) \end{cases}$$

estando E y G definidas por (3) y (28) respectivamente.

II. LA SOLUCION DE NEUMANN DEL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A

A) Se considera el problema de fusión de un material semi-infinito $x > 0$ que inicialmente se encuentra a temperatura inicial $\theta_i = -C < \theta_f$ y que en el borde fijo $x = 0$ es calentado a una temperatura $\theta_o = B > \theta_f$

Sin pérdida de generalidad, se supone que $\theta_f = 0$ (si no, se realiza una traslación de la escala de temperatura). Se supone también que la densidad de masa ρ es común a ambas fases. El problema consiste en hallar la frontera libre $s=s(t)$ y la temperatura $\theta=\theta(x,t)$, definida por (I-4), de manera que se satisfagan las condiciones (I-5i-viii).

EJERCICIO 13.

Si θ_1, θ_2, s es la solución de (I-5) entonces se tiene (utilizar el principio del máximo):

- i) $-C < \theta_1(x,t) < 0$, $x > s(t)$, $t > 0$
- ii) $0 < \theta_2(x,t) < B$, $0 < x < s(t)$, $t > 0$
- iii) $\theta_{2_x}(s(t),t) < 0$, $\theta_{1_x}(s(t),t) < 0$, $\forall t > 0$.

Utilizando el método de semejanza, se obtiene el resultado siguiente:

LEMA 5.

La solución del problema (I-5) está dada por:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(x,t) = B - \frac{B}{\operatorname{erf}(\sigma/a_2)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0 \\ \theta_1(x,t) = -C + \frac{C}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad x \geq s(t), \quad t > 0 \\ s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad \left(a_2^2 = \frac{k_2}{\rho c_2}, \quad a_1^2 = \frac{k_1}{\rho c_1}\right) \end{array} \right.$$

siendo σ la única solución de la ecuación:

$$(58) \quad F(x) = x, \quad x > 0$$

donde

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{B k_2}{\rho \lambda a_2 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{x}{a_2}\right) - \frac{C k_1}{\rho \lambda a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{x}{a_1}\right) \\ F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}, \quad F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)} \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION.

Se propone como solución del problema (I-5) a:

$$(60) \quad \begin{cases} \theta_1(x,t) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) & , \quad s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \\ \theta_2(x,t) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

donde las cinco constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \sigma$ deben determinarse usando las condiciones (I-2 iii-vii) las cuales imponen las siguientes ecuaciones:

$$(61) \quad \begin{cases} B = \alpha_2 & , \quad 0 = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) \\ -C = \alpha_1 + \beta_1 & , \quad 0 = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) \\ \frac{k_1 \beta_1}{a_1} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a_1^2}\right) - \frac{k_2 \beta_2}{a_2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a_2^2}\right) = \rho l \sigma \sqrt{\pi} . \end{cases}$$

Eliminando las constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ en función de σ se tiene:

$$(62) \quad \begin{cases} \alpha_1(\sigma) = C \frac{\operatorname{erf}(\sigma/a_1)}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} & , \quad \beta_1(\sigma) = \frac{-C}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} \\ \alpha_2(\sigma) = B & , \quad \beta_2(\sigma) = \frac{-B}{\operatorname{erf}(\sigma/a_2)} \end{cases}$$

donde σ debe satisfacer la ecuación (58), la cual tiene única solución debido a las propiedades de la función F que se detallan en el Ejercicio 14 vii.

EJERCICIO 14.

Sean las siguientes funciones:

$$(63) \quad \begin{cases} f(x) = \operatorname{erf}(x) & , \quad H(x) = \frac{f'(x)}{1-f(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_1(x) \\ G(x) = H(x) - 2x . \end{cases}$$

Se tienen las siguientes propiedades:

$$\text{i) } H(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad H(+\infty) = +\infty \quad , \quad H(x) > 0 \quad , \quad \forall x > 0$$

$$\text{ii) } G(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad G(+\infty) = 0$$

$$\text{iii) } H'(x) = G(x) H(x) \quad , \quad G'(x) = H'(x) - 2$$

$$\text{iv) } G(x) > 0, \forall x > 0$$

$$\text{v) } F'_1(x) > 0, \forall x > 0$$

$$\text{vi) } F_2(0^+) = +\infty, F_2(+\infty) = 0, F'_2(x) < 0, x > 0.$$

$$\text{vii) } F(0^+) = +\infty, F(+\infty) = -\infty, F'(x) < 0, \forall x > 0.$$

EJERCICIO 15.

Hallar la solución del problema (I-5) para el caso $\theta_f \neq 0$.

OBSERVACION 7.

La solución (57) (ver también Ejercicio 15) al problema de Stefan unidimensional a dos fases (I-5) es conocida como *solución de Neumann* [3,51].

A continuación se plantearán dos problemas que pueden resolverse con una metodología análoga a la de la solución de Neumann [3,4].

EJERCICIO 16.

Una región de hielo semi-infinita $x < 0$, a temperatura uniforme θ_g , es puesta inmediatamente en contacto con una región de agua semi-infinita $x > 0$, a temperatura uniforme θ_e . El punto de contacto toma rápidamente la temperatura de fusión θ_f con $\theta_g < \theta_f < \theta_e$.

Además, el borde extremo $x = -\infty$ del hielo es mantenido a θ_g y el borde extremo $x = +\infty$ del agua a θ_e . Hallar las temperaturas de ambas fases y la frontera libre que las separa.

EJERCICIO 17.

Se supone que la región $x < 0$ es inicialmente un cuerpo sólido de constantes $\rho_0, c_0, k_0, \alpha_0$ a la temperatura uniforme 0 y que la región $x > 0$ es inicialmente líquido de constantes ρ, c_2, k_2, α_2 a la temperatura uniforme V . Se supone que la temperatura del cambio de fase de la región $x > 0$ es θ_f con $0 < \theta_f < V$, y que las constantes características de la respectiva fase sólida son ρ, c_1, k_1, α_1 .

Hallar las temperaturas $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ de las regiones $x < 0, 0 < x < s(t), x > s(t)$ respectivamente, donde $x = s(t)$ representa la posición de la frontera libre de separación entre las fases sólida y líquida, existentes en la región $x > 0$.

OBSERVACION 8.

Existen ciertos materiales que cambian su estado de agregación

con cambios relativamente pequeños de su energía interna, lo que se traduce en que su calor latente de cambio de fase es despreciable. Es te caso se da en las dispersiones coloidales de materiales poliméricos en agua, conocidos comúnmente como *látex*. Un caso particular interesante es aquel de los *látex termosensibles*, que han sido hechos termosensibles (es decir, capaces de gelificarse por un aumento de temperatura) por la adición de ciertos ingredientes. La solución de este proceso se obtiene haciendo $\lambda = 0$ en la solución de Neumann para el problema de Stefan a dos fases [15] (ver también [31]).

Más aún, en [7], se da una expresión para los coeficientes térmicos del material, para la cual se obtiene que la solución al caso $\lambda = 0$ da la solución al caso $\lambda > 0$. ■

B) Se considera el caso de un sólido finito $(0, x_0)$ que inicialmente se encuentra a la temperatura $-C < \theta_f = 0$ y con el extremo $x = x_0$, aislado térmicamente. Entonces cabe realizarse la siguiente pregunta [32]: ¿Si en el borde $x = 0$, el sólido es calentado a una temperatura $B > 0$, entonces cuándo la solución correspondiente al sólido semi infinito $(0, +\infty)$ es aplicable al caso del sólido finito $(0, x_0)$?

La respuesta es afirmativa si la temperatura de la fase sólida en el extremo $x = x_0$ coincide con la temperatura inicial; por lo tanto, para que se tenga $\theta_1(x_0, t) \approx -C$ es necesario y suficiente que sea $\text{erfc}(x_0/2a_1\sqrt{t}) \approx 0$, es decir:

$$(64) \quad \text{erf}\left(\frac{x_0}{2a_1\sqrt{t}}\right) \approx 1 \quad .$$

Teniendo presente que se tiene $\text{erf}(x) \approx 1, \forall x \geq 2$, se deduce que la respuesta será afirmativa cuando se tenga que, $x_0/2a_1\sqrt{t} \geq 2$, con lo cual, la aproximación será correcta para tiempos t que verifiquen:

$$(65) \quad t \leq \frac{x_0^2}{16a_1^2} \quad . \quad \blacksquare$$

C) Se considera el caso estacionario del problema de Stefan a dos fa ses correspondiente a un cuerpo unidimensional de longitud finita, el cual será representado por el intervalo $(0, x_0)$ con $x_0 > 0$. Se supone que la temperatura de cambio de fase es nula. Se analizarán dos ca-

dos diferentes:

CASO 1).

La temperatura en el borde $x = 0$ es $B > 0$ y en el borde $x = x_0$ es $-C < 0$. Con estas imposiciones el problema es siempre a dos fases, con la fase líquida en la parte izquierda y la fase sólida en la parte derecha, estando ambas fases separadas por la frontera libre $x = s$, con $0 < s < x_0$. La formulación matemática de este problema, está dada por: Hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ y la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida por:

$$(66) \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_2(x) > 0 & \text{si } 0 < x < s \\ 0 & \text{si } x = s \\ \theta_1(x) < 0 & \text{si } s < x < x_0 \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(67) \quad \begin{cases} \text{i)} & \theta_2''(x) = 0, x \in (0, s) \quad ; \quad \theta_1''(x) = 0, x \in (s, x_0) \\ \text{ii)} & \theta_1(s) = \theta_2(s) = 0, \quad k_1 \theta_1'(s) = k_2 \theta_2'(s) \\ \text{iii)} & \theta_2(0) = B > 0 \quad , \quad \theta_1(x_0) = -C < 0 \quad . \end{cases}$$

EJERCICIO 18.

Si se realiza el cambio de función incógnita [41]

$$(68) \quad u(x) = k_2 \theta^+(x) - k_1 \theta^-(x) \quad , \quad 0 < x < x_0$$

donde θ^+ y θ^- representan respectivamente la parte positiva y negativa de la función θ , entonces el problema (67) se reduce al siguiente:

$$(69) \quad \begin{cases} u'' = 0 \quad , \quad x \in (0, x_0) \\ u(0) = k_2 B > 0, \quad u(x_0) = -k_1 C < 0. \end{cases}$$

Además, θ puede reencontrarse a través de la relación:

$$(70) \quad \theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^-$$

OBSERVACION 9.

La frontera libre $x = s$ del problema (67) ha desaparecido en la nueva formulación (69). Más aún, puede ser obtenida a través de la

función u , pues se tiene la siguiente equivalencia:

$$(71) \quad u(s) = 0 \iff \theta(s) = 0.$$

EJERCICIO 19.

i) Obtener la solución de (69) y por ende deducir que la solución del problema (67) está dada por:

$$(72) \quad s = \frac{e_0}{1+e_0} x_0, \quad e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C}$$

$$(73) \quad \theta(x) = \begin{cases} \frac{B}{s} (s-x) & \text{si } 0 \leq x \leq s \\ \frac{-C}{x_0-s} (x-s) & \text{si } s \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

ii) Verificar directamente que (72) y (73) es la solución del problema original (67).

CASO 2).

En el borde $x = 0$ se tiene una temperatura $B > 0$ y en el borde $x = x_0$ se tiene un flujo de calor saliente $h > 0$. Por lo tanto, el cuerpo pierde energía a través del borde $x = x_0$ con lo cual su temperatura será inferior del valor B . Con estas imposiciones, en general, el problema no es a dos fases. Se verá que el problema será a dos fases si h verifica una cierta desigualdad. La formulación matemática de este problema está dada por: Hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ (si existe) y la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida por (66), de manera que se satisfagan las siguientes condiciones (67 i, ii, iii bis), a quien se lo llamará problema (67 bis), donde:

$$(67 \text{ iiibis}) \quad \begin{cases} -k_2 \theta'_2(x_0) = h > 0 & \text{si } \theta(x_0) \geq 0 \\ -k_1 \theta'_1(x_0) = h > 0 & \text{si } \theta(x_0) < 0. \end{cases}$$

EJERCICIO 20.

Utilizar el principio del máximo para ecuaciones elípticas para deducir que:

$$(74) \quad \theta(x) < B, \quad x \in (0, x_0).$$

EJERCICIO 21. [42]:

i) Si se realiza el cambio de función incógnita (68), entonces el problema (67 bis) se reduce al siguiente:

$$(75) \quad \begin{cases} u''(x) = 0 & , \quad x \in (0, x_0) \\ u(0) = k_2 B > 0 & , \quad -u'(x_0) = h > 0. \end{cases}$$

ii) La solución de (75) está dada por:

$$(76) \quad u(x) = -hx + k_2 B.$$

iii) El Caso 2) es un problema a dos fases si y sólo si

$$(77) \quad h > \frac{k_2 B}{x_0} .$$

iv) Más aún, si la desigualdad (77) se verifica, entonces la solución del problema (67 bis) está dada por:

$$(78) \quad s = \frac{k_2 B}{h}$$

$$(79) \quad \theta(x) = \begin{cases} B(1 - \frac{x}{s}) & \text{si } 0 \leq x \leq s \\ -\frac{k_2 B}{k_1} (\frac{x}{s} - 1) & \text{si } s \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

v) Si $h \leq \frac{k_2 B}{x_0}$, entonces el Caso 2) es sólo un problema estacionario de conducción del calor para la fase líquida, cuya temperatura viene dada por:

$$(80) \quad \theta(x) = B - \frac{h}{k_2} x \quad , \quad x \in [0, x_0].$$

vi) Verificar directamente que (78) y (79) es la solución del problema original (67 bis).

OBSERVACION 10.

Una condición suficiente para que el problema de Stefan sea a dos fases es que la temperatura impuesta sobre la superficie Γ del material (en nuestro caso unidimensional, Γ está representada por $\Gamma = \{0, x_0\}$) tome valores de signo contrario (siempre que la temperatura de cambio de fase sea 0). El Caso 2), con $h > \frac{k_2 B}{x_0}$, nos indica que dicha condición no es necesaria.

Además, esta idea de obtener una desigualdad para el flujo de ca

lor será utilizada más adelante para el problema de evolución de Stefan a dos fases, obteniéndose de este modo una propiedad para la solución de Neumann [43].

EJERCICIO 22 (Generalización del Caso 2)).

Se supone que el material tiene una fuente de energía interna $g = g(x)$ por unidad de volumen y de tiempo.

i) El problema consiste en hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ (si existe) y la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida por (66), de manera que se satisfagan las siguientes condiciones (67 ibis, ii, iiibis), a quien se lo llamará problema (P), donde:

$$(67 \text{ ibis}) \quad \begin{cases} -k_2 \theta_2''(x) = g(x) & \text{si } x \in (0, s) \\ -k_1 \theta_1''(x) = g(x) & \text{si } x \in (s, x_0). \end{cases}$$

ii) Si se realiza el cambio de función incógnita (68), entonces el problema (P) se reduce al siguiente:

$$(81) \quad \begin{cases} -u''(x) = g(x), & x \in (0, x_0) \\ u(0) = k_2 B > 0, & -u'(x_0) = h > 0, \end{cases}$$

cuya solución viene dada por:

$$(82) \quad u(x) = k_2 B + \left(\int_0^{x_0} g(t) dt - h \right) x - \int_0^x (x-t) g(t) dt.$$

iii) Si $g \leq 0$ en $(0, x_0)$, es decir existe consumo de energía en el interior del material, entonces el problema (P) es a dos fases si y sólo si

$$(83) \quad h > \frac{k_2 B}{x_0} + \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} t g(t) dt.$$

Más aún, la frontera libre es el único elemento $s \in (0, x_0)$ que satisface la ecuación $u(s) = 0$.

iv) Resolver el problema (P) cuando:

a) $g \geq 0$ en $(0, x_0)$, es decir existe generación de energía en el interior del material.

b) g adopta valores de signo arbitrario.

OBSERVACION 11.

El ejercicio anterior generaliza resultados obtenidos en [42].

EJERCICIO 23.

Obtener la desigualdad (77) de una forma más simple, planteando el siguiente problema de conducción del calor estacionario (analizar la analogía con (75)):

$$(75 \text{ bis}) \quad \begin{cases} T''(x) = 0 & , \quad x \in (0, x_0) \\ T(0) = B > 0 & , \quad -k_2 T'(x_0) = h > 0 \end{cases}$$

y observando que se tiene:

$$(77) \quad \Leftrightarrow T(x_0) < 0.$$

Nótese que este método permite la obtención de la desigualdad (77) pero no da la expresión explícita de las temperaturas correspondientes a las fases líquida y sólida respectivamente. ■

D) Se considera un material semi-infinito $x > 0$ que se encuentra a temperatura inicial uniforme $\theta_i = -C < \theta_f = 0$ y que en el borde fijo $x = 0$ se le entrega energía por unidad de área transversal y de tiempo a través de un flujo de calor $q(t) \leq 0$ para $t > 0$.

a) Si $q(t) = -q < 0$ (constante), entonces la fusión no comienza inmediatamente a partir del instante inicial $t = 0$, pues la temperatura $\theta(0, t)$ deberá pasar de $\theta = -C < 0$ a $\theta = 0 (= \theta_f)$ y para ello empleará un cierto tiempo $t_0 > 0$.

Para deducir este hecho se considera el siguiente problema de conducción del calor para la fase sólida inicial:

$$(84) \quad \begin{cases} \text{i) } \alpha \theta_{xx} = \theta_t & , \quad x > 0, \quad t > 0 \\ \text{ii) } \theta(x, 0) = -C < 0, & \quad x > 0 \\ \text{iii) } k \theta_x(0, t) = -q < 0 & , \quad t > 0. \end{cases}$$

La solución de (84) está dada por (Ver ejercicio 14ii del Curso Ilo C1):

$$(85) \quad \begin{cases} \theta(x, t) = -C + \frac{2q}{k} \sqrt{at} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\ \text{con } \theta(0, t) = -C + \frac{2q}{k} \sqrt{\frac{at}{\pi}} & , \end{cases}$$

con lo cual, se tiene:

$$(86) \quad \theta(0, t_0) = 0 \iff t_0 = \frac{\pi k^2 C^2}{4\alpha q^2}$$

obteniéndose de este modo lo anunciado anteriormente.

b) Si $q(t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}$ ($h_0 > 0$), entonces la fusión comienza inmediatamente a partir del instante inicial $t = 0$ si h_0 verifica una cierta desigualdad; en caso contrario, se tiene sólo un problema de conducción del calor en la fase sólida inicial.

En efecto, se considera el problema (84 bis) (es el problema (84) reemplazando la condición (84 iii) por la (84 iii bis)) donde:

$$(84 \text{ iiibis}) \quad k \theta_x(0, t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0,$$

cuya solución está dada por:

$$(87) \quad \begin{cases} \theta(x, t) = -C + \frac{h_0 \sqrt{\alpha\pi}}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ \text{con } \theta(0, t) = -C + \frac{h_0 \sqrt{\alpha\pi}}{k} \end{cases}$$

y que curiosamente tiene la propiedad de poseer en el borde fijo $x = 0$ una temperatura constante. Por lo tanto, el material sufrirá inmediatamente un cambio de fase si y sólo si

$$(88) \quad \theta(0, t) > 0 \iff h_0 > \frac{kC}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

donde k , α son los respectivos coeficientes térmicos correspondientes a la fase sólida.

Por otra parte, si $h_0 \leq kC/\sqrt{\alpha\pi}$ el material permanece siempre en su fase sólida (no existe cambio de fase) con una temperatura $\theta(x, t)$ dada por (87).

Esta metodología fue utilizada en [35]; previamente, la desigualdad (88) fue obtenida en [43] por otro método más extenso pero que permite hallar la temperatura de las fases líquida y sólida, además de la frontera libre que las separa. En efecto, se considera el problema de hallar la frontera libre $s = s(t)$, definida para $t > 0$, y la temperatura $\theta = \theta(x, t)$, definida por (I-4), de manera que se satisfagan las condiciones (I-5 bis) (la condición (I-5iv) es reemplazada por (I-5ivbis); además se supone que $\theta_f = 0$ y que $\theta_i = -C < 0$), donde:

$$(I-5ivbis) \quad k_2 \theta_{2x}(0, t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0 \quad (h_0 > 0).$$

Se obtiene el siguiente resultado [43]:

LEMA 6.

i) Si h_0 verifica la desigualdad

$$(89) \quad h_0 > \frac{Ck_1}{a_1 \sqrt{\pi}}$$

entonces la solución del problema (I-5 bis) está dada por:

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(x, t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \right), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0 \\ \theta_1(x, t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right), \quad x \geq s(t), \quad t > 0 \\ s(t) = 2 \omega \sqrt{t} \quad \left(a_2^2 = \frac{k_2}{\rho c_2}, \quad a_1^2 = \frac{k}{\rho c_1} \right) \end{array} \right.$$

donde

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1(\omega) = C \frac{\operatorname{erf}(\omega/a_1)}{\operatorname{erfc}(\omega/a_1)}, \quad B_1(\omega) = \frac{-C}{\operatorname{erfc}(\omega/a_1)} \\ A_2(\omega) = \frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2} \operatorname{erf}(\omega/a_2), \quad B_2(\omega) = -\frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2}, \end{array} \right.$$

ω es la única solución de la ecuación:

$$(92) \quad F_0(x) = x, \quad x > 0$$

con

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(x) = \frac{h_0}{\rho l} \exp(-x^2/a_2^2) - \frac{Ck_1}{\rho l a_1 \sqrt{\pi}} F_1(x/a_1) \\ F_1 \text{ función definida en (59)}. \end{array} \right.$$

(ii) Si $h_0 \leq \frac{Ck}{a_1 \sqrt{\pi}}$, (I-5bis) representa sólo un problema de

conducción del calor para la fase sólida, cuya temperatura está dada por

$$(94) \quad \theta(x, t) = \theta_1(x, t) = -C + \frac{h_0 a_1 \sqrt{\pi}}{k_1} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right), \quad x > 0, t > 0.$$

DEMOSTRACION.

EJERCICIO 24.

(Obsérvese que (89) es equivalente a $F_0(0^+) > 0$).

EJERCICIO 25.

Verificar que el problema (I-5bis) con $h_0 = \frac{Ck_1}{a_1\sqrt{\pi}}$ corresponde al problema (I-5) cuando el calor latente de fusión $\ell \rightarrow +\infty$.

LEMA 7.

Si h_0 verifica la desigualdad (89), entonces los problemas (I-5) y (I-5bis) son equivalentes. Más aún, para el coeficiente σ de la frontera libre $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ de la solución de Neumann correspondiente al problema (I-5), se deduce la propiedad siguiente:

$$(95) \quad \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) < \frac{B}{C} \sqrt{\frac{k_2 c_2}{k_1 c_1}} .$$

DEMOSTRACION.

Como h_0 verifica la desigualdad (89), entonces la solución del problema (I-5bis) está dada por (90). Sea B_0 la temperatura correspondiente en el borde fijo $x = 0$, es decir:

$$(96) \quad B_0 = A_2(\omega) = \frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2} \operatorname{erf}(\omega/a_2) .$$

Como $B_0 > 0$, se puede considerar ahora el problema (I-5) tomando $B = B_0$, cuya solución viene dada por (57), reemplazando B por B_0 . Obsérvese que se tiene

$$(97) \quad A_1(x) = \alpha_1(x) , \quad B_1(x) = \beta_1(x) , \quad \forall x > 0$$

independientemente de la relación existente entre B_0 y B .

Por otra parte, se obtiene que:

$$(98) \quad \sigma = \omega .$$

En efecto, como vale $\beta_2(\omega) = -\frac{B_0}{\operatorname{erf}(\omega/a_2)} = -\frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2}$,

se tiene que:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{k_2 B_0}{\rho \ell a_2 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\omega}{a_2}\right) - \frac{Ck_1}{\rho \ell a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\omega}{a_1}\right) = \\ &= \frac{h_0}{\rho \ell} \exp(-\omega_2/a_2^2) - \frac{Ck_1}{\rho \ell a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\omega}{a_1}\right) = F_0(\omega) = \omega , \end{aligned}$$

y de la unicidad de σ en la ecuación (58), se deduce entonces la igualdad (98). Más aún, se tiene

$$(99) \quad A_2(x) = \alpha_2(x) , \quad B_2(x) = \beta_2(x) , \quad \forall x > 0$$

con lo cual los dos problemas (I-5) y (I-5bis) son equivalentes. Por

otra parte, teniendo sólo presente el problema (I-5), esta equivalencia nos induce la desigualdad

$$(100) \quad h_o = \frac{k_2 B}{a_2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sigma/a_2)} > \frac{Ck_1}{a_1 \sqrt{\pi}}$$

que resulta ser (95).

OBSERVACION 12.

La desigualdad (95) es independiente del calor latente de fusión y tiene sólo sentido físico en el caso en que el término de la derecha sea menor que uno. ■

E) A continuación, y para no hacer tan extenso el presente cursillo, se dará una lista no completa de diversos problemas de tipo Stefan, en los cuales el conocimiento explícito de la solución exacta ha jugado un papel preponderante (más referencias sobre el tema podrán encontrarse en [44]):

- i) Analogía al método de semejanza e inmovilización del dominio [30].
- ii) Cambio de densidad en la transición de fase ($\rho_1 \neq \rho_2$) [2, 4, 6, 29].
- iii) Acoplamiento de la temperatura y de la concentración (Cristalización de una aleación binaria) [29, 35, 50, 56].
- iv) Solidificación de aleaciones [47, 48, 53].
- v) Solidificación y fusión de un cuerpo compuesto [12].
- vi) Presencia de multifases [29, 52, 54, 55].
- vii) Procesos de transferencia de calor y materia con cambio de fase en un medio poroso [5, 19-21, 24, 25].
- viii) Absorción de un gas por un sólido [14].
- ix) Oxidación del zirconio [9, 10 (interacción entre UO_2 y Zr), (Ver conferencia CA1)].
- x) Determinación de coeficientes térmicos desconocidos [36, 45 (Ver conferencia CA5), 46 (incluye una región pastosa sólido-líquido)].
- xi) Con coeficientes variables [6, 49].

Además, caben citarse los siguientes libros [1, 4, 8, 11, 16, 22, 23, 26, 29, 40] y el trabajo de revisión [28].

F) Para finalizar, se dará la formulación de dos problemas de frontera libre para la ecuación del calor o de la difusión:

F1) El *problema de Verigin* [29, p.61] estudia la filtración de líquidos en medios porosos. Sean $u_1 = u_1(x, t)$ y $u_2 = u_2(x, t)$ las presiones de dos líquidos inmiscibles, en contacto entre sí en el plano $x = s(t)$, en movimiento en un medio de porosidad $m > 0$. El problema consiste en hallar las funciones $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$, $s = s(t)$ de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{1t} = a_1^2 u_{1xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ u_{2t} = a_2^2 u_{2xx}, \quad s(t) < x < x_0, \quad t > 0 \\ u_1(0, t) = f_1(t), \quad u_2(x_0, t) = f_2(t), \quad t > 0 \\ u_1(x, 0) = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq b \\ u_2(x, 0) = h_2(x), \quad b \leq x \leq x_0 \\ u_1(s(t), t) = u_2(s(t), t), \quad t > 0 \\ m \dot{s}(t) = -k_1 u_{1x}(s(t), t) = -k_2 u_{2x}(s(t), t), \quad t > 0 \\ s(0) = b \in [0, x_0]. \end{array} \right.$$

EJERCICIO 26.

Bajo las hipótesis

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = f_1, \quad h_2(x) = h_2 < f_1, \quad b = 0, \quad x_0 = +\infty \\ (f_2(t) \text{ y } h_1(x) \text{ no intervienen en el problema (101)}) \end{array} \right.$$

las funciones

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(x, t) = f_1 + A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\ u_2(x, t) = h_2 + B \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2\beta\sqrt{t}, \quad \beta > 0 \end{array} \right.$$

satisfacen las condiciones (101), donde las constantes A y B están

dadas, en función de β , de la manera siguiente:

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\beta) = - \frac{(f_1 - h_2) \lambda \exp(-\beta^2/a_2^2)}{g(\beta)}, B(\beta) = \frac{(f_1 - h_2) \exp(-\beta^2/a_1^2)}{g(\beta)} \\ \lambda = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}, g(x) = \exp(-\frac{x^2}{a_1^2}) \operatorname{erfc}(\frac{x}{a_2}) + \\ + \lambda \exp(-\frac{x^2}{a_2^2}) \operatorname{erf}(\frac{x}{a_1}) \end{array} \right.$$

donde β es la única solución de la ecuación:

$$(105) \quad h(x) = x, \quad x > 0$$

con

$$(106) \quad h(x) = \frac{k_2 (f_1 - h_2)}{m a_2 \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{x^2}{a_2^2})}{g(x)},$$

función que verifica las siguientes propiedades:

$$(107) \quad h(0^+) = \frac{k_2 (f_1 - h_2)}{m a_2 \sqrt{\pi}}, \quad f(+\infty) = 0, \quad f' < 0.$$

OBSERVACION 13.

Nótese la similitud entre el problema de Verigin para la teoría de la filtración de líquidos en medios porosos y el problema de Stefan para la teoría de la conducción del calor.

F2) En [27], se esquematiza el siguiente problema de frontera libre para la ecuación de la difusión, ligado a reacciones químicas veloces. Inicialmente, se tiene en la región $(0, b)$ una sustancia A con concentración $h_A = h_A(x)$ y coeficiente de difusividad α_A , y en la región (b, x_0) una sustancia B con concentración $h_B = h_B(x)$ y coeficiente de difusividad α_B . Se supone que las paredes $x = 0$ y $x = x_0$, son impermeables a dichas sustancias y que cuando se ponen en contacto se produce una determinada reacción química veloz que da lugar a un precipitado. En tal caso, se puede decir que en el plano $x = s(t)$ de separación de las dos sustancias, se tendrán concentraciones nulas mientras que entre los respectivos flujos deberá existir una relación fija β , constante que está ligada a la reacción química que

se produzca. Sean $u_A = u_A(x,t)$ y $u_B = u_B(x,t)$ las concentraciones de las respectivas sustancias. El problema puede plantearse como: Hallar las funciones $u_A = u_A(x,t)$, $u_B = u_B(x,t)$, $s = s(t)$ de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$(108) \left\{ \begin{array}{l} u_{A_t} = \alpha_A u_{A_{xx}} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ u_{B_t} = \alpha_B u_{B_{xx}} \quad , \quad s(t) < x < x_0 \quad , \quad t > 0 \\ u_{A_x}(0,t) = u_{B_x}(x_0,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u_A(x,0) = h_A(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b \\ u_B(x,0) = h_B(x) \quad , \quad b \leq x \leq x_0 \\ u_A(s(t),t) = u_B(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ \alpha_A u_{A_x}(s(t),t) = \beta \alpha_B u_{B_x}(s(t),t) \quad , \quad t > 0 \\ s(0) = b \quad . \end{array} \right.$$

OBSERVACION 14.

Nótese la analogía existente entre el problema (108) y el problema de Stefan a dos fases con calor latente de fusión nula.

REFERENCIAS

- [1] V.S.ARPACI, "Conduction heat transfer", Addison-Wesley, Massachusetts (1966).
- [2] A.B.BANCORA - D.A.TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free boundary", To appear.
- [3] M.BRILLOUIN, "Sur quelques problèmes non résolus de la Physique Mathématique classique. Propagation de la fusion", Annales de l'Inst.H.Poincaré, 1 (1930/31), 285-308.
- [4] H.S.CARSLAW - J.C.JAEGER, "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).
- [5] S.H.CHO, "An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium", Int.J.Heat Mass Transfer, 18 (1975), 1139-1142.
- [6] S.H.CHO - J.E.SUNDERLAND, "Phase change problem with temperature-dependent thermal conductivity", J.Heat Transfer, 96 C (1974), 214-217.

- [7] S.W.CHURCHILL - J.P.GUPTA, "Approximations for conduction with freezing or melting", *Int.J.Heat Mass Transfer*, 20 (1977), 1251-1253.
- [8] J.Crank, "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).
- [9] A.DENIS - E.A.GARCIA, "Diffusion in a semi-infinite system with a moving interphase considering solvent density change: Application to the oxidation of zirconium", *J.Nuclear Materials*, 96 (1981), 127-140.
- [10] A DENIS- E.A.GARCIA, "A model to describe the interaction between UO_2 and zircaloy in the temperature range 1000-1700°C", *J.Nuclear Materials*, 116(1983), 44-54.
- [11] E.R.G.ECKERT - R.M.DRAKE, Jr., "Analysis of heat and mass transfer", Mc Graw Hill, Tokyo (1972).
- [12] M. EPSTEIN, "Heat conduction in the UO_2 -cladding composite body with simultaneous solidification and melting", *Nuclear Sci.Eng.*, 51 (1973), 84-87.
- [13] A.FASANO - M.PRIMICERIO, "A critical case for the solvability of Stefan-like problems", *Math.Meth.Appl.Sci.*, 5(1983), 84-96.
- [14] E.A.GARCIA, "Modèle pour l'analyse thermogravimétrique des phénomènes d'oxydation avec desquamation", *J. Less-Common Metals*, 78(1981), 159-175.
- [15] J.A.GUZMAN, "Application of the heat transfer solution for the case of one-dimensional solidification with negligible latent heat", *Lat.Amer.J.Heat Mass Transfer*, 6(1982), 41-51.
- [16] W.JOST, "Diffusion in solids, liquids, gases", Academic Press, New York (1952).
- [17] D.KINDERLEHRER - G.STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).
- [18] G.LAME - B.P.CLAPEYRON, "Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", *Annales Chimie Physique*, 47 (1831), 250-256.
- [19] S.LIN, "An exact solution of the sublimation problem in a porous medium", *J.Heat Transfer*, 103 (1981), 165-168.
- [20] S.LIN, "An exact solution of the sublimation problem in a porous medium, Part II - With an unknown temperature and vapor concentration at the moving sublimation front", *J.Heat Transfer*, 104 (1982), 808-811.
- [22] A.V.LUIKOV, "Analytical heat diffusion theory", Academic Press New York (1968).
- [21] S.LIN, "An exact solution of the desublimation problem in a porous medium", *Int.J.Heat Mass Transfer*, 25(1982), 625-630.
- [23] V.J.LUNARDINI, "Heat transfer in cold climates" Van Nostrand

Reinhold Company, New York (1981).

- [24] M.D.MIKHAILOV, "Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front", *Int.J.Heat Mass Transfer*, 18 (1975), 797-804.
- [25] M.D.MIKHAILOV, "Exact solution for freezing of humid porous half-space", *Int. J.Heat Mass Transfer*, 19(1976), 651-655.
- [26] M.N.ÖZISIK "Heat conduction", J.Wiley, New York (1980).
- [27] M.PRIMICERIO, "Problemi a contorno libero per l'equazione della diffusione", *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 32(1973/1974), 183-206.
- [28] M.PRIMICERIO, "Problemi di diffusione a frontiera libera", *Boll. U.M.I.*, 18A (1981), 11-68.
- [29] L.I.RUBINSTEIN, "The Stefan problem", *Trans. Math. Monographs - Vol.27*, Amer, Math. Soc., Providence (1971).
- [30] A.L.RUOFF, "An alternate solution of Stefan's problem", *Quart. Appl. Math.*, 16 (1958), 197-201,
- [31] B.SHERMAN, "Limiting behavior in some Stefan problems as the latent heat goes to zero", *SIAM J.Appl. Math.*, 20(1971), 319-327.
- [32] A.D.SOLOMON, "An easily computable solution to a two-phase Stefan problem", *Solar Energy*, 23(1979), 525-528.
- [33] A.D.SOLOMON, "A note on the Stefan number in slab melting and solidification", *Letters Heat Mass Transfer*, 8(1981), 229-235.
- [34] A.D.SOLOMON - D.G.WILSON - V.ALEXIADES, "A mushy zone model with an exact solution", *Letters Heat Mass Transfer*, 9, (1982), 319-324.
- [35] A.D.SOLOMON - D.G.WILSON - V.ALEXIADES, "Explicit solutions to phase change problems", *Quart. Appl. Math.*, 41(1983), 237-243.
- [36] M.B.STAMPELLA - D.A.TARZIA, "Determinación de coeficientes desconocidos en el problema de Stefan a dos fases", *Sigma*, 8(1982), 83-98. "Determination of one or two unknown a two-phase Stefan problem", To appear.
- [37] J.STEFAN, "Über einige Probleme der theorie der Wärmeleitung" *Sitzungsberichte der Kaiserlichen akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe*, 98(1889), 473-484.
- [38] J.STEFAN, "Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere", *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe*, 98(1889), 965-983. *Annalen der Physik und Chemie*, 42(1891), 269-286.
- [39] J.STEFAN, "Über die Theorie der Eisbildung", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1(1890), 1-6.

- [40] J.SZEKELY - N.J.THEMELIS, "Rate phenomena in process metallurgy", J.Wiley, New York (1971).
- [41] D.A.TARZIA, "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27 (1979/80), 145-156.
- [42] D.A.TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28 (1980/81), 73-89.
- [43] D.A.TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two phase Stefan problem", Quart.Appl.Math., 39 (1981), 491-497.
- [44] D.A.TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981-82), 147-241.
- [45] D.A.TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J.Heat Mass Transfer, 26(1983), 1151-1157.
- [46] D.A.TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos de un material semi-infinito a través del modelo de zona pastosa planteado por Solomon-Wilson-Alexiades para el problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase", Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Tucumán, 13-15 Octubre 1983.
- [47] R.H.TIEN-G.E.GEIGER, "A heat-transfer analysis of the solidification of binary eutectic system", J.Heat Transfer, 89 C(1967), 230-234.
- [48] R.H.TIEN-V.KOUMP, "Effect of density change on the solidification of alloys", J.Heat Transfer, 92 C (1970), 11-16.
- [49] G.A.TIRSKII, "Two exact solutions of Stefan's nonlinear problem" Soviet Physics Dokl., 4(1959), 288-292.
- [50] T. TSUBAKI-B.A.BOLEY, "One-dimensional solidification of binary mixtures", Mech. Res. Comm., 4(1977), 115-122,
- [51] H.WEBER, "Die Partiellen Differential Gleichungen der Mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen", Braunwschweig (1901), T.II.
- [52] J.H.WEINER, "Transient heat conduction in multiphase media", Brit.J.Appl.Physics, 6(1955), 361-363.
- [53] T.D.WELCH-A.W.CRONENBERG, "A quantitative comparison of solidification analysis for single-component and mixed-oxide fuels" Nuclear Sci.Eng., 67(1978), 263-269.
- [54] D.G.WILSON, "Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multi-phase Stefan problems", SIAM J. Appl. Math., 35 (1978), 135-147.
- [55] D.G.WILSON, "Lagrangian coordinates for moving boundary problems", SIAM J.Appl.Math, 42(1982), 1195-1201.
- [56] D.G.WILSON-A.D.SOLOMON-V.ALEXIADES "A shortcoming of

of the explicit solution for the binary alloy solidification problem"
Letters Heat Mass Transfer, 9(1982), 421-428.

PROMAR (CONICET-UNR)
Instituto de Matemática "Beppo Levi"
Universidad Nacional de Rosario
Avenida Pellegrini 250
2000 ROSARIO - ARGENTINA

ESTUDIOS TEORICOS EN EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE

Domingo Alberto TARZIA

Continuando la Introducción del presente Seminario, en este Cursillo se realizarán estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase para un cuerpo semi-infinito con condiciones de temperatura ó flujo de calor en la frontera fija $x=0$, como ser: existencia de solución a través de varios métodos teóricos (argumento retardado, ecuación integral equivalente, proceso iterativo), unicidad de solución, dependencia monótona y estabilidad de la solución respecto de los datos, comportamiento asintótico de la frontera libre, etc..

I. EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE CON ESPECIFICACION DE TEMPERATURA EN EL BORDE FIJO.

Se estudiará el problema de Stefan unidimensional a una fase siguiente: Dado $f=f(t) \geq 0$, $h=h(x) \geq 0$ y $b \geq 0$, se quiere hallar $T > 0$ y dos funciones $s=s(t)$ y $z=z(x,t)$ de manera que el triple $\{T, s, z\}$ satisfaga las siguientes condiciones:

- (1)
- i) $z_{xx} - z_t = 0$ en $D_{T,s} = \{(x,t) / 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$
 - ii) $z(0,t) = f(t)$, $0 < t < T$
 - iii) $z(x,0) = h(x)$, $0 \leq x \leq b$
 - iv) $s(0) = b$
 - v) $z(s(t),t) = 0$, $0 < t < T$
 - vi) $z_x(s(t),t) = -\dot{s}(t)$, $0 < t < T$.

OBSERVACION 1: En el caso $b=0$ la condición (1iii) sobre h es superflua y por lo tanto puede eliminarse de la formulación del problema.

A) Se dirá que $\{T,s,z\}$ es una solución del problema (1) si y sólo si:

- i) $T > 0$.
- ii) $s \in C^1(0,T] \cap C^0[0,T]$, $s(t) > 0$ en $(0,T]$.
- iii) z es continua (excepto en un número finito de puntos de discontinuidad de f y h) y acotada en \bar{D}_T , $z_x, z_{xx}, z_t \in C^0(D_T)$, $z_x(s(t),t)$ es continua en $(0,T]$.
- iv) Se satisfacen las condiciones (1i-vi).

OBSERVACION 2: Se usará la notación D_T en lugar de $D_{T,s}$ cuando no dé lugar a confusión. En general, se supone que f y h son funciones continuas excepto en un número finito de saltos acotados (ver (H1) y (H2) en (F), punto a partir del cual se dan resultados de existencia de solución).

LEMA 1 Si $\{T,s,z\}$ es una solución de (1), entonces la condición de Stefan (1vi) es equivalente a la siguiente condición integral

$$(2) \quad \frac{s^2(t)}{2} = \frac{b^2}{2} + \int_0^b \xi h(\xi) d\xi + F(t) - \int_0^{s(t)} \xi z(\xi,t) d\xi,$$

$$(2) \quad F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

DEMOSTRACION: EJERCICIO 1 (Utilizar la fórmula (50ii) del Cursillo C1).

OBSERVACION 3: Del Lema 1 surge el hecho de que las condiciones (1vi) y (2) pueden usarse indistintamente para obtener propiedades para las soluciones del problema de Stefan (1).

B) Para datos generales $f \geq 0$, $h \geq 0$ se tiene una importante propiedad sobre el comportamiento de la frontera libre s .

LEMA 2: i) Si $f \geq 0$, $h \geq 0$, entonces la frontera libre s es una función monótona no-decreciente ($\dot{s} \geq 0$) y $z \geq 0$ en \bar{D}_T .

ii) Más aún, si $h \neq 0$ ó $f \neq 0$ en todo entorno de $t=0$, entonces s es una función monótona creciente ($\dot{s} > 0$).

DEMOSTRACION: i) Por el Principio del Máximo se tiene que $z \geq 0$ en \bar{D}_T . Utilizando el Lema de Hopf y la condición (1v) se deduce que $z_x(s(t), t) \leq 0$ y por ende $\dot{s}(t) \geq 0$. Además, si fuese $z \equiv 0$ se tendría entonces $z_x \equiv 0$, lo cual implicaría que $\dot{s} \equiv 0$. ii) Surge por el Principio del Máximo fuerte.

C) Se analizará la propiedad de la dependencia monótona de los datos según el siguiente:

TEOREMA 3 (de monotonía) : Sean $\{T_1, s_1, z_1\}$ y $\{T_2, s_2, z_2\}$ soluciones del problema (1) correspondientes a los datos (b_1, h_1, f_1) y (b_2, h_2, f_2) respectivamente, y sea $T = \min(T_1, T_2)$. Si $h_2 \neq 0$ ó $f_2 \neq 0$, entonces se tienen los siguientes

resultados:

- i) Si $b_1 < b_2$, $h_1 \leq h_2$, $f_1 \leq f_2$ entonces $s_1 < s_2$ en $[0, T]$ y $z_1 < z_2$ en D_{T, s_1} .
- ii) Si $b_1 \leq b_2$, $h_1 \leq h_2$, $f_1 \leq f_2$, $T_1 = T_2$ entonces $s_1 \leq s_2$ en $[0, T]$ y $z_1 \leq z_2$ en D_{T, s_1} .

DEMOSTRACION: i) Sea t_0 el primer valor de t para el cual se tiene que $s_1(t_0) = s_2(t_0)$; entonces $\dot{s}_2(t_0) \leq \dot{s}_1(t_0)$. Por el Principio del Máximo fuerte se tiene que $z_2(s_1(t), t) > 0$ en $(0, t_0)$ y $z_2 - z_1 > 0$ en D_{t_0, s_1} . Por el Lema de Hopf se tiene que $\dot{s}_1(t_0) - \dot{s}_2(t_0) = (z_2 - z_1)_x(s_1(t_0), t_0) < 0$, lo que resulta ser un absurdo.

ii) Para $\delta > 0$ sea $\{T, s_\delta, z_\delta\}$ la solución del problema (1) correspondiente a los datos $(b_2 + \delta, h_2, f_2)$, donde:

$$h_{2\delta}(x) = \begin{cases} h_2(x) & \text{si } 0 \leq x \leq b_2 \\ 0 & \text{si } b_2 < x \leq b_2 + \delta \end{cases}$$

Por i) se tiene que $s_1 < s_\delta$ y $s_2 < s_\delta$ en $[0, T]$ y por el Principio del Máximo se tiene que $z_\delta \geq 0$ en D_{T, s_δ} y $z_\delta - z_2 \geq 0$ en D_{T, s_2} .

Restando las respectivas versiones de (2) para (s_2, z_2) y (s_δ, z_δ) se obtiene:

$$\begin{aligned} s_\delta^2(t) - s_2^2(t) &= (b_2 + \delta)^2 - b_2^2 - 2 \int_0^{s_2(t)} \xi [z_\delta(\xi, t) - z_2(\xi, t)] d\xi - \\ &\quad - 2 \int_{s_2(t)}^{s_\delta(t)} \xi z_\delta(\xi, t) d\xi \leq (b_2 + \delta)^2 - b_2^2 = 2b_2\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

con lo cual resulta:

$$s_1^2(t) < s_\delta^2(t) \leq s_2^2(t) + 2b_2\delta + \delta^2, \quad \forall \delta > 0, \quad \forall t \in (0, T),$$

y, por ende, se obtiene $s_1(t) \leq s_2(t)$ en $[0, T]$. Por el Principio del Máximo se tiene que $z_1 \leq z_2$ en D_{T, s_1} .

OBSERVACION 4: i) Para las hipótesis de los datos (b, h, f) ,

en el Lema 3, ver más adelante los teoremas de existencia.

ii) Los resultados de los Lemas 2 y 3 están de acuerdo con la realidad física.

D) Como un corolario del Lema 3, se obtiene el siguiente resultado de unicidad:

TEOREMA 4: Existe a lo **sumo** una solución en el problema de Stefan (1).

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 2) .

E) En el caso

$$(3) \quad b=0 \quad , \quad f(t)=\theta_0 > 0$$

La solución del problema (1), que resulta ser única, está dada por (ver Cursillo C3):

$$(4) \quad \begin{cases} s(t)=2\xi \sqrt{t} \\ z(x,t)=\theta_0 - \frac{\theta_0}{\operatorname{erf}(\xi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

donde ξ es la única raíz de la ecuación:

$$(5) \quad x \exp(x^2) \operatorname{erf}(x) = \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad x > 0.$$

A continuación, se verá la existencia de solución del problema (1), para los casos $b=0$ y $b>0$, a través de los siguientes métodos: argumento retardado [3], ecuación integral equivalente [10], proceso iterativo [7].

F) Sean las siguientes hipótesis [3]:

$$(H1) \quad \begin{cases} \text{i) } b > 0 \\ \text{ii) } f, h \geq 0 \text{ son funciones continuas excepto en un} \end{cases}$$

número finito de saltos acotados;

$$(H1) \quad iii) \quad N > 0 / \quad 0 \leq h(x) \leq N(b-x) \quad , \quad \forall x \in [0, b] \quad .$$

$$(H2) \quad \left\{ \begin{array}{l} i) \quad f \text{ es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados;} \\ ii) \quad \ell, L > 0 / \quad \ell t \leq f(t) \leq Lt \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad . \end{array} \right.$$

OBSERVACION 5 [3] : Si z es una solución del problema (1i-v) para una función dada s Lipschitz en $[0, T]$, entonces bajo las hipótesis (H1) ó (H2) se tiene que $z_x(s(t), t)$ existe y es continua en $(0, T]$. Más aún, se tiene el mismo resultado si la condición de temperatura (1ii) se reemplaza por una condición de flujo $z_x(0, t) = -g(t)$.

LEMA 5: Si z es una solución del problema (1i-v) bajo las hipótesis (H1) y para una función dada s monótono no decreciente, entonces:

i) Existe una constante $A = A(b, M, N) > 0$ de manera que:

$$(6) \quad 0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t) - \rho, t) \leq A \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \rho \in (0, b)$$

donde

$$(7) \quad M = \text{Máx}_{0 \leq t \leq T} (f(t)) \quad , \quad \text{Máx}_{0 \leq x \leq b} h(x) \quad .$$

ii) Además, si $z_x(s(t), t)$ existe, se tiene que:

$$(8) \quad -A \leq z_x(s(t), t) \leq 0 \quad .$$

DEMOSTRACION : i) Sean

$$(9) \quad \begin{array}{l} A = \text{Máx}(N, \frac{M}{b}) \quad , \quad t_0 \in [0, T] \\ W(x) \equiv W(x, t_0) = A [s(t_0) - x] \quad . \end{array}$$

La función W verifica las siguientes propiedades:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{xx} - W_t = 0 \\ W(\cdot, t_0) = A \quad s(t_0) \geq Ab \geq M \geq f(t) \quad , \quad \forall t \in [0, t_0] \end{array} \right.$$

$$(10) \begin{cases} W(x, t_0) \geq A \cdot (b-x) \geq N(b-x) \geq h(x) & , \quad \forall x \in [0, b] \\ W(s(t), t_0) = A [s(t_0) - s(t)] \geq 0 & , \quad \forall t \in [0, t_0] . \end{cases}$$

Por el principio del Máximo se deduce que:

$$(11) \quad 0 \leq z(x, t) \leq W(x, t_0) \quad , \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad ,$$

y por ende (6) , pues vale $\forall t_0 \in [0, T]$.

ii) Utilizando (1v), se tiene:

$$(12) \quad -A \leq z_x(s(t_0), t_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} - \frac{z(s(t) - \rho, t_0)}{\rho} \leq 0.$$

OBSERVACION 6: La metodología utilizada en el Lema 5 para mayorar la solución z es conocida como método de las barreras lineales (debido a la forma de W) , o simplemente método de las barreras.

OBSERVACION 7: Estimaciones análogas a las de (6) y (8) se obtienen en L).

G) Método del argumento retardado [1,3] :

Para el caso $b > 0$ y para cada $\theta \in (0, b)$ se construye una familia de aproximaciones (s_θ, z_θ) , solución del problema (1 bis) en el cual se reemplazan las condiciones (1iii) y (1vi) por

$$(1iii \text{ bis}) \begin{cases} z_\theta(x, 0) = h_\theta(x) \equiv \chi_\theta(x) h(x) \\ \chi_\theta(x) \equiv \chi_{[0, b-\theta]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq b-\theta \\ 0 & \text{si } b-\theta < x \leq b \end{cases} \end{cases}$$

$$(1vi \text{ bis}) \quad s_\theta(t) = -z_\theta(s_\theta(t-\theta), t-\theta)$$

respectivamente. La condición (1vi bis) significa un retardo del argumento en la condición de Stefan (1vi). Las funciones s_θ, z_θ se definen por inducción, respecto del tiempo, de la manera siguiente:

a) En el primer intervalo de tiempo $0 \leq t \leq \theta$, se define

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } s_{\theta}(t) \equiv b, \quad t \in [0, \theta] . \\ \text{ii) } z_{\theta} \text{ como la \u00fanica soluci\u00f3n del problema (1i-v) en la regi\u00f3n } 0 \leq x \leq s_{\theta}(t), \quad 0 \leq t \leq \theta \text{ con} \\ \text{datos } s_{\theta}, h_{\theta} . \end{array} \right.$$

Por lo tanto, $z_{\theta}(s_{\theta}(t), t) = z_{\theta}(b, t)$ existe y es continua en $[0, \theta]$. Adem\u00e1s, se tiene que $-A \leq z_{\theta}(b, t) \leq 0$ en $[0, \theta]$. Procediendo por inducci\u00f3n, se supone que (s_{θ}, z_{θ}) han sido construidos para $0 \leq t \leq n\theta$ de manera que:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } s_{\theta} \in C^1, z_{\theta}(s_{\theta}(t), t) \text{ existe y es continua} \\ \text{con } -A \leq z_{\theta}(s_{\theta}(t), t) \leq 0, \\ \text{ii) } s_{\theta}(t) = b - \int_{\theta}^t z_{\theta}(s_{\theta}(\eta - \theta), \eta - \theta) d\eta, \quad t \geq \theta . \end{array} \right.$$

En el pr\u00f3ximo intervalo de tiempo $n\theta \leq t \leq (n+1)\theta$, se define:

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } s_{\theta}(t) \text{ como en (14);} \\ \text{ii) } z_{\theta}(x, t) \text{ como la soluci\u00f3n de (1i-v) en la} \\ \text{regi\u00f3n } 0 \leq x \leq s_{\theta}(t), \quad n\theta \leq t \leq (n+1)\theta . \end{array} \right.$$

Por la hip\u00f3tesis de inducci\u00f3n (14) para z_{θ} se tiene que $s_{\theta} \in C^1$ con $0 \leq \dot{s}_{\theta} \leq A$. Por otra parte, $z_{\theta}(s_{\theta}(t), t)$ existe y es continua verific\u00e1ndose (14i) en $[n\theta, (n+1)\theta]$.

Por lo tanto, por el Principio de Inducci\u00f3n, la sucesi\u00f3n (s_{θ}, z_{θ}) , aproximaci\u00f3n del problema de Stefan (1) para cada $\theta \in (0, b)$, puede ser construida para $t \in [0, T]$. M\u00e1s a\u00fan, se obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA 6: i) Para cada $\theta \in (0, b)$ y bajo las hip\u00f3tesis (H1) existe una soluci\u00f3n $\{T, s_{\theta}, z_{\theta}\}$ del problema (1 bis) con dato inicial h_{θ} (1iii bis) y con condici\u00f3n de Stefan retardada (1vi bis). La funci\u00f3n $s_{\theta} \in C^1[0, T]$ satisface

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{s}_\theta(t) = -z_\theta(s_\theta(t-\theta), t-\theta) \\ 0 \leq \dot{s}_\theta(t) \leq A \quad \text{en } [0, T] \end{cases} .$$

ii) Las sucesiones (s_θ) y (z_θ) convergen uniformemente a s y z respectivamente cuando $\theta \rightarrow 0$, donde $\{T, s, z\}$, es la única solución del problema de Stefan (1). Más aún, la frontera libre $s \in C^1[0, T]$ es una función monótona no-decreciente y satisface $0 \leq \dot{s}(t) \leq A$.

DEMOSTRACION: La sucesión (s_θ) es equicontinua y uniformemente acotada pues se tiene que $0 \leq \dot{s}_\theta(t) \leq A$, $b \leq s_\theta(t) \leq b + AT$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall \theta \in (0, b)$.

Por el Teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión (s_{θ_i}) de la sucesión (s_θ) de manera que s_{θ_i} converge uniformemente a una función Lipschitz no-decreciente s cuando $\theta_i \rightarrow 0$. Sea z , la solución del problema (1i-v) para esa función particular s .

EJERCICIO 3: Verificar que z_{θ_i} converge uniformemente a z cuando $\theta_i \rightarrow 0$, y que $\{T, s, z\}$ es solución del problema (1). (Utilizar la representación integral (2) de la condición de Stefan (1vi)) [1, 3].

EJERCICIO 4 [3]: (Teorema de Estabilidad) Sea $\{T_i, s_i, z_i\}$ la solución del problema (1) correspondiente a los datos (b_i, h_i, f_i) ($i=1, 2$), que satisfacen las hipótesis (H1). Si $0 < b_1 \leq b_2$ entonces existe una constante $C = C(b_1, A, T)$ de manera que se satisfaga

$$(17) \quad |s_2(t) - s_1(t)| \leq C \left[b_2 - b_1 + \int_0^b \xi |h_2(\xi) - h_1(\xi)| d\xi + \int_{b_1}^{b_2} \xi h_2(\xi) d\xi + \int_0^t |f_2(\tau) - f_1(\tau)| d\tau \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como una consecuencia inmediata de la propiedad de estabilidad (17), se deduce el:

COROLARIO 7: Bajo las hipótesis del Ejercicio anterior, la solución del problema de Stefan (1), con $b > 0$, es única.

La hipótesis (H1iii) para el dato h puede ser eliminada en el Teorema 6, a través del siguiente resultado:

TEOREMA 8 [5]: Si $b > 0$ y $f, h \geq 0$ son funciones continuas excepto en un número finito de saltos acotados y se tiene que $h \neq 0$ o $f \neq 0$ en $[0, \epsilon]$ para cada $\epsilon > 0$, entonces existe una única solución del problema de Stefan (1), para cualquier instante $T > 0$.

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 5)

H) Primeramente se verán algunas propiedades preliminares [3]:

LEMA 9: Bajo las hipótesis (H2), sea $\{T, s, z\}$ una solución de (1) con $b \geq 0$. Entonces existe una constante $\lambda > 0$, independientemente de b , de manera que:

$$(18) \quad \lambda t \leq s(t) \quad , \quad \forall t \in [0, T].$$

DEMOSTRACION: i) Sea $b > 0$. Sean

$$(19) \quad v(x, t) = -1 + \exp[-\lambda(x - \lambda t)] \quad , \quad \lambda = \left[\frac{\log(1 + \ell T)}{T} \right]^{1/2}.$$

Por el absurdo, sea el instante t_0 definido por:

$$0 < t_0 = \text{Inf}\{t / \lambda t > s(t)\} < T \quad ,$$

con lo cual $\dot{s}(t_0) \leq \lambda$. La función v satisface las propiedades siguientes:

$$(20) \begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(0, t) = -1 + \exp(-\lambda^2 t) < \lambda t \leq f(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(\lambda t, t) = 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq t_0 . \end{cases}$$

Por el Principio del Máximo fuerte se tiene que $v < z$ en el dominio $0 < x < \lambda t$, $0 < t \leq t_0$. Como $v(\lambda t_0, t_0) = z(s(t_0), t_0) = 0$, por el Lema de Hopf, se tiene que:

$$\dot{s}(t_0) = -z_x(s(t_0), t_0) > -v_x(\lambda t_0, t_0) = \lambda$$

que resulta ser una contradicción.

ii) Sea $b=0$. Para todo $\varepsilon \in (0, T)$, se tiene que $\lambda(t-\varepsilon) < \lambda t \leq f(t)$ en $[\varepsilon, T]$. Como $s(\varepsilon) > 0$ y si se toma a ε como instante inicial, la parte i) nos dice que $\lambda(t-\varepsilon) \leq s(t)$ en $[\varepsilon, T]$. Por lo tanto, tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene (18) .

LEMA 10: Bajo las hipótesis (H2) y $h \equiv 0$ si $b > 0$, sea z una solución de (11-v) para una función dada s no-decreciente y $\lambda t \leq s(t)$ en $[0, T]$. Entonces existe una constante $B > 0$, independientemente de b , de manera que:

$$(21) \quad 0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t) - \rho, t) \leq B \quad , \quad 0 < \rho < s(t), \quad 0 \leq t \leq T .$$

DEMOSTRACION: Para $t_0 \in [0, T]$, sean

$$(22) \quad w(x) \equiv w(x, t_0) = B [s(t_0) - x] \quad , \quad B = \frac{L}{\lambda} .$$

La función w satisface las siguientes propiedades:

$$(23) \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(s(t), t_0) = B [s(t_0) - s(t)] \geq 0 \quad , \quad t \in [0, t_0] \\ w(x, t_0) \geq 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq b = s(0) \\ w(0, t_0) = B s(t_0) \geq L t_0 \geq f(t) \quad , \quad t \in [0, t_0] \end{cases}$$

Por el Principio del Máximo se tiene que $z(x, t) \leq w(x, t_0)$ en el dominio $0 \leq x \leq s(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, con lo cual

$$0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t_0) - \rho, t_0) \leq \frac{1}{\rho} W(s(t_0) - \rho, t_0) \leq B, \quad \forall t_0 \in [0, T],$$

es decir (21).

A continuación, se demostrará la existencia de solución del problema (1) para el caso $b=0$, a través de lo realizado en la sección G (Método del argumento retardado).

TEOREMA 11; Bajo las hipótesis (H2), existe una única solución del problema de Stefan (1) con $b=0$. La frontera libre $s \in C^1(0, T]$ es una función monótona no-decreciente que satisface

$$(24) \quad \lambda t \leq s(t) \leq Bt, \quad \dot{s}(t) \leq B, \quad \forall t \in [0, T].$$

DEMOSTRACION: Para cada $b \in (0, b_0)$, se consideran el dato inicial:

$$(25) \quad h_b(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq b,$$

y la solución $\{T, s_b, z_b\}$ del problema (1) para datos (b, h_b, f) . Por el Teorema 6 y los Lemas 9 y 10, se tiene que $s_b \in C^1[0, T]$ con $0 \leq \dot{s}_b \leq B, \forall t \in [0, T]$.

Por lo tanto, la sucesión $(s_b)_{0 < b < b_0}$ es equicontinua y uniformemente acotada pues $0 \leq s_b(t) \leq b_0 + BT, \forall t \in [0, T]$. Utilizando el Teorema de Arzela-Ascoli y la metodología del Ejercicio 3 [3] se deduce la tesis.

EJERCICIO 6 [3] (Teorema de estabilidad) : Sea $\{T, s_i, z_i\}$ la solución del problema (1) con $b=0$ correspondiente al dato $f_i (i=1, 2)$, que satisface la hipótesis (H2).

Entonces existe una constante $C=C(\lambda, B, T)$ de manera que se satisfaga

$$(26) \quad |s_2(t) - s_1(t)| \leq C \|f_2 - f_1\|_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

donde

$$(27) \quad \|f\|_{[a,b]} = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \quad \|f'\|_t = \sup_{0 \leq \tau \leq t} |f(\tau)|.$$

OBSERVACION 8: Como una consecuencia inmediata de la propiedad de estabilidad (26), se deduce la unicidad de solución del problema de Stefan (1), con $b=0$, bajo la hipótesis (H2)

La hipótesis (H2) para el dato f puede ser debilitada en el Teorema 11, a través del siguiente resultado:

TEOREMA 12 [4,5]: Si $f \geq 0$ es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados con $f \neq 0$ en $[0, \varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces existe una única solución del problema de Stefan (1) con $b=0$.

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 7).

I) A continuación se verán algunas generalizaciones de ciertas propiedades vistas anteriormente.

EJERCICIO 8 [3,12]: i) La solución del problema inverso de Stefan (ver también Cursillo C4), para $s(t) = \mu t^\alpha (\mu > 0, \alpha = 1 + \frac{\gamma}{2}, \gamma > 0)$ está dada por:

$$(28) \quad v_\mu(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} [x - \mu t^\alpha]^{2n}$$

que satisface:

$$(29) \quad \begin{cases} v_\mu(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2\alpha n + 1)}{\Gamma(2n + 1) \Gamma(2\alpha n - n + 1)} (\mu^2 t^\beta)^n \\ \beta = 2\alpha - 1 = 1 + \gamma. \end{cases}$$

ii) Teniendo en cuenta que:

$$(30) \quad \alpha \leq \frac{2\alpha n - k}{2n - k} \leq \beta, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(30) \quad \frac{\Gamma(2\alpha n+1)}{\Gamma(2n+1) \Gamma(2\alpha n-n+1)} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2\alpha n-k}{2n-k} \right)$$

entonces se tiene

$$(31) \quad \exp[\alpha \mu^2 t^\beta] - 1 \leq V_\mu(0, t) \leq \exp[\beta \mu^2 t^\beta] - 1 .$$

Si se considera un dato $f=f(t)$ que verifique la hipótesis (H2 bis) que resulta ser (H2) reemplazando (H2ii) por (H2ii bis), donde:

$$(H2ii \text{ bis}) \quad \gamma, \ell, L > 0 / \ell t^{1+\gamma} \leq f(t) \leq L t^{1+\gamma}, \forall t \in [0, T].$$

entonces se tiene:

EJERCICIO 9 [3]: Si f satisface (H2 bis), entonces:

i) Utilizando como función de comparación a $V_\lambda(x, t)$ y teniendo presente que

$$(32) \quad \begin{cases} V_\lambda(0, t) \leq \exp[\beta \lambda^2 t^\beta] - 1 \leq \ell t^\beta \leq f(t) \\ \lambda = \left[\frac{\log(1 + \ell T^\beta)}{\beta T^\beta} \right]^{1/2} \end{cases}$$

se generaliza la desigualdad (18) del Lema 9 por

$$(33) \quad \lambda t^\alpha \leq s(t) , \quad 0 \leq t \leq T .$$

ii) utilizando como función de comparación a

$$(34) \quad W(x) \equiv W(x, t_0) = \Lambda (t_0)^{\gamma/2} [s(t_0) - x] , \quad 0 \leq t_0 \leq T$$

se generaliza la desigualdad (21) del Lema 10 por

$$(35) \quad \begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t) - \rho, t) &\leq \Lambda t^{\gamma/2} , \quad 0 < \rho < s(t) \\ \Lambda &= \frac{L}{\lambda} , \quad 0 \leq t \leq T . \end{aligned}$$

iii) Los resultados de existencia, unicidad y estabilidad en el caso $b=0$ siguen siendo válidos reemplazando la norma $\|f\|_t$, definida en (27), por:

$$(36) \quad \|f\|_{t,\gamma} = \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{|f(\tau)|}{\tau^{\gamma/2}} .$$

Además, existen dos constantes $\lambda, \Lambda > 0$ de manera que se satisface:

$$(37) \quad \lambda t^\alpha \leq s(t) \leq \Lambda t^\alpha, \quad 0 \leq t \leq T .$$

J) Método de la Ecuación integral equivalente [10,11] :

Se reducirá (1) al problema de encontrar una única solución de una cierta ecuación integral no-lineal. Para ello se utilizará la siguiente representación integral, correspondiente a las condiciones (1i-v), dada por (ver fórmula (64) del Cursillo C1):

$$(38) \quad \begin{aligned} z(x,t) &= M_1(x,t) + M_2(x,t) + M_3(x,t) \\ M_1(x,t) &= \int_0^t z_\xi(s(\tau), \tau) G(x,t; s(\tau), \tau) d\tau \\ M_2(x,t) &= \int_0^t f(\tau) G_\xi(x,t; 0, \tau) d\tau, \\ M_3(x,t) &= \int_0^b h(\zeta) G(x,t; \zeta, 0) d\zeta, \end{aligned}$$

donde G y N son las funciones de Gréen y Neumann respectivamente.

TEOREMA 13: $\{T, s, z\}$ es solución del problema (1) con

$$(39) \quad f \in C^1[0, \infty), \quad h \in C^1[0, b], \quad h(b) = 0$$

si y sólo si la función $v \in C^0[0, T]$, definida por:

$$(40) \quad v(t) = z_x(s(t), t),$$

satisface la ecuación integral siguiente:

$$(41) \quad v(t) = 2 [h(0) - f(0)] N(s(t), t; 0, 0) +$$

$$(41) \quad +2 \int_0^b h'(\zeta) N(s(t), t; \zeta, 0) d\zeta - 2 \int_0^t \dot{f}(\tau) N(s(t), t; 0, \tau) d\tau + \\ + 2 \int_0^t v(\tau) G_x(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau$$

donde s está definida por:

$$(42) \quad s(t) = b - \int_0^t v(\tau) d\tau .$$

DEMOSTRACION: \Rightarrow Por (38) y (40), la función z viene dada por:

$$(43) \quad z(x, t) = \int_0^t v(\tau) G(x, t; s(\tau), \tau) d\tau + M_2(x, t) + M_3(x, t).$$

Teniendo en cuenta la fórmula del salto (ver fórmula (43) del Cursillo C1), si se deriva (43) respecto de x y se realiza el límite $x \rightarrow s(t)^-$, se obtienen las expresiones siguientes:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow s(t)^-} M_{1_x}(x, t) = \frac{v(t)}{2} + \int_0^t v(\tau) G_x(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau.$$

$$b) \quad M_{2_x}(x, t) = \int_0^t f(\tau) G_{\xi_x}(x, t; 0, \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) N_\tau(x, t; 0, \tau) d\tau = \\ = -f(0) N(x, t; 0, 0) - \int_0^t \dot{f}(\tau) N(x, t; 0, \tau) d\tau .$$

$$c) \quad M_{3_x}(x, t) = \int_0^b h(\xi) G_x(x, t; \xi, 0) d\xi = - \int_0^b h(\xi) N_\xi(x, t; \xi, 0) d\xi =$$

$$= h(0) N(x, t; 0, 0) + \int_0^b h'(\xi) N(x, t; \xi, 0) d\xi .$$

Regrupando los tres términos anteriores se deduce para v la ecuación integral (41).

⇐) La función z , definida por (43), donde v es la solución de la ecuación integral (41), satisface las condiciones siguientes (EJERCICIO 10): (1i-iv,vi) con las respectivas regularidades necesarias para que $\{T,s,z\}$ sea solución de (1) (ver Observación 5). Sólo basta entonces verificar que z satisface (1v), es decir $\psi \equiv 0$, donde ψ está definida por:

$$(44) \quad \psi(t) = z(s(t), t)$$

Teniendo en cuenta que z satisface (1i-iv,vi), si se integra la identidad de Green

$$(45) \quad (G_z - zG_\xi)_\xi - (G_\xi)_\tau = 0$$

en el dominio $0 < \xi < s(\tau)$, $0 < \epsilon < \tau < t - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) y se realiza el límite $\epsilon \rightarrow 0$, se obtiene:

$$(46) \quad z(x, t) = \int_0^t v(\tau) G(x, t; s(\tau), \tau) d\tau + M_2(x, t) + M_3(x, t) + M(x, t)$$

donde

$$(47) \quad M(x, t) = \int_0^t \psi(\tau) \left[G_x(x, t; s(\tau), \tau) - v(\tau) G(x, t; s(\tau), \tau) \right] d\tau .$$

Comparando (46) con (43) se deduce que $M(x, t) \equiv 0$, para $0 < x < s(t)$, $0 < t < T$. Haciendo en (47) el límite $x \rightarrow s(t)^-$ y utilizando la fórmula del salto se tiene que ψ satisface la ecuación integral:

$$(48) \quad \frac{1}{2}\psi(t) + \int_0^t \psi(\tau) \left[G_x(s(t), t; s(\tau), \tau) - v(\tau) G(s(t), t; s(\tau), \tau) \right] d\tau = 0.$$

Teniendo en cuenta el Ejercicio 11 (más abajo), de (48), se deduce que

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq C \int_0^t \frac{|\psi(\tau)|}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \leq C^2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\tau \frac{|\psi(\eta)|}{\sqrt{\tau-\eta}} d\eta \\ &= C^2 \int_0^t |\psi(\eta)| d\eta \int_\eta^t \frac{d\tau}{[(t-\tau)(\tau-\eta)]^{1/2}} = \pi C^2 \int_0^t |\psi(\eta)| d\eta \end{aligned}$$

donde $C=C(t)$ depende sólo de t , y por lo tanto, utilizando la desigualdad de Gronwall, se obtiene que $\psi(t)=0$ en $[0, T]$.

OBSERVACION 9: Debido a los datos (39), en [10], se agregan a la definición de la solución $\{T, s, z\}$ las condiciones siguientes:

$$(49) \quad \begin{cases} z_x \text{ continua en } 0 \leq x \leq s(t), & 0 < t \leq T \\ s \in C^1[0, T] \end{cases}$$

las cuales son verificadas por la función z dada por (43) [10].

EJERCICIO 11: i) Probar la desigualdad siguiente:

$$(50) \quad \frac{\exp[-x^2/\alpha(t-\tau)]}{(t-\tau)^{n/2}} \leq \left(\frac{n\alpha}{2ex^2}\right)^{n/2}, \quad \alpha, x > 0, \quad t > \tau, n \in \mathbb{N}.$$

ii) Verificar que:

$$(51) \int_{\eta}^t \frac{d\tau}{[(t-\tau)(\tau-\eta)]^{1/2}} = \pi, \quad \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2\sqrt{t}.$$

EJERCICIO 12: (Desigualdad de Gronwall): Bajo las hipótesis

$$(52) \begin{cases} m \in L^1(0, T) \text{ con } m(t) \geq 0 \\ A \geq 0 \text{ (constante)}, \quad \Psi(t) \geq 0, \quad p(t) \geq 0 \text{ no-decreciente,} \end{cases}$$

se tienen las siguientes desigualdades:

$$i) \Psi(t) \leq A + \int_0^t m(\tau) \Psi(\tau) d\tau \Rightarrow \Psi(t) \leq A \exp\left(\int_0^t m(\tau) d\tau\right).$$

$$ii) \Psi^2(t) \leq A + \int_0^t m(\tau) \Psi(\tau) d\tau \Rightarrow \Psi(t) \leq \sqrt{A} + \frac{1}{2} \int_0^t m(\tau) d\tau.$$

$$iii) \Psi(t) \leq p(t) + A \int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \Rightarrow$$

$$a) \int_0^t \frac{\Psi(s)}{\sqrt{t-s}} ds \leq 2 p(t) \sqrt{t} + A \pi \int_0^t \Psi(\tau) d\tau,$$

$$b) \Psi(t) \leq (1 + 2A\sqrt{t}) p(t) \exp(\pi A^2 t).$$

Ayuda: En (i) y en (ii) respectivamente, las funciones

$$f_1(t) = A + \int_0^t m(\tau) \Psi(\tau) d\tau \quad \text{y} \quad f_2(t) = \sqrt{f_1(t)} \quad \text{satisfacen una}$$

cierta ecuación diferencial. Para (iiia) y (iiib) se utilizan el Ejercicio 11ii y el (i) respectivamente.

A continuación, se verá que la ecuación integral (41)

tiene una única solución $v \in C^0[0, \sigma]$, donde σ es un número positivo pequeño y luego por prolongación se extenderá al intervalo $[0, T]$. Sean:

$$(53) \quad \begin{cases} C_{\sigma, M} = \{v: [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R} / v \text{ es continua con } \|v\| \leq M\} \\ \|v\| = \text{Máx}_{t \in [0, \sigma]} |v(t)| \end{cases}$$

y el operador F_0 , con dominio en $C_{\sigma, M}$, donde $F_0(v)(t)$ está definido como el segundo miembro de la ecuación integral (41) con s dada por (42). Se tiene el siguiente:

TEOREMA 14: El operador $F_0: C_{\sigma, M} \rightarrow C_{\sigma, M}$ es una contracción para σ suficientemente pequeño, con lo cual la ecuación integral (41) tiene una única solución en $C_{\sigma, M}$. Más aún, para que F_0 esté bien definido y sea una contracción, el elemento σ debe verificar las desigualdades (55), (60) y (55), (62), (66) respectivamente, donde M está dado por (59).

DEMOSTRACION: i) Se verá que el operador F_0 está bien definido, es decir que

$$(54) \quad \|F_0(v)\| = \text{Máx}_{t \in [0, \sigma]} |F_0(v)(t)| \leq M.$$

a) Tomando

$$(55) \quad \sigma \leq 1, \quad 2M\sigma \leq b$$

se deducen en primer lugar las expresiones siguientes:

$$(56) \quad \begin{aligned} |s(t) - s(\tau)| &\leq \left| \int_{\tau}^t |v(\eta)| d\eta \right| \leq M|t - \tau|, \quad \forall t, \tau \in [0, \sigma], \\ |s(t) - b| &\leq Mt \leq M\sigma \leq \frac{b}{2}, \quad \forall t \in [0, \sigma]. \end{aligned}$$

b) Si se tiene en cuenta (EJERCICIO 13):

$$\begin{aligned}
 & \text{i) } |N(s(t), t; 0, 0)| \leq C_1(b) \sigma, \quad \forall t \in [0, \sigma]. \\
 & \text{ii) } \int_0^{+\infty} |G(x, t; \xi, 0)| d\xi \leq \int_0^{+\infty} N(x, t; \xi, 0) d\xi = 1, \\
 & \quad \forall x, t > 0. \\
 (57) \quad & \text{iii) } \int_0^t |N(s(t), t; 0, \tau)| d\tau \leq C_2(b) \sigma, \quad \forall t \in [0, \sigma]. \\
 & \text{iv) } \int_0^t |G_x(s(t), t; s(\tau), \tau)| d\tau \leq M C_3(b) \sqrt{\sigma}, \\
 & \quad \forall t \in [0, \sigma] \quad \text{con } M \geq 1,
 \end{aligned}$$

donde $C_i(b)$, $B_i(b)$ denotan ciertas constantes positivas que dependen en forma continua sólo de la constante b ; se deduce que:

$$\begin{aligned}
 (58) \quad & |F_0(v)(t)| \leq 2(h(0)+f(0)) C_1(b) \sigma + 2 \|h'\| + \\
 & + 2 \|\dot{f}\| C_2(b) \sigma + 2 M^2 C_3(b) \sqrt{\sigma} \equiv 2 \|h'\| + \\
 & + B_1(b) [h(0)+f(0)+ \|\dot{f}\|] \sigma + B_2(b) M^2 \sqrt{\sigma}.
 \end{aligned}$$

c) Si se define:

$$(59) \quad M = 1 + 2 \|h'\|$$

y el elemento σ verifica la desigualdad

$$(60) \quad B_1(b) [h(0)+f(0)+ \|\dot{f}\|] \sigma + B_2(b) (1+2 \|h'\|)^2 \sqrt{\sigma} \leq 1$$

entonces se obtiene (54).

ii) Se verá que el operador F_0 satisface la desigualdad

$$(61) \quad \|F_0(v_2) - F_0(v_1)\| \leq A(b, h, f) \sqrt{\sigma} \varepsilon, \quad \varepsilon = \|v_2 - v_1\|$$

con lo cual F_0 resulta ser una contracción tomando σ suficientemente pequeño de manera que satisfaga además la condición:

$$(62) \quad A(b, h, f)\sqrt{\sigma} < 1.$$

a) Si s_1 y s_2 corresponden a v_1 y v_2 respectivamente, dados por (42), entonces se tiene las siguientes desigualdades:

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} |s_2(t) - s_1(t)| \leq t\epsilon \quad , \quad \|\dot{s}_2 - \dot{s}_1\| \leq \epsilon, \\ |s_i(t) - s_i(\tau)| \leq M|t - \tau| \quad (i=1,2) \quad , \quad \epsilon \leq 2M \quad , \\ \frac{b}{2} \leq s_i(t) \leq \frac{3b}{2} \quad , \quad \forall t \in [0, \sigma] \quad (i=1,2) \quad . \end{array} \right.$$

b) Se tiene que:

$$(64) \quad F_0(v_2)(t) - F_0(v_1)(t) = V_1(t) + V_2(t) + \\ + V_3(t) + V_4(t)$$

donde

$$(65) \quad \begin{aligned} V_1(t) &= 2(h(0) - f(0)) [N(s_2(t), t; 0, 0) - N(s_1(t), t; 0, 0)] \\ V_2(t) &= 2 \int_0^b h'(\xi) [N(s_2(t), t; \xi, 0) - N(s_1(t), t; \xi, 0)] d\xi \\ V_3(t) &= -2 \int_0^t \dot{f}(\tau) [N(s_2(t), t; 0, \tau) - N(s_1(t), t; 0, \tau)] d\tau \\ V_4(t) &= - \int_0^t v_2(\tau) \frac{s_2(t) - s_2(\tau)}{t - \tau} K(s_2(t), t; s_2(\tau), \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t v_1(\tau) \frac{s_1(t) - s_1(\tau)}{t - \tau} K(s_1(t), t; s_1(\tau), \tau) d\tau + V_4'(t) \end{aligned}$$

siendo $-V_4'(t)$ la suma de los dos primeros sumandos del lado derecho de $V_4(t)$ pero reemplazando $s_2(\tau)$ y $s_1(\tau)$ por $-s_2(\tau)$ y $-s_1(\tau)$ respectivamente.

c) Se tienen las siguientes acotaciones (EJERCICIO 14) [10] :

- i) $|V_1(t)| \leq B_3(b)(h(0)+f(0))\varepsilon\sigma$
- ii) $|V_2(t)| \leq B_4(b) \|h'\| \varepsilon \sqrt{\sigma}$
- iii) $|V_3(t)| \leq B_5(b) \|\dot{f}\| \varepsilon\sigma$
- iv) $|V_4(t)| \leq B_6(b) M\varepsilon\sqrt{\sigma}$ siempre que σ verifique

la desigualdad

$$(66) \quad M^2\sigma \leq 1 .$$

Por lo tanto, se obtiene la desigualdad (61) con lo cual el operador F_0 verifica la Tesis.

OBSERVACION 10: En [10,11] se prueba además la existencia y unicidad de solución, de la ecuación integral (41), y, por ende, del problema (1), para todo instante T , prolongando la solución obtenida en el intervalo $[0, \sigma]$.

LEMA 15: Si v es la única solución de la ecuación integral (41), entonces

$$(67) \quad v(0) = h'(b)$$

con lo cual \dot{s} resulta continua en $t=0^+$, con $\dot{s}(0) = -v(0) = -h'(b)$.

DEMOSTRACION: Los sumandos primero, tercero y cuarto de (41) tienden a cero cuando $t \rightarrow 0^+$. Teniendo presente que

$$(68) \quad \left| \int_0^b K(-s(t), t; \xi, 0) h'(\xi) d\xi \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 (68) \quad & \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^b \frac{\exp\left[-\frac{(s(t)+\xi)^2}{4t}\right]}{\sqrt{t}} |h'(\xi)| d\xi \leq \\
 & \leq \frac{\exp\left(-\frac{b^2}{4t}\right)}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^b |h'(\xi)| d\xi \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0^+,
 \end{aligned}$$

y que además

$$(69) \quad \frac{|s(t)-s(0)|}{2\sqrt{t}} = \frac{|s(t)-b|}{2\sqrt{t}} \leq \frac{M\sqrt{t}}{2} \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow 0^+,$$

entonces se deduce:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^b N(s(t), t; \xi, 0) h'(\xi) d\xi = \\
 & = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^b K(s(t), t; \xi, 0) h'(\xi) d\xi = \frac{h'(b)}{2},
 \end{aligned}$$

con lo cual resulta (67).

K) Bajo las hipótesis de los teoremas anteriores se tiene la existencia de una única solución del problema (1) para cada $T > 0$ y $b \geq 0$. Cuando $T \rightarrow +\infty$, la solución puede extenderse y por lo tanto es interesante el estudio del comportamiento de la frontera libre $s(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Se tienen los siguientes resultados [4];

TEOREMA 16: i) Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = +\infty$.

Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$, entonces:

$$(70) \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_{\infty} , \\ s_{\infty} = \left[b^2 + 2 \int_0^b \xi h(\xi) d\xi + 2 \int_0^{+\infty} f(t) dt \right]^{1/2} . \end{cases}$$

ii) Sea (s, z) la solución de (1) con $\int_0^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

Para cada $t_0 \geq 0$, sea (σ, v) la solución del siguiente problema:

$$(71) \begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 , & 0 < x < \sigma(t) , & t_0 < t \\ v(0, t) = f(t) , & t_0 < t \\ v(\sigma(t), t) = 0 , & t_0 < t \\ \sigma(t_0) = 0 \\ \dot{\sigma}(t) = -v_x(\sigma(t), t) , & t_0 < t , \end{cases}$$

entonces

$$(72) \begin{cases} a) \left\{ \begin{aligned} 1 \leq \left(\frac{s(t)}{\sigma(t)} \right)^2 \leq 1 + \frac{C(t_0)}{\sigma^2(t)} , & t > t_0 \\ C(t_0) = s^2(t_0) + 2 \int_0^{s(t_0)} xz(x, t_0) dx , \end{aligned} \right. \\ b) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1. \end{cases}$$

$$(73)$$

iii) Si f es tal que $\|f\|_{[t_0, +\infty)}$ es finito y verifica además las condiciones:

$$(74) \begin{cases} \int_0^{+\infty} f(t)dt = +\infty , & \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f\|_{[t_0, +\infty)} = 0 , \end{cases}$$

entonces se tiene que:

$$(75) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{s(t)}{[2F(t)]^{1/2}} = 1 .$$

DEMOSTRACION: 1) Sea $\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$. Utilizando la fórmula (2) y $z \geq 0$, se obtiene:

$$(76) \quad \begin{aligned} s^2(t) &= b^2 + 2 \int_0^b \xi h(\xi) d\xi + 2F(t) - 2 \int_0^{s(t)} \xi z(\xi, t) dt \leq \\ &\leq b^2 + 2 \int_0^b \xi h(\xi) d\xi + 2F(t) \leq s_\infty, \quad \forall t \geq 0 . \end{aligned}$$

Se considerará primero que f tiene soporte compacto, es decir que $f(t) = 0$, $\forall t \geq T_0$, con $T_0 > 0$. Sea W la solución del siguiente problema:

$$(77) \quad \begin{aligned} W_t - W_{xx} &= 0, \quad 0 < x < \sqrt{s_\infty}, \quad t > 0 \\ W(0, t) &= f(t), \quad t > 0 \\ W(\sqrt{s_\infty}, t) &= 0, \quad t > 0 \\ W(x, 0) &= \begin{cases} h(x) & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } b < x \leq \sqrt{s_\infty} \end{cases} \end{aligned}$$

que converge uniformemente a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$ (propiedad general de la solución de la ecuación del calor [11]). Por el Principio del Máximo se tiene que $0 \leq z \leq W$, con lo cual se deduce que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{s(t)} \xi z(\xi, t) d\xi = 0$. Pasando al límite $t \rightarrow +\infty$ en (2) se obtiene (70).

Sea ahora el caso general para f , no necesariamente a soporte compacto. Sean

$$(78) \quad f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

y los correspondientes $s_{\infty n}$ y $s_n(t)$. Por el Teorema de Monotonía se tiene que $s_n(t) \leq s(t) \leq \sqrt{s_{\infty}}$, $\forall t \geq 0$. Por lo visto anteriormente, se obtiene que

$$(79) \quad \sqrt{s_{\infty n}} = \lim_{t \rightarrow \infty} s_n(t) \leq \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)} \leq \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)} \leq \sqrt{s_{\infty}}$$

y utilizando $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\infty n} = s_{\infty}$, se deduce (70).

ii) Por el Teorema de Monotonía se tiene que $\sigma(t) \leq s(t)$, $\forall t \geq t_0$, y por el Principio del Máximo se tiene que $0 \leq v \leq z$ en $0 \leq x \leq \sigma(t)$, $t_0 \leq t$. Utilizando (2) para $t_0 > 0$, como tiempo inicial, se obtiene

$$(80) \quad \begin{aligned} s^2(t) - C(t_0) &= 2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau - 2 \int_0^{\sigma(t)} \xi z(\xi, t) d\xi \\ &\leq 2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau - 2 \int_0^{\sigma(t)} \xi v(\xi, t) d\xi = \sigma^2(t), \end{aligned}$$

y por ende $\sigma^2(t) \leq s^2(t) \leq \sigma^2(t) + C(t_0)$, $t > t_0$, de donde surge (72); además, por la parte i) y (72) se deduce (73).

iii) Siguiendo ii), por el Principio del Máximo se obtiene que $0 \leq v(x, t) \leq \|f\|_{[t_0, t]}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= 2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau - 2 \int_0^{\sigma(t)} \xi v(\xi, t) d\xi \geq 2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \\ &\quad - \|f\|_{[t_0, t]} \sigma^2(t), \end{aligned}$$

de lo cual, y teniendo presente que $z \geq 0$, se deduce que:

$$(81) \quad \frac{2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau}{1 + \|f\| [t_0, t]} \leq \sigma^2(t) \leq s^2(t) \leq \\ \leq b^2 + 2 \int_0^b \xi h(\xi) d\xi + 2 F(t), \quad t \geq t_0.$$

Utilizando (81), dividiendo por $2F(t)$, pasando al $\lim_{t \rightarrow +\infty}$ y luego al $\lim_{t_0 \rightarrow +\infty}$, se deduce el resultado (75).

Si se define que

$$(82) \quad f(t) \sim g(t) \text{ (cuando } t \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1,$$

entonces se obtiene el siguiente resultado:

EJERCICIO 15: i) Si $f(t) \sim \rho t^{-\delta}$ con $\rho > 0$, $0 < \delta < 1$, entonces

$$s(t) \sim \left(\frac{2\rho}{1-\delta}\right)^{1/2} t^{(1-\delta)/2}.$$

ii) Si $f(t) \sim \rho/t$ con $\rho > 0$, entonces $s(t) \sim (2\rho \log t)^{1/2}$.

EJERCICIO 16 [4]: i) Si $f(t) \sim \rho$ con $\rho > 0$, entonces $s(t) \sim \beta t^{1/2}$ donde β satisface la ecuación:

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \beta^{2n}.$$

ii) Si $\log f(t) \sim \rho t^\gamma$ con $\rho > 0$, $\gamma > 0$, entonces

$s(t) \sim \beta t^{\frac{1+\gamma}{2}}$ donde β está dada por:

$$\beta = \frac{2\sqrt{\rho} \gamma^{\gamma/2}}{(1+\gamma)^{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

L) A continuación veremos estimaciones para la frontera libre s , en función del dato f , en el problema (1) correspondiente al caso $h \equiv 0$.

TEOREMA 17: i) Sea $z = z(x, t)$ la solución del problema (1i-v) donde $b \geq 0$, $h \equiv 0$ en $[0, b]$ y s es una función Lipschitz y no-decreciente. Entonces, para $\rho \in (0, s(t))$ se tiene:

$$(83) \quad 0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t) - \rho, t) \leq \frac{\|f\|_t}{s(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

ii) Si $\{T, s, z\}$ es la solución de (1) con $h \equiv 0$ en $[0, b]$, entonces se tiene:

$$(84) \quad 0 \leq \dot{s}(t) \leq \frac{\|f\|_t}{s(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

DEMOSTRACION: Sean $t_0 \in [0, T]$ y $W(x) = \frac{\|f\|_{t_0}}{s(t_0)} [s(t_0) - x]$. Entonces utilizando el Principio del Máximo se deduce $z(x, t) \leq W(x)$ en $0 \leq x \leq s(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, y se obtiene (83) y (84) (EJERCICIO 17) [17].

De los resultados de este Teorema se obtienen las siguientes estimaciones:

COROLARIO 18: Si $\{T, s, z\}$ es la solución de (1) con $b=0$ (el dato h es irrelevante) y $f \geq 0$ ($f \neq 0$) es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados, entonces se tienen:

$$(85) \quad \left[\frac{2 F(t)}{1 + \|f\|_t} \right]^{1/2} \leq s(t) \leq \left[2 F(t) \right]^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$(86) \quad 0 < \dot{s}(t) \leq \|f\|_t \left[\frac{1 + \|f\|_t}{2 F(t)} \right]^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

DEMOSTRACION: Sea $0 < b \leq 1$ y sean $\{T, s_b, z_b\}$ la solución de (1) con $h \equiv 0$ en $[0, b]$. Por (84), se tiene:

$$(87) \quad 0 < \dot{s}_b(t) \leq \frac{\|f\|_t}{s_b(t)} \leq \frac{M}{s_b(t)}, \quad M = \sup_{0 \leq t \leq T} f(t),$$

de lo cual se deduce que

$$(88) \quad 0 \leq \frac{d}{dt}(s_b^2(t)) \leq 2M, \quad 0 \leq t \leq T.$$

De la relación (2) y $z_b \geq 0$ se deduce:

$$b^2 + 2F(t) - \|f\|_t s_b^2(t) \leq b^2 + 2F(t) - 2 \int_0^{s_b(t)} \xi z_b(\xi, t) d\xi =$$

$$= s_b(t) \leq b^2 + 2F(t)$$

es decir:

$$(89) \quad \frac{b^2 + 2F(t)}{1 + \|f\|_t} \leq s_b^2(t) \leq b^2 + 2F(t) \leq 1 + 2F(T)$$

con lo cual la familia $\{s_b^2\}$ es equicontinua y uniformemente acotada en $[0, T]$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli] una sucesión $b_n \rightarrow 0$ de manera que $s_{b_n}^2(t)$ converge uniformemente en $[0, T]$ a una función Lipschitz continua $s^2(t)$. Pasando al límite $b \rightarrow 0$ en (87) y (89) se obtienen las estimaciones (85) y (86) [17].

II. EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE CON ESPECIFICACION DEL FLUJO DE CALOR EN EL BORDE FIJO.

Se estudiará el problema de Stefan unidimensional a una

fase siguiente: Dado $g=g(t)\geq 0$, $h=h(x)\geq 0$ y $b\geq 0$, se quiere hallar $T>0$ y dos funciones $s=s(t)$ y $z=z(x,t)$ de manera que el triple $\{T,s,z\}$ satisfaga las siguientes condiciones:

$$(90) \quad \begin{aligned} & \text{i) } z_{xx}-z_t=0 \quad , \quad \text{en } D_T \\ & \text{ii) } z_x(0,t)=-g(t) \quad , \quad 0<t<T \\ & \text{iii) } z(x,0)=h(x) \quad , \quad 0\leq x\leq b \\ & \text{iv) } s(0)=b \\ & \text{v) } z(s(t),t)=0 \quad , \quad 0<t<T \\ & \text{vi) } z_x(s(t),t)=-\dot{s}(t), \quad 0<t<T . \end{aligned}$$

OBSERVACION 11: En el caso $b=0$, la condición (90iii) sobre h es superflua y por lo tanto puede eliminarse de la formulación del problema. En general, se supone que g y h son funciones continuas excepto en un número finito de saltos acotados.

A) Diremos que $\{T,s,z\}$ es una solución del problema (90) si y sólo si:

- i) $T>0$;
- ii) $s\in C^1(0,T]\cap C^0[0,T]$, $s(t)>0$ en $(0,T]$;
- iii) z es continua (excepto en un número finito de puntos de discontinuidad de h) y acotada en \bar{D}_T , $z_x, z_{xx}, z_t\in C^0(D_T)$, $z_x(s(t),t)$ es continua en $(0,T]$;
- iv) Se satisfacen las condiciones (90i-vi).

En forma análoga a los Lemas 1 y 2 y los Teoremas 3 y 4 se obtienen los resultados siguientes:

EJERCICIO 18: Si $\{T,s,z\}$ es una solución de (90) , entonces la condición de Stefan (90vi) es equivalente a la siguiente condición integral

$$(91) \left\{ \begin{array}{l} s(t) = b + \int_0^b h(\xi) d\xi + G(t) - \int_0^{s(t)} z(x,t) dx, \\ G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau. \end{array} \right.$$

EJERCICIO 19: Cualquier solución z del problema (90) es no-negativa; más aún, se tiene $\dot{s}(t) = -z_x(s(t), t) \geq 0$. En el caso que $h > 0$ ó $g > 0$ en cualquier entorno de $t=0$, la frontera libre s es una función creciente ($\dot{s} > 0$).

EJERCICIO 20: Sea $\{T_i, s_i, z_i\}$ solución del problema (90) correspondiente a los datos (b_i, h_i, g_i) ($i=1,2$) y sea $T = \text{Mín}(T_1, T_2)$. Si bien $h_2 \neq 0$ ó $g_2 \neq 0$, entonces se tienen los siguientes resultados:

i) Si $b_1 < b_2, h_1 \leq h_2$ y $g_1 \leq g_2$ entonces $s_1 < s_2$ en $[0, T]$ y $z_1 < z_2$ en D_{T, s_1} ;

ii) Si $b_1 \leq b_2, h_1 \leq h_2, g_1 \leq g_2$ y $T_1 = T_2$ entonces $s_1 \leq s_2$ en $[0, T]$ y $z_1 \leq z_2$ en D_{T, s_1} ;

iii) Existe a lo sumo una solución en el problema de Stefan (90) para $b \geq 0$.

B) Sea la siguiente hipótesis [6]:

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } b > 0; \\ \text{ii) } h, g \geq 0 \text{ son funciones continuas excepto} \\ \text{en un número finito de saltos acotados;} \\ \text{iii) } \exists N > 0 / 0 \leq h(x) \leq N(b-x), \forall x \in [0, b], \end{array} \right.$$

que para el caso $b=0$ se reduce sólo a la condición (Hii).

LEMA 19: Si z es una solución del problema (90i-v) bajo la hipótesis (H) para una función monótona no-decreciente s dada, entonces:

i) Existe una constante $A = \text{Máx}(N, \text{Máx}_{t \in [0, T]} g(t)) > 0$ de manera que

$$(92) \quad 0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t) - \rho, t) \leq A, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \rho \in (0, b).$$

ii) Además, si $z_x(s(t), t)$ existe, se tiene que

$$(93) \quad -A \leq z_x(s(t), t) \leq 0.$$

DEMOSTRACION: Se define la función $W(x) \equiv W(x, t_0) = A [s(t_0) - x]$ y aplicando el Principio del Máximo se deduce que $0 \leq z(x, t) \leq W(x, t_0)$, $0 \leq x \leq s(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, el resto queda como EJERCICIO 21.

c) Método del Argumento Retardado [1,6] :

Siguiendo lo dado en I-G, para el caso $b > 0$ y para cada $\theta \in (0, b)$ se considera la solución z_θ del problema (90i-v) donde $h(x)$, $s(t)$ y T son reemplazados respectivamente por $h_\theta(x)$, $s_\theta(t) \equiv b$ y 0 . En este caso se tiene que $z_{\theta x}(s_\theta(t), t) \equiv z_{\theta x}(b, t)$ existe y es continua en $[0, 0]$, y además, verifica la condición $-A \leq z_{\theta x}(s_\theta(t), t) \leq 0$.

En el segundo intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2\theta$ se define:

$$(94) \quad s_\theta(t) = b - \int_0^t z_{\theta x}(s_\theta(\tau - \theta), \tau - \theta) d\tau$$

y se resuelve el problema (90i-v) para esta elección de $s_\theta(t)$. Estas son las primeras etapas de un proceso inductivo que se puede realizar para cada $\theta \in (0, b)$. Entonces se tienen los siguientes resultados:

TEOREMA 20: Sea $b > 0$. Entonces:

i) Para cada $\theta \in (0, b)$, existe una solución (s_θ, z_θ) de (90) donde h es reemplazada por h_θ . La función $s_\theta \in C^1[0, T]$, es igual a b en $[0, 0]$ y satisface (94) para $t \in [0, T]$. Más aún, se tiene

$$(95) \quad 0 \leq \dot{s}_\theta(t) \leq A, \quad t \in [0, T],$$

donde A está definido en el Lema 19.

ii) Bajo las hipótesis (II) y $b > 0$ existe una única solución $\{T, s, z\}$ para el problema de Stefan (90). Además, la frontera libre $s \in C^1(0, T]$, es monótona no-decreciente y satisface

$$(96) \quad 0 \leq \dot{s}(t) \leq A, \quad t \in [0, T].$$

Más aún, s_θ y z_θ convergen uniformemente a s y z respectivamente cuando $\theta \rightarrow 0$.

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 22) [1,6].

TEOREMA 21: Bajo la hipótesis (III) existe una única solución $\{T, s, z\}$ del problema de Stefan (90) cuando $b = 0$. La frontera libre $s \in C^1(0, T]$ es monótona no-decreciente y satisface (96).

DEMOSTRACION: Para cada $b \in (0, b_0)$ sea $\{T, s_b, z_b\}$ la única solución del problema de Stefan (90) con $h = 0$; además, se tiene que $0 \leq \dot{s}_b(t) \leq A$ para $t \in [0, T]$ y $b \in (0, b_0)$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli se obtiene una subsucesión s_{b_i} que converge uniformemente a s en $[0, T]$. Sea $z = z(x, t)$ la única solución del problema auxiliar (90i-v) para tal elección de s . Con el mismo argumento usado en el Teorema 20 [1,6], se puede mostrar que $z_{b_i}(x, t)$ converge uniformemente a $z(x, t)$. Además, para cada $b \in (0, b_0)$ se tiene

$$(97) \quad s_b(t) = b + G(t) - \int_0^{s_b(t)} z(x,t) dx,$$

y de la convergencia uniforme de $\{s_{b_i}(t)\}$ y $\{z_{b_i}(x,t)\}$ se obtiene que (s,z) satisfacen

$$(98) \quad s(t) = G(t) - \int_0^{s(t)} z(x,t) dx$$

es decir (91) con $b=0$. Como $s(t)$ es una función Lipschitz se tiene que $z_x(s(t),t)$ existe y es continua para $t>0$, con lo cual $\{T,s,z\}$ es la solución de (90) con $b=0$.

EJERCICIO 23 [3,5] : Si $b \geq 0$, g es una función continua no-negativa excepto en un número finito de saltos acotados y, cuando sea necesario, h es una función no-negativa excepto en un número finito de saltos acotados, entonces existe una única solución $\{T,s,z\}$ al problema de Stefan (90), cualquiera sea el instante $T>0$.

D) Bajo las hipótesis de los teoremas anteriores se tiene la existencia de una única solución del problema (90) para cada $T>0$ y $b \geq 0$. Cuando $T \rightarrow +\infty$, la solución puede extenderse y por lo tanto es interesante el estudio del comportamiento de la frontera libre $s(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Se tienen los siguientes resultados [6] :

TEOREMA 22: i) Si $\int_0^{+\infty} g(t)dt = +\infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = +\infty$.

Si $\int_0^{+\infty} g(t)dt = g_\infty < +\infty$, entonces:

$$(99) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_{\infty} \equiv b + \int_0^b h(x) dx + g_{\infty}.$$

ii) Sea (s, z) la solución de (90) con $\int_0^{+\infty} g(t) dt = +\infty$.

Para cada $t_0 > 0$, sea (σ, v) la solución del siguiente problema:

$$(100) \quad \begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0, & 0 < x < \sigma(t), & t_0 < t \\ v_x(0, t) &= -g(t), & t_0 < t \\ v(\sigma(t), t) &= 0, & t_0 < t \\ \sigma(t_0) &= 0 \\ \dot{\sigma}(t) &= -v_x(\sigma(t), t), & t_0 < t. \end{aligned}$$

Entonces:

$$(101) \quad \begin{cases} a) \quad 1 \leq \frac{s(t)}{\sigma(t)} \leq 1 + \frac{D(t_0)}{\sigma(t)}, & t > t_0 \\ D(t_0) = s(t_0) + \int_0^{s(t_0)} z(x, t_0) dx. \end{cases}$$

$$b) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1. \quad (102)$$

iii) Si el dato g verifica las condiciones:

$$(103) \quad \int_0^{+\infty} g(t) dt = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{g(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 0$$

entonces se tiene:

$$(104) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{s(t)}{G(t)} = 1.$$

DEMOSTRACION: i) Sea $\int_0^{+\infty} g(t) dt = g_{\infty} < +\infty$. Utilizando la fórmula

(91) y $z \geq 0$, se obtiene:

$$(105) \quad s(t) = b + \int_0^b h(x) dx + G(t) - \int_0^{s(t)} z(x,t) dx \leq \\ \leq g_\infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Se considerará primero que g tiene soporte compacto, es decir, que $g(t) = 0$, $\forall t \geq T_0$, con $T_0 > 0$. Por lo tanto, de (91), se tiene:

$$(106) \quad s(t) = g_\infty - \int_0^{s(t)} z(x,t) dx, \quad \forall t \geq T_0.$$

Por el Principio del Máximo, se deduce que $z(x,t) \leq y_1(x,t) + y_2(x,t)$, donde y_1 y y_2 son, respectivamente, las soluciones de los siguientes problemas:

$$(107) \quad \begin{cases} y_{1_{xx}} = y_{1_t}, & x > 0, \quad t > 0 \\ y_{1_x}(0,t) = 0, & t > 0 \\ y_1(x,0) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \end{cases}$$

$$(108) \quad \begin{cases} y_{2_{xx}} = y_{2_t}, & x > 0, \quad t > 0 \\ y_{2_x}(0,t) = -g(t), & t > 0 \\ y_2(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Para $t \geq T_0$, se tiene:

$$(109) \quad y_1(x,t) = \int_0^b \frac{h(\xi)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi \leq \frac{\|h\|_\infty b}{2\sqrt{\pi t}},$$

$$(110) \quad y_2(x, t) = \int_0^{T_0} \frac{g(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right] d\tau \leq \\ \leq 2 \frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{t} - \sqrt{t-T_0} \right] \leq \frac{\|g\|_\infty T_0}{\sqrt{\pi(t-T_0)}},$$

y por ende se deduce que $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(x, t) = 0$, uniformemente en x , con lo cual se obtiene (99) de (106).

Sea ahora el caso general para g , no necesariamente a soporte compacto. Sean

$$(111) \quad g_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{si } n < t \end{cases},$$

y los correspondientes $s_{\infty n}$ y $s_n(t)$. Se tiene que $s_n(t) \leq s(t) \leq s_\infty$, $\forall t \geq 0$, y como

$$(112) \quad s_{\infty n} = \lim_{t \rightarrow \infty} s_n(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} s(t) \leq s_\infty$$

y utilizando $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\infty n} = s_\infty$, se deduce (99).

ii) Por el Teorema de Monotonía se tiene que $\sigma(t) \leq s(t)$, $\forall t \geq t_0$, y por el Principio del Máximo se tiene que $0 \leq v \leq z$ en $0 \leq x \leq \sigma(t)$, $t_0 \leq t$. Utilizando (91) para $t_0 > 0$, como tiempo inicial, se obtiene:

$$(113) \quad \sigma(t) \leq s(t) = D(t_0) + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau - \int_0^{\sigma(t)} z(x, t) dx \leq \\ \leq D(t_0) + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau - \int_0^{\sigma(t)} v(x, t) dx = D(t_0) + \\ + \sigma(t),$$

de donde surge (101); además, por la parte i) y (101) se deduce (102).

iii) Consideremos σ, v y y_2 como en (100) con $t_0=0$ y (108) respectivamente. Por el Principio del Máximo se tiene $0 \leq v(x,t) \leq y_2(x,t)$, con lo cual se tiene

$$(114) \quad G(t) - \int_0^{\sigma(t)} y_2(x,t) dx \leq \sigma(t) = G(t) - \int_0^{\sigma(t)} v(x,t) dx \leq G(t)$$

y teniendo presente que

$$(115) \quad y_2(x,t) = \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \left[-x^2/4(t-\tau) \right] d\tau \leq \\ \leq \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau$$

se obtiene:

$$\sigma(t) \leq G(t) \leq \sigma(t) + \int_0^{\sigma(t)} y_2(x,t) dx \leq \\ \leq \sigma(t) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right],$$

que, conjuntamente con (102), permite deducir (104).

EJERCICIO 24: Verificar que

$$(117) \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$

satisface las dos condiciones (103).

E) A continuación se darán estimaciones para la frontera libre correspondiente al problema (90) con $b=0$.

LEMA 23: Si $\{T, s, z\}$ es la solución de (90) con $b=0$ (el dato h es superfluo) y $g \geq 0 (g \neq 0)$ es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados, entonces se tienen:

$$(118) \quad \frac{G(t)}{1+2 \|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2}} \leq s(t) \leq G(t) ,$$

$$(119) \quad 0 < \dot{s}(t) \leq \|g\|_t .$$

DEMOSTRACION: Sea $b \in (0, 1]$ y sean $\{T, s_b, z_b\}$ la solución de (90) con $h \equiv 0$ en $[0, b]$. Por (93), se tiene

$$(120) \quad 0 \leq \dot{s}_b(t) \leq \|g\|_t \leq M , \quad M = \sup_{0 \leq t \leq T} g(t).$$

Sea $v = v(x, t)$ la solución del siguiente problema:

$$(121) \quad \begin{cases} v_{xx} = v_t & , \quad 0 < x < \infty , \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = 0 & , \quad 0 \leq x < \infty \\ v_x(0, t) = - \|g\|_t & , \quad 0 < t < T . \end{cases}$$

Por el Principio del Máximo se tiene:

$$(122) \quad 0 \leq z_b(x, t) \leq v(x, t) = \int_0^t \|g\|_\tau \frac{\exp[-x^2/4(t-\tau)]}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \leq \\ \leq 2 \|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2} .$$

Por (122) y la relación (91) se deducen las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned}
 & b+G(t) - 2 \|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2} s_b(t) \leq b + G(t) - \\
 (123) \quad & - \int_0^{s_b(t)} z_b(x,t) dx = s_b(t) \leq b + G(t) \quad ,
 \end{aligned}$$

es decir:

$$(124) \quad \frac{b + G(t)}{1+2 \|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2}} \leq s_b(t) \leq b + G(t) \leq 1 + G(T),$$

con lo cual la familia $\{s_b\}$ es equicontinua y uniformemente acotada en $[0, T]$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli se puede pasar al límite $b \rightarrow 0$ obteniéndose de esta modo las desigualdades (118) y (119) [17].

F) Se obtiene la siguiente propiedad de dependencia continua de la frontera libre respecto de los datos dada por el:

EJERCICIO 25 [2,6] : Si $\{T, s_i, z_i\}$ es la solución del problema (90) correspondiente a los datos (b_i, h_i, g_i) ($i=1,2$), que satisfacen las hipótesis (H) con $N = \text{Máx}(N_1, N_2)$, $M = \text{Máx}(\text{Sup}_{t \in [0, T]} g_1(t), \text{Sup}_{t \in [0, T]} g_2(t))$. Si $0 \leq b_1 \leq b_2$ entonces existe una constante $C = C(N, M, T)$ de manera que se satisfaga:

$$\begin{aligned}
 & |s_2(t) - s_1(t)| \leq C \left[b_2 - b_1 + \int_0^{b_1} |h_2(x) - h_1(x)| dx + \right. \\
 (125) \quad & \left. + \int_{b_1}^{b_2} h_2(x) dx + \int_0^t |g_2(\tau) - g_1(\tau)| d\tau \right], \quad 0 \leq t \leq T .
 \end{aligned}$$

Como una consecuencia inmediata de la propiedad de estabilidad (125), se deduce el:

COROLARIO 24: Bajo las hipótesis del Ejercicio 25, la solución del problema de Stefan (90), con $b \geq 0$, es única.

G) Método de la ecuación integral equivalente [16] :

Se reducirá (90) al problema de encontrar una única solución de una cierta ecuación integral no-lineal. Para ello se utilizará la siguiente representación integral, correspondiente a las condiciones (90i-v), dada por (ver fórmula (65) del Cursillo C1):

$$(126) \quad z(x, t) = \int_0^b h(\xi) N(x, t; \xi, 0) d\xi + \int_0^t g(\tau) N(x, t; 0, \tau) d\tau + \int_0^t z_{\xi}(s(\tau), \tau) N(x, t; s(\tau), \tau) d\tau .$$

TEOREMA 25: i) $\{T, s, z\}$ es solución del problema (90) con

$$(127) \quad h \in C^1[0, b] \quad , \quad g \in C^0[0, T]$$

si y sólo si la función $v \in C^0[0, T]$, definida por

$$v(t) = z_x(s(t), t)$$

satisface la ecuación integral siguiente:

$$(128) \quad v(t) = 2 \int_0^b h'(\xi) G(s(t), t; \xi, 0) d\xi +$$

$$(128) \quad + 2 \int_0^t g(\tau) N_x(s(t), t; 0, \tau) d\tau + \\ + 2 \int_0^t v(\tau) N_x(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau \quad (\equiv F_1(v)(t))$$

donde s está definida por

$$(129) \quad s(t) = b - \int_0^t v(\tau) d\tau .$$

ii) El operador $F_1: C_{\sigma, M} \rightarrow C_{\sigma, M}$ (definido en (128)) es una contracción para σ suficientemente pequeño, con lo cual la ecuación integral (126) tiene una única solución en $C_{\sigma, M}$. Más aún, para que F_1 esté bien definido y sea una contracción, los parámetros σ y M deben verificar ciertas desigualdades.

DEMOSTRACION: La parte (i) es análoga a la del Teorema 13 y la parte (ii) a la del Teorema 14 (EJERCICIO 26)

OBSERVACION 12: En [16] se estudia el Teorema 25 con una condición (90vi) más general sobre la frontera libre, dada por:

$$(90vi \text{ bis}) \quad \dot{s}(t) + z_x(s(t), t) = q(t) \quad , \quad 0 < t < T \quad ,$$

como así también la prolongación de la solución para todo instante y otras generalizaciones, en posteriores trabajos.

EJERCICIO 27: Si v es la única solución de la ecuación integral (128), entonces $v(0) = h'(b)$ con lo cual \dot{s} resulta continua en $t=0^+$, con $\dot{s}(0) = -v(0) = -h'(b)$.

H) Si en el problema (90) se considera el caso $b=0$ y si se supone que la temperatura puede ser expresada en una serie de potencia alrededor de $x=0$, $t=0$, entonces se obtiene el siguiente resultado:

EJERCICIO 28 [8]: Si el flujo de calor $g=g(t)$ es una función analítica del tiempo t , entonces se pueden obtener todas las derivadas de $s(t)$ en $t=0$, la cual puede ser escrita como la siguiente serie de Taylor:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= c_0 + c_1 t - \frac{c_2}{2!} t^2 + \frac{c_3}{3!} t^3 - \frac{c_4}{4!} t^4 + \dots \\
 c_0 &= 0, \quad c_2 = g^3(0) - \dot{g}(0) \\
 (130) \quad c_1 &= g(0), \quad c_3 = 5g^5(0) - 6\dot{g}(0)g^2(0) + \ddot{g}(0) \\
 c_4 &= 51g^7(0) - 75g^4(0)\dot{g}(0) + 10g^2(0)\ddot{g}(0) + \\
 &+ 15g(0)[\dot{g}(0)]^2 - \ddot{g}(0).
 \end{aligned}$$

I) En [7], se estudia el caso particular de (90) correspondiente a los datos:

$$(131) \quad g(t) \equiv 1, \quad b=0 \quad (\text{h es superfluo})$$

con lo cual la condición de Stefan resulta equivalente a la siguiente ecuación integral:

$$(132) \quad s(t) = t - \int_0^{s(t)} z(x, t) dx.$$

De la ecuación integral (132) se puede notar una cierta relación entre los problemas de frontera libre con los problemas de frontera móvil, mediante el siguiente proceso iterativo:

- i) Se fija la posición de $s_n = s_n(t)$ ($n \geq 0$) que satisface la condición $s_n(0) = 0$.

ii) Se calcula $z_n = z_n(x, t)$ como solución del problema de frontera móvil siguiente (se toma $s = s_n$):

$$(133) \quad \begin{cases} z_{xx} = z_t & , \quad 0 < x < s(t) & , \quad 0 < t < T & , \\ z_x(0, t) = -1 & , \quad 0 < t < T & , \\ z(s(t), t) = 0 & , \quad 0 < t < T & . \end{cases}$$

iii) Se obtiene la nueva posición de la frontera libre mediante la expresión:

$$(134) \quad s_{n+1}(t) = t - \int_0^{s_n(t)} z_n(x, t) dx .$$

Con este proceso iterativo se prueba en [7] que:

a) $z(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x, t)$ es la solución del problema de frontera móvil (133) con $s(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)$, tomando inicialmente $s_0(t) = t$.

b) $z(x, t)$ y $s(t)$ satisfacen la ecuación integral (132). De este modo $\{T, s, z\}$ resultan ser solución del problema de Stefan (90) con datos (131). Los resultados obtenidos están dados por:

TEOREMA 26: Si se toma como hipótesis inicial que $s_0(t) = t$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

- i) $z_n \geq 0$
- ii) $\dot{s}_{n+1}(t) = -z_{n_x}(s_n(t), t) \geq 0$, $s_n(0) = 0$
- iii) $0 \leq z_n(x, t) \leq s_n(t) - x$
- iv) La sucesión (s_n) verifica
 - a) $s_1(t) \leq s_n(t) \leq s_0(t)$, $\forall n$
 - b) (s_{2n-1}) es monótona no-decreciente y (s_{2n})

es monótona no-decreciente satisfaciendo:

$$s_{2n-1}(t) \leq s_{2n+1}(t) \leq s_{2n}(t) \leq s_{2n-2}(t).$$

Por lo tanto cada curva $s_i(t)$ ($i \geq 2$) se encuentra en la región comprendida por las dos curvas precedentes $s_{i-1}(t)$ y $s_{i-2}(t)$.

$$v) |z_n(x,t) - z_{n-1}(x,t)| \leq |s_n(t) - s_{n-1}(t)|$$

$$vi) |s_{n+1}(t) - s_n(t)| \leq 2t |s_n(t) - s_{n-1}(t)|$$

vii) Eligiendo $t \leq T=1/4$, se tiene

$$|s_{n+1}(t) - s_n(t)| \leq \frac{1}{2} |s_n(t) - s_{n-1}(t)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^n} |s_1(t) - s_0(t)| \quad \text{con lo cual se establece}$$

la existencia de $s(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)$ uniformemente

para $t \leq 1/4$. Más aún, usando (v), se tiene

que $z^*(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x,t)$ uniformemente para

$t \leq 1/4$.

viii) Sea $z(x,t)$ la solución del problema de frontera móvil (133) para $s(t)$ y sea $s^*(t)$ definida por:

$$(135) \quad s^*(t) = t - \int_0^{s(t)} z(x,t) dx.$$

Entonces se tiene que $s^*(t) = s(t)$ y por ende $z(x,t) = z^*(x,t)$.

ix) La derivada de la función $s(t)$ existe y satisface la condición de Stefan, con lo cual $\{T, s, z\}$ es una solución del problema (90) con datos

(131).

x) La unicidad de solución surge por el absurdo.

DEMOBTRACION: (EJERCICIO 29) (Se utiliza principalmente el Principio del Máximo) [7].

OBSERVACION 13: Se puede demostrar que el proceso iterativo es convergente para $t \leq T=1$ y que la misma metodología se puede generalizar a situaciones más generales y a geometrías de tipo cilíndrica y esférica [15].

Más aún, un Teorema general de existencia de solución está dado en [9], donde no se hace ninguna hipótesis sobre los signos de los datos y sobre la monotonía de la frontera libre. El método consiste en definir una transformación sobre la frontera libre y verificar que se tiene un punto fijo.

OBSERVACION FINAL: Numerosas propiedades de la solución del problema de Stefan a una fase (1) ó (90) no han sido tratadas aquí (por ejemplo, propiedades de regularidad (infinita derivabilidad, analiticidad) de la frontera libre, etc.). Tampoco se ha estudiado el problema de Stefan unidimensional a dos fases que es de esperar se trate en próximos Seminarios con el objetivo de difundir y analizar los conocimientos básicos relativos a problemas de frontera libre para la ecuación del calor (difusión) y sus posibles aplicaciones concretas. Por otra parte merece destacarse el interesante trabajo de revisión efectuado en [13] que puede ser muy útil a quien desearse en este tipo de problemas. Además, en [18], se indica una extensa bibliografía sobre el tema con una minuciosa clasificación sobre los diferentes métodos teóri

cos y numéricos utilizados. Para finalizar merece destacarse [14], libro íntegramente dedicado al problema de Stefan, en el cual se indican numerosas metodologías, aplicaciones y referencias.

REFERENCIAS

- [1] J.R.CANNON, "Some Heat Conduction Problems", to appear.
- [2] J.R.CANNON-J.DOUGLAS, Jr., "The Stability of the Boundary in a Stefan Problem", Ann.Sc.Norm.Smp. Pisa, 21 (1967), 83-91.
- [3] J.R.CANNON-C.D.HILL, "Existence, Uniqueness, Stability and Monotone Dependence in a Stefan Problem for the Heat Equation", J.Math.Mech., 17(1967), 1-19.
- [4] J.R.CANNON-C.D.HILL, "Remarks on a Stefan Problem", J.Math.Mech., 17(1967), 433-441.
- [5] J.R.CANNON-C.D.HILL-M.PRIMICERIO, "The One-Phase Stefan Problem for the Heat Equation with Boundary Temperature Specification", Arch.Rat.Mech.Anal., 39(1970), 270-274.
- [6] J.R.CANNON-M.PRIMICERIO, "Remarks on the One-Phase Stefan Problem for the Heat Equation With the Flux Prescribed on the Fixed Boundary", J.Math.Anal.Appl. 35 (1971), 361-373.
- [7] G.W.EVANS, II, "A Note on the Existence of a Solution to a Problem of Stefan", Quart.Appl.Math., 9(1951), 185-193.
- [8] G.W.EVANS, II-E.ISAACSON-J.K.L. Mac DONALD, "Stefan-like Problems", Quart.Appl.Math., 8(1950), 312-319.
- [9] A.FASANO-M.PRIMICERIO, "Free Boundary Problems for

Nonlinear Parabolic Equations with Nonlinear Free Boundary Conditions", J.Math.Anal.Appl., 72(1979), 247-273.

- [10] A.FRIEDMAN, "Free Boundary Problems for Parabolic Equations I. Melting of Solids", J.Math.Mech., 8(1959), 499-517.
- [11] A.FRIEDMAN, "Partial Differential Equations of Parabolic Type" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).
- [12] C.D.HILL, "Parabolic Equations in One Space Variable and the Non-Characteristic Cauchy Problem", Comm.Pure Appl.Math., 20(1967), 619-635.
- [13] M.PRIMICERIO, "Problemi di diffusione a frontiera libera", Boll.Un.Mat. Italiana, 18A(1981), 11-68.
- [14] L.I.RUBINSTEIN, "The Stefan Problem", Trans.Math. Monographs, vol. 27, Amer.Math.Soc., Providence(1971).
- [15] G.SEISTINI, "Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan", Conferenze Sem. Mat.Univ.Bari, N*55-56 (1960).
- [16] B.SHERMAN, "Free Boundary Problems for the Heat Equation with Prescribed Flux at Both Fixed Face and Melting Interface", Quart.Appl.Math., 25(1967), 53-63
- [17] B.SHERMAN, "Free Boundary Problems for the Heat Equations in Which the Moving Interface Coincides Initially with the Fixed Face", J.Math.Anal.Appl., 33(1971), 449-466.
- [18] D.A.TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", 29(1981/82), 147-241.

PROMAR(CONICET-UNR), Instituto de Matemática 'Beppo Levi',
 Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,
 Universidad Nacional de Rosario,
 Avda. Pellegrini 250,
 2000 Rosario, ARGENTINA.

ALGUNOS CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS FUNCIONAL

Pedro Roberto MARANGUNIC

1. INTRODUCCION

El Análisis Funcional, importante disciplina matemática, ofrece una extensa y variada gama de aplicaciones en el marco de la investigación científica y tecnológica. Su campo de aplicación se ha expandido velozmente en los últimos años, a favor de las potentísimas herramientas que suministra para el tratamiento de muy diferentes problemas prácticos, particularmente a través de su utilización en las Ecuaciones Diferenciales y el Análisis Numérico, cuestiones éstas, como bien se sabe, de especial relevancia en la Ciencia y en la Técnica.

No escapa a esta sensible influencia el problema de Stefan, con sus múltiples temas conexos de creciente interés para matemáticos, físicos, químicos, biólogos e ingenieros de diversas especialidades. Es así que a mayor manejo del Análisis Funcional, resulta notablemente mayor el número de tópicos o aspectos del Problema de Stefan que es posible abordar con éxito.

En ocasión de realizarse la primera edición del Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones, se programó una clase de apoyo dirigida a los no matemáticos, bajo el título de "Algunos Conceptos Básicos del Análisis

Funcional", con la esperanza de que ello contribuyera a un mejor aprovechamiento de los cursillos y las conferencias que componían el Seminario.

Dada la limitación de tiempo (una hora y media) se planeó reducir la exposición casi exclusivamente a definiciones, por lo que se consideraron muy pocos teoremas o propiedades. De éstos se presentó sólo el enunciado, con la única excepción del Teorema del Punto Fijo de Banach, del cual se expusieron las ideas principales de su demostración, debido al interés en sí misma que ésta posee, por constituir el fundamento de un método numérico de gran aplicación práctica.

Estas notas pretenden reflejar, y en parte ampliar, la clase mencionada, a la vez que aportar sugerencias sobre material de lectura.

2. ESPACIOS METRICOS

Notación: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

Definición 1 : Dado un conjunto no vacío M , llamaremos distancia(o métrica) en M a toda función

$$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

que satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$ (usualmente llamada desigualdad triangular).

Definición 2 : Se llama espacio métrico a todo par ordenado (M, d) , donde M es un conjunto no vacío, y d

es una métrica en M .

Es muy común que nos permitamos una licencia en el lenguaje (y, consecuentemente, en la notación), diciendo "el espacio métrico M " en lugar de "el espacio métrico (M, d) ".

Ejemplos

a) En \mathbb{R} la distancia usual (euclídea) se da mediante

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

b) En \mathbb{R}^2 la distancia usual (euclídea) viene dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

siendo $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$.

c) La métrica euclídea de \mathbb{R}^3 responde a la expresión

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

siendo $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

d) Más generalmente, en \mathbb{R}^n :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

e) Otras métricas en \mathbb{R}^2 :

$$d_1(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad (\text{informalmente llamada métrica "del peatón" ó "urbana", por razones imaginables})$$

$$d_\infty(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Estas métricas se generalizan rápidamente a \mathbb{R}^n :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_{\infty}(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

f) Los espacios métricos más importantes son, por lo general, espacios funcionales, vale decir aquéllos cuyos elementos son funciones (o convenientes clases de funciones). Un ejemplo sencillo es

$$C[a,b] = \{f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\} \quad (\text{donde } a, b \in \mathbb{R}; a < b).$$

A este conjunto le podemos asignar diferentes métricas, entre ellas las siguientes:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$d_2(f,g) = \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$d_{\infty}(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

que están vinculadas a distintos tipos de convergencia de sucesiones de funciones (en media, en media cuadrática, uniforme, respectivamente).

g) Es natural preguntarse si cualquier conjunto no vacío M puede ser metrizado. La respuesta es afirmativa, pero es interesante destacar que puede responderse de un modo que no depende de quién sea M , es decir en forma universal. En efecto, dado $M \neq \emptyset$, basta tomar

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases},$$

la habitualmente denominada métrica discreta.

De ahora en más, cuando \mathbb{R} , ó \mathbb{R}^n , ó alguno de sus subconjuntos, sea nombrado como espacio métrico y no se aclare cuál es la métrica, sobreentenderemos que se trata de la euclídea.

La noción de distancia posibilita definir bola abierta y bola cerrada en (M, d) , al mismo estilo que en \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^n . Es así que llamamos bola abierta (respectivamente cerrada) de centro $x \in M$ y radio $r > 0$, al conjunto

$$B(x, r) = \{y \in M / d(x, y) < r\}$$

(respectivamente $B[x, r] = \{y \in M / d(x, y) \leq r\}$).

Asimismo, es interesante comentar que a partir de esto, trabajando también como en \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^n , se definen conceptos como entorno, conjunto abierto, conjunto cerrado, punto de acumulación, espacio métrico separable, espacio métrico compacto, espacio métrico conexo, etc., y se estudia, en definitiva, la topología de los espacios métricos.

3. SUCESIONES EN UN ESPACIO METRICO - COMPLETITUD

Sea (M, d) un espacio métrico. Consideramos una sucesión en el conjunto M , es decir, una aplicación del conjunto de los números naturales en M :

$$s: \mathbb{N} \longrightarrow M$$

$$n \longmapsto x_n .$$

La forma habitual de representar una sucesión es

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots ,$$

que abreviaremos como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, o simplemente $\{x_n\}$.

El hecho de que el conjunto M esté dotado de una métrica (y, por ende, de una idea de "proximidad"), nos permite recrear, al menos en parte, la teoría que conocemos para sucesiones de números reales. Sea $x \in M$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en M .

Definición 3: Decimos que $\{x_n\}$ converge a x (y lo denotamos $\{x_n\} \rightarrow x$, ó $x_n \rightarrow x$) si

$$d(x_n, x) \rightarrow 0.$$

o sea, -si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x) < \epsilon.$$

También decimos, en tal caso, que x es límite de la sucesión $\{x_n\}$. Nótese que no dijimos el límite, pues a priori no sabemos nada de su unicidad como tal.

¿Una sucesión podría converger a dos puntos distintos de M ? Si $x_n \rightarrow a$ y $x_n \rightarrow b$, el lector puede obtener, en virtud de la Def.3 y de la desigualdad triangular, que

$$\forall \epsilon > 0 \quad d(a, b) < 2\epsilon,$$

lo cual garantiza que $a=b$. Vale, entonces, la siguiente

Propiedad 1: Una sucesión no puede poseer dos límites distintos.

Esto justifica, a partir de ahora, el denominar a x (de la Def.3) el límite de la sucesión $\{x_n\}$.

Ejemplos: En $M=\mathbb{R}$, con la métrica euclídea, consideramos la sucesión dada por

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión posee límite (que es el 0). En cambio, la sucesión dada por

$$y_n = (-1)^n$$

no posee límite, vale decir que no existe ningún punto en \mathbb{R} al cual converja $\{y_n\}$.

Conviene observar que la existencia de límite de una sucesión depende no sólo de la ley de formación de sus elementos, sino también del espacio métrico considerado. En efecto, la sucesión dada por

$$x_n = \frac{1}{n}$$

no posee límite en \mathbb{R} dotado de la métrica discreta. Tampoco lo posee en $M = (0, \infty)$ con $d(x, y) = |x - y|$, o sea con la métrica euclídea restringida a este conjunto (nótese que el x de la Def.3 debe pertenecer a M).

Una consecuencia sencilla de las condiciones ii) y iii) de la definición de métrica, es

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in M,$$

que rápidamente se extiende a

$$|d(x, t) - d(y, z)| \leq d(t, z) + d(x, y) \quad \forall x, y, z, t \in M.$$

Usando esto, es fácil probar la

Propiedad 2: Si $x_n \rightarrow x$ en (M, d) , entonces

$$\forall y \in M \quad d(x_n, y) \rightarrow d(x, y).$$

Más aún:

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y \implies d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y).$$

Definición 4: Si una sucesión posee límite en (M, d) , se dice que es convergente en (M, d) (cuando la omi-

sión del espacio métrico no se presta a confusiones, se suele decir simplemente que es convergente).

Las sucesiones convergentes tienen una propiedad que es fácil de percibir y enunciar en lenguaje intuitivo: al crecer el índice n , los elementos se van "aglomerando", se van acercando entre sí. Cauchy vio que en \mathbb{R} , con la métrica usual, vale la recíproca.

Para darle forma precisa a lo recién dicho, consideremos una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (M, d) .

Definición 5: Se dice que $\{x_n\}$ es de Cauchy en (M, d) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall m, n \geq n_0 \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon .$$

Ejemplos. La sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy en \mathbb{R} y en $(0, \infty)$, en ambos casos con la métrica usual, pero no es de Cauchy en \mathbb{R} con la métrica discreta.

Supongamos que $\{x_n\} \rightarrow x$, y sea $\varepsilon > 0$. Como también $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, se tiene que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

De ii) y iii) de la Def.1, surge que

$$\forall m, n \geq n_0 \quad d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Acabamos de demostrar la

Propiedad 3: Toda sucesión convergente en un cierto espacio métrico, es también de Cauchy en tal espacio.

En \mathbb{Q} , con la métrica usual, no vale la recíproca.

Definición 6: Un espacio métrico (M, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy en (M, d) es convergente

en tal espacio.

Ejemplos

\mathbb{R}^n es completo (cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$)

\mathbb{Q} no lo es

$(0, \infty)$ no lo es.

$C[a, b]$ es completo con d_∞ .

$C[a, b]$ no es completo con d_1 ni con d_2 .

Los espacios métricos completos son de notable importancia en Matemática Pura y Aplicada, pese a lo cual no nos extenderemos en detalles al respecto.

4. FUNCIONES CONTINUAS

Sean (M, d) y (E, ρ) dos espacios métricos. Consideremos una función

$$f: M \longrightarrow E.$$

Puesto que el dominio y el codominio están dotados de sendas métricas, nos interesa analizar propiedades de f relacionadas con dichas métricas. Veremos la continuidad.

Tomemos un $x_0 \in M$.

Definición 7: Se dice que f es continua en x_0 si

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

Existen varias versiones equivalentes a (1), basadas en conceptos topológicos, como

$\forall V$ entorno de $f(x_0)$, $\exists U$ entorno de $x_0/f(U) \subset V$.

Definición 8: Se dice que f es continua en M (o simplemente: f es continua) si

f es continua en $x \quad \forall x \in M$.

Es decir, si

$\forall x \in M \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$.

La propiedad que sigue nos da una útil e interesante caracterización de la continuidad.

Propiedad 4: Si f es continua en x_0 , entonces

$x_n \rightarrow x_0$ en $(M, d) \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ en (E, ρ) .

Recíprocamente, si para toda sucesión $\{x_n\}$ convergente a x_0 en (M, d) se cumple

$f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ en (E, ρ) ,

entonces f es continua en x_0 .

Por simple aplicación de la Def.7, o también usando la Propiedad recién enunciada, es sencillo demostrar la siguiente

Propiedad 5: Sean (M, d) , (E, ρ) y (X, ϕ) tres espacios métricos. Sean f una aplicación de M en E , y g una aplicación de E en X . Si f es continua en un $x_0 \in M$, y g es continua en $f(x_0)$, entonces la función $h = g \circ f$ es continua en x_0 .

Corolario 1: Si f y g son continuas, también h es continua.

Definición 9: Si ocurre que

$$(2) \exists k > 0 / \forall x, y \in M \rho(f(x), f(y)) \leq k d(x, y),$$

decimos que f es Lipschitziana, y que tal k es una constante de Lipschitz para f.

Si $M = E = \mathbb{R}$, la desigualdad de (2) no es sino

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

que significa que los cocientes incrementales están acotados.

Obviamente, la constante k no es única, pues

k de Lipschitz para f, $k' > k \Rightarrow k'$ de Lipschitz para f.

Como es imaginable, en las aplicaciones se procura conseguir la constante de Lipschitz más pequeña. Si existe una tal $k < 1$, se dice que f es una contracción. Nos interesarán las contracciones de un espacio métrico en sí mismo.

Observación 1: Toda función Lipschitziana es continua. En particular, una contracción lo es.

5. TEOREMA DEL PUNTO FIJO (BANACH-CACCIOPPOLI)

Definición 10: Si se tiene un conjunto no vacío M (no necesariamente espacio métrico), una función $f: M \rightarrow M$ y un elemento $x \in M$, se dice que x es un punto fijo de f si

$$(3) \quad f(x) = x.$$

Supongamos que estuviéramos deseando resolver la ecuación

$$(4) \quad g(x)=0.$$

Claramente, esta ecuación es equivalente (toda solución de ésta lo es de la otra, y viceversa) a cualquiera de las siguientes:

$$x+g(x)=x$$

$$x-g(x)=x$$

$$x+a \cdot g(x)=x \quad \text{con } a \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ que son de}$$

la forma (3). De modo que el problema de resolver la ecuación (4) se transforma en el de encontrar los puntos fijos de una adecuada función.

La misma idea de fondo es aplicable a gran variedad de ecuaciones de la Matemática (algebraicas, diferenciales, integrales, etc.), por lo que los teoremas que aseguran existencia o unicidad de punto fijo para una determinada función (u operador), son en general utilísimos a la hora de demostrar existencia o unicidad, respectivamente, de solución para una ecuación dada. No debe sorprender, entonces, que en la literatura matemática sea posible encontrar numerosos (y de muy variado tipo) teoremas de punto fijo, ni tampoco la importancia que éstos han cobrado en la Matemática Aplicada.

La mayoría de dichos teoremas sólo asegura existencia, si bien el que damos a continuación también garantiza unicidad.

Teorema 1 (Banach-Caccioppoli): Toda contracción en un espacio métrico completo admite un único punto fijo. En símbolos:

(M, d) espacio métrico completo

f contracción en M

$$\Rightarrow \exists ! x \in M / f(x) = x .$$

Demostración. Tomamos un elemento cualquiera $x_0 \in M$, y construimos una sucesión por recurrencia: $x_1 = f(x_0)$; $x_2 = f(x_1)$; etc.. En general

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad x_{n+1} = f(x_n) .$$

La idea consiste en demostrar que esta sucesión es convergente y que su límite es el único punto fijo de f . Comencemos probando que $\{x_n\}$ es de Cauchy. La hipótesis hecha sobre f nos permite elegir un $k \in (0, 1)$ que sea constante de Lipschitz para f .

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}) \leq \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Supongamos que $m > n$.

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq k^n d(x_{m-n}, x_0) \leq \\ &\leq k^n [d(x_{m-n}, x_{m-n-1}) + d(x_{m-n-1}, x_{m-n-2}) + \dots + d(x_1, x_0)] \leq \\ &\leq k^n (1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}) d(x_1, x_0) \leq k^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-k} , \end{aligned}$$

de lo que surge que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Como (M, d) es completo,

$$\exists x \in M / \{x_n\} \rightarrow x .$$

Por Obs.1 y Prop.4 , $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Pero $f(x_n) = x_{n+1}$, con lo que $f(x_n) \rightarrow x$.

Luego $f(x) = x$, de modo que x es punto fijo de f .

Acabamos de ver que, cualquiera sea el x_0 inicial, la sucesión así formada converge a un punto fijo de f . Esto completa la demostración de existencia. Pero todavía cabe preguntarse si diferentes x_0 no nos conducirán a diferentes puntos fijos (e incluso si no existirá algún punto fijo de f no obtenible por el método expuesto, lo cual es de respuesta obvia). Probemos entonces la uni-

cidad.

Sean $x, y \in M$ / $f(x) = x \wedge f(y) = y$.

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

$$(1-k) \cdot d(x, y) \leq 0$$

Como $1-k > 0$, tenemos $d(x, y) \leq 0$, con lo que $d(x, y) = 0$, y el punto fijo de f es único.

Observación 2: La demostración vista, de estilo constructivo, no sólo prueba la existencia de un único punto fijo, sino que nos provee un procedimiento para su determinación (en forma aproximada), lo que le confiere gran importancia práctica. La idea empleada es una generalización de la técnica de Picard (método de las aproximaciones sucesivas) para resolver problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Es útil destacar también que de la demostración surge una acotación para el error cometido al cabo de n pasos. En efecto, de la desigualdad

$$\forall m > n \quad d(x_m, x_n) \leq k^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-k},$$

teniendo en cuenta que el segundo miembro no depende de m y que $x_m \rightarrow x$, se obtiene, por la primera parte de la Prop. 2,

$$d(x, x_n) \leq k^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

6. ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS

Así como en la Sección 2 presentamos la noción de métrica en un conjunto abstracto, que generaliza a

la distancia euclídea en \mathbb{R}^n ($n=1,2,3,\dots$), en esta Sección introduciremos el concepto de norma en un espacio vectorial abstracto, como generalización del valor absoluto de un número real

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y del módulo de un vector de \mathbb{R}^n ($n=2,3,\dots$)

$$(5) \quad |(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}$$

Los espacios vectoriales a considerar serán reales o complejos, lo que significa que el cuerpo de escalares será \mathbb{R} ó \mathbb{C} . No obstante, los ejemplos para estas notas han sido elegidos reales.

Definición 11: Dado un espacio vectorial E , se llama norma en E a toda función

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{tal que}$$

$$i) \quad \|x\| = 0 \iff x=0$$

$$ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ó } \mathbb{C}) \quad \forall x \in E$$

$$iii) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E \quad (\text{desigualdad triangular})$$

Definición 12: Se llama espacio vectorial normado (ó simplemente espacio normado) a todo par ordenado $(E, \| \cdot \|)$, donde E es un espacio vectorial, y $\| \cdot \|$ es una norma en E .

En esto también es frecuente abusar del lenguaje, diciendo "el espacio normado E ", en vez de "el espacio normado $(E, \| \cdot \|)$ ".

Ejemplos:

a) En \mathbb{R}^n , además de la norma habitual (5), se pueden considerar, entre otras:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

b) Al conjunto ya mencionado

$$C[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\},$$

considerado ahora con su estructura usual de espacio vectorial, se lo puede dotar de diferentes normas, por ejemplo:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Observación 3: Todo espacio normado E es también métrico, en el sentido de que tomando

$$(6) \quad d(x, y) = \|x - y\|,$$

d resulta ser una métrica en E .

Propiedad 6: La métrica dada por (6) goza de propiedades especiales frente a una traslación o a una homotecia de centro en el origen, a saber:

$$(7) \quad d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in E$$

$$(8) \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\text{ó } \mathbb{C}) \quad \forall x, y \in E.$$

Recíprocamente, si una métrica en un espacio vectorial satisface (7) y (8), necesariamente proviene de una norma.

La demostración de (7) y (8) es trivial; para la recíproca, tómese $\|x\| = d(x, 0) \quad \forall x \in E$.

Observación 4: (7) y (8) ponen de manifiesto la relación que hay entre las dos estructuras (la vectorial y la métrica) que se consideran simultáneamente en un espacio normado.

Luego de la Obs. 3, toda la teoría anterior puede aplicarse a los espacios normados, en particular lo relativo a sucesiones y a la noción de completitud. Como ejemplo, damos una propiedad de continuidad de las operaciones vectoriales y de la norma, cuya demostración se basa, esencialmente, en la desigualdad triangular.

Propiedad 7: Si $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ en $(E, \|\cdot\|)$, y $\lambda_n \rightarrow \lambda$ en \mathbb{R} (ó \mathbb{C}), entonces $x_n + y_n \rightarrow x + y$, $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$, y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Esta propiedad es una nueva manifestación de lo comentado en la Obs. 4.

Definición 13: Se llama espacio de Banach a todo espacio normado que, como espacio métrico, resulta completo.

Ejemplos:

\mathbb{R}^n es de Banach con cualquiera de las normas consideradas.

$C[a, b]$ es de Banach con $\| \cdot \|_{\infty}$, pero no lo es con $\| \cdot \|_1$ ni con $\| \cdot \|_2$.

Otros espacios de Banach, de especial importancia en las aplicaciones, serán mencionados en la Sección 10.

En los espacios normados se puede reeditar buena parte de la teoría de series numéricas. En efecto, al poder sumar vectores y considerar límite de sucesiones de vectores, se definen de manera obvia las nociones de serie, serie convergente, suma de una serie, etc., y se extienden a este caso muchas de las propiedades conocidas, por lo general sin mayores dificultades. Las series absolutamente convergentes se introducen como aquellas series

de vectores $\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right|$ tales que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ es convergente.

Para dar tan sólo un ejemplo sobre esta teoría, enunciemos la importante

Propiedad 8: En un espacio de Banach toda serie absolutamente convergente es también convergente. Recíprocamente, si en un espacio normado toda serie absolutamente convergente resulta convergente, dicho espacio es completo.

En la Sección 9 nos referiremos a un útil y relevante caso particular de series en normados: las llamadas Series de Fourier.

7. APLICACIONES LINEALES Y CONTINUAS ENTRE ESPACIOS NORMADOS

Es un hecho frecuente en las distintas ramas de la Matemática, que se estudien especialmente aquellas transformaciones que son, en algún sentido, compatibles con la estructura que se está analizando. Por ejemplo, entre las funciones entre dos espacios vectoriales (no necesariamente normados) interesan preferentemente las lineales. Del mismo modo, cuando tratábamos con espacios métricos, nos ocupamos de las funciones continuas. Al trabajar con espacios normados será muy natural que estudiemos las funciones lineales y continuas, es decir, aquellas aplicaciones que son "respetuosas", al mismo tiempo, de la estructura vectorial y de la métrica.

Dada la brevedad de estas notas, sólo veremos un teorema que da condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación lineal entre espacios normados sea continua. Allí nos encontraremos con la aparentemente sorprendente propiedad de que si una función lineal es continua en algún punto, entonces es continua en todos los puntos. En rigor, la sorpresa no es tal, si se tiene en cuenta (7) y la linealidad de la función.

Definición 14: Sean E y F dos espacios normados. Sea $f: E \rightarrow F$ lineal. Se dice que f es acotada si

$$(9) \quad \exists k > 0 / \forall x \in E \quad \| f(x) \|_F \leq k \| x \|_E .$$

Observación 5: Al ser f lineal, se tiene

$$f(x) - f(y) = f(x - y) ,$$

con lo que trivialmente la condición (9) equivale a que f sea Lipschitziana.

Teorema 2: Siendo E y F espacios vectoriales normados, y $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal, los siguientes enunciados resultan equivalentes:

- i) f es acotada
- ii) f es continua
- iii) f es continua en algún punto.

Demostración: Después de las Obs. 1 y 5, es inmediato que $i) \Rightarrow ii)$. $ii) \Rightarrow iii)$ es trivial. Para probar que $iii) \Rightarrow i)$, supongamos f continua en x_0 . Haciendo $\varepsilon=1$ en (1), se tiene que

$$(10) \quad \exists \delta > 0 / \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < 1,$$

donde las normas se sobreentienden en los correspondientes espacios.

Para cada $z \in E - \{0\}$ tomamos $z' = \frac{\delta}{2 \|z\|} \cdot z$, con lo que $\|z'\| = \frac{\delta}{2}$. Por linealidad de f

$$f(x_0 + z') - f(x_0) = f(z') = \frac{\delta}{2 \|z\|} \cdot f(z).$$

Como $\|(x_0 + z') - x_0\| = \|z'\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, tenemos

$$\|f(x_0 + z') - f(x_0)\| = \frac{\delta}{2 \|z\|} \|f(z)\| < 1 \quad \text{por (10).}$$

sea $\|f(z)\| \leq \frac{2}{\delta} \|z\| \quad \forall z \in E - \{0\}$,

con lo que f es acotada, pues para $z=0$ esta desigualdad se satisface trivialmente.

8. ESPACIOS PREHILBERTIANOS

Nuestro propósito es, ahora, generalizar el producto escalar de \mathbb{R}^n :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad ,$$

siendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Definición 15: Dado un espacio vectorial real (o complejo) E , se llama producto interno en E a toda función

$$(\cdot, \cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \quad \text{tal que}$$

- i) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \iff x = 0$
- ii) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in E$
- iii) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \quad \forall x, y \in E$
- iv) $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in E$

Naturalmente, en el caso real la condición iv) significa

$$(x, y) = (y, x)$$

Definición 16: A todo par ordenado formado por un espacio vectorial y un producto interno en él, lo llamaremos espacio vectorial con producto interno ó espacio prehilbertiano.

Ejemplo: El espacio $C[a, b]$ con el producto interno

$$(11) \quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Observación 6: Todo espacio prehilbertiano es a la vez normado, pues el producto interno engendra una norma:

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

Inspirados en la Prop.6, nos preguntamos si toda norma provendrá de un producto interno o, en caso contrario, si habrá alguna propiedad especial que caracterice a las normas así obtenidas. La respuesta la da la

Propiedad 9 (Teorema de Jordan-Von Neumann): Para que un espacio normado E sea prehilbertiano es necesario y suficiente que se satisfaga la "igualdad del paralelogramo"

$$\forall x, y \in E \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Ejemplos:

En \mathbb{R}^n la norma habitual proviene de un producto interno, no así $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$. Análogamente, en $C[a, b]$, ni $\|\cdot\|_1$ ni $\|\cdot\|_\infty$ se obtienen a partir de ningún producto interno. En cambio, $\|\cdot\|_2$ proviene del definido en (11).

La noción de producto interno es adecuada para introducir conceptos y teorías que generalizan a los análogos de la geometría elemental: ortogonalidad entre vectores, teoría de las proyecciones, etc., y en el caso real, ángulo entre dos vectores no nulos.

Definición 17: Dados dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano, se dice que x e y son ortogonales si $(x, y) = 0$.

Propiedad 10 (Teorema de Pitágoras): Si x e y son ortogonales, entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Más generalmente, si x_1, x_2, \dots, x_n son ortogonales dos

a dos, se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Corolario 2: Todo conjunto de vectores no nulos ortogonales dos a dos, es linealmente independiente.

Después de la Obs.6, tiene sentido la

Definición 18: Se llama espacio de Hilbert a todo espacio prehilbertiano completo.

Ejemplos:

\mathbb{R}^n es de Hilbert con el producto interno usual.

$C[a, b]$ no es de Hilbert con (11).

El espacio ℓ^2 formado por las sucesiones reales (o com

plejas) $x = \{x_n\} / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, resulta de Hilbert con el

producto interno

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

Naturalmente, la Prop.7 es aplicable en todo espacio prehilbertiano. Pero además se tiene

Propiedad 11: Si $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ en E prehilbertiano, entonces

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

Esto nos dice que el producto interno es continuo en ambas variables y , por ende, en cada una por separado.

Entonces, una sencilla forma de **construir aplicaciones**

lineales y continuas de E en \mathbb{R} (ó \mathbb{C}) es elegir un $y \in E$ y hacer variar x en (x, y) . Es decir, se define

$$f(x) = (x, y) \quad \forall x \in E .$$

Un interesante teorema de F.RIESZ establece que si el espacio es completo, todas las aplicaciones lineales y continuas de E en \mathbb{R} (ó \mathbb{C}) son de este tipo. Cabe resaltar la utilidad en las aplicaciones de una extensión de este teorema, conocida como Lema de Lax-Milgram.

9. SERIES DE FOURIER EN ESPACIOS PREHILBERTIANOS

Recordemos que cuando se tiene una base en un espacio vectorial, todo vector puede escribirse, de una única manera, como combinación lineal de elementos de tal base. Pero en un espacio normado, y en particular en un prehilbertiano, podemos valernos de conjuntos linealmente independientes que no necesariamente sean bases en el sentido algebraico, pues ahora podemos trascender la idea puramente algebraica de combinación lineal (número finito de sumandos) para considerar series. Obviamente, este comentario carece de interés si el espacio en cuestión es de dimensión finita.

Para espacios normados cualesquiera, resulta altamente engorroso poner en práctica estas ideas, no así para los prehilbertianos, caso en el que juega un rol fundamental la noción de ortogonalidad. Veamos a grandes rasgos cómo se desarrolla este trabajo.

Sea E , en adelante, un espacio prehilbertiano. A los subconjuntos de E los nombraremos como "conjuntos"

de vectores" o "sistemas de vectores". Sea A un tal subconjunto.

Definición 19: Se dice que A es un sistema ortogonal si sus elementos son ortogonales dos a dos. En símbolos

$$x, y \in A, \quad x \neq y \implies (x, y) = 0.$$

Después del Corolario 2, si A es ortogonal y $0 \notin A$, A es un sistema linealmente independiente.

Notemos que en \mathbb{R}^3 el sistema formado por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ es linealmente independiente y, sin embargo, no podemos escribir cualquier vector de \mathbb{R}^3 como combinación lineal de tales vectores. Intuitivamente, hay que "ampliarlo", manteniendo la condición de independencia lineal. Con los sistemas ortogonales tendremos que hacer algo similar, si queremos cumplir con los propósitos enunciados.

Definición 20: Sea A un sistema ortogonal de vectores no nulos. Se dice que A es un sistema ortogonal completo si el único vector ortogonal a todos los elementos de A es el vector nulo. 0 sea:

$$[x \in E, \quad (x, y) = 0 \quad \forall y \in A] \implies x = 0$$

Ejemplos:

a) Un sistema ortogonal completo en \mathbb{R}^3 está dado por la base canónica

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

b) En $C[a, b]$ con el producto interno (11), un sistema ortogonal completo es el llamado sistema trigonométrico

$$\frac{1}{2}, \quad \cos n \frac{2\pi x}{b-a}, \quad \text{sen } n \frac{2\pi x}{b-a} \quad n=1, 2, \dots$$

Por razones de cálculo, es conveniente que los sistemas ortogonales a considerar estén normalizados, es decir que todos sus vectores sean de norma 1. Esto no nos limita en absoluto, pues si A es un sistema ortogonal de vectores no nulos, reemplazando cada $x \in A$ por

$$y = \frac{1}{\|x\|} \cdot x$$

se tiene un sistema B también ortogonal que además es normal, pues $\|y\| = 1$. Formalmente damos la

Definición 21: Un sistema A se dirá ortonormal si es ortogonal y además $\forall x \in A \quad \|x\| = 1$.

El sistema del ejemplo a) es ortonormal, no así el de b).

En lo que resta, sólo consideramos sistemas ortonormales numerables, es decir que puedan ordenarse en forma de sucesión: $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para el lector informado esto no constituye ninguna restricción, pues se demuestra que cuando un espacio prehilbertiano infinito-dimensional es separable (que es el caso de verdadero interés), los conjuntos ortonormales son a lo sumo numerables.

Definición 22: Dado un sistema ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ en E y un $x \in E$, llamaremos coeficientes de Fourier de x respecto del sistema $\{e_k\}$ a los números

$$c_k = (x, e_k) \quad k=1, 2, \dots, \quad ,$$

y serie de Fourier de x respecto del sistema $\{e_k\}$ a la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \quad .$$

Como una propiedad interesante de los coeficientes de Fourier podemos citar la

Propiedad 12: La mejor aproximación de x en el subespacio generado por los n primeros vectores

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

está dada por $\sum_{k=1}^n c_k e_k$, siendo $c_k = (x, e_k)$.

Pero nos interesa saber si la sucesión de coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ caracteriza al vector x , vale decir si x puede reconstruirse a partir de sus coeficientes de Fourier. La respuesta la da, con lo que cumplimos el objetivo de esta Sección, el importante

Teorema 3: Si E es de Hilbert y $A = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal completo en E , entonces

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k.$$

Observación 7: Pese a que $C[a, b]$ no es de Hilbert con (11), este teorema es aplicable para garantizar convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier clásica (trigonométrica) de cualquier función continua. La explicación reside en que:

i) $C[a, b]$ es subespacio del espacio de Hilbert $L^2[a, b]$, cuya presentación no estamos en condiciones de hacer, dado el carácter autocontenido de estas notas;

ii) El producto interno de $L^2[a, b]$, restringido a $C[a, b]$, no es otro que (11); y

iii) El sistema trigonométrico es completo también en $L^2[a, b]$.

10. COMENTARIOS Y SUGERENCIAS

En la clase de apoyo que dio origen a estas notas se desarrollaron, aunque a grandes rasgos, las cinco primeras Secciones, y se dieron muy vagas referencias de las Secciones subsiguientes. Por razones de coherencia y unidad en la selección del material a tratar, hemos preferido no dispersarnos en temas no demasiado afines entre sí; por eso omitimos estudiar tópicos importantes del Análisis Real que se nos había sugerido y que recomendamos al lector, como las Funciones Absolutamente Continuas o el Teorema de Ascoli-Arzelá.

Se ha procurado hacer acá una presentación autocontenida y razonablemente hilvanada. Pretendimos dar una base de las teorías de espacios métricos, normados y de Hilbert, que permita una cómoda lectura ampliatoria mediante la bibliografía sugerida. Es con esta intención que hemos deslizado en el texto ciertos comentarios, como el del último párrafo de la Sección 2.

Por otra parte, para una persona que se interesa por el problema de Stefan y por cualquier tema donde se apli que el Análisis Funcional, es altamente conveniente procurarse un manejo, al menos elemental, de la Teoría de la Medida y la Integral de LEBESGUE y de los rudimentos de la Teoría de Distribuciones. Con esto tendrá acceso a ciertos espacios de Banach muy importantes en las aplica ciones, como son los espacios L^p de Lebesgue (acabamos de citar el caso $p=2$) y los espacios $H^{m,p}$ de SOBOLEV.

11. BIBLIOGRAFIA

Intentando cumplir la función de orientar, se ha procurado que la nómina de los textos no fuera demasiado exten sa. En su confección final influyeron indudablemente (a

pesar de cierta intención de objetividad) los gustos personales de quien realizó la selección, así como el mayor o menor conocimiento que posee de las obras disponibles.

Esencialmente, la idea fue elegir libros razonablemente accesibles o autocontenidos (al menos en la parte donde se estudian los temas que aquí hemos desarrollado) y orientados hacia determinadas aplicaciones, teniendo en cuenta que estas notas están dirigidas a aquellos científicos y profesionales que, no siendo matemáticos por formación y oficio, están interesados en algunas aplicaciones de la Matemática para las que precisan cierto manejo del Análisis Funcional. Esto no impide que gran parte de esas obras sean, a la vez, de mucho interés y utilidad para los matemáticos.

Deseamos formular una aclaración fundamental: la feliz elección de un texto depende de la necesidad particular de cada usuario de la Matemática. Por lo tanto, las sugerencias que damos a continuación no pueden reemplazar, en modo alguno, a una consulta personal (que recomendamos) con un matemático ligado al ambiente de trabajo del interesado.

Luego de estas consideraciones pasamos a las sugerencias bibliográficas.

a) Pueden verse la noción de función absolutamente continua, el Teorema de Ascoli-Arzelá y el Método de las aproximaciones sucesivas de Picard, leyendo las veinte primeras páginas del segundo capítulo de

[1] E.O.ROXIN: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Teoría de Control, EUDEBA, 1968.

El siguiente texto se caracteriza por la utilización sistemática del teorema del punto fijo para demostrar la existencia y unicidad de solución de problemas de valores iniciales para ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales:

[2] D.KREIDER-R.KULLER-D.OSTBERG: Ecuaciones Diferenciales, Fondo Educativo Interamericano, 1973.

b) Para estudiar espacios métricos y normados, es útil leer alguno de los siguientes libros (el primero es ya un verdadero clásico), que también traen algo de espacios de Hilbert:

[3] J.DIEUDONNE: Fundamentos de Análisis Moderno, Reverté, 1966.

[4] F.MICHAVIDA: Espacios Métricos - Espacios Vectoriales Normados, Editorial AC de Madrid, 1981.

c) También es de interés para espacios métricos

[5] E.T.COPSON: Metric Spaces, Cambridge University Press, 1968.

d) Puede ser muy provechoso leer los primeros capítulos de

[6] S.K.BERBERIAN: Introducción al Espacio de Hilbert, TEIDE, 1977.

e) Para Medida e Integral de Lebesgue, son útiles:

[7] W.RUDIN: Principios de Análisis Matemático, 2da. edición, Mc Graw-Hill, 1966; 3ra. edición, Mc Graw-Hill, 1980.

[8] J.H.WILLIAMSON: Integración Lebesgue, Tecnos, 1973.

En [7] se estudia el espacio L^2 , mientras que en [8] L^p en general.

f) Dos obras excelentes, donde se pueden estudiar todos los temas mencionados en las anteriores sugerencias, y donde el rigor matemático se combina con la calidad didáctica, son

- [9] A.FRIEDMAN: Foundations of Modern Analysis; Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [10] A.N.KOLMOGOROV-S.V.FOMIN: Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, 2 vol., Graylock Press, 1957 y 1961.
- : Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, MIR , 1975.

Si bien no podemos considerarlas de orientación marcadamente aplicada, estas dos obras dedican frecuente espacio a las aplicaciones, acaso más [9] que [10] . Además, en [9] encontramos (pág. 102 a 105) una presentación de los espacios de Sobolev que no requiere conocimiento previo de Distribuciones, basada únicamente en espacios L^p y completación de espacios métricos. En [10] se incluye una presentación prácticamente autocontenida de Distribuciones.

g) Para Distribuciones también citamos

- [11] M.BALANZAT: Lecciones sobre Teoría de Distribuciones, Universidad Central de Venezuela, 1966 .
- [12] U.MOSCO: Transformada de Fourier y Distribuciones, CUADERNOS del Instituto de Matemática 'Beppo Levi' N* 3, 1972.

El primer capítulo de [11] está dedicado a la integral de Lebesgue.

h) Por último, en un imparcial orden alfabético, damos una lista complementaria de obras de variada profundidad y con diferentes orientaciones a las aplicaciones, donde también se pueden encontrar temas de Análisis Funcional elemental, generalmente en los primeros capítulos.

- [13] J.PAUBIN: Applied Abstract Analysis, Wiley, 1977.
- [14] M.BALANZAT: Matemática Avanzada para la Física, EUDEBA, 1973.

- [15] C.S.HÖNIG: Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville, Editora da Universidade de São Paulo.
- [16] L.KANTOROVICH-G.AKILOV: Analyse Fonctionnelle, Tome 1, MIR, 1981.
- [17] E.KREYSZIG: Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley , 1978.
- [18] E.L.LIMA: Espaços Métricos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.
- [19] L.A.LIUSTERNIK-V.J.SOBOLEV: Elements of Functional Analysis, F. Ungar, 1961.
- [20] J.L.NOWINSKI: Applications of Functional Analysis in Engineering, Plenum Press, 1981.
- [21] J.T.ODEN: Applied Functional Analysis (A First Course for Students of Mechanics and Engineering Science), Prentice Hall, 1979.
- [22] G.F.SIMMONS: Introduction to Topology and Modern Analysis, Mc Graw-Hill, 1963.
- [23] B.Z.VULIKH: Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists, Pergamon Press, 1963.
- [24] A.WOUK: A Course of Applied Functional Analysis, Wiley, 1979.

PROMAR(CONICET-WNR),
Instituto de Matemática 'Beppo Levi',
Universidad Nacional de Rosario,
Avenida Pellegrini 250,
2000 Rosario - ARGENTINA.

SOBRE LA SOLIDIFICACION DE ALEACIONES BINARIAS

Héctor R. Bertorello*
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Laprida 854 - 5000 Córdoba

RESUMEN:

Se describen los avances realizados en el tema de solidificación de metales y aleaciones por el Grupo de Ciencia de Materiales de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Las áreas más activas han sido las vinculadas con transferencia de calor en situaciones en que existe contacto imperfecto en la interfaz metal-molde y condiciones en que se realiza el crecimiento dendrítico en aleaciones.

INTRODUCCION

Uno de los objetivos fundamentales del Grupo de Ciencia de Materiales de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física es llegar a conocer y predecir los efectos que la solidificación causa sobre las propiedades de metales y aleaciones. Estos efectos están asociados al modo en que se ha extraído el calor y como ello ha influido en la mi-

* Investigador Independiente, Carrera del Investigador Científico, C.O.N.I.C.E.T.

croestructura final del material bajo estudio. A ello están ligados fenómenos como la solidificación dendrítica de aleaciones, que es responsable de la microsegregación de los componentes químicos de la aleación, y que a su vez tiene gran influencia sobre la corrosión, tenacidad, fisuración en caliente y otras propiedades.

Por un lado, se ha tratado de entender el proceso de solidificación en metales puros bajo condiciones más o menos realistas, tratando de modelar la interacción metal-molde de manera que responde a situaciones de interés práctico. Independientemente, se ha estudiado la solidificación de aleaciones binarias, analizando las condiciones en que ocurre el crecimiento dendrítico y luego esa información se usa para tratar el problema macroscópico de transferencia de calor y materia y sus implicancias prácticas.

1- LA SOLIDIFICACION DE METALES PUROS.

Los esfuerzos estuvieron centrados en el estudio de la transferencia de calor durante la solidificación de metales puros en condiciones de contacto térmico imperfecto en la interfaz metal-molde. Esto ocurre pues se forma una capa de aire entre metal sólido y molde, que actúe como resistencia térmica y que es muy importante durante las primeras etapas de la solidificación. Nuestro tratamiento del problema ha consistido en introducir explícitamente a la interfaz SL como fuente móvil de calor y se ha introducido la función de Green correspondiente (Ferreyra y Bertorello, 1983).

Consideramos que el molde se mantiene a temperatura constante T_0 (ej.: molde refrigerado por agua). Por simplicidad $T_0 = 0$. La resistencia térmica finita se describe por un coeficiente de transferencia de calor h . Se considera que el metal líquido es colado a la temperatura de fusión T_f y que el sistema es semiinfinito en la dirección de solidificación (dirección y). Entonces se debe resolver la ecuación de conducción del calor

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

bajo las siguientes condiciones de contorno:

i) en la interfaz metal-molde:

$$(2) \quad k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = h T(0, t)$$

ii) en la interfaz sólido-líquido:

$$(3) \quad k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=Y(t)} = \rho L \dot{Y}(t)$$

$$(4) \quad T|_{Y(t), t} = T_f$$

donde $y = Y(t)$ da la posición de la interfaz SL en función del tiempo.

Se considera que la distribución de temperatura dentro del sólido está formada por dos términos: el primero, $u(y, t)$, representa la distribución de temperatura al tiempo t debido a una fuente de calor plana, móvil, (la interfaz SL) que genera calor a razón $L \rho \dot{Y}(t)$ calorías por segundo. Esta contribución tiene la forma

$$(5) \quad u(y, t) = \frac{L}{2c\sqrt{\pi a}} \int_0^t \frac{\dot{Y}(t')}{\sqrt{t-t'}} \left\{ \exp \left[-\frac{(y - Y(t'))^2}{4a(t-t')} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-\frac{(y + Y(t'))^2}{4a(t-t')} \right] \right\} dt' - \frac{Lh}{ck} \int_0^t \dot{Y}(t') \exp \left\{ \frac{h^2 a}{k^2} (t-t') + \right. \\ \left. + \frac{h}{k} [y + Y(t')] \right\} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{y + Y(t')}{2\sqrt{a(t-t')}} + \frac{h}{k} \sqrt{a(t-t')} \right\} dt' .$$

El segundo, $w(y, t)$, representa a una distribución uniforme de temperatura a T_f al tiempo $t = 0$ que decae por el mismo mecanismo mencionado (i.e., vale relación (2)). Esta contribución tiene la forma

$$(6) \quad w(y,t) = (T_f - T_0) \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{at}} \right) + \exp \left(\frac{hy}{k} + \frac{h^2 a}{k^2} t \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{h}{k} \sqrt{at} \right] \right\} .$$

La distribución de temperatura solución a nuestro problema será de la forma

$$(7) \quad T(y,t) = u(y,t) + w(y,t) .$$

La condición 4 que establece que en la interfaz SL la temperatura es T_f se traduce en

$$(8) \quad T_f = u [Y(t), t] + w [Y(t), t]$$

Reemplazando en la ec. 8 las funciones 5 y 6 se obtiene una ecuación integro-diferencial para $Y(t)$, cuya solución nos permite conocer la temperatura en cualquier punto del sólido por medio de la ecuación 9.

Como no se conoce exista solución exacta de la ecuación 8, se desarrolló un procedimiento de solución analítica por proceso iterativo. Si integramos la ec. 1 en el sólido formado al tiempo t , se obtiene:

$$(9) \quad \dot{Y}(t) \frac{\rho L}{k} = T(0,t) \frac{h}{k} + \frac{1}{a} \int_0^{Y(t)} \frac{\partial T(y,t)}{\partial t} dy$$

En este momento es conveniente introducir variables adimensionales, para simplificar la notación:

$$(10) \quad \tau = t \frac{a}{\alpha^2} ; \quad \tilde{y} = \frac{y}{\alpha} ; \quad \tilde{T}(\tilde{y}, \tau) = \frac{T(y,t)}{T_f}$$

$$(11) \quad \tilde{Y}(\tau) = \frac{Y(t)}{\alpha} ; \quad \dot{\tilde{Y}}(\tau) = \dot{Y}(t) / \dot{Y}(0) \sqrt{\lambda}$$

siendo

$$(12) \quad \alpha = \frac{k}{h} ; \quad \lambda = \frac{L^2}{c^2 T_f^2} ; \quad \dot{Y}(0) = \frac{c h a T_f}{k L}$$

con lo cual la ec. 9 toma la siguiente forma

$$(13) \quad \dot{Y}(\tau) = \frac{\tilde{T}(0, \tau)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{Y(\tau)} \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{y}, \tau)}{\partial \tau} \cdot d\tilde{y}$$

El proceso iterativo usado fue el siguiente: se toma como aproximación de orden cero

$$(14) \quad \tilde{Y}_0(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}}$$

$$(15) \quad \tilde{\dot{Y}}_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Introduciendo estas soluciones aproximadas en el cálculo se obtiene como solución aproximada de primer orden a

$$(16) \quad \tilde{\dot{Y}}_1(\tau) = -e^{\tau/\lambda} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} \right) \left[\frac{1}{1 - \lambda^{1/2}} \right] + e^{\tau} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}) \left[\frac{1}{\lambda^{1/2} - \lambda} \right]$$

$$(17) \quad \tilde{Y}_1(\tau) = \frac{\lambda}{1 - \lambda^{1/2}} \left\{ -e^{\tau/\lambda} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} \right) + 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} \right\} + \\ + \frac{1}{\lambda^{1/2} - \lambda} \left\{ e^{\tau} \operatorname{erfc} \sqrt{\tau} - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau} \right\} .$$

El proceso iterativo se continuó numéricamente y mostró ser rápidamente convergente.

En figuras 1 y 2 se muestran los valores experimentales de la posición de la interfaz SL en función del tiempo para estaño y plomo, obtenidos por Hills y Moore (Hills y Moore, 1969) junto con los valo-

res calculados usando las funciones aproximadas \tilde{Y}_1 , \tilde{Y}_3 . Se observa una mejor aproximación con cada iteración. Si se pretende describir los primeros estadios de la solidificación, la aproximación \tilde{Y}_1 es suficientemente precisa y posee la ventaja de ser analítica.

2- SOLIDIFICACION DE ALEACIONES

Esta es el área donde está centrada la importancia práctica del estudio de la solidificación por sus implicancias tecnológicas.

La gran mayoría de los problemas de solidificación involucran la redistribución de calor y soluto en la interfaz SL que avanza. Estos problemas son intrínsecamente dificultosos pues se tienen que resolver ecuaciones lineales con condiciones de contorno no lineales y acoplamiento entre campos.

Es de fundamental importancia poder predecir los detalles microscópicos sobre la forma, movimiento y comportamiento de la interfaz SL, pues de ello depende la redistribución de soluto, que tanta influencia tiene sobre las propiedades del material.

Mientras que para metales puros el crecimiento dendrítico sólo se da si el líquido está térmicamente sobreenfriado, en el caso de aleaciones el sobreenfriamiento puede no sólo ser de origen térmico sino también constitucional, esto es, deberse a la particular concentración de soluto en el líquido frente a la interfaz SL. Sólo en aleaciones se da la posibilidad de tener presente líquido sobreenfriado (constitucionalmente) en presencia de gradiente térmico positivo en el líquido frente a la interfaz SL. El límite de estabilidad de la interfaz plana se encuentra (Tiller y colab., 1953) está dado por

$$(18) \quad G/VC_0 \leq -m(1-k_0)/Dk_0$$

y proviene de igualar el gradiente térmico real al gradiente de temperaturas de equilibrio. Esencialmente el mismo resultado se obtiene si se analiza la estabilidad morfológica de la interfaz plana, introduciendo perturbaciones infinitesimales y analizando las situaciones en

que esas perturbaciones crecen o decaen (Mullins y Sekerka, 1964). El resultado de las teorías dinámicas es introducir un término adicional al resultado de ec. 18, que es despreciable en situaciones de interés práctico.

A medida que el valor del parámetro G/VC_0 disminuye por debajo del valor dado por la igualdad en ec. 18, la morfología de la interfaz SL se hace más complicada, hasta llegar a formar dendritas que avanzan cooperativamente, apareciendo una zona en que coexisten sólido y líquido (zona pastosa) y cuya extensión depende de la composición media de la aleación y las condiciones en que se realiza la solidificación. A esta altura del proceso es virtualmente imposible tratar los campos térmico y de soluto en escala macro y microscópica de manera simultánea, por lo cual se trata cada escala de dimensiones por separado.

2-A: Análisis del problema microscópico.

Se analizan los campos de temperatura y soluto, en situación de estado estacionario, que origina una dendrita que avanza a velocidad V constante.

A lo largo de la interfaz SL, la temperatura T_L^i y composición C_L^i del líquido están relacionadas por

$$(19) \quad T_L^i = T_f + m C_L^i - \theta K$$

siendo K la curvatura de la interfaz SL. Considerando que la dendrita posee un radio de curvatura R en su punta, se cumple que

$$(20) \quad T_t = T_f + m C_t - 2 \theta / R$$

donde el subíndice t indica que las cantidades se evalúan en la punta de la dendrita.

Los campos térmicos y de soluto alrededor de la dendrita satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(21 \text{ a}) \quad v^2 T_L + 2P_L \frac{\partial T_L}{\partial Z} = 0$$

$$(21 \text{ b}) \quad v^2 T_S + 2P_S \frac{\partial T_S}{\partial Z} = 0$$

$$(21 \text{ c}) \quad v^2 C_L + 2P \frac{\partial C_L}{\partial Z} = 0$$

donde L y S indican los campos en el líquido y sólido, respectivamente. Es $p = VR/2D$, $P_L = VR/2 a_L$, $p_S = VR/2 a_S$, siendo D el coeficiente de difusión del soluto en el líquido y a_L y a_S los coeficientes de difusividad térmica en líquido y sólido, respectivamente. p es el llamado número de Péclet. Se considera que no hay difusión de soluto en el sólido, por lo que la composición en la interfaz está fijada dando la composición en el líquido frente a la interfaz.

Este sistema de ecuaciones diferenciales está sujeto a las siguientes condiciones de contorno:

$$(22 \text{ a}) \quad \left. \frac{\partial T_L}{\partial Z} \right|_{Z \rightarrow \infty} = G_L$$

$$(22 \text{ b}) \quad \left. \frac{\partial T_S}{\partial Z} \right|_{Z \rightarrow -\infty} = G_S$$

$$(22 \text{ c}) \quad C_L = C_0 \text{ para } Z \rightarrow \infty$$

y a lo largo de la interfaz SL se cumple la relación 26.

Conservación de calor y masa en la interfaz

$$(23 \text{ a}) \quad 2 P_L \frac{L}{C} = -(vT_L)^i + \frac{K_S}{K_L} \cdot (vT_S)^i$$

$$(23 \text{ b}) \quad 2 p (1-k) C_L^i = -(vC_L)^i$$

donde L , c , K_S y K_L son el calor latente de fusión, calor específico conductividad térmica en sólido y líquido, respectivamente.

Se puede ver que el problema así planteado no posee solución única, sino que se obtiene una relación entre los campos y el número de Péclet pero no con la velocidad V o curvatura de la dendrita por separado, o sea que la solución está dada en términos de VR pero no se fija ninguno de ellos por separado. Es necesario una condición extra que permita fijar el punto operativo de la dendrita.

Kurz y Fisher (1981) y Trivedi (1980) hallan solución analítica realizando un análisis perturbativo en la forma de la dendrita similar al realizado por Mullins y Sekerka (1964), para una esfera que crece a velocidad radial constante.

Nosotros consideramos (Bertorello y Balzaretto, 1981) que no todos los mecanismos de inestabilidad se tiene en cuenta en esta descripción. El crecimiento dendrítico en aleaciones y metales puros difieren en varios aspectos y deseamos enfatizar uno de ellos: el crecimiento dendrítico en metales puros siempre involucra formación de ramas mientras que en aleaciones que crecen en presencia de gradiente térmico positivo en el líquido se tiene estructura celular sin ramas a bajas velocidades y se desarrollan ramas a altas velocidades de crecimiento. Esto nos lleva a pensar que a bajas velocidades el proceso de crecimiento está controlado por estabilidad frente a cambios en el radio de curvatura mientras que a altas velocidades también debe tenerse en cuenta estabilidad frente a formación de ramas.

Pensamos que los modelos de Kurz y Fisher y Trivedi se basan en estabilidad frente a formación de ramas pero no tienen en cuenta cambios en el radio de curvatura de la punta mientras se mantiene la forma.

Es por ello que hemos tomado otro enfoque de partida, extendiendo las ideas que llevan a la ec. 18 (Bertorello y Balzaretto, 1981). Esta ecuación se puede obtener partiendo del principio que no puede coexistir líquido sobreenfriado frente a una interfaz SL que avanza en estado estacionario en presencia de gradiente térmico positivo en el líquido. Para que exista estado estacionario debe ser

$$(24) \quad v_{Teq}^i = v_{T_L}^i$$

o bien

$$(25) \quad mVC_1^i = v_{T_L}^i$$

La ec. 25 es la relación adicional que se necesita para hallar las condiciones en que se realiza el crecimiento dendrítico estable en aleaciones binarias. En principio, este criterio es siempre válido, aunque se pueden esperar algunos problemas a altas velocidades, donde aparece la estructura de ramas asociadas con inestabilidades que provienen de mecanismos no contemplados en el modelo.

Si aplicamos el criterio dado por ec. 25 a un modelo sencillo de dendrita, podemos hallar las condiciones de crecimiento celular o dendrítico estable.

Se usó $v_{C_L}^i$ calculado en la punta de la dendrita y dado por Kurz y Fisher (1981) como

$$(26) \quad v_{C_t} = \frac{C_0}{\frac{R}{2} - \frac{D}{V(1-k_0)}}$$

Se considera que alrededor de cada dendrita el campo térmico es modificado por la difusión lateral de calor, por lo cual escribimos

$$(27) \quad v_{T_L}^i = G + G_i$$

donde G_i es el gradiente de temperatura "interno" producido por el calor difundido lateralmente. Este G_i puede escribirse (Trivedi, 1970)

$$(28) \quad G_i \approx (4\theta / R^2)(1 + p)$$

Aplicando el criterio dado por ec. 25, se tiene

$$(29) \quad \frac{m C_o}{\frac{R}{2} - \frac{D}{V(1-k_o)}} = G + \frac{4\theta}{R^2} (1 + p)$$

de donde las condiciones de crecimiento estable se obtiene de las raíces de la siguiente ecuación cuadrática:

$$(30) \quad V^2 \frac{\theta}{2a} + V \left(\frac{2\theta}{R} - \frac{\theta R}{a(1-k_o)R} + \frac{GR}{2} - m C_o \right) - \frac{GD}{(1-k_o)} - \frac{4\theta D}{R(1-k_o)} = 0$$

En el límite de bajas velocidades se obtiene

$$(31) \quad R = \frac{2D}{V(1-k_o)} + \frac{2m C_o}{G}$$

igual al resultado obtenido por Kurz y Fisher, mientras que para altas velocidades es

$$(32) \quad R = 2 (D\theta - m C_o V (1-k_o))^{1/2}$$

que difiere del valor de Kurz y Fisher en un factor π . Los valores de R en función de V se grafican en figura 3, junto con los similares obtenidos por Kurz y Fisher.

Los valores de C_t en función de V se muestran en figura 4. Con ellos se puede calcular el valor de la temperatura T_t en la punta de la dendrita, obteniéndose lo que se muestra en figura 5. El presente modelo y el de Kurz y Fisher predicen el comportamiento correcto, aunque sobreestiman los valores de temperatura a bajas velocidades.

El modelo aproximado aquí presentado fue depurado, resolviendo de manera más precisa los campos térmicos y de soluto alrededor de cada dendrita (Bertorello, 1982) pero no agrega ningún hecho nuevo a lo ya presentado, siendo los resultados cualitativamente semejantes.

2-B: Análisis del problema macroscópico.

El problema macroscópico es encarado partiendo de la premisa que el desarrollo de interfaz celular o dendrítica no modifica sustancialmente el caracter plano de las isoterma y que las características de la zona en que coexisten sólido y líquido (zona pastosa) pueden describirse en base a los resultados obtenidos para el crecimiento de una dendrita o célula aislada.

El efecto de curvatura sobre la temperatura y composición del sólido fue importante para arribar a la relación entre éstos parámetros y la velocidad de avance y gradiente térmico. Una vez establecida esta relación, el efecto puede despreciarse en un análisis macroscópico y relacionar los campos térmico y de soluto en la isoterma que separa al líquido de la zona pastosa por

$$(33) \quad T_t = T_f + m C_t$$

En la figura 5 se observa que existe un amplio rango de velocidades de crecimiento en que T_t varía muy poco, manteniéndose prácticamente constante. En general, es lo que se caracteriza como rango de altas velocidades. A bajas velocidades, T_t depende de las variables de crecimiento de la forma G/V . Es por ello que en nuestro análisis (Ferreyra y Bertorello, 1983) se ha separado al estudio del problema en dos intervalos de velocidades de crecimiento: alta V , que corresponde a lo que se observa comunmente en varios procesos de colada convencionales, y bajas V .

Se analiza además el caso de contacto perfecto entre metal y molde y el contacto imperfecto, usando como parámetro de control al flujo de calor extraído por el molde.

Caso I) contacto perfecto, altas V : en este caso T_t puede considerarse constante y se plantea el problema de la siguiente manera: sea la solidificación unidireccional de un líquido de composición

media C_0 y temperatura T_c , en molde que se considera sumidero perfecto de calor (molde refrigerado por agua). Llamando y a la dirección de crecimiento, a un dado tiempo t se distinguen tres zonas: zona I, sólido que se halla a temperaturas comprendidas entre la temperatura del molde y la temperatura del auténtico T_E ; zona II, zona pastosa de coexistencia de metal sólido y líquido, comprendido entre las temperaturas T_E y T_t y Zona III, líquido, comprendido entre T_t y T_c . Se toma a T_E como la separación entre las zonas I y II pues la formación de estructura celular o dendrítica implica segregación de soluto que origina la aparición de eutéctico, que a la temperatura T_E esté presente en fracción f_E .

Se debe resolver la ec. 1 de conducción de calor en cada zona con las siguientes condiciones de contorno: en $y = 0$

$$(34) \quad T_I(0,t) = T_m \\ = 0$$

T_m es la temperatura del molde, que por simplicidad se toma igual a cero; en $y = Y_E$ (posición de la isoterma del eutéctico)

$$(35) \quad T_I(Y_E,t) = T_{II}(Y_E,t) = T_E$$

$$(36) \quad k \frac{\partial T_I}{\partial Y} - k \frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = \rho L_E f_E Y_E(t)$$

en $y = Y_t$ (posición del frente de solidificación)

$$(37) \quad T_{II}(Y_t,t) = T_{III}(Y_t,t) = T_t$$

$$(38) \quad \frac{\partial T_I}{\partial Y} = \frac{\partial T_{II}}{\partial Y}$$

Por simplicidad se ha tomado iguales las propiedades térmicas de sólido y líquido, no así a las de la zona pastosa, pues posee un calor específico aparente C_{sl} que depende de la fracción de líquido

presente. Ese calor específico aparente se expresa como

$$(39) \quad C_{sl} = C + L \frac{d f_L(T)}{dT}$$

donde $f_L(T)$ expresa la fracción de líquido presente en la isoterma T . Esta fracción de líquido depende del modo de solidificación (celular o dendrítico) y debe calcularse a partir de los resultados obtenidos en escala microscópica, expresamente depende del valor de C_t obtenido anteriormente como función de V y G de la geometría de las dendritas.

Se está llevando a cabo actualmente un estudio de C_{sl} en situaciones en que el gradiente en la zona pastosa no es constante. Mientras tanto, para el caso presente vamos a suponer que $df_L(T)/dT = \text{cte.}$ que se corresponde con el modelo aproximado realizado por Bower y Flemings (1966). En ese caso la difusibilidad calórica de la zona pastosa no depende de la temperatura y el problema así planteado queda semejante al resuelto por Adams. Presentamos la solución con un poco de detalle pues es importante para analizar otros casos.

Las temperaturas en cada zona se escriben como

$$(40) \quad T_I(y,t) = A \operatorname{erf}(y/2 \sqrt{a_1 t})$$

$$(41) \quad T_{II}(y,t) = B + C \operatorname{erf}(y/2 \sqrt{a_2 t})$$

$$(42) \quad T_{III}(y,t) = D + E \operatorname{erf}(y/2 \sqrt{a_1 t})$$

Como T_E y T_t son constantes, las condiciones de contorno 35 y 37 implican que las isotermas del eutéctico y frente dendrítico se mueven como \sqrt{t} y escribimos

$$(43) \quad Y_E(t) = 2 \beta \sqrt{a_1 t}$$

$$(44) \quad Y_t(t) = 2 \phi \sqrt{a_2 t}$$

de donde

$$(45) \quad A = T_E / \operatorname{erf} \beta$$

Usando la condición 36, obtenemos que debe cumplirse

$$(46) \quad e^{-\beta^2} / \operatorname{erf} \beta - \frac{n}{T_E} \frac{(T_t - T_E) e^{-\beta^2 n^2}}{[\operatorname{erf} \phi - \operatorname{erf}(\beta n)]} = \frac{L_E}{c T_E} f_E \sqrt{\pi} \beta$$

De las otras condiciones se halla:

$$(47 \text{ a}) \quad B = T_E - \frac{(T_t - T_E) \operatorname{erf}(\beta n)}{\operatorname{erf} \phi - \operatorname{erf}(\beta n)}$$

$$(47 \text{ b}) \quad C = \frac{T_t - T_E}{\operatorname{erf} \phi - \operatorname{erf}(\beta n)}$$

$$(47 \text{ c}) \quad D = T_c - E$$

$$(47 \text{ d}) \quad E = \frac{T_c - T_t}{\operatorname{erf} c (\phi/n)}$$

De la condición 38 se halla

$$(48) \quad \frac{1}{n} \cdot e^{\phi^2 (1 - \frac{1}{n^2})} (T_c - T_t) / \operatorname{erf} c (\phi/n) = (T_t - T_E) / [\operatorname{erf} \phi - \operatorname{erf}(\beta n)]$$

y entre las relaciones 46 y 48 se obtiene β y ϕ . Como consecuencia, el índice de segregación de soluto no depende de las condiciones de enfriamiento impuestas externamente. Lo que sí variará es la escala de distancias en que se produce esa segregación, a través de la dependencia del espaciado dendrítico con la velocidad de avance del frente de solidificación.

Caso II: contacto perfecto, baja V; La diferencia con el caso I anterior estriba en que T_t depende del gradiente en el líquido y de la velocidad de avance de la solidificación y toma la forma

$$(49) \quad T_t = T_f - \frac{D}{(1-k)} G/\dot{Y}_t$$

siendo $G = \left. \frac{\partial T_{III}}{\partial Y} \right|_{Y=Y(t)}$

Dada la forma particular de la dependencia de T_t con G y \dot{Y}_t , si se usan las mismas distribuciones de temperatura del caso I, resulta

$$G = \frac{E}{\sqrt{\pi a_1 t}} \exp(-\phi^2/n) \quad \dot{Y}_t = \frac{\phi \sqrt{a_2}}{\sqrt{t}}$$

por lo cual

$$(50) \quad G/\dot{Y}_t = \text{constante}$$

y por lo tanto es válido todo lo realizado en el caso I. La diferencia con el caso anterior estriba en que ahora tanto la temperatura como la concentración en el frente dendrítico y por ende el índice de segregación de soluto, dependen de las condiciones de extracción de calor por el molde, pero se mantienen constantes a lo largo del espesor solidificado mientras se mantengan las condiciones de extracción de calor fijadas por el contacto perfecto entre metal solidificado y molde. Luego, controlando las condiciones de extracción de calor por el molde se controlan los parámetros estructurales mencionados.

Caso III: contacto perfecto; comienza el proceso con alta V y luego llega al rango de bajo V: Como consecuencia de lo tratado en casos I y II, el tipo de solución es similar a los casos anteriores, salvo que T_t variará al efectuar la transición entre los casos I y II por ende cambiarán de manera continua los parámetros de crecimiento β y

ϕ y las constantes A, B, C, D, E. Sin embargo esos cambios no serán dramáticos pues la alteración en T_t no es muy marcada. Como consecuencia, habrá un cambio continuo en el índice de segregación entre comienzo y final de lingote.

Caso IV: contacto imperfecto; altas V: Dada la complejidad introducida por la zona pastosa y el acople entre los campos térmicos y de soluto, no es posible plantear la solución del campo térmico en los términos usados para metal puro. Por lo tanto, en una primera aproximación a este problema se optó por suponer distribución cuadrática de temperatura en el sólido y distribución lineal en la zona pastosa. Además, como no es directamente medible el coeficiente h de transferencia de calor entre molde-sólido, se usó como parámetro fundamental al flujo calor \dot{q}_0 que extrae el molde, el cual debe ser evaluado en cada experiencia. Con esas consideraciones, se debe resolver la ec. 3 de conducción de calor sujeta a las mismas condiciones de contorno en $y = Y_E$ e $y = Y_t$ que para contacto perfecto y para $y = 0$ se reemplaza la condición 34 por la siguiente:

$$(51) \quad -k \left. \frac{\partial T_I}{\partial x} \right|_{x=0} = \dot{q}_0$$

Se propone para la zona I una distribución de temperaturas cuadrática y para la zona II, una distribución lineal.

De la zona III lo que interesa es el gradiente frente a la isoterma T_t , que estará fijado por el gradiente de T_{II} evaluado en Y_t (de acuerdo a la condición de contorno 38).

T_i es la temperatura en la interfaz metal-molde y está definida como

$$(52) \quad T_i = -\frac{\dot{q}_0}{h}$$

Para resolver el problema aproximado resta conocer las funciones $Y_E(t)$ e $Y_t(t)$, para lo cual se dispone de dos condiciones a cum-

plir: balance de calor en la interfaz $y = Y_E$ (condición de contorno 36) y balance de calor en la zona I o sea del sólido formado el tiempo t .

Para hallar una solución al problema se propusieron las siguientes formas funcionales para Y_E e \dot{Y}_E :

$$(53) \quad \dot{Y}_E = v \dot{q}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n t^{n-1} .$$

$$(54) \quad Y_E = v \int_0^t \dot{q}_0 dt + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

las que nos permiten hallar las constantes v y b_n igualando los coeficientes de idénticas potencias del tiempo en las ecuaciones de balance de calor para un dado régimen de extracción calórica. Se resolvió para el caso particular $\dot{q}_0(t) = c_0 + d_0 t^{1/2}$, con $c_0 < 0$ y $d_0 > 0$ que es una aproximación al flujo de calor cuando actúa un coeficiente de extracción de calor h constante, que está dado por $h = -(C_0/T_c)$ siendo T_c la temperatura de colada.

Los casos aquí planteados se hallan en proceso de discusión y comprobación experimental usando al sistema aluminio-cobre para realizar las experiencias de solidificación unidireccional.

Esperamos poder informar de los resultados en un futuro cercano. Paralelamente se está desarrollando un modelo numérico en el cual se tendrá en cuenta con detalle los efectos de la solidificación de no equilibrio en la zona pastosa.

BIBLIOGRAFIA

- BERTORELLO, H.R. y BALZARETTI, D.: Reunión Nacional de Física, San Luis, 1981. Enviado a publicar al J. Crystal Growth.
- BERTORELLO, H.R.: I Congreso Latinoamericano de transferencia de calor y materia, La Plata, 1982.
- BOWER, T.F. y FLEMINGS, M.C.: Trans. AIME, vol. 236, 1966, p. 615.
- FERREYRA, A. y BERTORELLO, H.R.: Crystal Growth, Vol. (1983).
- HILLS, A.W.D. y MOORE, M.R.: Trans. Met. Soc. AIME, vol. 245, 1969, p. 1481.
- KURZ, W. y FISHER, D.J.: Acta Met. vol. 29, 1981, p. 11.
- MULLINS, W.W. y SEKERKA, R.F.: J. Appl. Phys., vol. 35, 1964, p. 444.
- TILLER, W.A.; JACKSON, K.A.; RUTTER, J.W. y CHALMERS, B.: Acta Met., vol. I, 1953, p. 428.
- TRIVEDI, R.: Acta Met., vol. 18, 1970, p. 287.
- TRIVEDI, R.: J. Crystal Growth, vol. 49, 1980, p. 219.

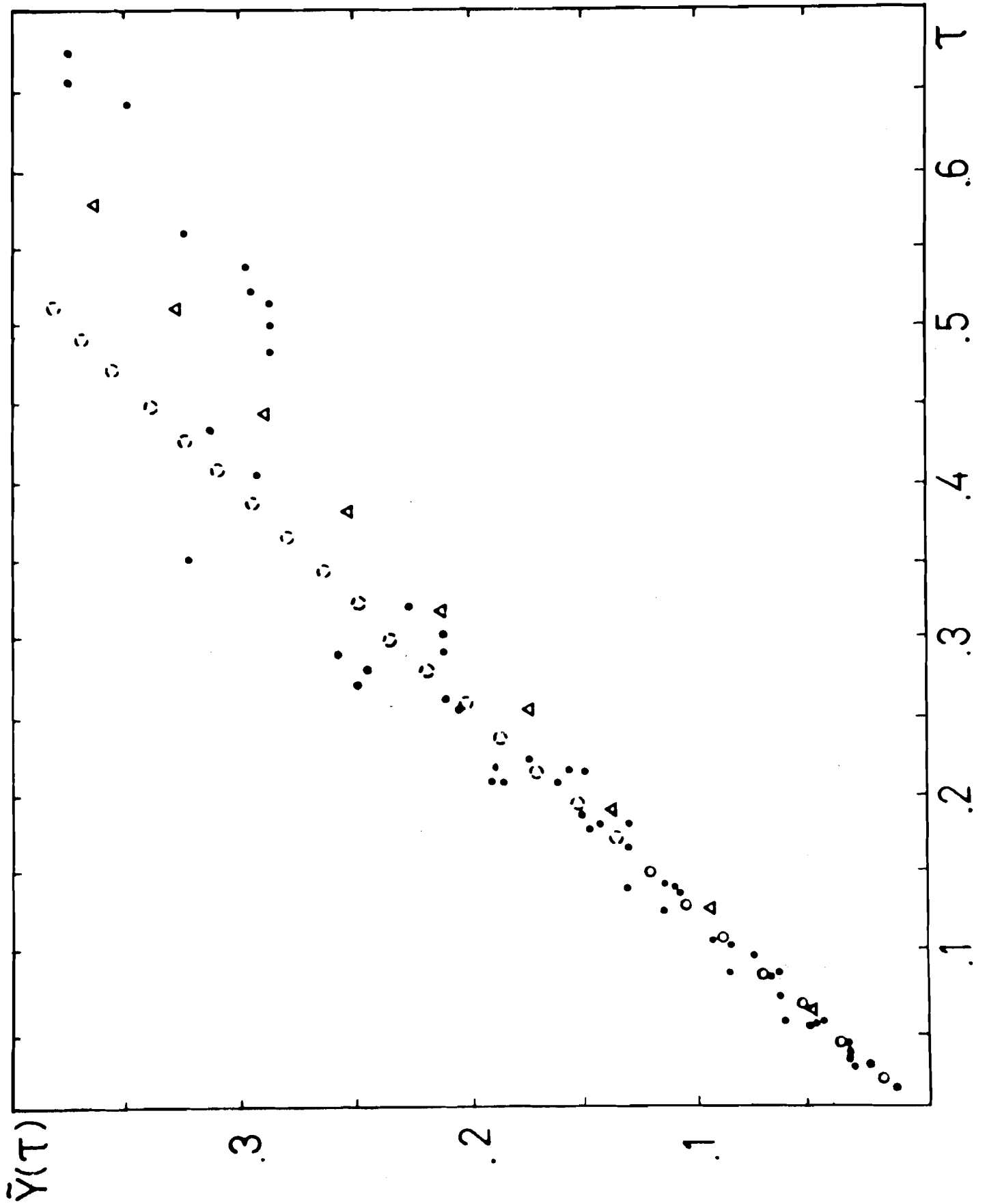


Figura 1: Solidificación del Sn

\circ : $\bar{Y}_1(\tau)$; Δ : $\bar{Y}_3(\tau)$

\bullet : Espesores experimentales (Hills y Moore, 1969) adimensionalizados con h experimental.

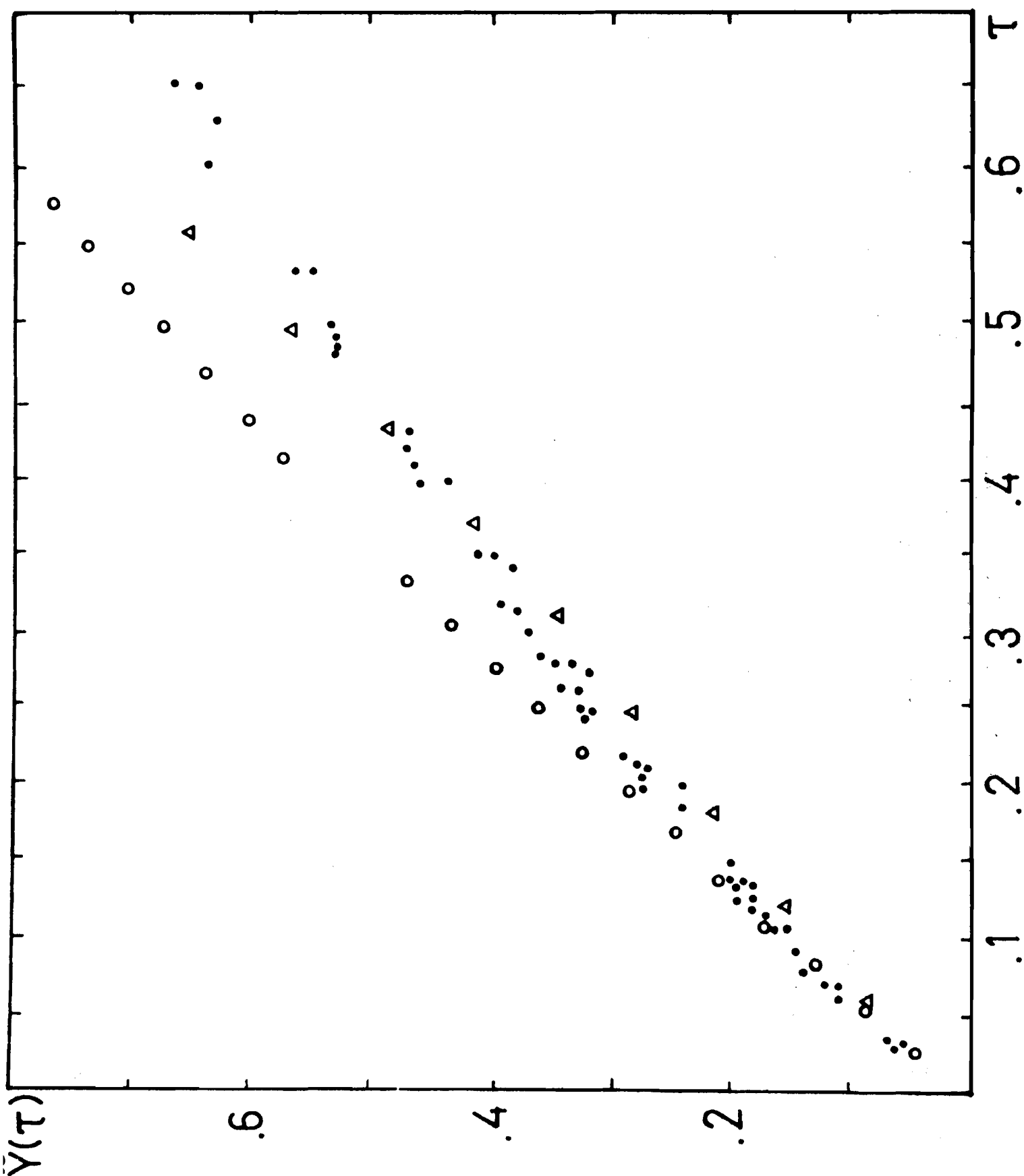


Figura 2: Solidificación del Pb

o: $\tilde{Y}_1(\tau)$; Δ : $\tilde{Y}_3(\tau)$

: Espesores experimentales (Hills y Moore, 1969) adimensionalizados con h experimental.

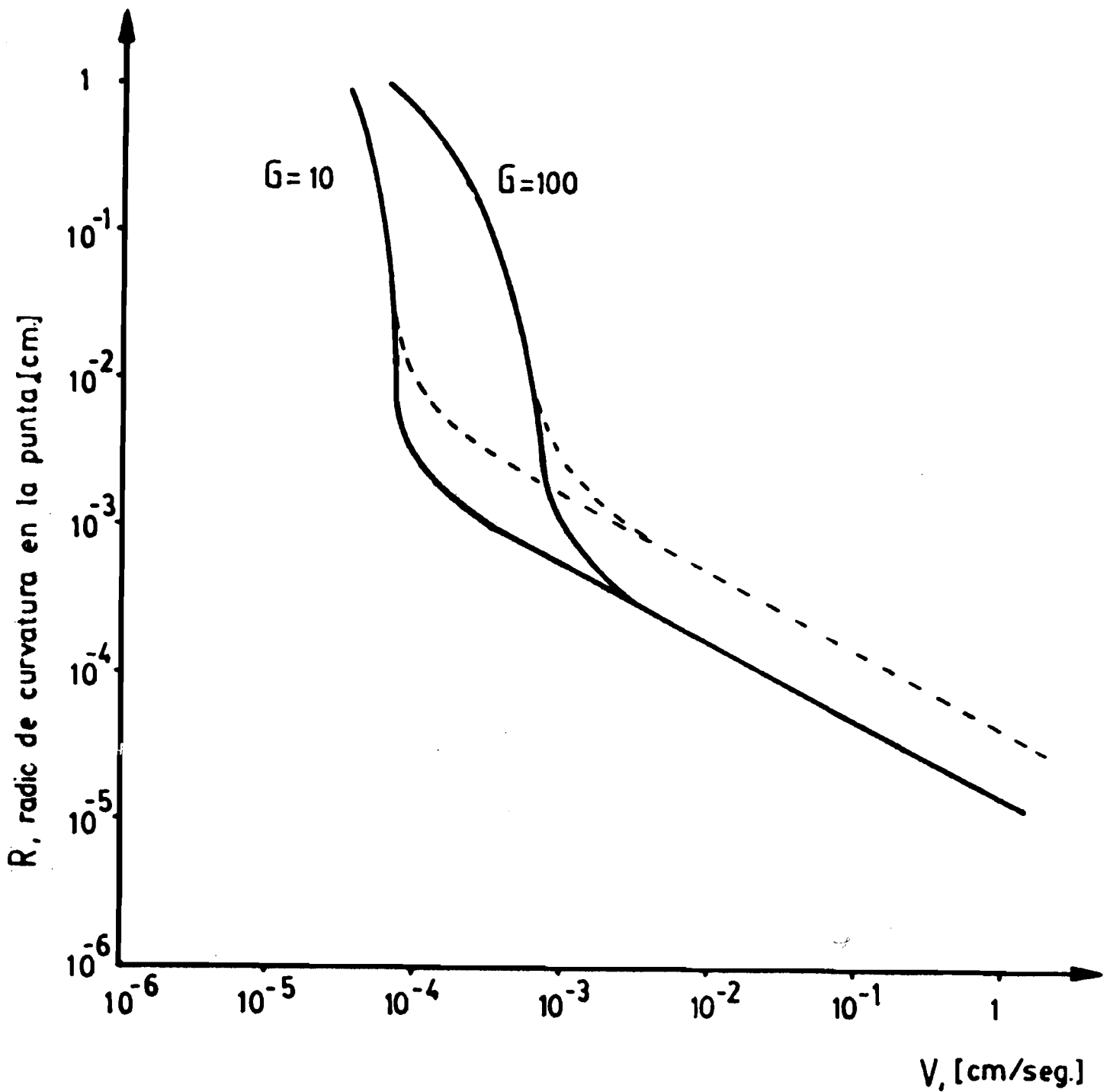


Figura 3: Radio de curvatura R en la punta de la dendrita en función de la velocidad de avance V , para Al - 2% Cu

— este trabajo

--- Kurz y Fisher, 1981

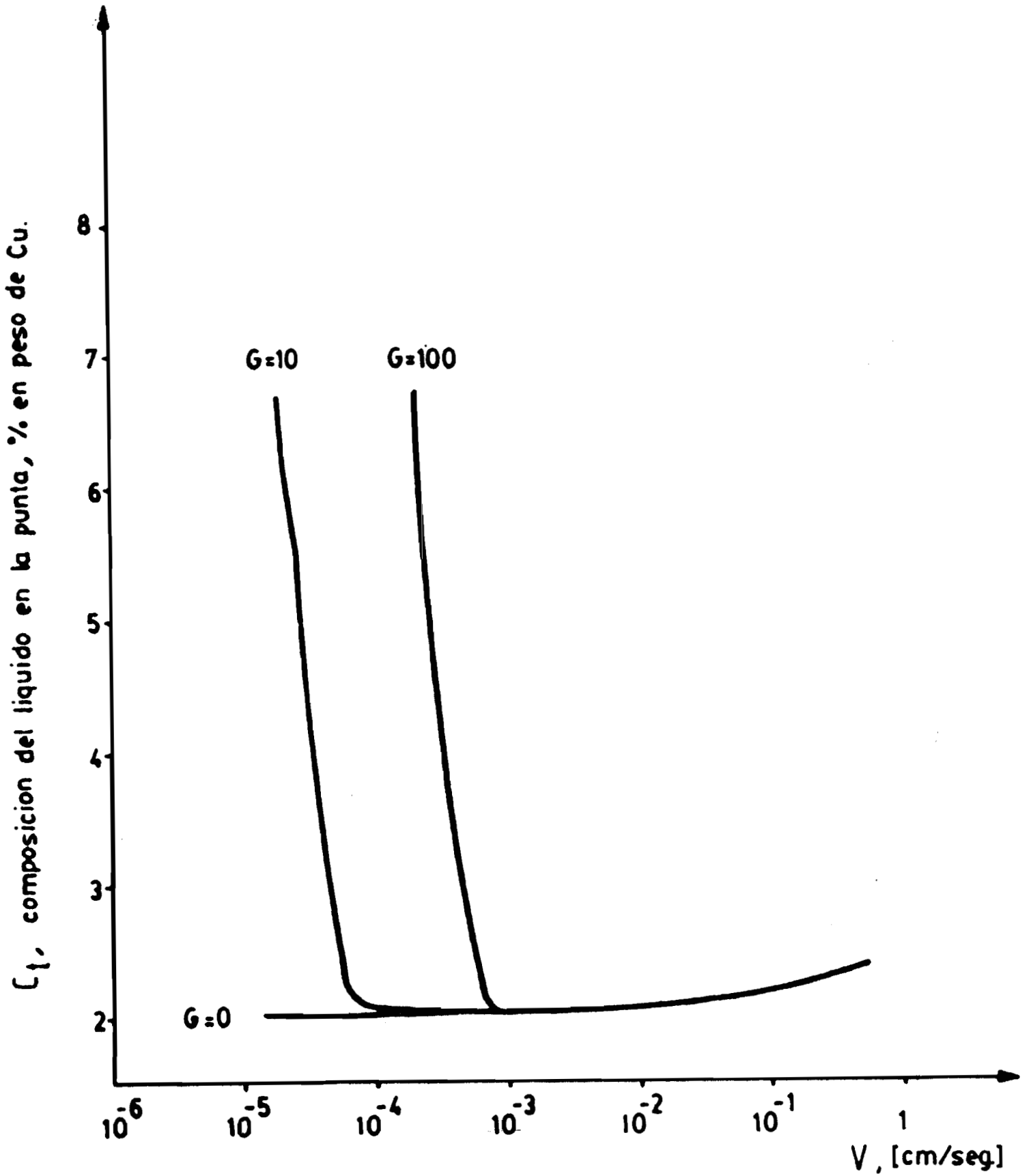


Figura 4: Composición del líquido C_l frente a la punta de la dendrita en función de la velocidad de avance V , para Al - 2% Cu.

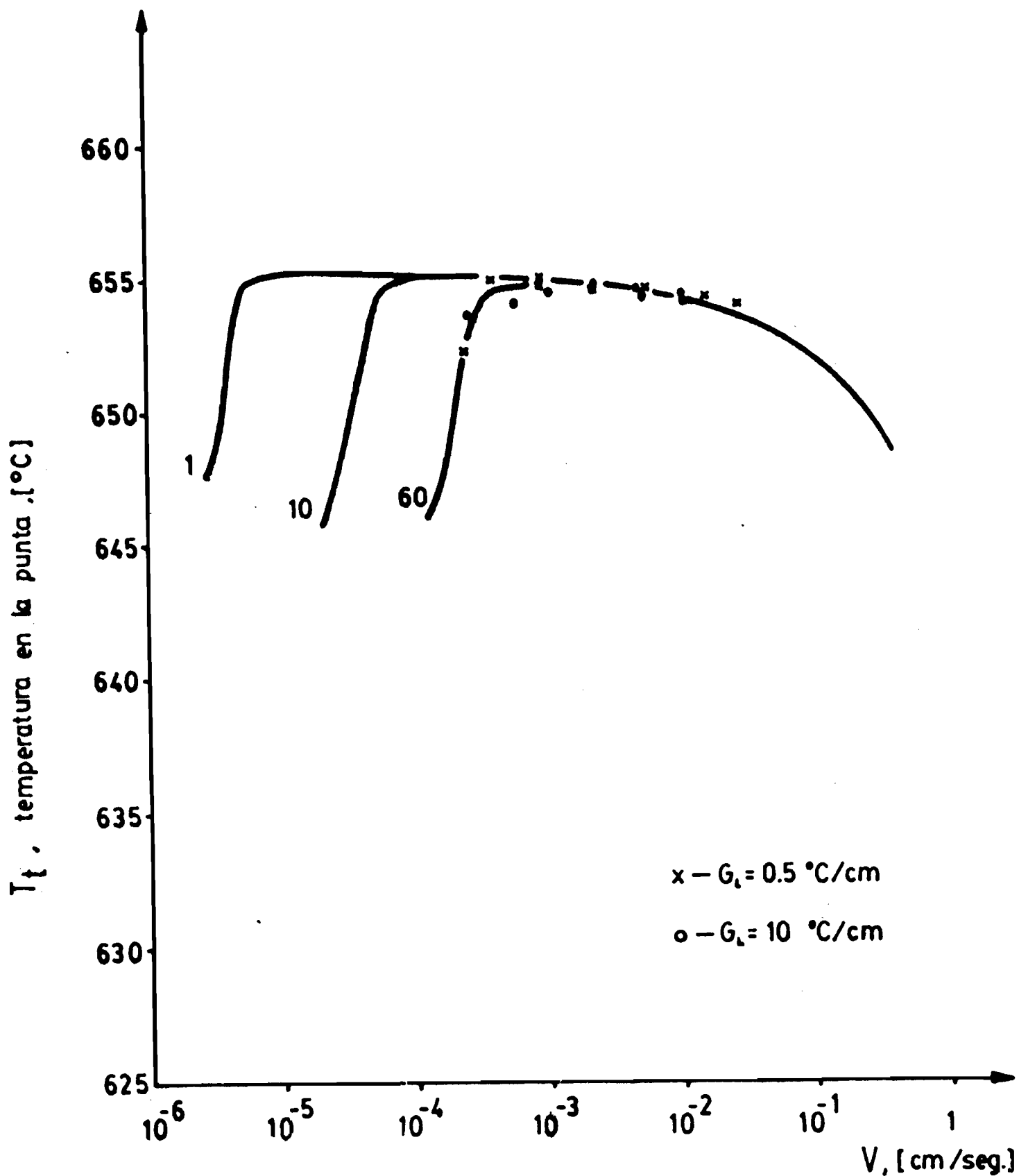


Figura 5: Temperatura T_t en la punta de la dendrita en función de la velocidad de avance V , para Al - 2% Cu.

o, x: Datos experimentales de Burden y Hunt, 1974.

ANALISIS DE LA FUSION EN BARRAS DE COMBUSTIBLE NUCLEAR ORIGINADA POR SOBRECARGAS TERMICAS ACCIDENTALES

L. CRIVELLI - S. IDELSOHN - C. BAIGORRIA

1. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

La determinación del estado térmico de un elemento combustible (vainas-pellet) de una central nuclear, cuando está sometido a condiciones de transiente, es de fundamental importancia para predecir las consecuencias de un postulado accidente.

Este estudio sirve para cuantificar tales consecuencias, las cuales en el caso más crítico conducen al melting del elemento combustible. En el presente trabajo, se efectúa una evaluación numérica de los perfiles de temperatura y su evolución temporal en una barra de combustible nuclear, cuando ella está sometida a condiciones de transiente tales que impliquen la aparición de una fase líquida en una zona de la misma.

En condiciones normales de funcionamiento, el estado térmico de una barra de combustible nuclear, es consecuencia de una generación interna de calor debida a las fisiones nucleares, y a las condiciones de contorno exteriores previstas (dadas por las condiciones operativas). Estos casos pueden incluir el estado estacionario, en el cual la generación interna es constante, o bien estados transitorios con cambios suaves en la misma. Tales casos están profusamente estudiados y se encuentran en la literatura corriente.

Por otra parte, entre las especificaciones de seguridad para reactores tipo H.W.P.R. (Heavy Water Power Reactor), las más importantes son aquéllas concernientes a un hipotético accidente de pérdida de refrigerante conocido comúnmente como L.O.C.A. (Loss of Coolant Accident).

El problema del L.O.C.A. es importante en el sentido que es considerado como un factor limitante en la seguridad del reactor y por ello está clasificado como un accidente base para el diseño. Consecuentemente, los mayores esfuerzos en las investigaciones sobre seguridad en H.W.P.R., están dirigidos a proveer códigos con una capacidad optimizada para predecir las consecuencias de los L.O.C.A.

Las pérdidas de refrigerante en un L.O.C.A. ocasiona una gene

ración incontrolada de calor, de corta duración, en el seno del combustible, cuya consecuencia principal es un cambio drástico en el estado térmico normal del elemento combustible, siendo su peor consecuencia, la aparición de zonas fundidas en el mismo.

El estudio de la evolución térmica de un sistema que presenta una transición de fase de primer orden, tales como el melting, se conoce comúnmente como "problema de Stefan", el cual se encuentra ampliamente difundido en la literatura [12], [16].

Un caso particular de este problema, lo constituye un sistema cuya evolución esté determinada por fuentes internas, como lo es el que pasaremos a analizar.

2. MODELO MATEMATICO - APROXIMACIONES

2.1. Modelo

El estudio del comportamiento térmico de barras de elementos combustibles, requiere el análisis de dos clases independientes de subproblemas, y su posterior interrelación para la solución del problema global.

El primero consiste en la resolución del modelo de transmisión de calor, en el caso general de variación no lineal de las propiedades físicas del cuerpo bajo estudio, teniendo en cuenta la presencia de una fuente interna debido al calor liberado por la interacción neutrónica.

Este fenómeno está gobernado por la ecuación de conservación de la energía térmica, cuya expresión, siguiendo la notación de Slaterry [14, pág. 301, Tabla 5.6.1-1] es

$$\rho \frac{d_{(m)} h}{dt} = - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \frac{d_{(m)} P}{dt} + \text{tr} (\underline{S} \cdot \underline{\nabla} \underline{v}) + \rho Q \quad (1)$$

donde la derivada material se define como

$$\left(\frac{d_{(m)}}{dt} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \right)$$

La ecuación (1) se simplifica notablemente en el caso de sólidos en reposo y procesos a presión constante. Aceptando además la validez de la ley de Fourier.

$$\underline{q} = - k(T) \underline{\nabla} T$$

se llega al siguiente modelo.

Ecuación Diferencial

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T) \nabla T) + \rho Q \quad \underline{x} \in \Omega ; t > 0 \quad (2)$$

Condiciones de Borde

$$\begin{aligned} T &= g_1(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \Gamma_T ; t > 0 \\ \underline{n} \cdot k \nabla T &= g_2(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \Gamma_q ; t > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Condición Inicial

$$h = h_0(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega ; t = 0$$

En el caso que nos ocupa, de procesos a presión constante, podemos escribir

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

y para $h = h(T, p)$ resulta

$$dh = C_p dT$$

obteniendo la clásica ecuación

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T) \nabla T) + \rho Q$$

El segundo problema a tratar, es el análisis de transmisión de calor con cambio de fase, también conocido como "problema de Stefan". El mismo consiste en la resolución de la ecuación (1) en dos dominios cuyas fronteras van variando a medida que progresa el tiempo. Estas fronteras separan dos fases, en este caso, una líquida y otra sólida, y en su movimiento absorben o liberan cierta cantidad de energía.

Para especificar más claramente el problema, analicemos un sistema bifásico, tal como agua-hielo, que ocupa un dominio dado Ω . Ambas fases, que ocuparán los subdominios Ω_1 y Ω_2 , están separadas por una superficie definida por la isoterma cuyo valor es la temperatura de cam-

bio de fase, llamada "interfase".

Sobre una parte de la frontera de Ω , Γ_T , se imponen temperaturas, y en el resto, Γ_q , se prescribe un flujo térmico. El sistema evoluciona con el tiempo intercambiando calor con el medio, y generando o absorbiendo energía en función de algún tipo de trabajo interno que el mismo realice.

La solución clásica de este problema, consiste en determinar el campo de temperaturas en el dominio Ω y su variación en el tiempo; la posición de la interfase y evolución de la misma, y eventualmente, la evaluación del calor total transferido.

Por otra parte, la determinación de los perfiles de temperatura en la fase líquida, requiere resolver la ecuación de movimiento (Ecuación de Boussinesq) para obtener la distribución de velocidades en la misma.

La formulación matemática completa de este problema comprende la resolución de dos ecuaciones diferenciales (5) y (6), una para cada fase, la determinación del campo de velocidades en la fase líquida a partir de la ecuación de Boussinesq (7) y la ecuación de conservación de masa (8), la ecuación de movimiento de la interfase (9), con condiciones de borde (3) e iniciales (4) para el campo térmico más condiciones de borde (10) e iniciales (11) apropiadas para las velocidades, todo lo cual genera el sistema

$$\rho_s \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (k_s(T) \nabla T) + \rho Q \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0 \quad (5)$$

$$\rho_l \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_l \underline{v} \cdot \nabla h = \nabla \cdot (k_l(T) \nabla T) + \rho Q \quad x \in \Omega_2, \quad t > 0 \quad (6)$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \underline{v} + \gamma_g (T - T_F) \quad x \in \Omega_2, \quad t > 0 \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad x \in \Omega_2, \quad t > 0 \quad (8)$$

$$k_s \nabla T_s - k_l \nabla T_l = L \rho_s \frac{\partial R}{\partial t} \quad x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2, \quad t > 0 \quad (9)$$

$$\underline{v} = \bar{v}(\underline{x}, t) \quad x \in \partial\Omega_2, t > 0 \quad (10)$$

$$\underline{v} = v_0(\underline{x}) \quad x \in \Omega_2, t = 0 \quad (11)$$

donde los subíndices s y l indican las fases sólida y líquida respectivamente.

Pese a la complejidad de este modelo, es posible obtener una solución aproximada a partir de ciertas consideraciones físicas. En efecto, debido a las pequeñas dimensiones del elemento combustible, y teniendo en cuenta que el transiente de potencia es de corta duración, puede suponerse que el efecto de la transmisión de calor por convección es despreciable frente a la conducción. De esta manera, no es necesario calcular el campo de velocidades en la fase líquida, simplificándose considerablemente el problema, el cual se reduce a la resolución de la ecuación (5), la ecuación (6) sin el segundo término del primer miembro y la ecuación (9), con las condiciones de borde (3) e iniciales (4).

2.2. Soluciones Débiles

La solución del problema de transmisión de calor con cambio de fase, tal como fue presentado en la sección anterior, requiere regularidad del frente de fase.

Esto significa que el mismo debe evolucionar en forma "suave" en el tiempo y ser derivable con continuidad en el espacio.

Gran parte de los algoritmos diseñados para tratar esta formulación [3], [8], [11], [15] resuelven problemas unidimensionales. Su extensión a problemas multidimensionales, además de la notoria dificultad de seguir a la interfase en más de una dimensión, se enfrenta al inconveniente que la misma puede dejar de ser una función regular, como lo observara Lazardis [6].

En este trabajo, se ha optado por el empleo de un modelo denominado "de dominio fijo", en el cual la condición de balance en la interfase queda incluida dentro de la ecuación diferencial (2), la cual se resuelve para el dominio completo. La posición de la interfase se obtiene posteriormente trazando las isoterms de la temperatura de fusión.

Los métodos de este tipo se basan en el empleo de formulaciones débiles, pero previamente a la discusión de este tipo de soluciones, ana-

lizaremos la función h , denominada entalpía específica.

En cada punto de un cuerpo monofásico, puede definirse el contenido entálpico como

$$h = \int_0^T C_p dT \quad T < T_F$$

siendo T_F la temperatura de cambio de fase. Cuando en algún punto de un cuerpo puro se alcanza la temperatura de cambio de fase, la entalpía presenta una discontinuidad o salto, igual al calor latente, por lo tanto, cuando un punto se encuentra a una temperatura mayor que T_F , su contenido entálpico resulta

$$h = \int_0^T C_p dT + L \quad T > T_F$$

Podemos englobar ambas ecuaciones en una sola, usando δ , la función de DIRAC

$$h = \int_0^T [C_p + L \delta(T - T_F)] dT \quad (12)$$

Si se quiere aplicar la ecuación (2) a un dominio cuya entalpía puede variar según (12) surge una incompatibilidad matemática debido a la discontinuidad de h . Es para sortear este inconveniente, que se recurre a las denominadas "soluciones débiles".

Matemáticamente, se considerarán problemas de conducción térmica en una región Ω con un contorno regular, en el cual hay una fuente interna $Q(x,t,T)$, con condiciones de borde e iniciales dadas en las ecuaciones (3) y (4), donde se pide que las funciones g y h_0 tengan continuidad Lipschitz*.

Siguiendo la idea de Oleinik [9] y Kamenomostskaja [5] se define una solución débil de este problema, a un par de funciones T y h , relacionados por la ecuación (12) y acotadas en cierta norma, para las cuales

$$\int_0^{t_0} \int_{\Omega} \{k T \nabla^2 \phi + \rho h \partial \phi / \partial t + Q \phi\} dx dt =$$

* Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene continuidad Lipschitz si existe una constante $M > 0$ tal que se verifica que

$$\|f(x) - f(\bar{x})\| \leq M \|x - \bar{x}\|$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega} \rho h_0(\underline{x}) \phi(\underline{x}, 0) d\underline{x} + \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} k g_1(\underline{x}, t) \nabla \phi d\Gamma dt - \quad (13) \\
&\quad - \int_0^{t_0} \int_{\Gamma_q} \phi g_2(\underline{x}, t) d\Gamma dt
\end{aligned}$$

para todas las funciones de prueba ϕ admisibles, es decir, doblemente diferenciables con continuidad y tales que

$$\phi(\underline{x}, t) = 0 \quad \text{en } \Gamma_T$$

$$\phi(\underline{x}, t_0) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Como confirmación de este modelo, Shamsundar y Sparrow [13] han demostrado que, para la entalpía definida según (12), es posible derivar la formulación original del problema de Stefan (las dos ecuaciones diferenciales (2), una en cada fase, más la condición de acople en la interfase (9)), a partir de la expresión (13).

2.3. Solución Numérica - Aproximación por Elementos Finitos

El sustento para la formulación numérica aquí presentada, es la forma integral de la ecuación diferencial (2) definida por la expresión (13). El método de los residuos ponderados, en el cual se basa la técnica de elementos finitos restringe los requisitos de validez de (13), no ya para todas las ϕ posibles, sino para un número limitado de ellas.

Si además decimos que la temperatura en todo el dominio Ω puede desarrollarse en función de ciertos parámetros incógnita a determinar, la ecuación (13) conducirá a la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas.

La idea consiste en subdividir el dominio o cuerpo Ω en muchas regiones o subdominios de dimensión finita, y particionar en subintervalos $[t_n, t_{n+1}]$ al intervalo $[0, t_0]$. Cada subdominio recibe la denominación de elemento y dentro del mismo, la temperatura puede aproximarse por el el polinomio (14)

$$T = \sum N_i U_i \quad (14)$$

siendo U_i los parámetros incógnita a determinar y N_i las funciones de interpolación elegidas.

Las funciones ϕ elegidas para la ponderación pueden pensarse como compuestas por una parte espacial $\psi(\underline{x})$ y una parte temporal $\xi(t)$, tal que $\phi = \psi(\underline{x}) \xi(t)$.

Si en la ecuación (13) se elige la parte temporal de ϕ , de modo de obtener el esquema de Euler implícito en el tiempo, aplicando el teorema de la divergencia, es fácil obtener para cada intervalo de la partición de $[0, t_0]$ una expresión de la forma

$$\int_{\Omega} [-\nabla \psi k \nabla T_{n+1} - \psi \frac{h_{n+1} - h_n}{\Delta t} + \psi Q_{n+1}] d\underline{x} = - \int_{\Gamma_q} \psi g_2(\underline{x}, t) \Big|_{t=t_n} d\underline{r} \quad (15)$$

donde el subíndice n indica el n -ésimo punto de la partición del intervalo $[0, t_0]$, es decir, el instante $t = t_n$ y $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ es la amplitud de dicho intervalo.

Reemplazando en (15) T por su expresión discretizada (14) y eligiendo como funciones ψ , las empleadas en la interpolación de T .

$$\psi_i = N_i$$

se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\Delta t \underline{K} \underline{U}_{n+1} + \underline{E}_{n+1} = \Delta t \underline{f}_{n+1} + \underline{E}_n \quad (16)$$

donde

$$\underline{U} = [U_1, \dots, U_m]^T$$

$$\underline{K} = \sum_1^{Ne} \underline{K}^e$$

$$\underline{E} = \sum_1^{Ne} \underline{E}^e$$

$$\underline{f} = \sum_1^{Ne} \underline{f}^e$$

donde el supraíndice T indica trasposición y el supraíndice e indica matrices elementales, cuyos términos genéricos se calculan como

$$(\underline{K}^e)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i k \nabla N_j dx$$

$$(\underline{E}^e)_i = \int_{\Omega} N_i h dx$$

$$(\underline{f}^e)_i = \int_{\Omega} N_i Q dx - \int_{\Gamma_q} N_i g_2(x,t) d\Gamma$$

La última integral del segundo miembro de la expresión de $(\underline{f}^e)_i$ solamente se tiene en cuenta para aquellos elementos cuyos contornos integran la frontera Γ_q .

2.4. Solución del Sistema Resultante

El sistema (16) puede escribirse bajo la forma

$$\underline{A} \underline{U} + \underline{E} = \underline{W} \quad (17)$$

\underline{E} presenta una discontinuidad finita como función de \underline{U} , por lo tanto (17) carece de sentido, con la noción de solución definida como

$$\beta_i^{-1}(\underline{U}) + \underline{A} \underline{U} = \underline{g} \quad ; \quad \underline{U} = \beta(\underline{E})$$

Si las β_i^{-1} son continuas y derivables, el teorema de J.M. Ortega y W. C. Rheinbolt [10, Tms. 13.1.3 y 13.1.5] asegura que las iteraciones generadas por el método de Gauss-Seidel convergen a \underline{U} .

Para superar este inconveniente, siguiendo la idea introducida originalmente por G. Meyer [7], se regulariza \underline{E} de modo que ahora β_i^{-1} sea una función continua de \underline{U} para permitir el uso del método tradicional de Gauss-Seidel.

Basicamente, este resultado se obtiene redefiniendo la entalpía como una función continua por tramos, en donde la discontinuidad o salto se regulariza en un estrecho entorno de amplitud $2v$, alrededor de la temperatura de cambio de fase T_F . Expresado matemáticamente

$$h(T) = \begin{cases} \int_{T_0}^T C \, dT & ; T < T_F - \nu \\ h(T_F - \nu) + \frac{L}{2\nu} (T - T_F + \nu) & ; T \in [T_F - \nu, T_F + \nu] \\ h(T_F + \nu) + \int_{T_F + \nu}^T C \, dT & ; T > T_F + \nu \end{cases} \quad (18)$$

De esta manera, se trata una sustancia que cambia de fase a una temperatura fija, como otra equivalente, que lo hace en un cierto rango de temperaturas.

La convergencia de este problema regularizado, al problema original, se ha comprobado con diferentes experiencias numéricas.

2.5. Algoritmo

Con la ecuación (18), el sistema (16) queda expresado en función de una incógnita \underline{U} , resultando

$$[\Delta t \underline{K} + \underline{M}] \underline{U}_{n+1} = \Delta t \underline{f}_{n+1} + \underline{E}_n \quad (19)$$

donde \underline{M} , matriz de masa, se obtiene ensamblando las matrices elementales, cuyo término genérico se calcula como

$$(\underline{M}^e)_{ij} = \int_{\Omega} N_i \rho C_p N_j \, dx$$

Obsérvese que

$$C_p = \frac{\partial h}{\partial T} \leq \frac{L}{2\nu} \quad \forall T$$

por lo tanto, $L/2\nu$ es una cota superior del calor específico; que en el caso del problema no regularizado, presenta una discontinuidad infinita.

El problema algebraico expresado en la ecuación (19) es fuertemente no lineal, ya que las propiedades físicas, y por lo tanto, las matrices que ellas determinan, presentan una brusca variación en la zona de cambio de fase.

La solución de (19) es aproximado por la iteración \underline{U}^{k+1} , el

supraíndice k indica k -ésima iteración, siendo

$$[\Delta t K_{n+1}^k + M_{n+1}^k] \Delta U_{n+1}^{k+1} = \Delta t f_{n+1} - (E_{n+1}^k - E_n) - \Delta t K_{n+1}^k U_{n+1}^k$$

$$U_{n+1}^{k+1} = U_{n+1}^k + \Delta U_{n+1}^{k+1}$$

controlando la convergencia de modo que

$$\frac{\|\Delta U_{n+1}^{k+1}\|}{\|U_{n+1}^{k+1}\|} \leq \epsilon$$

donde ϵ es la precisión requerida.

3. RESULTADOS NUMERICOS

3.1. Descripción Geométrica y Física del Problema Analizado

Se ha estudiado un elemento combustible tipo, compuesto por un pellet de dióxido de uranio, cilíndrico, de 1,06 cm de diámetro exterior (Figura 1), recubierto por una vaina de Zircaloy de 1,19 cm de diámetro externo, habiendo entre ambas una zona de separación de 0,0077 cm de espesor, la cual se encuentra ocupada por una mezcla de gases inertes como Helio y Argón, más gases de fisión, como Criptón y Xenón.

Este sistema ha sido discretizado con 57 elementos unidimensionales isoparamétricos, correspondiendo 53 al elemento combustible, 1 a la zona de separación y 3 a la vaina de Zircaloy (Tabla 1).

3.2. Propiedades Físicas

- Dióxido de Uranio

Las propiedades termofísicas del dióxido de uranio, se han calculado utilizando las correlaciones realizadas por Fink y colaboradores [4], bajo la forma

. Calor específico: (Joule/mol °K)

a) $298,15^\circ\text{K} \leq T \leq 2670^\circ\text{K}$

$$C_p = \frac{A_1 \exp(\theta/T)}{T^2 (\exp(\theta/T) - 1)^2} + A_2 T + A_3 \exp(-A_4/T) (1 + (T-T^*)A_4/T^2)$$

b) $2670^\circ\text{K} < T \leq 3120^\circ\text{K}$

$$C_p = A_5$$

c) $3120^\circ\text{K} \leq T \leq 3520^\circ\text{K}$

$$C_p = A_6$$

. Entalpía (Joule/mol):

a) $298,15^\circ\text{K} \leq T \leq 2670^\circ\text{K}$

$$H_T = B_1 [(\exp(\theta/T) - 1)^{-1} + B_2] + B_3(T^2 - B_4) + B_5(T - T^*) \exp(-B_6/T)$$

b) $2670^\circ\text{K} \leq T \leq 3120^\circ\text{K}$

$$H_T = B_7 T + B_8$$

c) $3120^\circ\text{K} \leq T \leq 3530$

$$H_T = B_9 T + B_{10}$$

. Densidad (Kg/m^3)

a) $298,15^\circ\text{K} < T < 3120^\circ\text{K}$

$$\rho = D_1 + D_2 T + D_3 T^2 + D_4 T^3$$

b) $3120^\circ\text{K} \leq T \leq 3400^\circ\text{K}$

$$\rho = D_5 + D_6 T$$

. Conductividad (Watts/m °K)

a) $298,15^\circ\text{K} \leq 2670^\circ\text{K}$

$$K = \frac{1}{C_1 + C_2 T + C_3 T^2} + C_4 T \exp(-C_5/T)$$

$$b) 2670^{\circ}\text{K} \leq T \leq 3120^{\circ}\text{K}$$

$$K = C_6 + C_7 T$$

$$c) T > 3120^{\circ}\text{K}$$

$$K = C_8$$

pudiéndose obtener las constantes de la Tabla 2.

Los valores de estas propiedades para distintas temperaturas se encuentran tabulados en la Tabla 3.

- Vaina de Zircaloy

Los datos empleados aquí son debidos al Licenciado Baigorria

[1] siendo:

. Calor específico (Joule/Kg °K)

$$C_p = 0,06805 + 2,3872 (T - 273) \quad ; \quad T < 900^{\circ}\text{K}$$

$$C_p = 1496,77 - 5,15427 (T - 900) \quad ; \quad T < 1093^{\circ}\text{K}$$

$$C_p = 502 + 4,4 (T - 1093) \quad ; \quad T < 1113^{\circ}\text{K}$$

$$C_p = 615 + 5,2 (T - 1113) \quad ; \quad T < 1153^{\circ}\text{K}$$

$$C_p = 719 + 4,85 (T - 1153) \quad ; \quad T < 1173^{\circ}\text{K}$$

$$C_p = 816 - 2,3 (T - 1173) \quad ; \quad T < 1193^{\circ}\text{K}$$

. Densidad (gr/cm³)

$$\rho = 6,53$$

. Conductividad térmica (Watts/cm °K)

$$K = 0,13959 + 0,98522 \times 10^{-4}$$

- Interfase Fuel-Cladding

. Coeficiente de película (Watts/cm² °K)

$$h = 6$$

adoptándose un espesor de 0.0077 cm para esta zona, la conductividad equivalente en watts/cm °K es

$$K_{eq} = 4,62 \times 10^{-2}$$

3.3. Análisis Transitorio

a) Respuesta frente a un incremento abrupto de potencia debido a rotura parcial de la tubería del refrigerante principal.

Este accidente, conocido como L.O.C.A., consta de tres etapas principales, que son: caída (blowdown), reposición de refrigerante debido al sistema de enfriamiento de emergencia del núcleo, y la inundación o anegamiento (reflood) del mismo.

En la etapa de caída, hay dos preguntas a responder: cuán rápido se está perdiendo refrigerante y a qué velocidad está creciendo la temperatura del revestimiento (Vaina de Zircaloy). Por lo tanto, son objeto de interés, la velocidad de descarga crítica por la rotura y la transmisión de calor en el núcleo.

Durante la caída, el flujo refrigerante invierte su circulación repetidas veces, y tiene puntos de estancamiento, mientras que las propiedades cambian drásticamente en el período completo, pudiendo el revestimiento, por lo tanto, experimentar flujo crítico de calor CHF y períodos de post CHF.

Para la determinación de la temperatura del revestimiento, es necesario contar con estimaciones adecuadas del coeficiente de transmisión de calor entre el refrigerante y la vaina. La obtención de valores confiables para dicho coeficiente, constituye uno de los mayores esfuerzos de la investigación en seguridad de reactores.

Durante la reposición, el sistema de refrigeración de emergencia del núcleo, inyecta agua de refrigeración en el recipiente. Este agua entra en contacto directo con el vapor de escape. En el primer contacto, la condensación violenta crea vacío, sin embargo, a medida que disminuye la velocidad de condensación, la presión crece nuevamente. La interacción de la condensación y la inercia del flujo, resulta en una fuerte oscilación del flujo, con una gran amplitud, que puede causar severos golpes en las válvulas y tuberías.

En la última etapa se propaga un frente de extinción hasta que el núcleo queda completamente inundado.

Para realizar este estudio, se ha supuesto que la variación de temperatura del refrigerante, en las cercanías del elemento combustible, viene dada por la Figura 3. Se supuso también, la condición de conducción

perfecta entre el refrigerante y la pared exterior del revestimiento.

La variación de la potencia nominal durante el accidente, puede obtenerse de la Figura 2. En la primer parte de las simulación, hasta 360 seg., la historia de potencia que se utiliza permite alcanzar el estado de régimen del elemento combustible. En ese instante se empieza a simular el accidente. La potencia máxima o pico de potencia, se produce a los 0,5 seg de iniciado el mismo, retornando a su valor nominal al cabo de 0,7 seg., y anulándose prácticamente, transcurridos 10 seg. más.

La potencia nominal utilizada es

$$Q^* = 500 \text{ Watts/cm}$$

Esta potencia se mide por unidad de longitud axial de la barra de dióxido de uranio. Por lo tanto (suponiendo no depresión en el radio) la potencia volumétrica es

$$Q = \frac{Q^*}{\text{Area}} = \frac{500}{\pi(0.53)^2} = 566,92 \text{ Watts/cm}^3$$

Los perfiles de temperatura y su evolución en el tiempo se presentan, para distintos instantes, graficados en la Figura 4.

b) Estudio de la fusión de la barra combustible

El objetivo de este análisis es analizar las características de propagación de la interfase sólido-líquido, bajo ciertas condiciones operativas que provoquen fusión parcial en el elemento combustible. Para ello se somete a la barra a una variación de la potencia nominal cuya historia se ve reflejada en la Figura 5.

El interés primordial es determinar el porcentaje de zona en estado de fusión y su variación en el tiempo, la evolución del frente de propagación de fusión (zona donde la fusión es incipiente) y el comportamiento del frente de fin de fusión.

En la Figura 6 se graficó la distribución de temperaturas que presenta la barra para diferentes instantes de tiempo. Se advierte que, durante el proceso de fusión, aparece una región "mushy" o región fundida, y que su tamaño varía con el tiempo.

La aparición de la zona mushy es una consecuencia de la geometría particular del problema y de las condiciones de borde del mismo, no

debiéndose a un comportamiento físico del material ajeno a las características de cuerpo puro.

La zona mushy aparece en el centro de la barra, zona de máxima temperatura y gradiente nulo. Por lo tanto, no puede transmitirse calor por conducción a dicha zona (debido a que el gradiente es nulo), y toda la energía necesaria para la fusión se obtiene de la fuente interna Q . Luego que en un punto se alcanzó la temperatura de fusión T_F , la entalpía del mismo irá aumentando por el aporte de calor de la fuente Q , midiéndose el grado de fusión alcanzado, por el contenido entálpico del punto, hasta que, transcurrido un cierto tiempo (cuando la entalpía alcanza el valor de fusión en estado líquido), se encuentran totalmente fundido. Por lo tanto, dos interfases se propagan en el medio, la interfase de principio de fusión, y la de fin de fusión, cuyas evoluciones en el tiempo, se encuentran graficadas en la Figura 7.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado el comportamiento de un elemento combustible bajo distintas condiciones de carga térmica.

Se observó la aparición de zonas de fusión de espesor finito, llamadas zonas mushy, debidas a las características geométricas especiales del problema.

Estas conclusiones son coincidentes con las obtenidos por Baignoria y colaboradores [2] utilizando el código M.S.A.

Un comentario especial merecen las condiciones de contorno impuestas. En la simulación, se ha supuesto conducción perfecta entre el medio refrigerante y el revestimiento del elemento combustible. Empero, en la descripción del accidente, se hizo incapié en que el coeficiente de transmisión de calor es uno de los parámetros que más varían, y para cuya determinación, más esfuerzos se realizan. De aquí surge la necesidad de un estudio en profundidad, utilizando para ello, condiciones de contorno apropiadas, y cuantificando su influencia en el comportamiento global del sistema.

También resulta interesante analizar como afecta a la respuesta la utilización de distintas distribuciones internas de la fuente Q , estudiando las modificaciones en el origen de la zona fundida y su posterior comportamiento.

El modelo unidimensional axisimétrico utilizado, constituye una simplificación bastante fuerte del modelo original, y ha sido empleado para obtener un conocimiento global del comportamiento del elemento combustible.

En realidad, el sistema puede ser simulado más adecuadamente, con un modelo axisimétrico bidimensional, ya que si bien considerar simetría axial es una buena aproximación, longitudinalmente la variación de las propiedades tiene una importancia significativa.

Además, el comportamiento de la zona fundida puede diferir notablemente en ambos modelos, obteniéndose una información más detallada con el segundo. Este estudio servirá también para obtener una estimación de la confiabilidad del modelo simplificado unidimensional.

Por último, sería interesante tener en cuenta el movimiento del material fundido en la zona líquida. Este estudio es necesariamente bidimensional y deberá ser posterior al mencionado en el párrafo anterior.

COORDENADAS NODALES

Nodo	Coordenada
1	0.00000000E+00
2	0.50000000E-02
3	0.10000000E-01
4	0.15000000E-01
5	0.20000000E-01
6	0.25000000E-01
7	0.30000000E-01
8	0.35000000E-01
9	0.40000000E-01
10	0.45000000E-01
11	0.50000000E-01
12	0.60000000E-01
13	0.70000000E-01
14	0.80000000E-01
15	0.90000000E-01
16	0.10000000E+00
17	0.11000000E+00
18	0.12000000E+00
19	0.13000000E+00
20	0.14000000E+00
21	0.15000000E+00
22	0.16000000E+00
23	0.17000000E+00
24	0.18000000E+00
25	0.19000000E+00
26	0.20000000E+00
27	0.21000000E+00
28	0.22000000E+00
29	0.23000000E+00
30	0.24000000E+00
31	0.25000000E+00
32	0.26500000E+00
33	0.28000000E+00
34	0.29500000E+00
35	0.31000000E+00
36	0.32500000E+00
37	0.34000000E+00
38	0.35500000E+00
39	0.37000000E+00
40	0.38500000E+00
41	0.40000000E+00
42	0.41000000E+00
43	0.42000000E+00
44	0.43000000E+00
45	0.44000000E+00
46	0.45000000E+00
47	0.46000000E+00
48	0.47000000E+00
49	0.48000000E+00
50	0.49000000E+00
51	0.50000000E+00
52	0.51000000E+00
53	0.52000000E+00
54	0.53000000E+00
FIN ELEMENTO COMBUSTIBLE	
55	0.53770000E+00
FIN ELEMENTO DE GAP	
56	0.55680000E+00
57	0.57590000E+00
58	0.59500000E+00

TABLA 1

DATOS PARA CALOR ESPECIFICO

DATA A1,A2 / 2.0833293D07,7.7232D-03 /
 DATA A3,A4 / 2.9282929D04,2.1841335D04 /
 DATA A5,A6 / 167.04D00,130.95D00 /

DATOS PARA ENTALPIA

DATA B1,B2 / 4.0365995D04,-0.2152143D00 /
 DATA B3,B4 / 3.8616D-03,-8.8893422D04 /
 DATA B5 / 2.9282929D04 /
 DATA B7,B8 / 167.04D00,-2.18342D05 /
 DATA B9,B10 / 130.95D00,-3.0911D04 /

DATOS DENSIDAD

DATA D1,D2 / 11031.432D00,-0.1790742D00 /
 DATA D3,D4 / -9.13592D-05,2.2133D-09 /
 DATA D5,D6 / 11542.634D00,-0.8986624D00 /

DATOS CONDUCTIVIDAD TERMICA

DATA C1,C2 / 6.8337D-02,1.6693D-04 /
 DATA C3,C4 / 3.1886D-08,1.2783D-01 /
 DATA C5 / 13475.111D00 /
 DATA C6,C7 / 4.1486D00,-2.2673D-04 /
 DATA C8 / 11.D00 /

FIN TABLA DE DATOS

TABLA 2

PROPIEDADES FISICAS DEL DIOXIDO DE URANIO

TEMPERATURA K	CONDUCTIVIDAD		CALOR		DENSIDAD		ENTALPIA	
	Watt/Cm	K	Joule/Ks	K	Ks/Cm3	Joule/Ks		
298	82	45D-01	0	33	70D-01	0	068D-03	
300	82	49D-01	0	32	95D-01	0	59D-03	
400	72	35D-01	0	23	53D-01	0	55D-03	
600	55	26D-01	0	19	16D-01	0	55D-03	
700	49	27D-01	0	17	11D-01	0	66D-03	
800	44	25D-01	0	16	08D-01	0	66D-03	
900	40	23D-01	0	15	07D-01	0	66D-03	
1000	37	22D-01	0	15	06D-01	0	66D-03	
1100	34	21D-01	0	15	06D-01	0	66D-03	
1150	33	20D-01	0	15	06D-01	0	66D-03	
1200	32	19D-01	0	15	07D-01	0	66D-03	
1300	27	15D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
1400	25	14D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
1500	23	13D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
1600	22	12D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
1700	22	12D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
1800	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
1900	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2000	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2100	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2200	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2300	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2400	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2500	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2600	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2700	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2800	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
2900	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3000	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3100	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3200	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3300	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3400	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3500	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3600	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3700	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3800	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
3900	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4000	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4100	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4200	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4300	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4400	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4500	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4600	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4700	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4800	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
4900	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
5000	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
5100	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
5200	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
5300	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
5400	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	
5500	21	11D-01	0	13	07D-01	0	66D-03	

TABLA 3

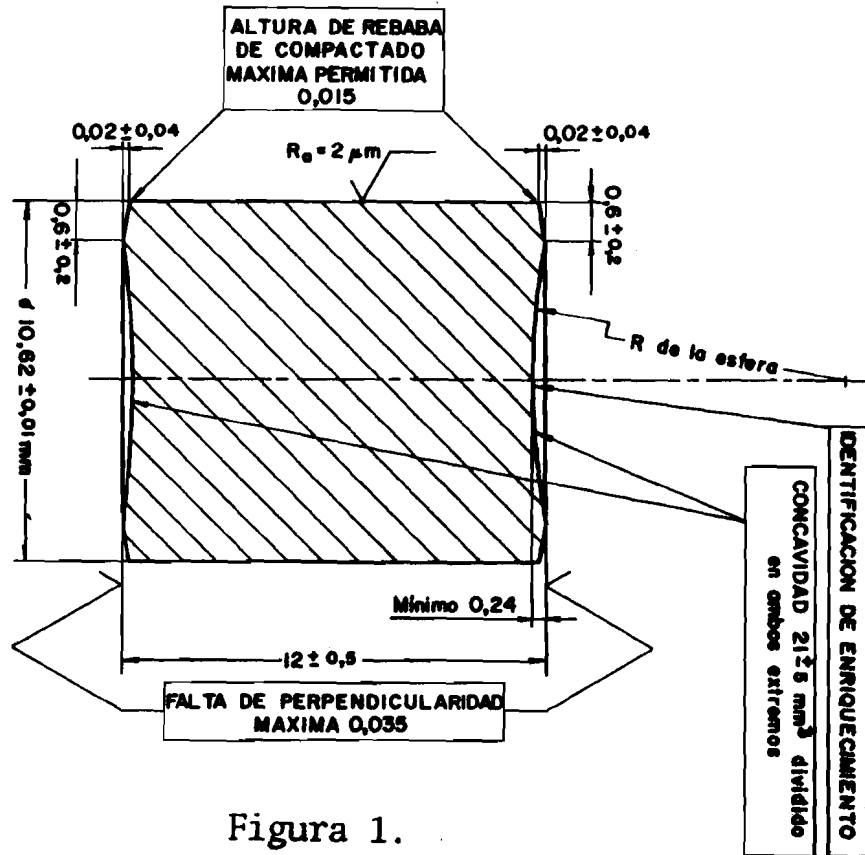


Figura 1.

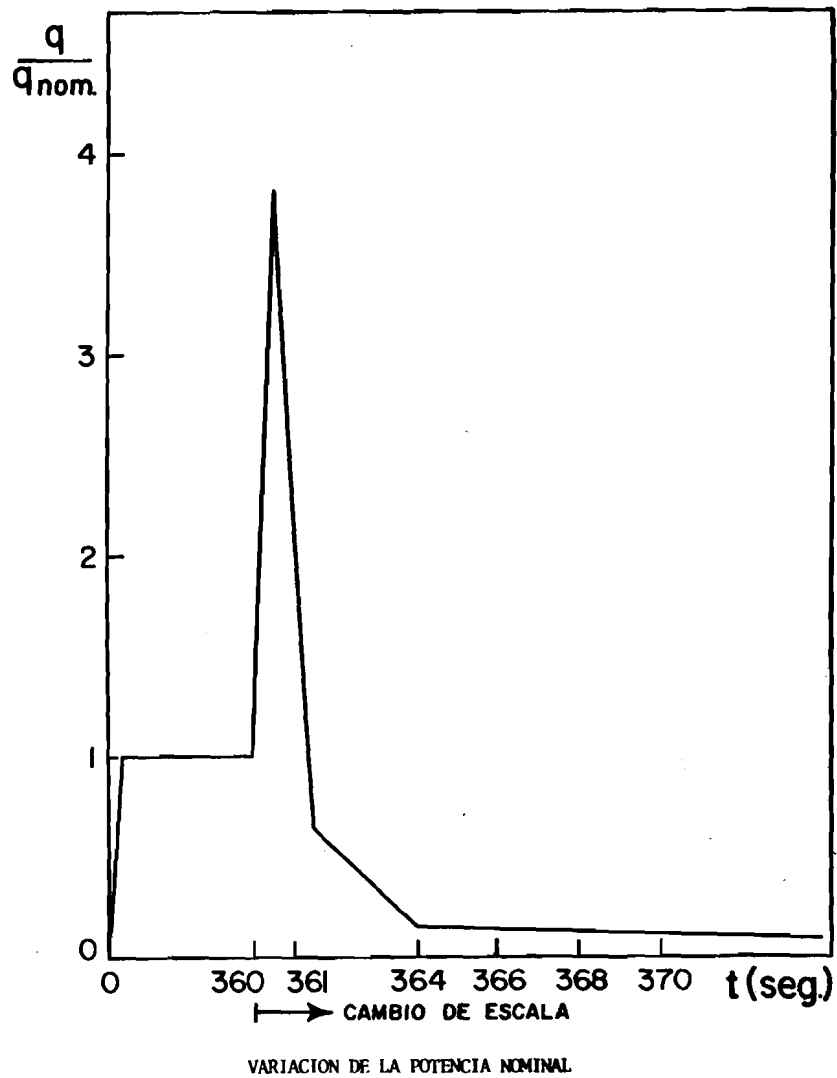


Figura 2

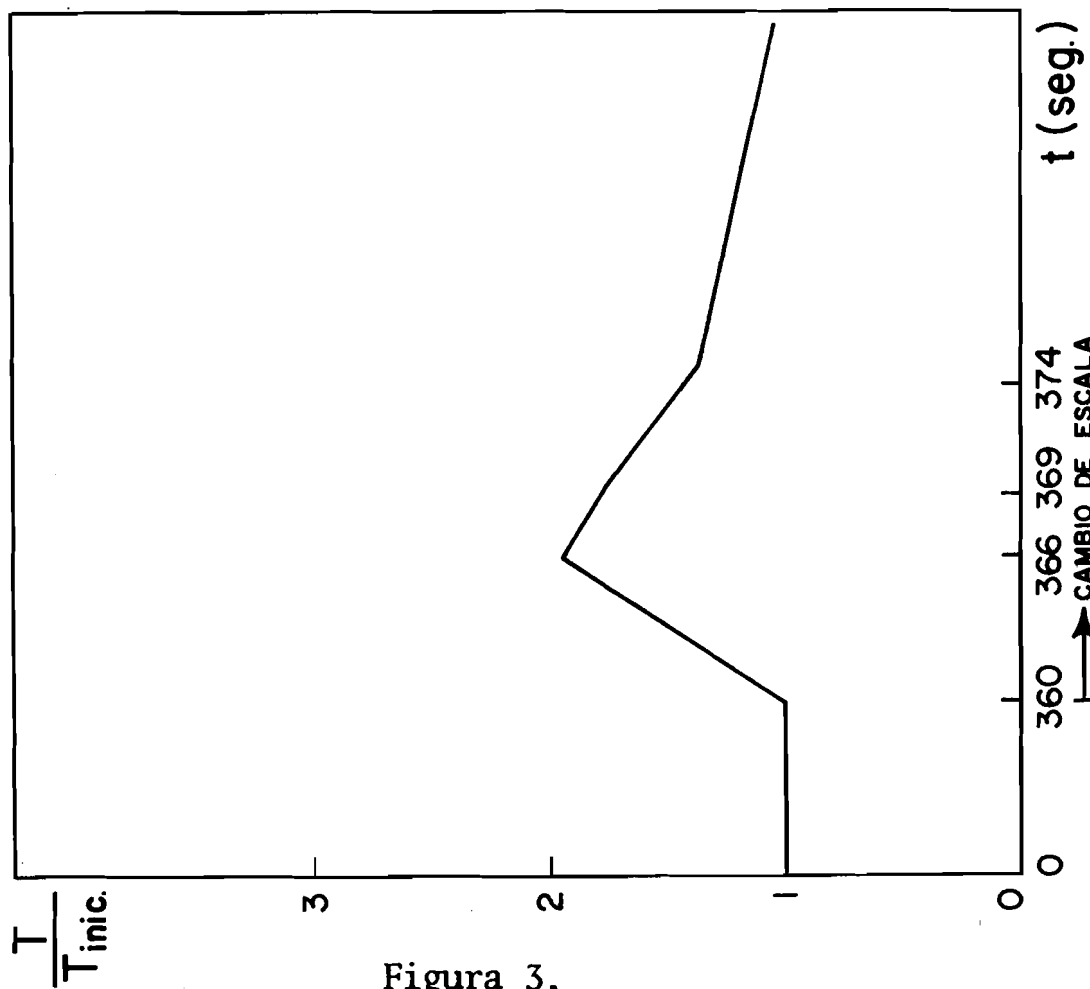
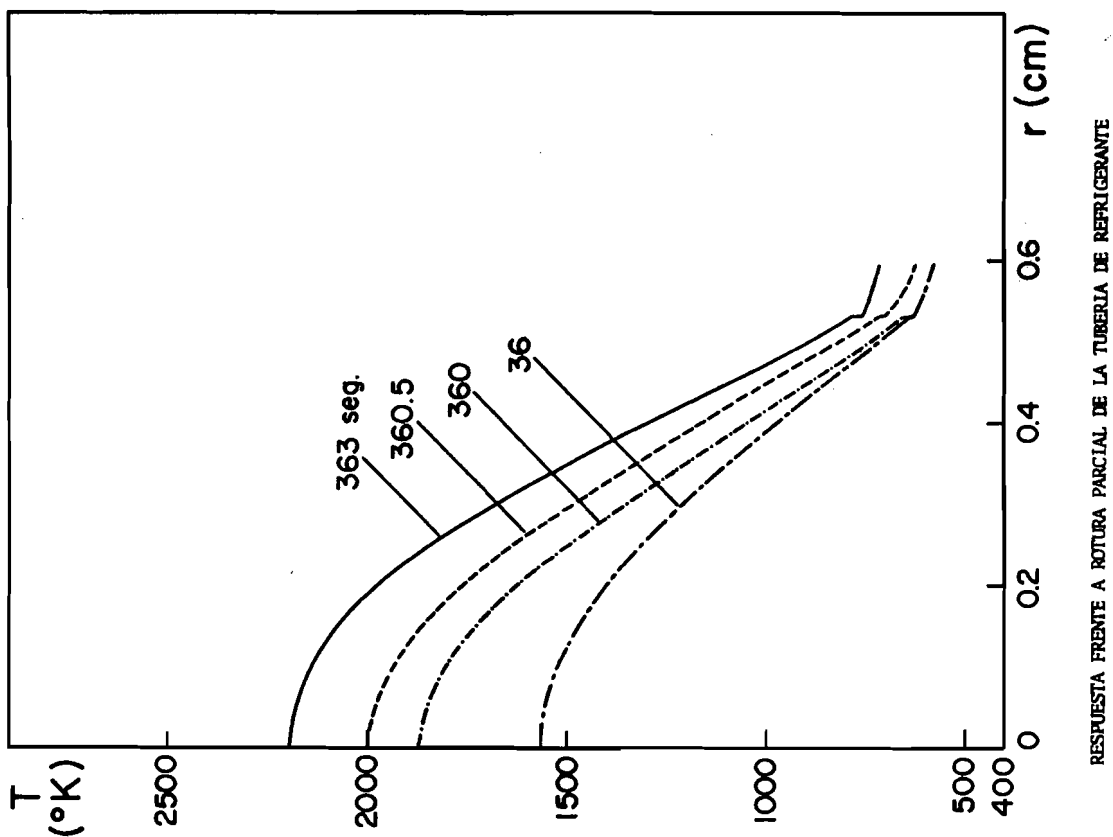


Figura 3.



RESPUESTA FRENTE A ROTURA PARCIAL DE LA TUBERIA DE REFRIGERANTE

Figura 4.

Figura 5.

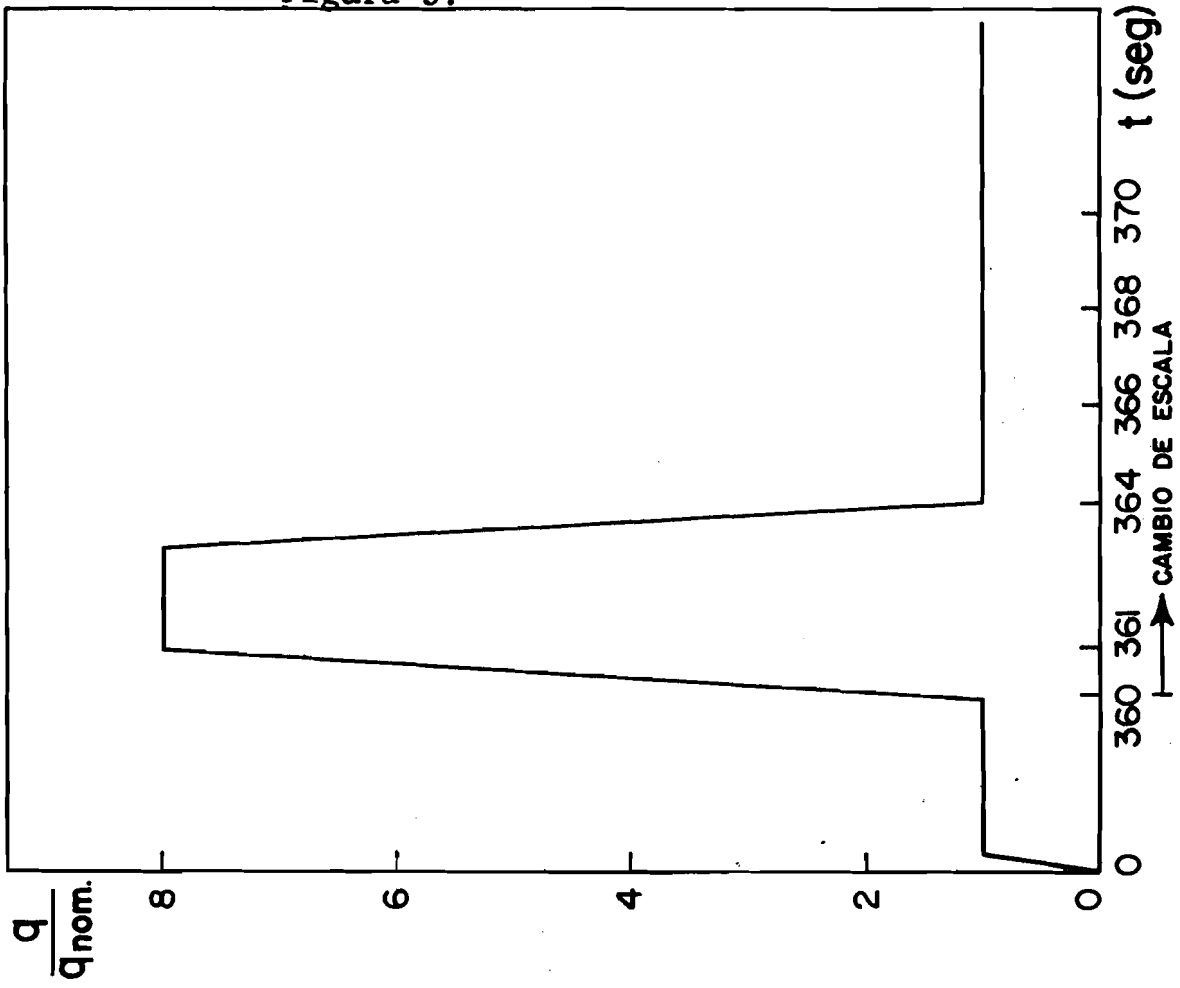


Figura 7.

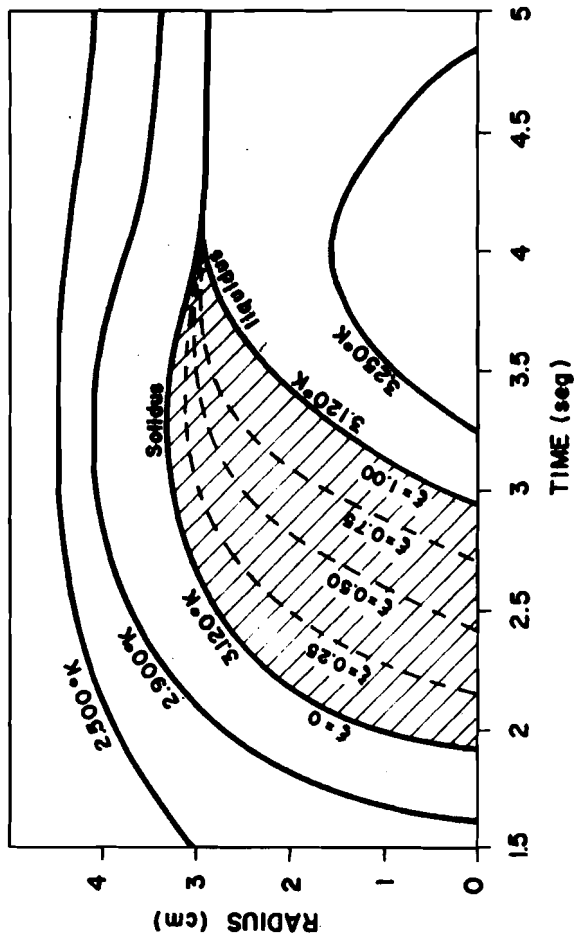
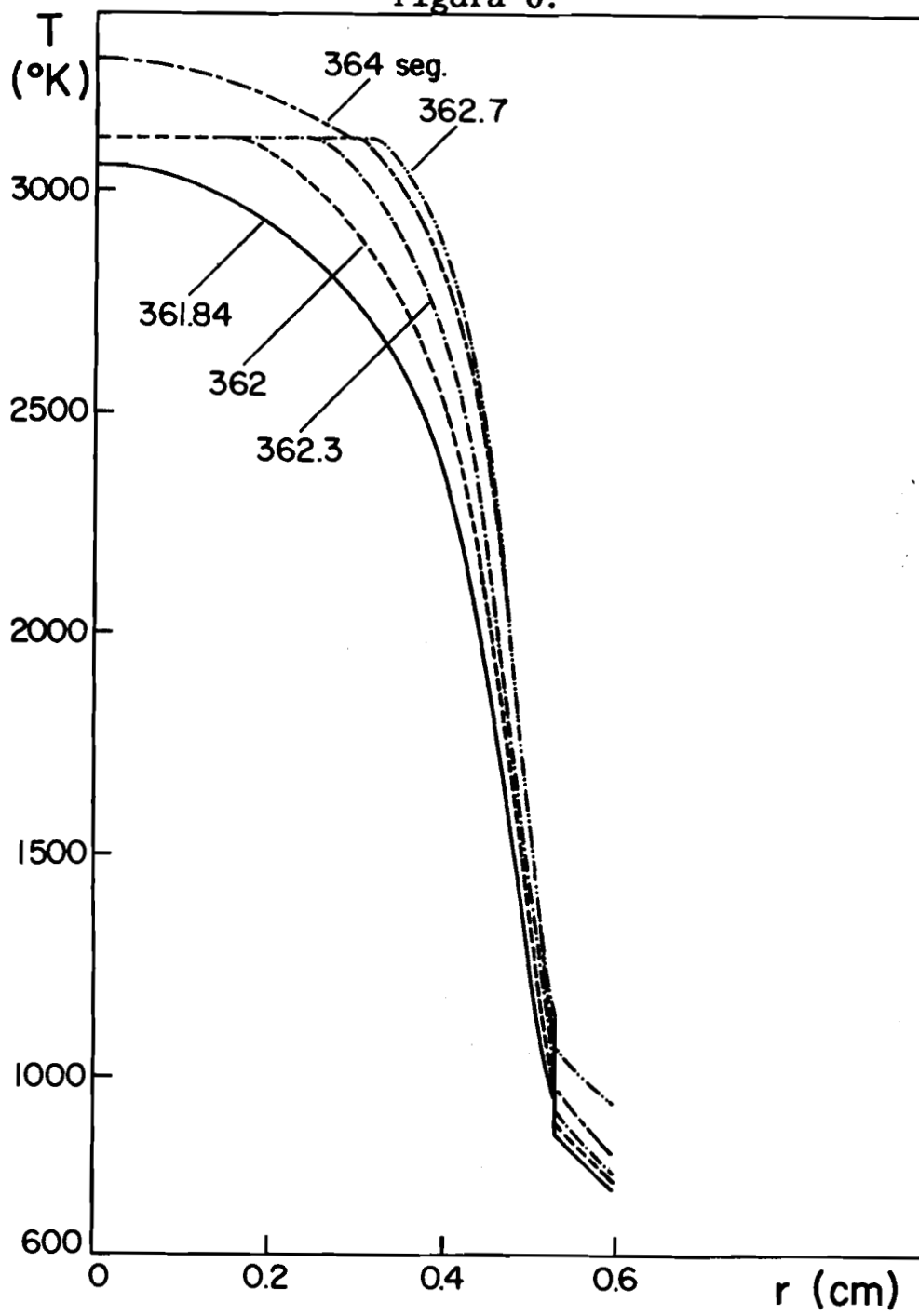


Figura 6.



NOMENCLATURA

- C : calor específico
 C_p : calor específico a presión constante
 h : entalpía específica
 k : conductividad térmica
 m : grados de libertad de la discretización
 n : subíndice que indica en n-ésimo punto de la discretización del intervalo temporal
 t : tiempo
 Δt : incremento de tiempo
 v : velocidad
 L : calor latente
 N_e : número de elementos de la discretización
 N_i : funciones de interpolación
 P : presión
 Q : fuente interna o volumétrica de generación
 T : temperatura
 T_F : temperatura de cambio de fase
 \underline{f} : vector de cargas
 \underline{n} : versor normal exterior
 \underline{q} : flujo térmico
 \underline{x} : vector posición de un punto del dominio dado
 \underline{E} : vector de inercia térmica
 \underline{K} : matriz de rigidez
 \underline{M} : matriz de masa
 \underline{R} : vector posición de un punto en la interfase
 \underline{S} : tensor de tensión extra
 \underline{U} : valores nodales incógnita

- β : inversa de la función entalpía
- ϵ : precisión requerida para la convergencia
- ν : semi intervalo de regularización
- ρ : densidad
- ρ_s : densidad del sólido
- ρ_l : densidad del líquido
- Ω : dominio o cuerpo bajo estudio
- $\partial\Omega$: frontera de Ω
- Γ_q : porción de $\partial\Omega$ con flujos impuestos
- Γ_T : porción de $\partial\Omega$ con temperaturas impuestas
- ϕ : funciones de prueba
- μ : viscosidad
- γ_g : coeficiente de boyancia

REFERENCIAS

- [1] Baigorria, C. Comunicación Privada, 1982.
- [2] Baigorria, C.A., Harriague, S., Savino, E.J. Fuel Thermal Behaviour Under Transient Conditions - 7th. Structural & Mechanical Conference in Reactor Technology, Chicago - U.S.A. 1985.
- [3] Bonnerot, R., Jamet, P.; A Second Order Finite Element Method for One-Dimensional Stefan Problems. Int. J. Num. Meth. Engng. Vol.8, 811-820, 1974.
- [4] Fink, J.K., Chasanov, M.G., Leibowitz, L.; Thermophysical Properties of Uranium Dioxide. Journal of Nuclear Materials 102, 17-25, 1981.
- [5] Kamenomostskaja, S.L. Sobre el Problema de Stefan. (en Ruso) Mat. Sb. 53 (93) 489-514, 1961.
- [6] Lazardis, A., A Numerical Solution of Multidimensional Solidification (or Melting) Problems. Int. J. Heat Mass Transfer, 13, 1459-1477, 1970.
- [7] Meyer, H.G., Multidimensional Stefan Problems. Siam. J. Numer. Anal. 19, 522-538, 1973.
- [8] Murray, W.D., Landis, F., Trans. ASME, J. Heat Transfer, 81, 106-112, 1959.
- [9] Oleinik, O.A., Soviet Math. Dokl 1, 1350-1354, 1960.
- [10] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C.; Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.
- [11] Rathjen, K.A., Jiji, L.N. Trans. ASME, J. Heat Transfer, 93, 101-109, 1974.
- [12] Rubinstein, L.I. The Stefan Problem, Translations of Mathematical Monographs, 27. American Mathematical Society, 1972.
- [13] Shamsundar, N., Sparrow, E.N. Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change Via the Enthalpy Model - J. Heat Transfer 97, 333-340, 1975.
- [14] Slattery, J.C. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, Mc. Graw-Hill. Inc., 1972.

[15] Springer, G.S., Olson, D.R., ASME Paper N° 62-Wa-246, 1962.

[16] Stefan, J. Über die Theorie der Eisbildung, Insbesondere Über die Eisbildung in Polameare, Ann. Phys. Chem. 42, 268-286, 1981.

PROBLEMAS DE CAMBIO DE FASE EN LA ACUMULACION DE CALOR A PARTIR DE ENERGIA SOLAR

ALANIS , E.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA

I.- INTRODUCCION: En general, los sistemas de aprovechamiento de la energía solar incluyen entre sus componentes un dispositivo capaz de acumular una parte o / la totalidad de la energía captada por el colector solar. Esto es necesario / debido a que la energía proveniente del sol no es constante durante el día y además depende de las variaciones del clima.

Naturalmente que las características de un acumulador dependerán de varios / factores entre los cuales podemos citar:

- a) Clase de energía a acumular: térmica, eléctrica, mecánica, química etc., de acuerdo al tipo de colector y al uso.
- b) En el caso de acumulación en forma de energía térmica, un factor importante es la temperatura.
- c) Forma de transferir la energía desde el colector al acumulador, por ejemplo, si es por medio de un fluido tal como aire o agua.
- d) Número de horas o días sin sol que se requiera disponer de la energía acumulada (esto naturalmente influye directamente sobre el tamaño del acumulador para un uso dado).

En el presente trabajo nos limitaremos a describir un sistema cuyo colector // transforma la energía solar (electromagnética) en energía térmica a temperatura moderada ($30^{\circ} - 80^{\circ}\text{C}$).

Esta energía es evacuada del colector por medio de un flujo de aire que pasa / por su interior, de manera que este aire que sale del colector a una temperatura / mayor que a la entrada, podrá ser utilizado convenientemente: por ejemplo para secado de vegetales, calefacción de edificios, etc.

Eventualmente, parte de esta energía interna del flujo de aire podrá ser acumulada para su posterior uso durante las horas sin sol.

En cuanto a la manera práctica de acumular esta energía, describiremos dos modos que son los más importantes.

- a) por calor sensible (calor específico)
- b) por calor latente (calor de cambio de fase)

En el primer caso, el aire que proviene del colector se introduce en el sistema acumulador donde entra en contacto con una sustancia originalmente a menor temperatura, y a la cual va cediendo calor. Así , la sustancia va aumentando su temperatura y por ende su energía interna. Por su parte el aire que va cediendo energía a /

la sustancia, disminuye su temperatura a medida que recorre el acumulador, saliendo finalmente de éste a una temperatura inferior.

Si \dot{m} es la masa de aire por unidad de tiempo que circula por el acumulador, c_g su calor específico y ΔT la diferencia de temperatura entre la entrada y la salida, entonces el calor almacenado por unidad de tiempo será

$$\dot{Q} = \dot{m} c_g \Delta T$$

que será una función del tiempo por serlo ΔT .

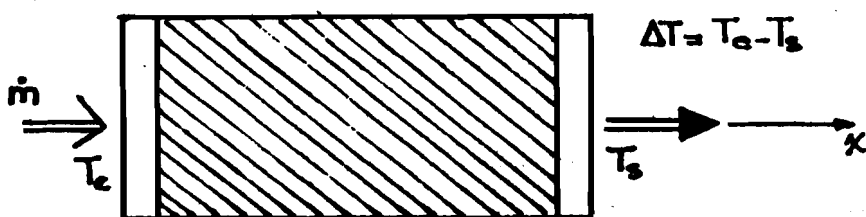


Fig. 1

Por otra parte, si llamamos x a la dirección del flujo dentro del acumulador, la distribución de temperaturas del material será una función $T_s(x, t)$ de la posición y del tiempo.

El calor acumulado al final del período de carga será

$$Q_a = \int_0^L [T(x) - T_a] A dx \rho c_p$$

donde L = longitud del acumulador, A = área transversal, ρ = densidad y c_p = calor específico del material. T_a será una temperatura de referencia que usualmente es la temperatura mínima requerida para el uso.

Para recuperar el calor acumulado, se invierte el sentido de circulación del aire entrando al acumulador a la temperatura T_a y saliendo de él a una temperatura superior. Naturalmente que la capacidad del acumulador será proporcional a la temperatura que se alcance dentro de él y también a la masa de sustancia.

Acumular calor a elevada temperatura requiere también elevada temperatura en el colector lo que va en detrimento de la eficiencia de éste último al aumentar las pérdidas térmicas.

Por otra parte, grandes masas de sustancias requieren estructuras capaces de soportar su peso a la vez que volúmenes disponibles para su ubicación, lo que limita en gran parte su utilización.

Los acumuladores por cambio de fase tienden a disminuir los inconvenientes apuntados arriba, aunque obviamente presentan otros.

Si el aire proveniente del colector entra al acumulador a una temperatura T //

mayor que la temperatura T^* de cambio de fase de la sustancia, ésta, que en general estará a una temperatura $T_i < T^*$, aumentará su temperatura hasta T^* ; a partir de entonces el calor transferido por el flujo de aire a la sustancia provocará el cambio de fase de la misma manteniéndose la temperatura constante T^* .

Una vez que la sustancia completó el cambio de fase, la temperatura comenzará a aumentar tendiendo a la del aire circulante.

De esta forma, el calor acumulado en una sección de espesor dx que ya ha completado el C.F. será

$$dQ = c_s \int_s A dx (T^* - T_i) + \lambda \rho_s A dx + c_l \int_l A dx (T_f - T^*)$$

donde el subíndice s representa la fase de menor energía (usualmente sólido) y l la fase de mayor energía (líquida), λ el calor latente de C.F., T_i y T_f las temperaturas inferior y superior respectivamente de la sustancia.

Debido a que el valor de λ en las sustancias de interés es mucho mayor que el producto $c \cdot \Delta T$ (para ΔT usuales) el 2º término de la ecuación anterior es el predominante.

Como la acumulación de calor se efectúa a temperatura prácticamente constante, T^* , eligiendo la sustancia adecuada puede optimizarse la eficiencia del colector al permitir trabajar con temperaturas más bajas que las necesarias en los acumuladores por calor sensible.

Por otra parte, el volumen requerido para acumular una dada cantidad de calor, es considerablemente menor que en el caso de acumuladores por calor sensible y // también lógicamente el peso resultante.

II) ACUMULACION DE CALOR POR CAMBIO DE FASE

Por ser el tema de interés en este seminario, nos ocuparemos en adelante de // puntualizar algunos aspectos relacionados con el diseño de acumuladores de cambio de fase.

Dado el tiempo disponible, solo presentaremos un aspecto parcial del problema, limitándonos a considerar el caso en que:

- a) la transferencia de calor desde el colector al material de acumulación se // efectúa por medio de un fluido (p/e aire)
- b) La sustancia experimenta un cambio de fase del estado sólido al líquido.

Aproximación al Problema:

Consideremos un acumulador en el que la sustancia está envasada en recipientes de forma rectangular dispuestos como lo ilustra la figura 2 A. Consideremos un // problema en dos dimensiones (x, y)

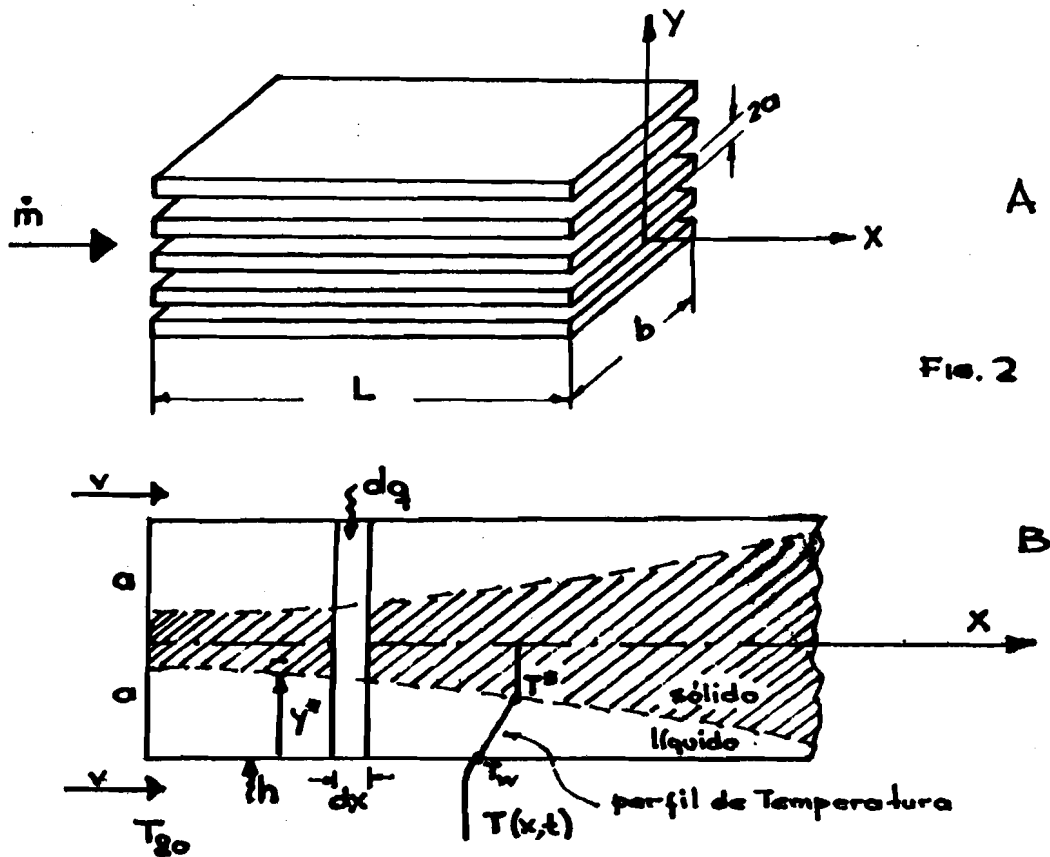


Fig. 2

La figura 2 muestra en detalle uno de los elementos en el plano (x,y) . El aire circula a una velocidad v en la dirección x y entra al acumulador a una temperatura constante $T_{g0} > T^*$. El material posee un calor latente λ , conductividad térmica k y está inicialmente sólido a la temperatura T^* .

El coeficiente de transferencia térmica entre el aire y la superficie del elemento es h .

El calor transferido al elemento será (por unidad de tiempo)

$$dq = h \, dx \, b \, (T_g(x,t) - T_w)$$

donde T_w es la temperatura de la pared.

Dentro del elemento, suponiendo $k = \text{cte.}$, despreciable el calor específico y que el flujo de calor es sólo en la dirección y y donde y^* es la distancia desde la pared hasta el frente de fusión:

$$dq = k \frac{(T_w - T^*)}{y^*}$$

en la interfase

$$dq = \lambda \rho \, dx \, b \, \frac{dy}{dt} = \frac{\partial T}{\partial y} \, k \, dx \, b$$

hemos supuesto que $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_w - T^*}{y^*}$

y por último, el balance térmico para el aire en la dirección x

$$dq = \dot{m} \, c_g \, \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \, dx$$

La solución de estas ecuaciones nos dará $T_g(x,t)$ y la fracción de material / fundido $\eta(x,t)$.

La resolución de estas ecuaciones no es sencilla y se requerirán otras hipótesis simplificadoras. A modo de ejemplo se resuelve el problema basándose en un / modelo simplificado.

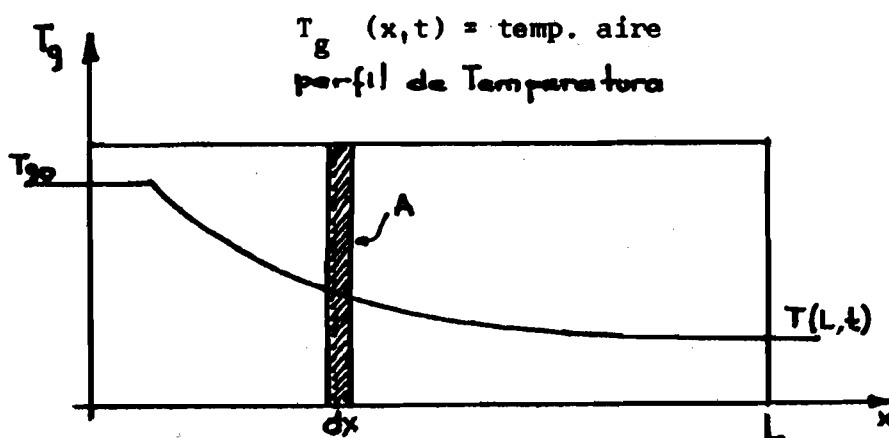
Modelo Simplificado : Se trata de obtener la distribución de temperaturas del aire dentro del acumulador, en función de la posición y del tiempo, basándose en el siguiente modelo simplificado:

Un lecho poroso de sección uniforme, constituido por un material con cambio de fase, es atravesado por un flujo de aire en dirección axial (x) que intercambia calor con el material.

La temperatura del aire a la entrada del lecho, T_{go} , es constante y el material se encuentra inicialmente a su temperatura de fusión T^* en estado sólido y / $T_{go} > T^*$ (Los resultados serán también válidos si el material está en fase líquida y $T_{go} < T^*$)

Se supone que el flujo de calor entre un elemento de acumulación y el aire circundante está determinado únicamente por el coeficiente convectivo de transferencia en la superficie del elemento (h), que los calores específicos de ambas fases son despreciables y que no existe conductividad térmica en el lecho en la dirección del flujo.

Además de la distribución de temperaturas, se obtiene una expresión para la velocidad de avance del frente de fusión dentro del acumulador en la dirección axial y del calor almacenado en función del tiempo.



T^* = temperatura fusión

λ = calor latente

h_v = coeficiente volúmen

$G = \dot{m}$ = gasto métrico

C_g = calor esp. aire

ρ = densidad material

t = tiempo

Ecuaciones de transferencia

$$\frac{\partial}{\partial x} T_g(x,t) = \beta [T^* - T_g(x,t)] \quad \text{con } \beta = A h_v / G c_g$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x,t) = \gamma [T_g(x,t) - T^*] \quad \text{con } \gamma = h_v / \lambda f (1-f)$$

f = fracción de vacíos de la matriz

$\eta(x,t)$ = fracción de material fundido

$\eta(x,t)$ define la condición para el avance del frente de fusión

$$x_f(t) \text{ o } t_f(x)$$

Condiciones de contorno

$$T_g(x,t) = T_g(x,0) \quad \text{para } 0 < t < t_0$$

t_0 = tiempo que tarda en fundir la sección de entrada

$$T_g(0,t) = T_{go} \quad \text{para } x = 0$$

$$\eta(x,0) = 0 \quad \text{para } t = 0$$

$$\eta(x,t) = 1 \quad \text{para } x = x_f(t)$$

$$\eta(0,t_0) = 1$$

La integración de las ecuaciones conduce a

$$T_g(x,0) - T^* = (T_{go} - T^*) \exp(-\beta x) \quad \text{para } 0 < t < t_0$$

$$t_0 = \lambda f (1-f) / h_v (T_{go} - T^*)$$

para $t > t_0$ se obtiene

$$V_f = \frac{d x_f(t)}{dt} = \gamma \frac{(T_{go} - T^*)}{\beta} = \text{cte.} \quad \text{velocidad del frente de fusión}$$

y $x_f(t) = V_f (t - t_0)$ posición del frente de fusión.

$$T_g(x,t) - T^* = (T_{go} - T^*) \exp\left[-\beta x + \frac{t-t_0}{t_0}\right]$$

Definiendo los siguientes parámetros adimensionales:

$$\alpha(x,t) = [T_g(x,t) - T^*] / [T_{go} - T^*]$$

$$\theta = t/t_0$$

$$\Gamma = \beta x$$

se tiene finalmente: $\alpha(x,t) = \exp(-\Gamma + \theta - 1)$ para $t_0 < t < t_f$

Esta función se grafica en la fig. 4.

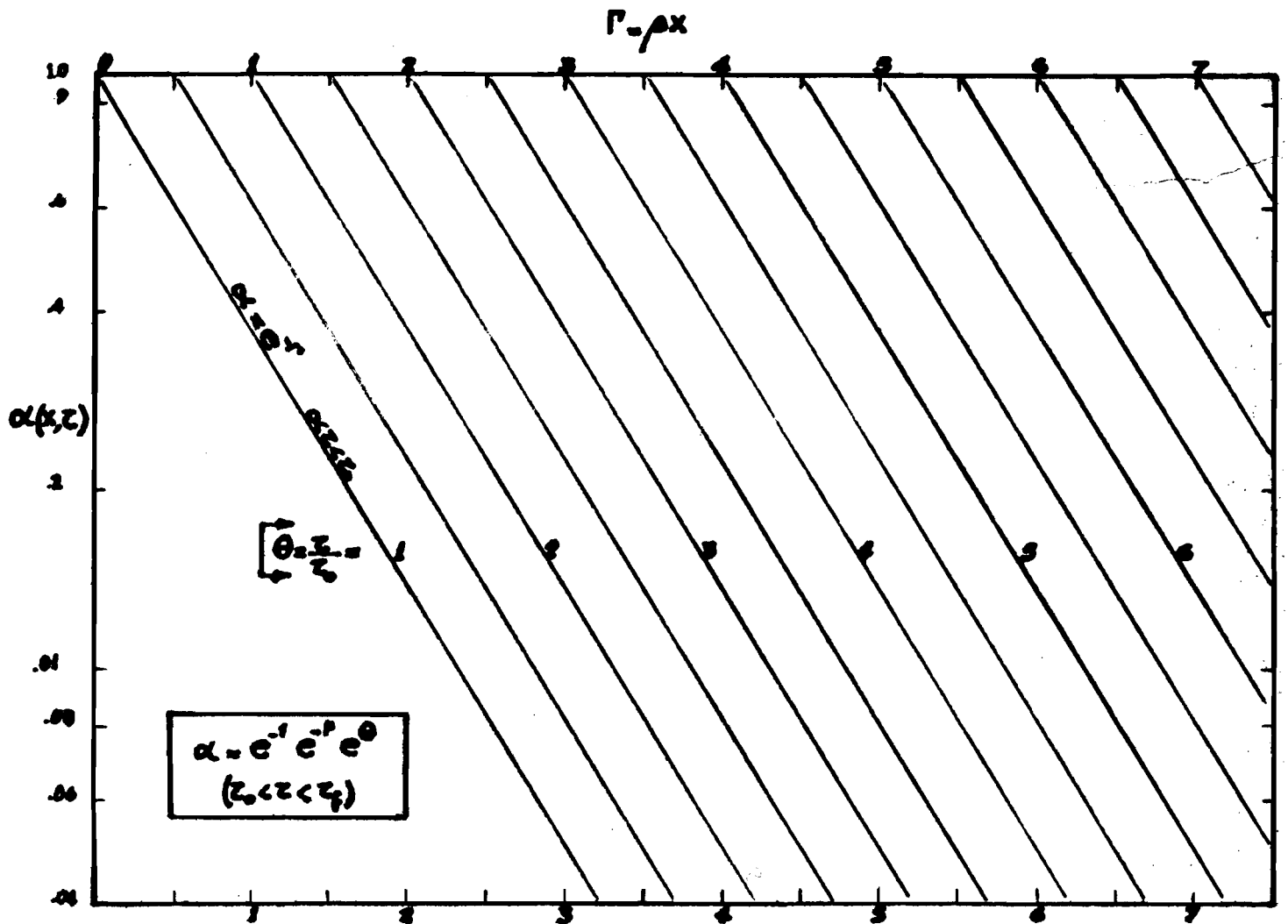


Fig. 4

Estos resultados sólo pueden servir para un dimensionamiento preliminar del acumulador.

Si se necesita más precisión deberá forzosamente considerar otros factores que aquí se han despreciado.

SOBRE LA DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS DESCONOCIDOS DE UN MATERIAL A TRAVES DE UN PROBLEMA CON CAMBIO DE FASE

Mirta Beatriz STAMPELLA

I. INTRODUCCION Y RESEÑA HISTORICA.

En algunos procesos de difusión es de interés la obtención de métodos que permitan evaluar algunas propiedades físicas del medio, utilizando las ecuaciones que modelizan el proceso.

A partir del año 1962, con los trabajos de B.F.Jones [13], J.R.Cannon [2], y hasta la fecha se ha desarrollado una considerable literatura sobre el problema de determinar coeficientes desconocidos en problemas de tipo parabólico unidimensionales.

Todos los métodos utilizan una sobre-condición en la frontera del material en cuestión, además de las condiciones de borde naturales.

Esta sobre-condición proviene generalmente de la medición, realizada durante el proceso de difusión, de alguna propiedad física del material.

Sea, por ejemplo, el siguiente problema, presentado por B.F.Jones, en [13]:

Encontrar dos funciones $u(x,t)$ (temperatura) y $a(t)$ (conductividad

térmica) de manera que se verifique

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < \infty \quad , \quad 0 < t < T \\ u(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x < \infty \\ u(0,t) = f(t) \quad , \quad 0 \leq t < T \quad , \quad f(0) = 0 \end{array} \right.$$

y

$$(2) \quad -a(t) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t) \quad , \quad 0 < t < T$$

donde f y g son funciones conocidas.

La condición (2) representa una sobre-condición que especifica el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$. Un ejemplo físico que lleva a un sistema de este tipo es el caso de conducción de calor donde el medio está bajo decadencia radiactiva, de manera que la conductividad térmica varía con el grado de decadencia; a su vez, el grado de decadencia se puede describir en función del tiempo, de manera tal que la conductividad térmica puede ser considerada como una función del tiempo.

En la parte I de dicho trabajo se demuestra que, bajo ciertas hipótesis sobre los datos f y g , existe un único par de funciones, $(u(x,t), a(t))$ que satisfacen (1) y (2) en sentido clásico. Para ello, utilizando el cambio de variables

$$(3) \quad \theta(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau \quad 0 \leq t < T$$

se transforma el sistema (1), (2) en la ecuación integral

$$a(t) = \frac{\sqrt{\pi} g(t)}{\int_0^t \frac{f'(\tau)}{\sqrt{\int_{\tau}^t a(y) dy}} d\tau}$$

y se demuestra la existencia y unicidad de $a(t)$ con técnicas de punto fijo.

En la segunda parte (J.Douglas-B.F.Jones [10]) se da un procedimiento numérico para la aproximación numérica de $a(t)$.

Hay una variada serie de problemas sobre determinación de parámetros desconocidos, que se pueden transformar en problemas similares al planteado antes, como ser: determinación de la conductividad térmica de uno de dos medios en contacto ([14]), tratamiento del problema en regiones finitas, determinación de la longitud de un conductor ([3]), determinación de la distancia de la frontera a la interface entre dos medios, etc.

El problema se puede presentar en formas más generales. J.R. Cannon y P.C. Duchateau ([5], [7], [8], [11]) consideraron el caso en que la ecuación diferencial es de la forma

$$a(x,t,u) u_t(x,t) = (b(x,t,u) u_x)_x$$

Demostraron existencia, unicidad y estabilidad de la solución en algunos casos especiales y dieron algunos ejemplos numéricos.

Cuando dos de los parámetros son desconocidos, el teorema de las funciones implícitas proporciona una técnica para la determinación de los mismos. Este método fue introducido por J.R. Cannon en una forma general y luego fue utilizado J.R. Cannon y P.C. Duchateau en [4] para la determinación simultánea de la conductividad y el producto de la densidad y la capacidad calorífica de un conductor de calor. Dando una sobrecondición en la frontera y utilizando el teorema de la función implícita se consigue expresar uno de los parámetros en función del otro. Haciendo variar alguno de los parámetros conocidos se obtienen diferentes gráficos que relacionan los coeficientes desconocidos. El par de constantes físicas correctas debe yacer en todos los gráficos y la posibilidad de encontrar estas constantes depende de la existencia de un único punto de intersección.

En la bibliografía se pueden encontrar otros enfoques del problema, que corresponden a diversas aplicaciones, y al mismo tiempo distintos métodos para obtener la solución, ya sea en forma exacta o por aproximación numérica. Para mayor información, ver las referencias de [19]. Este trabajo contiene además una clasificación de dichas referencias.

El objeto principal de estas notas es introducir al lector en los problemas de determinación de coeficientes desconocidos en los procesos de difusión con cambio de fase. En el párrafo siguiente se

dan con algún detalle los resultados más conocidos en esta línea de investigación, la cual, por otra parte, es bastante reciente.

II. DETERMINACION DE COEFICIENTES DESCONOCIDOS EN EL PROBLEMA DE STEFAN.

1. COEFICIENTES CONSTANTES

1.1. DETERMINACION DE UNO O DOS COEFICIENTES EN EL PROBLEMA DE LAME - CLAPEYRON ([18], [19])

a) Se trata de encontrar las funciones $s(t) > 0$ con $s(0) = 0$, y $\theta(x,t)$ ($t > 0$, $0 < x < s(t)$) y uno de los coeficientes constantes del material ($k > 0$: conductividad térmica, $c > 0$: calor específico, $\rho > 0$: densidad de masa, $\ell > 0$: calor latente de fusión) de manera que se verifique:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \quad (a^2 = \frac{k}{\rho c}) \\ \theta(s(t), t) = 0, \quad t > 0 \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t), t) = \rho \ell s'(t), \quad t > 0 \\ s(0) = 0 \\ \theta(0, t) = \theta_0 > 0, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$(6) \quad k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad \text{con } h_0 > 0$$

Se supone que la temperatura de fusión es nula. La ecuación (6) representa una sobre-condición en la frontera fija; la forma de esta sobre-condición está sugerida por [17].

La forma explícita de $\theta(x,t)$ y $s(t)$ se puede obtener de (5) (solución de Neumann [9], [15])

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \theta(x,t) = \theta_0 - \frac{\theta_0}{f(\sigma/a)} f(x/2a\sqrt{t}) \\ \text{ii) } s(t) = 2\sigma\sqrt{t}, \quad \sigma > 0, \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \, du. \end{array} \right.$$

donde σ debe verificar una ecuación algebraica. Esta última ecuación

junto con la (6) constituyen un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son σ y el coeficiente a a determinar. Dicho sistema es equivalente a:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \exp(\sigma^2/a^2) = \frac{h_0}{\rho a} \\ \frac{a}{f(\sigma/a)} = \frac{h_0 \sqrt{\pi}}{\rho c \theta_0} \\ \sigma > 0, k > 0, c > 0, \rho > 0, \ell > 0 \end{array} \right.$$

El problema se reduce entonces a la obtención de condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de la solución de (8). Se obtiene que en todos los casos, existencia implica unicidad.

Además:

i) Cuando ℓ es desconocido, existe la solución explícita de (8) si y sólo si

$$(9) \quad \frac{k \theta_0}{a h_0 \sqrt{\pi}} < 1$$

En este caso σ y ℓ están dados por

$$(10) \quad \sigma = a \xi, \quad \ell = \frac{h_0 \exp(-\xi^2)}{\rho a \xi}$$

donde ξ es la solución de la ecuación

$$f(\xi) = \frac{k \theta_0}{a h_0 \sqrt{\pi}}, \quad \xi > 0.$$

ii) Cuando c es desconocido, la condición necesaria y suficiente para la existencia y unicidad de la solución de (8) es que se verifique

$$(11) \quad \frac{k \rho \ell \theta_0}{2 h_0^2} < 1$$

iii) Cuando uno de los coeficientes k o ρ es desconocido, siempre existe la solución y es única.

En todos los casos se obtienen fórmulas explícitas similares a (10)

OBSERVACION.

Las constantes físicas correctas que representan los coeficientes

de un material dado, sometido a un proceso de difusión con cambio de fase, modelizado por (5) - (6), deben satisfacer necesariamente al sistema (8), y por lo tanto deben verificar las restricciones obtenidas ((9), (11)). En lo que sigue de este párrafo y en el siguiente se obtendrán nuevas restricciones, para las cuales vale el mismo razonamiento.

Estas desigualdades proporcionan también una técnica para acotar la constante h_0 , y por ende, el flujo de calor en $x = 0$.

- b) Supongamos ahora que dos de los coeficientes térmicos del material son desconocidos. En [19] se considera un problema inverso de Stefan a una fase con una sobre-condición en $x = 0$. Es decir suponiendo conocido el coeficiente σ que caracteriza la frontera libre, se pretende encontrar la función $\theta(x,t)$ y dos de los cuatro coeficientes térmicos de manera que se satisfaga (5) - (6). La temperatura θ está dada por (7i), donde σ es conocido y los dos coeficientes desconocidos deben verificar (8). Se obtiene:
- i) Cuando uno de los dos pares de coeficientes (k,l) o (k,ρ) es desconocido, la ecuación (8) tiene solución y es única.
 - ii) En los cuatro casos restantes $((k,c), (l,c), (l,\rho), (c,\rho))$ existe la solución y es única si y sólo si los parámetros y coeficientes conocidos verifican una desigualdad.

1.2. DETERMINACION DE UNO O DOS COEFICIENTES EN EL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES. ([16])

Un análisis similar al que se realizó en 1.1. es válido para el problema de Stefan a 2 fases unidimensional, teniendo en cuenta los coeficientes térmicos de ambas fases del material. Se supone que la densidad de masa ρ es la misma para las dos fases. Los demás coeficientes: k_1 , k_2 , c_1 , c_2 y l (conductividades térmicas de las partes sólida y líquida, calor específico de las mismas y calor latente de fusión respectivamente) son constantes positivas, uno o dos de las cuales se desconoce.

En el primer caso (uno de los seis coeficientes desconocidos) se plantea el problema ([16]) de encontrar la función $s(t)$ para $t > 0$ con $s(0) = 0$, la temperatura

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t) > 0 & \text{si } 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \theta_1(x,t) < 0 & \text{si } s(t) < x \quad , \quad t > 0 \end{cases}$$

y uno de los coeficientes térmicos del material, de manera que se satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - a_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \quad (a_2^2 = \frac{k_2}{\rho c_2}) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = 0, \quad s(t) < x, \quad t > 0 \quad (a_1^2 = \frac{k_1}{\rho c_1}) \\ \theta_1(s(t), t) = \theta_2(s(t), t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho l \frac{ds}{dt}(t), \quad t > 0 \\ \theta_1(x, 0) = -c < 0 \quad , \quad x > 0 \\ \theta_2(0, t) = b > 0 \quad , \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$(13) \quad k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(0, t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad \text{con } h_0 > 0$$

Análogamente a lo hecho en 1.1., la solución de este problema está dada por:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(x,t) = b - \frac{b}{f(\sigma/a_2)} f(x/2a_2\sqrt{t}) \\ \theta_1(x,t) = c \frac{f(\sigma/a_1)}{1-f(\sigma/a_1)} - \frac{c}{1-f(\sigma/a_1)} f(x/2a_1\sqrt{t}) \\ s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad , \quad \sigma > 0 \end{array} \right.$$

donde σ y el coeficiente incógnita deben verificar el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_0}{\rho l} \exp(-\sigma^2/a_2^2) - \frac{ck_1}{a_1 \rho l \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\sigma^2/a_1^2)}{1-f(\sigma/a_1)} = \sigma \\ f(\sigma/a_2) = \frac{k_2 b}{h_0 a_2 \sqrt{\pi}} \\ \sigma > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_1 > 0, \quad \rho > 0, \quad l > 0 \end{array} \right.$$

Nuevamente se prueba que existencia implica unicidad y que cuando uno de los coeficientes ℓ , c_1 , c_2 , k_1 o k_2 es desconocido, la solución explícita de (15) existe y es única si y solo si $h_0 > 0$ y los coeficientes conocidos satisfacen una cierta desigualdad. En cambio, siempre existe la solución explícita y es única cuando ρ es desconocido. Por ejemplo, si c_2 es desconocido, la condición necesaria y suficiente para que el problema correspondiente tenga única solución es que se verifique:

$$\frac{k_2 b}{h_0 a_2 \sqrt{\pi}} f(x_0)$$

donde x_0 es la única raíz positiva de la función

$$J(x) = \frac{h_0}{\rho \ell} \exp(-x^2) - a_2 x, \quad x > 0$$

En tal caso la solución está dada por (14), siendo σ y c_1 dados por:

$$\sigma = a_1 \xi_1, \quad c_1 = \frac{k_2}{\rho a_1^2} \left(\frac{g^{-1}(\xi_1)}{\xi_1} \right)^2$$

donde $g(x) = \frac{k_2 b}{h_0 a_1 \sqrt{\pi}} \frac{x}{f(x)}$ ($x \geq 0$) y ξ_1 es la única solución de la ecuación:

$$\frac{h_0}{a_1 \rho \ell} \exp[-(g^{-1}(x))^2] = x + \frac{ck_1}{\rho \ell a_1^2 \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2)}{1-f(x)}, \quad x > \frac{k_2 b}{2h_0 a_1}$$

b) Si dos de los seis coeficientes térmicos del material de cambio de fase son desconocidos, se plantea un problema inverso de Stefan a dos fases ([16]), con una sobre-condición. Es decir, se supone conocido $\sigma > 0$ y se buscan la temperatura θ y dos de los coeficientes térmicos del material que verifiquen (12) - (13).

Los resultados son los siguientes:

i) Cuando (ρ, k_2) son desconocidos, el correspondiente problema tiene una única solución, cualesquiera sean los datos $h_0 > 0$, $\theta_0 > 0$ y los coeficientes térmicos conocidos.

ii) Cuando (ℓ, k_1) , (ℓ, c_2) o (k_1, c_1) son desconocidos, la con-

ción necesaria y suficiente para la existencia de al menos una solución es que se verifiquen ciertas desigualdades.

Si existe una solución, entonces existen infinitas y todas se pueden explicitar en función de un parámetro variable.

iii) En los 11 casos restantes, existencia implica unicidad y la condición necesaria y suficiente para la existencia es la verificación de una o más desigualdades.

NOTA: La observación realizada al final de 1.1.a) es válida también para estos casos.

2. COEFICIENTES VARIABLES

2.1. UN PROBLEMA INVERSO DE STEFAN A UNA FASE CON UN COEFICIENTE INCOGNITA DEPENDIENDO DEL TIEMPO. ([12]).

Sean $b > 0$, $T > 0$, $\gamma > 0$, $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $s: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $s(0) = b$, $h: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Se desea encontrar un par de funciones $(a(t), u(x, t))$, $a: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}$, tales que se verifique:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(t) u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t \leq T \\ u(0, t) = f(t) \\ u(s(t), t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 0 < t \leq T \\ \\ \\ 0 \leq x \leq b \end{array}$$

$$(17) \quad -\gamma a(t) u_x(s(t), t) = h(t) \quad 0 < t \leq T, \quad s(0) = b$$

y además

$$u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega), \quad a \in A = \{\alpha \in C[0, T] / \alpha(t) > 0 \text{ en } [0, T] \text{ y}$$

$$h(0) + \gamma \alpha(0) \phi(b) = 0$$

Obsérvese que en este caso no aparece ninguna sobre-condición. La (17) representa una condición de Stefan generalizada, en el sentido que la condición de Stefan corresponde a $h = \frac{ds}{dt}$, que es un dato.

Se suponen válidas las siguientes hipótesis:

$$(A1) \quad s \in C^1[0, T], \quad \frac{ds}{dt} \geq 0 \text{ en } [0, T].$$

$$(A2) \quad f \in C^1[0,T] \quad , \quad f \geq 0, \quad \frac{df}{dt} \geq 0 \text{ en } [0,T].$$

$$\phi \in C^2[0,b] \quad , \quad \phi \geq 0, \quad \phi''(x) \geq 0 \text{ en } [0,b]$$

$$f(0) = \phi(0) \quad , \quad \phi(b) = 0 \quad , \quad \phi'(b) \neq 0$$

$$(A3) \quad h \in C[0,T] \quad , \quad h > 0 \text{ en } [0,T]$$

$$(A4) \quad \gamma \phi'(b)^2 \frac{ds}{dt} = h(0) \phi''(b).$$

Se demuestra que para cada $a \in A$, el problema (16) tiene una solución clásica $u = u^a$ con $u_x^a(s(\cdot), \cdot) \in C[0,T]$, $u_x^a(s(t), t) < 0$ en $[0,T]$ y $u_{xx}^a(x, t) \geq 0$ en Ω .

Para ello se realiza el mismo cambio de variables (3) propuesto por B.F.Jones en su primer artículo y se pone

$$(18) \quad U(x, \tau) = u^a(x, c(\tau)), \quad S(\tau) = s(c(\tau)), \quad F(\tau) = f(c(\tau))$$

donde $c(\tau)$ es la función inversa de la función $\theta(t)$ definida en (3).

Con esto (16) se transforma en un problema parabólico más sencillo de resolver.

Así se obtiene una familia de pares de funciones

$\mathcal{F} = \{(a, u^a) \quad , \quad a \in A \}$, que verifican (16). La solución del problema original será el par $(a, u^a) \in \mathcal{F}$ que además verifique (17). es decir que se debe encontrar $a \in A$ de manera que se satisfaga la ecuación

$$(19) \quad a = Ka$$

donde, para cada $a \in A$ se define:

$$(Ka)(t) = - \frac{1}{\gamma} h(t) \frac{1}{u_x^a(s(t), t)} \quad , \quad t \in [0, T]$$

El problema consiste entonces en encontrar un punto fijo para el operador K .

En [12] se da una condición suficiente para la existencia de un punto fijo de K , que a su vez provee de un método iterativo para aproximar la solución. Para ello se utiliza el teorema del punto fijo de Shauder. No se demuestra unicidad. Esta condición suficiente tiene la dificultad que en muchos casos podría no ser válida y en otros, aún siendo válida, su verificación podría ser muy complicada.

Aparentemente, entonces, el método sólo sería aplicable a un nú-

mero bastante limitado de casos.

Se demuestra fácilmente que $K : A \rightarrow A$ y es no decreciente en el siguiente sentido: si $a_1(t) \leq a_2(t) \forall t \in [0, T]$, entonces $(Ka_2)(t) \leq (Ka_1)(t) \forall t \in [0, T]$.

Entonces, dado $a_0 \in A$, se puede definir una sucesión $\{a_n\} \subset A$ con el siguiente proceso iterativo

$$a_{n+1} = Ka_n.$$

TEOREMA.

Si $a_0 \leq a_2 \leq a_1$, entonces K tiene un punto fijo a en $\langle a_0, a_1 \rangle = \{\alpha \in C[0, T] / a_0 \leq \alpha \leq a_1\} \subset A$. Además,

$$a_{2n} \leq a \leq a_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Este teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Schauder del punto fijo y del siguiente resultado:

LEMA.

Sean $\alpha_0, \alpha_1 \in A$ y supongamos que K lleva el intervalo $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ en sí mismo. Entonces $K(\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle)$ es relativamente compacto y

$$K/\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \text{ es continua.}$$

La continuidad se entiende en el sentido de la convergencia uniforme.

Para probarlo, se usa la representación integral de la solución de (16) y con apropiadas estimaciones de los núcleos se consigue estimar $(Ka)(t') - (Ka)(t)$ y demostrar que $K\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ es uniformemente continuo. Como además $K\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ es acotado ($K\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \subset \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$) sigue del teorema de Arzela-Ascoli que $K\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ es relativamente compacto. Técnicas similares se utilizan para demostrar la continuidad de K en $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$.

Finalmente, se dan algunos ejemplos numéricos y se compara la solución exacta con las aproximaciones logradas por el método iterativo descripto.

2.2. RESOLUCION DE UN PROBLEMA DE STEFAN CON UN COEFICIENTE INCOGNITA VARIABLE.

Sea el siguiente problema, planteado por B.M.Budak y D.A.Madatov

en [1]:

Encontrar una terna de funciones $\{a(\theta), s(\theta), u(y, \theta)\}$ de manera que se satisfaga:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{\theta} - a(\theta)u_{yy} = 0, \quad 0 < y < s(\theta), \quad 0 < \theta < T \\ u(0, \theta) = f(\theta), \quad u(s(\theta), \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq T \\ u(y, 0) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq \ell, \quad s(0) = \ell > 0, \\ \psi(0) = f(0), \quad \psi(\ell) = 0 \\ -a(\theta)u_y(0, \theta) = g(\theta), \quad 0 < \theta \leq T \\ -a(\theta)u_y(s(\theta), \theta) = \frac{ds(\theta)}{d\theta}, \quad 0 < \theta \leq T \end{array} \right\}$$

y además

$a(\theta) > 0$ y continua para $0 \leq \theta \leq T$

$s(\theta) > 0$, continua y con derivada continua para $0 \leq \theta \leq T$.

$u(y, \theta)$ continua en $\bar{D} = \{0 \leq y \leq s(\theta), 0 \leq \theta \leq T\}$ con

u_y, u_{θ}, u_{yy} continuas en $D = \{0 < y < s(\theta), 0 < \theta \leq T\}$.

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u_y(y, \theta) = u_y(0^+, \theta), \quad \lim_{y \rightarrow s(\theta)^-} u_y(y, \theta) = u_y(s(\theta)^-, \theta)$$

Se supone que $f(\theta)$, $g(\theta)$ y $\psi(y)$ son funciones continuas y acotadas en sus dominios de definición. La última ecuación de (20) es la condición de Stefan y la penúltima, representa una sobrecondición en la frontera fija. Mediante el cambio de variables $y = s(\theta)x, \theta = t$, el problema (20) se transforma en:

Encontrar $\{c(t), s(t), u(x, t)\}$ tales que:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} s(t)u_t + c(t)u_{xx} - x \frac{ds}{dt} u_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \\ u(0, t) = f(t), \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \phi(x) = \psi\left(\frac{y}{\ell}\right), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \phi(0) = f(0), \quad \phi(1) = 0 \\ -c(t)u_x(0, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T \\ -c(t)u_x(1, t) = \frac{ds}{dt}, \quad s(0) = \ell = \text{cte} > 0 \end{array} \right\}$$

Sean $c^{(n)}(t)$, $s^{(n)}(t)$, $u^{(n)}(x,t)$ definidas por la siguiente técnica de recurrencia:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} s^{(n)}(t) u_t^{(n)} - c^{(n)}(t) u_{xx}^{(n)} - \\ - x \frac{ds^{(n)}}{dt}(t) u_x^{(n)} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \\ u^{(n)}(0,t) = f(t), \quad u^{(n)}(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ u^{(n)}(x,0) = \phi(x), \quad \phi(0) = f(0), \quad \phi(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

$$(23) \quad -c^{(n+1)}(t) u_x^{(n)}(0,t) = g(t), \quad 0 < t \leq T$$

$$(24) \quad -c^{(n+1)}(t) u_x^{(n)}(1,t) = \frac{ds^{(n+1)}}{dt}(t), \quad s(0) = 1$$

Es decir, si se suponen conocidos $c^{(n)}(t)$ y $s^{(n)}(t)$, de (22) se obtiene $u^{(n)}(x,t)$. Luego se utiliza la función $u^{(n)}(x,t)$ en (23) y (24) para calcular $c^{(n+1)}$ y $s^{(n+1)}$, respectivamente. Con los valores de $c^{(n+1)}$ y $s^{(n+1)}$ se obtiene $u^{(n+1)}$ y así sucesivamente.

En el trabajo mencionado se demuestra que este procedimiento es válido si se ponen algunas restricciones a los datos y la existencia y unicidad de la solución de (21) queda garantizada por el siguiente

TEOREMA.

Si se verifica:

$$a) \quad 0 < \alpha < f(t) < \beta$$

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi_x(x) \leq 0, \quad \phi_x(0) < 0, \quad \phi_{xx}(x) > 0,$$

$$0 < \gamma < g(t) < \delta$$

$$b) \quad s(0)f_t(0) - c(0)\phi_{xx}(0) = 0, \quad -c(0)\phi_{xx}(1) - \gamma(0)\phi_x(1) = 0$$

$$c) \quad f(t), f_t(t), f_{tt}(t), \phi(x), \phi_x(x), \phi_{xx}(x), g(t), g_t(t)$$

son continuas y acotadas en sus dominios de definición. Entonces el problema (21) tiene una única solución $\{c(t), s(t), u(x,t)\}$ que se obtiene como límite de las soluciones de (22) - (24). Además se tie

$ne, c(t) \in C^1[0, T]$, $s(t) \in C^2[0, T]$, $u(x, t) \in C(\bar{D})$,
 $u_x, u_{xx}, u_t \in C(D)$.

REFERENCIAS

1. B.M.BUDAK and D.A.D.MADATOV, "The solution of the Stefan problem with unknown coefficients." Reports of the Computing Center of Moscow University, pp.180-204 (1971)(in Russian); *Math. Rev.* 5, 6843(1979).
2. J.R.CANNON, "Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation." *Duke Math J.* 30, 313-323 (1963).
3. J.R.CANNON, "Determination of certain parameters in heat conduction problems". *J.Math.Anal.Appl.* 8, 188-201(1964).
4. J.R.CANNON and P.C.DUCHATEAU, "Determination of unknown physical properties in heat conduction problems", *Int.J.Engng Sci.* 11, 783-794(1973).
5. J.R.CANNON and P.C.DUCHATEAU, "Determining unknown coefficients in a nonlinear heat conduction problem, *Siam J.Appl. Math.* 24, 298-314(1973).
6. J.R.CANNON and P.C.DUCHATEAU, "Determination of unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial-boundary data", *J.Heat Transfer* 100, 503-507 (1978).
7. J.R.CANNON and P.C.DUCHATEAU, "An inverse problem for an unknown source in a heat equation", *J.Math.Anal.Appl.* 75, 465 - 485 (1980).
8. J.R.CANNON and P.C.DUCHATEAU, "An inverse problem for an nonlinear diffusion equation", *Siam J.Appl.Math.* 39, 272- 289(1980)
9. H.S.CARSLAW and J.C.JAEGER, "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press, London (1959).
10. J.DOUGLAS Jr. and B.F.JONES Jr., "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation II Numerical approximation". *J.Math.Mech* 11, 919-926 (1962).
11. P.C.DUCHATEAU, "Monotonicity and uniqueness results in identifying an unknown coefficient in a nonlinear diffusion equation", *SIAM J.APPL.MATH.* 41, 310-323(1981).
12. K.H.HOFFMANN and H.J.KORNSTAEDT, "Ein numerisches verfahren zur lösung eines identifizierungs problems bei der wärmeleitungsgleichung". ISNM N°58, pp.108-126, Birkhäuser, Basel (1982)
13. B.F.JONES Jr., "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation I. Existence and Uniqueness", *J.Math.Mech*, 11,

907-918 (1962).

14. B.F.JONES, Jr., "Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.* 6, 33-44(1963).
15. G.LAMÉ and B.P.CLAPEYRON, "Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", *Ann. Chim. Phys.* 47, 250-256 (1831).
16. M.B.STAMPELLA and D.A.TARZIA, "Determinación de coeficientes desconocidos en el problema de Stefan a dos fases", *Tras. Jornadas Latinoamericanas de Matemática Aplicada, Santiago de Chile (Chile)*, 14-16. December 1981, *Revista de Matemática Aplicada Sigma*, Vol 8, (1982), 83-98. "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", To appear.
17. D.A.TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for two phase Stefan problem", *Quart. Appl. Math.* 39, 491-497(1981).
18. D.A.TARZIA, "Determinación de los coeficientes desconocidos en el problema de Lamé-Clapeyron (o problema de Stefan de una fase)", *Adv. Appl. Math.* 3, 74-82(1982).
19. D.A.TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) Problem with an overspecified condition on the fixed face", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26, 1151-1157(1983).
20. D.A.TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", *Math. No* tae 29, 147-252(1981).

CONTENIDO DEL CUADERNOS N° 11

	PAG.
PREFACIO	1
1. TARZIA, D.A.: "Introducción al seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones"	5
2. TARZIA, D.A.: "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil" (Cursillo C1)	33
3. BOUILLET, J.E.: "Algunos resultados sobre ecuaciones de <u>ti</u> parabólico" (Cursillo C2)	63
4. BOUILLET, J.E.: "Soluciones autosemejantes con cambio de <u>fa</u> se" (Cursillo 6)	75
5. VILLA, L.T.: "El problema inverso de Stefan" (Cursillo C4)	105
6. VILLA, L.T.: "Problemas optimales en la conducción del <u>ca</u> lor con cambio de fase" (Cursillo C7)	133
7. NOCHETTO, R.H.: "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional" (Conferencia CG2)	143
8. GARGUICHEVICH, G.G. - SANZIEL, M.C.: "Una introducción gene ral a la resolución aproximada del problema de Stefan uní dimensional" (Conferencia CG1)	167

INDICE

	PAG.
PREFACIO	1
1. TARZIA, D.A.: "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional" (Cursillo C3)	5
2. TARZIA, D.A.: "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase" (Cursillo C5)	37
3. MARANGUNIC, P.R.: "Algunos conceptos básicos del Análisis Funcional" (Clase de Apoyo para no-matemáticos)	87
4. BERTORELLO, H.R.: "Sobre la solidificación de aleaciones binarias" (Conferencia CA2)	119
5. CRIVELLI, L.-IDELSOHN, S.-BAIGORRIA, C.: "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas atómicas accidentales" (Conferencia CA 3)	143
6. ALANIS, E.E.: "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar" (Conferencia CA 4)	171
7. STAMPELLA, M.B.: "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase" (Conferencia CA5) ...	179
Contenido del CUADERNOS N° 11	194

NOTA: La conferencia CA1 no ha sido redactada.

Serie *CUADERNOS* del Instituto de Matemática "Beppo Levi".

NUMEROS APARECIDOS

1. G.STAMPACCHIA
Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales *(1971).
2. C.PROCESI
Teoría de Galois elemental *(1971).
3. U.MOSCO
Transformada de Fourier y distribuciones, *(1972).
4. P.BERNHARD
Introducción a la teoría de Control Optimo *(1972).
5. P.FAURRE
Teoría de Control. Filtrado estadístico e introducción al Control Estocástico *(1973).
6. *"Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática"*, Rosario, 2-7 de julio de 1973, *(1974).
7. A.BENSOUSSAN
Teoría moderna de Control Optimo *(1974).
8. C.BAIOCCHI
Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, casi-variacional y numérico *(1975).
9. R.GLOWINSKI
Introducción a la aproximación de Inecuaciones variacionales elípticas *(1978).
10. H.SAMARA
Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Formulación variacional del método TAU *(1979).
11. *"Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones"*, Encuentro Nacional, Rosario 4-8 de julio de 1983, Primera Parte *(1984).
12. *"Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones"*, Encuentro Nacional, Rosario 4-8 de julio de 1983, Segunda Parte *(1984).

* Año de publicación

Se terminó de imprimir en los talleres propios
del CERIDER en el mes de agosto de 1986.

