

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

# CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

## Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 4 al 8 de JULIO - 1983

11

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA  
— 1984 —

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

# CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPLO LEVI"

## **Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones**

ENCUENTRO NACIONAL      ROSARIO - 4 al 8 de JULIO - 1983

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA  
— 1984 —

## PREFACIO

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años (ver Anexo I), el Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario PROMAR (CONICET-UNR), que se desarrolla en el Instituto de Matemática "Beppo Levi", emprendió, a través del proyecto "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática", la organización del interdisciplinario Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones (\*), realizado en la ciudad de Rosario (Argentina) durante el período del 4 al 8 de julio de 1983.

El Comité Organizador estuvo compuesto por H.R. BERTORELLO (IMAF, Córdoba), J.E. BOUILLET (IAM-UBA, Buenos Aires), E.A. GARCIA (CNEA, Buenos Aires), D.A. TARZIA (PROMAR, Rosario) (responsable) y L.T. VILIA (UNSa, Salta).

Se contó con valiosos aportes de parte de A. CASSANO, H. PORTA y R. SCARPARO, directores del INTEC, IAM y PROMAR respectivamente.

La Secretaría estuvo a cargo de A.B. BANCORA, P.R. MARANGUNIC (responsable), M.C. SANZIEL y C.V. TURNER, además del apoyo administrativo de C.B. MARTINEZ, todos del PROMAR.

Este Seminario ha sido realizado gracias a un subsidio que a tal efecto otorgó el CONICET. Además, se ha contado con la ayuda que de una u otra manera dieron las Instituciones Auspiciantes siguientes:

- 1) CAMAT - Comité Argentino de Transferencia de Calor y Materia.
- 2) CERIDER - Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Rosario.
- 3) CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.
- 4) Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario.
- 5) Escuela de Graduados de la Facultad de Ciencias Básicas (UNR).
- 6) Escuela de Graduados de la Facultad de Ingeniería (UNR).

(\*) Este Seminario fue una de las actividades que el PROMAR llevó a cabo en conmemoración del 25º aniversario del CONICET.



- 7) IAM - Instituto Argentino de Matemática (Buenos Aires).
- 8) INTEC - Instituto Tecnológico para el desarrollo de la Industria Química (Santa Fe).
- 9) Municipalidad de Rosario.
- 10) UNR - Universidad Nacional de Rosario.
- 11) UNSa - Universidad Nacional de Salta.

Además, se contó con el apoyo de la SUBCYT a través de los subsidios anuales otorgados al proyecto "Problemas de frontera libre de la Física-Matemática".

En el Seminario han participado más de 50 personas provenientes de 10 ciudades argentinas.

Los *objetivos* del presente Seminario fueron:

- 1) Gestar un *encuentro anual* de las personas y grupos que trabajan en el problema de Stefan (cambio de fase) en el país, a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos.
- 2) No limitar el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia, sino también, y muy especialmente, despertar el interés y el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*.

Por lo señalado anteriormente, esta primera edición del Seminario estuvo constituida por cursillos intensivos sobre los aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones (ver Anexo II). En años sucesivos, los cursillos versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numérico (no tratados en Seminarios anteriores) y los principios teóricos irán, paulatinamente, dando lugar a las aplicaciones.

Para finalizar, se agradece a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA  
Rosario, Marzo 1984.



## ANEXO I

*¿Qué es el problema de Stefan?*

El problema de Stefan estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida (ejemplo: hielo y agua en procesos de fusión o solidificación). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. La superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, es una incógnita suplementaria del problema sobre la cual existe una condición que surge del principio de conservación de la energía.

El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha superficie de separación entre las fases, a la cual se la llama la *frontera libre* del problema, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Entre las múltiples aplicaciones del problema de Stefan se pueden mencionar: Problemas con cambio de fase, solidificación de aleaciones binarias, oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares en caso de accidentes, almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase, problema de la colada continua (solidificación de metales), solidificación del pavimento, problemas de control óptimo, procesos de ablación térmica, solidificación de la corteza terrestre, etc..

Por todo ello, en los últimos años ha concitado el interés de matemáticos, físicos, químicos e ingenieros de todo el mundo, lo que ha redundado en un importante desarrollo del tema. Es así que se presentan trabajos en Congresos de Matemática (sobre Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional, Análisis Numérico, Matemática Aplicada), Física, Transferencia de Calor y Materia, etc., y se realizan numerosas publicaciones en más de 150 revistas especializadas en dichas disciplinas. Para mayores detalles puede verse la reciente publicación del último simposio internacional sobre problemas de frontera libre: A. FASANO - M. PRIMICERIO (Ed.)

"Free Boundary Problems: Theory and Applications", Pitman, London (1983).

## ANEXO II

### CONTENIDO DEL SEMINARIO

"Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", D.A. TARZIA.

#### CURSILLOS:

- C1) "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", (3 horas), D.A. TARZIA.
- C2) "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", (3 horas), J.E. BOUILLET.
- C3) "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", (3 horas), D.A. TARZIA.
- C4) "El problema inverso de Stefan", (3 horas), Luis T. VILLA.
- C5) "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", (3 horas), D.A. TARZIA.
- C6) "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", (3 hs), J.E. BOUILLET.
- C7) "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase", (3 horas), L.T. VILLA.

Conferencias generales sobre diferentes métodos aproximados y numéricos utilizados en el problema de Stefan:

- CG1) "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", (1 hora), G.G. GARGUICHEVICH-M.C. SANZIEL.
- CG2) "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", (1 hora), R.H. NOCHETTO.

Conferencias sobre diferentes aplicaciones en las cuales aparece el problema de Stefan:

- CA1) "Sobre la oxidación del zirconio en reactores nucleares en caso de accidentes", (1 hora), E.A. GARCIA.
- CA2) "Sobre la solidificación de aleaciones binarias", (1 hora), H. R. BERTORELLO.
- CA3) "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales", (1 hora), L. CRIVELLI-S. IDELSOHN-C. BAIGORRIA.
- CA4) "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar", (1 hora), E.E. ALANIS.
- CA5) "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase", (1 hora), M.B. STAMPELLA.

Clase de apoyo para no matemáticos:

- CA) "Algunos conceptos básicos del análisis funcional", (1.30 horas), P.R. MARANGUNIC.

# Introducción al seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

Domingo Alberto TARZIA

En [21], Lamé y Clapeyron estudiaron el problema de la solidificación por enfriamiento de un globo líquido (Tierra) de la siguiente manera:

Si se supone que la Tierra es una esfera que verifica las siguientes hipótesis:

- i) primitivamente era líquida y compuesta por una sola substancia, la cual se encontraba a la temperatura de fusión  $\theta_f$ .
- ii) se enfría en el espacio y se solidifica a partir de su superficie exterior, la cual toma rápidamente una temperatura media constante  $\theta_0$ , con  $\theta_0 < \theta_f$ ,
- iii) la corteza sólida ya formada en nuestros días no tiene un espesor considerable comparado al radio terrestre,

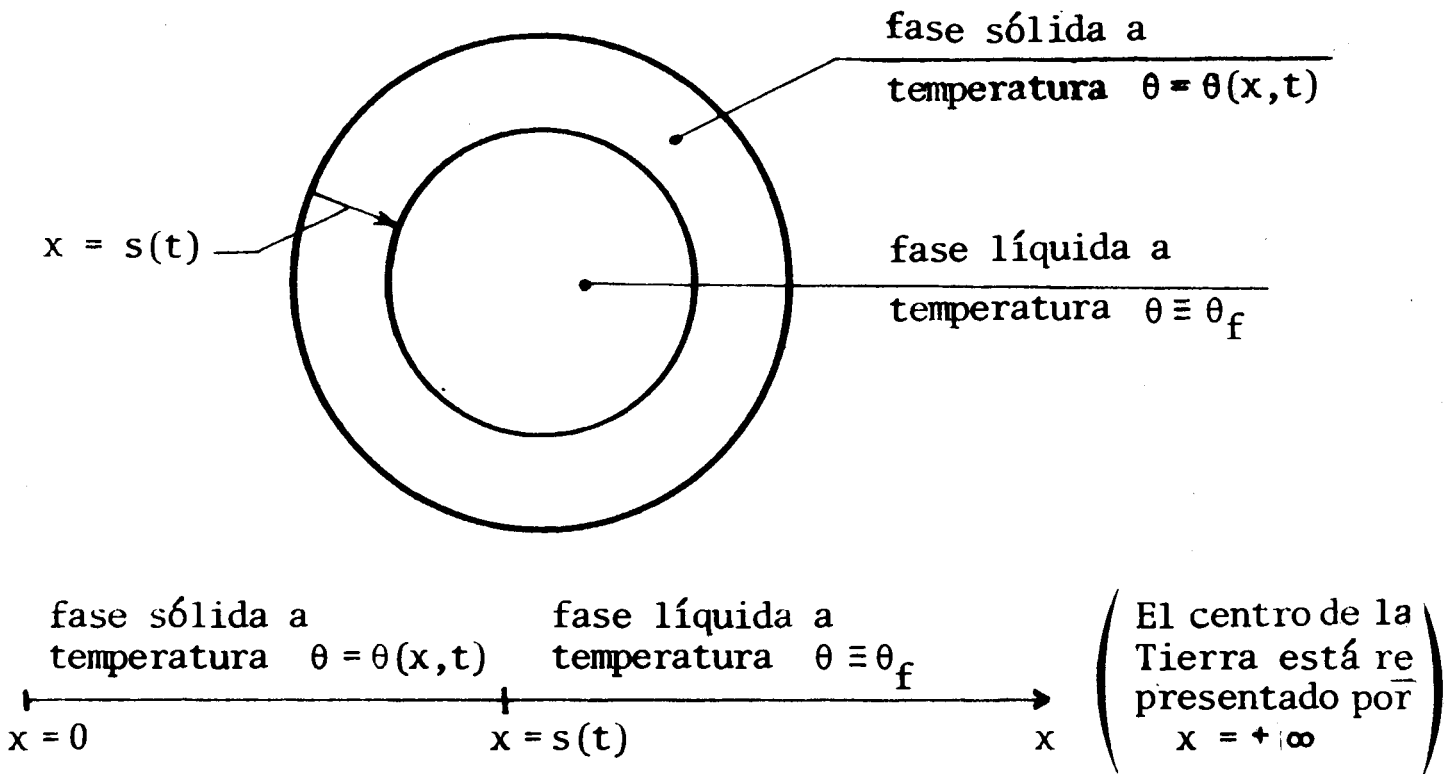
entonces se obtiene que:

- i) el espesor de la parte sólida que recubre nuestro globo terrestre aumenta proporcionalmente a  $\sqrt{t}$ , donde  $t$  es el tiempo desde que comenzó la solidificación,
- ii) el conocimiento de dicho tiempo (edad de la parte sólida del globo terrestre) depende únicamente de numerosos coeficientes que pueden ser fácilmente obtenidos por la experiencia. Dichos coefi



cientes dependen sólo de la fase sólida.

En realidad, bajo las hipótesis dadas anteriormente, en [21] se resuelve el problema de la solidificación de un material semi-infinito, representado por  $x > 0$ , que inicialmente se encuentra en fase líquida a su temperatura de fusión  $\theta_f$  y que en el borde  $x = 0$  se le enfría a una temperatura  $\theta_0$  inferior a la de fusión (ver Figura).



Por consideraciones físicas se intuye que para cada tiempo  $t > 0$  existirá un punto  $x = s(t)$  que separará la fase sólida, representada por el intervalo  $(0, s(t))$ , y la fase líquida, representada por el intervalo  $(s(t), +\infty)$ , que se encuentra a su temperatura de fusión.

Desde el punto de vista matemático, el problema puede plantearse de la siguiente manera:

Hallar la función  $s = s(t)$  (*frontera libre* que separa la fase sólida de la fase líquida y que se encuentra a temperatura constante) de finida para  $t > 0$  con  $s(0) = 0$ , y la temperatura

$$(1) \quad \theta = \begin{cases} \theta(x,t) & \text{si } 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \theta_f & \text{si } s(t) \leq x \quad , \quad t > 0 \end{cases}$$

de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \rho c \theta_t = k \theta_{xx} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{ii)} \quad \theta(0,t) = \theta_o < \theta_f \quad , \quad t > 0 \\ \text{iii)} \quad \theta(s(t),t) = \theta_f \quad , \quad t > 0 \\ \text{iv)} \quad k \theta_x(s(t),t) = \rho l \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{v)} \quad s(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde:

- a) La (2i) representa la ecuación de conducción del calor para la fase sólida donde  $k, \rho$  y  $c$  representan la conductividad térmica, la densidad de masa y el calor específico respectivamente (ver Apéndice 1).
- b) Las condiciones (2ii) y (2iii) nos expresan que la temperatura del borde fijo  $x = 0$  y de la frontera libre  $x = s(t)$  es constantemente  $\theta_o$  y  $\theta_f$  respectivamente.
- c) La condición (2iv) expresa el hecho que el flujo de calor que atraviesa, en un tiempo infinitamente pequeño, la frontera libre  $x = s(t)$  es igual a la cantidad de calor abandonada por la porción de líquido que se solidificó durante dicho lapso de tiempo (una demostración más general se hará en el Apéndice 2). Esta condición es conocida por *condición de Stefan* y se deduce del principio de conservación de la energía.
- d) La condición (2v) nos indica que inicialmente el material semi-infinito se encontraba a la temperatura de fusión  $\theta_f$  (ver (1)).
- e) La solución exacta del problema (2) fue dada por Lamé-Clapeyron en [21] y será desarrollada en el cursillo C3.

Conviene realizar aquí algunas observaciones y comentarios:

- A) El problema planteado por Lamé-Clapeyron [21], cuya formulación matemática está dada por (2), es conocido en la literatura como *problema de Stefan a una fase*. El nombre de *problema de Stefan* surge en los alrededores de 1950 en homenaje a los numerosos trabajos que Stefan realizó sobre el tema en los años 1890 [39-41], con lo cual, por desconocimiento, no se ha tenido en cuenta a [21]. Por otra par

ta, en [4, 44] se indica que F. Neumann encontró la solución para el problema de Stefan a dos fases correspondiente a datos de temperatura inicial y de borde constantes, solución conocida en la literatura como *solución de Neumann* (es la solución exacta correspondiente al problema (5) dado en el Comentario E). Ver [4-6, 35, 39, 44] y el cursillo C3.

- B) Cabe destacar que el problema (2) se llama a una *fase* pues, en nuestro caso, la fase líquida se encuentra a temperatura constante e igual a la temperatura del cambio de fase.
- C) El problema de Stefan es *no-lineal* a pesar de la aparente linealidad de las condiciones (2i)-(2v). En efecto si se deriva (2iii) respecto de  $t$ , se obtiene:

$$\theta_x(s(t), t)\dot{s}(t) + \theta_t(s(t), t) = 0, \quad t > 0$$

con lo cual, la condición de Stefan (2iv) se transforma en

$$(3) \quad k\theta_x^2(s(t), t) = -\rho l \theta_t(s(t), t) = -\frac{\rho l k}{c} \theta_{xx}(s(t), t)$$

que nos indica que el problema (2) es no lineal [30].

Cabe destacar que en el *método del balance integral calórico* se utiliza la condición (3) en lugar de la (2iv) para la obtención de una solución aproximada del problema de Stefan, aún para condiciones de contorno más generales que las dadas en (2) [17] (ver CG1).

- D) Análogamente al problema de solidificación (2) puede plantearse el problema de fusión de un cuerpo semi-infinito que inicialmente se encuentra en estado sólido a la temperatura de fusión  $\theta_f$  y que en el borde fijo  $x = 0$  es calentado a una temperatura  $\theta_o$  con  $\theta_o > \theta_f$ . Su formulación matemática está dada por: Hallar la función  $s = s(t)$  (frontera libre) y la temperatura  $\theta(x, t)$  de la fase líquida, definida por (1), de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(2 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \rho c \theta_t = k \theta_{xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \text{ii)} \quad \theta(0, t) = \theta_o > \theta_f, \quad t > 0 \\ \text{iii)} \quad \theta(s(t), t) = \theta_f, \quad t > 0 \\ \text{iv)} \quad k \theta_x(s(t), t) = -\rho l \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ \text{v)} \quad s(0) = 0 \end{array} \right.$$



donde los coeficientes térmicos  $k, \rho, c$  son los correspondientes a la fase líquida del material de cambio de fase.

- E) Si un material semi-infinito se encuentra inicialmente en estado sólido a una temperatura  $\theta_i$ , con  $\theta_i < \theta_f$  (temperatura de cambio de fase), y en el borde fijo  $x = 0$  es calentado a una temperatura  $\theta_0$ , con  $\theta_0 > \theta_f$ , entonces se tiene un *problema de Stefan a dos fases*, cuya formulación matemática está dada por: Hallar la función  $s = s(t)$  (frontera libre), definida para  $t > 0$ , y la temperatura

$$(4) \quad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t) > 0 & \text{si } 0 < x < s(t) & , & t > 0 \\ \theta_f & \text{si } x = s(t) & , & t > 0 \\ \theta_1(x,t) < 0 & \text{si } s(t) < x & , & t > 0 \end{cases} .$$

definida para  $x > 0$  y  $t > 0$ , de manera que satisfagan las siguientes condiciones ( $i = 1$  representa la fase sólida y  $i = 2$  la fase líquida;  $\rho$  es la densidad de masa común a ambas fases):

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \rho c_2 \theta_{2t} - k_2 \theta_{2xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{ii)} \quad \rho c_1 \theta_{1t} - k_1 \theta_{1xx} = 0 \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{iii)} \quad \theta_1(x,0) = \theta_i \quad , \quad x > 0 \\ \text{iv)} \quad \theta_2(0,t) = \theta_0 \quad , \quad t > 0 \\ \text{v)} \quad \theta_1(s(t),t) = \theta_f \quad , \quad t > 0 \\ \text{vi)} \quad \theta_2(s(t),t) = \theta_f \quad , \quad t > 0 \\ \text{vii)} \quad k_1 \theta_{1x}(s(t),t) - k_2 \theta_{2x}(s(t),t) = \rho l \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{viii)} \quad s(0) = 0 \end{array} \right. .$$

donde (5vii) representa la condición de Stefan cuando existiendo dos fases (Ver Apéndice 2). La solución exacta del problema (5) es conocida como *solución de Neumann* y fue dada en [4,5,39,44] la cual será desarrollada en el cursillo C3.

- F) Un problema de Stefan a una fase (caso fusión) más general que el dado por (2 bis) puede plantearse de la siguiente manera: Hallar el triple  $\{T, s(t), \theta(x,t)\}$  soluciones del sistema siguiente (sin pérdida de generalidad se supone que la temperatura de cambio de fase es  $\theta_f = 0$ ) :

$$(6) \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \rho c \theta_t = k \theta_{xx} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{ii)} & \theta(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iii)} & k \theta_x(s(t), t) = - \rho \ell \dot{s}(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iv)} & \theta(0, t) = f(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{v)} & \theta(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b \\ \text{vi)} & s(0) = b \end{array} \right.$$

donde  $\varphi \geq 0$  ,  $f \geq 0$  ,  $b \geq 0$  (si  $b = 0$  , entonces la condición (6v) desaparece). La condición (6iv) puede ser reemplazada por una condición de flujo de calor de la forma siguiente:

$$(6 \text{ ivbis}) \quad k \theta_x(0, t) = - g(t) \quad , \quad 0 < t < T$$

donde  $g \geq 0$  . Se llamará problema (6bis) al problema (6) con la condición (6 ivbis) en lugar de la (6 iv) .

El tiempo  $T$  representa el tiempo máximo hasta el cual la solución al problema existe; cabe destacar que  $T$  puede ser finito o infinito.

Un estudio teórico sobre existencia, unicidad y propiedades de la solución correspondiente al problema (6) (o su equivalente problema en variables adimensionales (9)) será realizado en el cursillo C5.

G) una variante interesante en el problema (6) o (6 bis) consiste en dar como dato la función  $s = s(t)$  y hallar  $T$  ,  $\theta(x, t)$  y la temperatura  $f(t)$  o el flujo de calor  $-g(t)$  en el borde fijo  $x = 0$  de manera que  $\{T, s(t), \theta(x, t)\}$  sea solución de (6) o (6 bis) respectivamente. A tales problemas se los incluyen en el nombre de *problema inverso de Stefan* (ver cursillo C4). Un ejemplo de solución exacta fue dada por Stefan para el caso en que la frontera tenga velocidad constante [40,41] (ver Apéndice 5). Una aplicación a problemas de control optimal en el cambio de fase de un material [10,34] será dada en el cursillo C7.

H) La solución exacta del problema (2) o (2 bis) , para la temperatura, está dada en función de la *variable de semejanza*  $\frac{x}{2a\sqrt{t}}$  donde  $a^2 = \alpha = \frac{k}{\rho c}$  es el coeficiente de difusión. Lo mismo puede decirse

para el problema de Stefan a dos fases (5) (Un análisis de las soluciones exactas y de sus propiedades será realizada en el cursillo C3) (ver también Apéndice 6).

Los problemas de Lamé-Clapeyron (Stefan a una fase) y de Neumann (Stefan a dos fases) nos mostrarán que a través de la llamada *función de error* erf se obtendrá una solución exacta para ciertas condiciones iniciales y de contorno. El método de semejanza no podrá aplicarse en general. Para que exista una solución de semejanza es necesario que la ecuación diferencial y todos los datos (inicial y de contorno) puedan ser expresados con una sola variable independiente (llamada *variable de semejanza*). Soluciones de tipo semejanza no existen, en general, para:

- i) dominios finitos
- ii) cuando dos fases esten presentes inicialmente
- iii) cuando la temperatura inicial no es constante
- iv) cuando la temperatura o el flujo de calor en el borde fijo no es constante.

Por otra parte, puede decirse que existen muy pocas soluciones exactas diferentes de las de tipo semejanza. Un estudio general con soluciones semejantes (autosemejantes) que tengan en cuenta un cambio de fase será dada en el cursillo C6.

Debido a las consideraciones anteriormente mencionadas resulta de gran interés profundizar sobre los llamados *métodos aproximados* (cuasi-estacionario de Stefan, balance integral de Goodman, variacional de Biot, desarrollo en serie, perturbación, procesos iterativos, etc.) y los *métodos numéricos* (diferencias finitas, elementos finitos, líneas, inecuaciones variacionales, ecuaciones integrales, etc.). Para una mayor información referirse a [32,43]. Una solución aproximada, conocida como *solución cuasi-estacionaria*, fue dada por Stefan [39,40] (ver Apéndice 5). Una introducción general a la resolución aproximada y numérica del problema de Stefan unidimensional será dada en CG1 y CG2 respectivamente.

1) En general, cuando se estudian propiedades de un sistema físico, con



viene transformar las variables que lo definen en *variables adimensionales* e independizarse de este modo de las constantes físicas del sistema. Como ejemplo, lo aplicaremos al siguiente problema de Stefan unidimensional a una fase: Hallar la temperatura  $\theta = \theta(y, \tau)$  y la frontera libre  $r = r(\tau)$ , soluciones del sistema:

$$(7)(7 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{\tau} = \alpha \theta_{yy} \quad , \quad 0 < y < r(\tau) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(r(\tau), \tau) = 0 \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(r(\tau), \tau) = - \rho \ell r'(\tau) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(0, \tau) = - \psi(\tau) \quad (\theta(0, \tau) = \psi_0(\tau)) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(y, 0) = \phi(y) \quad , \quad 0 \leq y \leq b \\ r(0) = b \quad . \end{array} \right.$$

Si se realiza el siguiente cambio de variables:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y}{b} \quad , \quad t = \frac{\alpha}{b^2} \tau \quad \left( \alpha = \frac{k}{\rho c} \right) \\ z(x, t) = \frac{c}{\ell} \theta(y, \tau) \quad , \quad s(t) = \frac{r(\tau)}{b} \end{array} \right.$$

entonces los problemas (7), (7 bis) se transforman de la siguiente manera:

$$\text{EJERCICIO 1.} \quad (9)(9 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{xx} = z_t \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ z_x(s(t), t) = - \dot{s}(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z_x(0, t) = - g(t) \quad (z(0, t) = f(t)) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ s(0) = 1 \end{array} \right.$$

donde

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{\alpha}{b^2} \tau_0 \quad , \quad h(x) = \frac{c}{\ell} \phi(y) \quad , \\ g(t) = \frac{bc}{\ell k} \psi(\tau) \quad , \quad f(t) = \frac{c}{\ell} \psi_0(\tau) \quad , \end{array} \right.$$

siendo las nuevas variables independientes  $x, t$  y las nuevas variables dependientes  $z(x, t)$ ,  $s(t)$  adimensionales.

J) Una de las herramientas útiles en el estudio teórico del problema

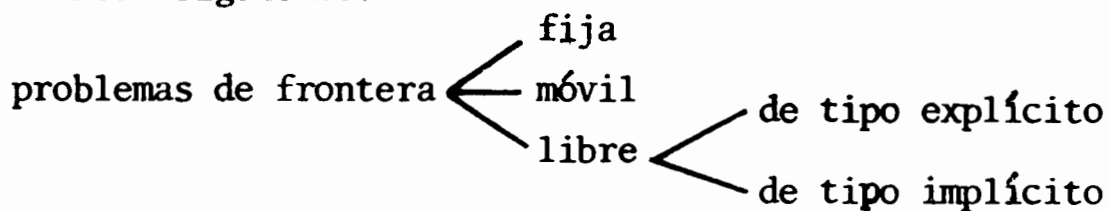
de Stefan es el *principio del máximo* y el Lema de Hopf en su versión parabólica [14, 33] análisis que será realizado en el cursillo C2. Como una aplicación de lo dicho anteriormente, se deja al lector el siguiente:

EJERCICIO 2:

Si  $\{T, s(t), \theta(x,t)\}$  es solución de (6) o (6 bis), entonces se tienen las propiedades siguientes:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \theta \geq 0 \\ \text{ii)} & \theta_x(s(t), t) \leq 0 \\ \text{iii)} & \dot{s}(t) \geq 0 \end{array} \right. .$$

K) El problema de Stefan es un problema de frontera libre para la ecuación del calor de tipo explícito. En general, los problemas que se plantean para la ecuación del calor o de la difusión se clasifican de la manera siguiente:



Los *problemas de frontera fija* para la ecuación del calor (difusión) son aquellos que se estudian en el dominio  $(x_1, x_2) \times (0, T)$ , es decir, son los clásicos problemas que se analizan en un curso básico de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, como ser:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} z_t - z_{xx} = f(x,t) & , \quad x_1 < x < x_2 \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x,0) = h(x) & , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ z(x_1, t) = f_1(t) & \text{ó} \quad z_x(x_1, t) = f_1(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x_2, t) = f_2(t) & \text{ó} \quad z_x(x_2, t) = f_2(t) \quad , \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

Los *problemas de frontera móvil* para la ecuación del calor (difusión) son aquellos que se estudian en el dominio  $(s_1(t), s_2(t)) \times (0, T)$  con  $s_1(t) < s_2(t)$  funciones dadas en  $(0, T)$ , es decir, que el dominio espacial de la(s) función(es) incógnita(s) es variable con el tiempo mediante una *ley de movimiento conocida a priori*, como ser:

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} z_t - z_{xx} = f(x,t) \quad , \quad s_1(t) < x < s_2(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x,0) = h(x) \quad , \quad s_1(0) \leq x \leq s_2(0) \\ z(s_1(t),t) = f_1(t) \quad , \quad z_x(s_1(t),t) = f_1(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(s_2(t),t) = f_2(t) \quad \text{ó} \quad z_x(s_2(t),t) = f_2(t) \quad , \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

Más aún, el dominio puede ser de la forma  $(-\infty, s(t)) \times (0, T)$  ó  $(s(t), +\infty) \times (0, T)$ . Todos estos problemas fueron inicialmente estudiados por Block [3], Gevrey [15,16], Coursat [18], Holmgren [19,20], Levi [22]; una introducción a los mismos será dada en el cursillo C1.

Los problemas de frontera libre para la ecuación del calor (difusión) son aquellos en los cuales el dominio espacial de la(s) función(es) incógnita(s) es variable con el tiempo mediante una ley de movimiento desconocida a priori. Por supuesto, el desconocimiento de la frontera, o parte de ella, induce la necesidad matemática de imponer nuevas condiciones a las funciones incógnitas, las cuales dependerán del problema físico en estudio. En general, la nueva condición a imponer a la función incógnita se deduce del principio de conservación de la energía a través de la frontera. Dicha frontera resulta ser, en consecuencia, una incógnita suplementaria del problema, la cual recibe el nombre de la *frontera libre* del problema en cuestión.

Por lo tanto, la diferencia esencial entre los problemas de frontera móvil y libre radica en el hecho de la existencia de una frontera cuya ley de movimiento es conocida en el primero y desconocida en el segundo, siendo en este último caso una incógnita más del problema.

Los problemas de frontera libre para la ecuación del calor se dividen en dos clases: de tipo explícito o implícito, según aparezca o no explícitamente la velocidad de la frontera libre en las condiciones que se imponen sobre dicha frontera. Es decir, si la frontera libre viene dada por  $s = s(t)$ , entonces el problema será de tipo explícito (implícito) si  $\dot{s}(t)$  aparece (no aparece) en las condiciones que se imponen para  $x = s(t)$ .



Un ejemplo típico de problema de frontera libre de tipo explícito es el problema de Stefan, del cual nos ocuparemos extensamente en este Seminario, sobre todo en el problema unidimensional a una fase. Una formulación bastante general ha sido estudiada en [12] consistente en : Hallar el triple  $\{T, s(t), z(x, t)\}$  de manera que satisfagan el siguiente sistema:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} z_{xx} - z_t = q(x, t) \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b \\ z(0, t) = \varphi(t) \quad \delta \quad z_x(0, t) = g[z(0, t), t] \quad , \quad 0 < t < T \\ z(s(t), t) = f(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z_x(s(t), t) = \lambda(s(t), t)\dot{s}(t) + \mu(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \end{array} \right.$$

donde los datos  $q(x, t)$ ,  $h(x)$ ,  $\varphi(t)$  ó  $g(y, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\lambda(x, t)$  y  $\mu(x, t)$  verifican ciertas hipótesis para tener una generalización de un problema de conducción de calor en materiales con cambio de fase.

En cambio, un ejemplo de problema de frontera libre de tipo implícito es el llamado *problema de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos* [7, 23], cuya formulación general en variables adimensionales (ver Apéndice 3) está dada por: Hallar el triple  $\{T, s(t), u(x, t)\}$  de manera que satisfagan el siguiente sistema:

$$(15) (15 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} - u_t = 1 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) = H(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = G(t) \quad (u(0, t) = F(t)) \quad , \quad 0 < t < T \\ u(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ u_x(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ s(0) = 1 \end{array} \right.$$

donde  $u$  representa aquí la concentración de oxígeno adimensionalizada.

L) El problema de Stefan a una fase (problema de frontera libre de tipo explícito) está relacionado con el problema de la difusión-con

sumo de oxígeno en tejidos vivos de la siguiente manera:

### EJERCICIO 3.

i) Si el triple  $(T,s,z)$  es una solución de (9), (9bis) entonces el triple  $(T,s,u)$ , con  $u$  definido por:

$$(16) \quad u(x,t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_\xi^{s(t)} [1 + z(y,t)] dy,$$

es una solución de (15), (15 bis) respectivamente, donde:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} H(x) = \int_x^1 d\xi \int_\xi^1 [1 + h(y)] dy, \\ G(t) = 1 + \int_0^1 h(x) dx + \int_0^t g(\tau) d\tau, \\ F(t) = H(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau. \end{array} \right.$$

ii) Recíprocamente, si  $(T,s,u)$  es una solución de (15), (15 bis) entonces el triple  $(T,s,z)$ , con  $z$  definido por:

$$(18) \quad z(x,t) = u_t(x,t)$$

es una solución de (9), (9 bis) respectivamente, donde:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} h(x) = H'(x) - 1, \quad g(t) = G'(t), \\ f(t) = F'(t). \end{array} \right.$$

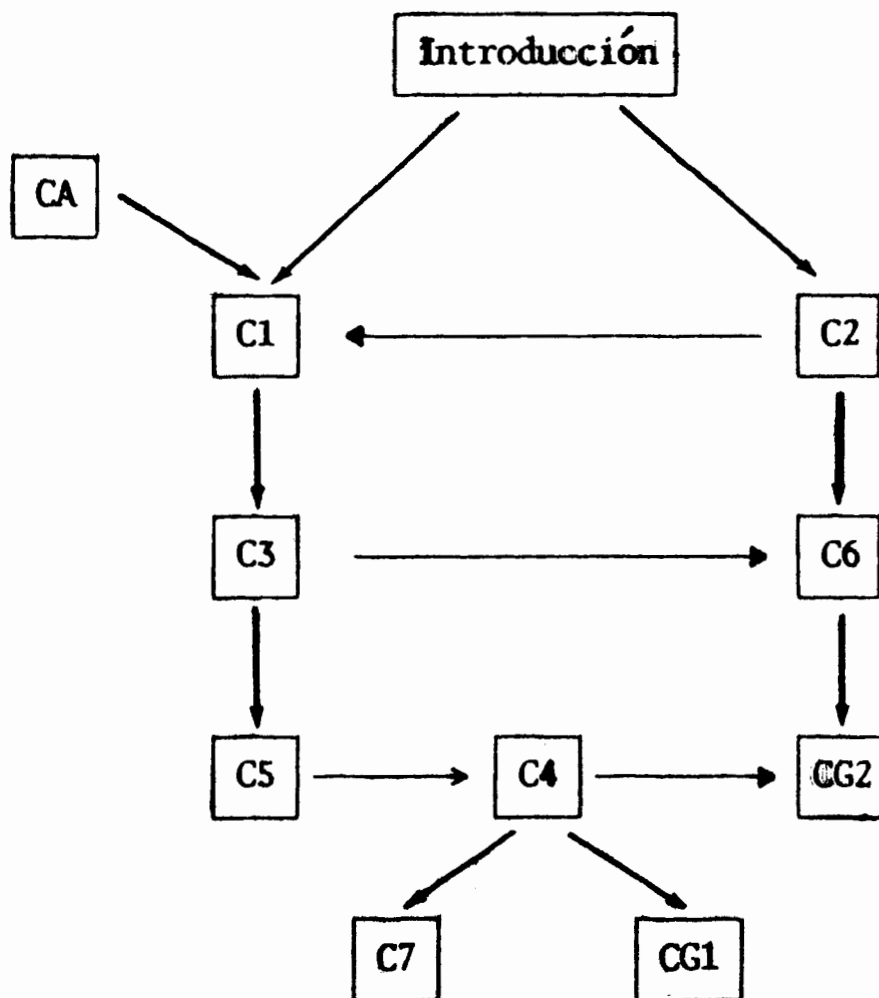
La presente *equivalencia* entre el problema de Stefan a una fase (9), (9 bis) con el de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos puede generalizarse a otros problemas de frontera libre de tipo explícito o implícito [11,37] (ver Apéndice 4).

Conviene recalcar una diferencia que caracteriza de alguna manera a las funciones  $z$  (incógnita en el problema de Stefan a una fase (9) ó (9 bis)) y  $u$  (incógnita en el problema de la difusión-consumo de oxígeno (15) ó (15 bis)) respectivamente. Las funciones  $z, u, u_x$  son continuas sobre la frontera libre  $x = s(t)$ , en cambio  $z_x$  no es continua debido a la condición de Stefan.

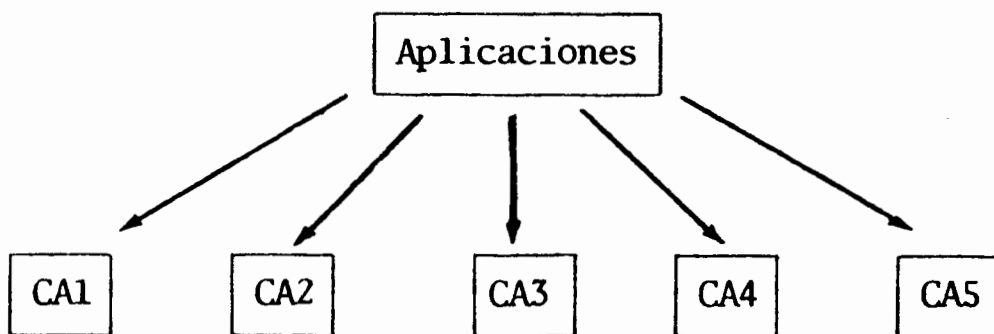
Esta diferencia tiene su gran importancia en el estudio de la regularidad y en el cálculo y análisis numérico de la solución.

Para finalizar esta Introducción diremos que existen numerosos trabajos de revisión sobre problemas de frontera libre para la ecuación del calor, y en especial sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones; entre ellas se citan los trabajos [1,2,6,8,9,13,24-29,31,32,35,36,38,42,43,45]. Numerosos métodos básicos del problema de Stefan *unidimensional* serán analizados en este *primer Seminario* (ya sea desde un punto de vista teórico como el de las aplicaciones) y otros serán postergados para próximos Seminarios; por supuesto, muchos otros quedarán sin ser vistos por diversos motivos: desconocimiento del tema, problemas aún no resueltos, etc. El lector deseoso de conocer, profundizar y avanzar en el tema encontrará en las referencias de los trabajos los elementos necesarios para su progreso; para ello siempre será aconsejable la lectura y el análisis de los trabajos originales y pioneros en cada tema como un acercamiento a aquellos que han ideado el avance científico.

Para un mayor aprovechamiento del material dado en el presente Seminario, se indica a continuación la interdependencia existente entre los diferentes cursillos y conferencias realizados:



Luego se encuentran las conferencias de ciertas aplicaciones en las cuales aparece el problema de Stefan, como ser: oxidación del zirconio en reactores nucleares en caso de accidentes (ver CA1), solidificación de aleaciones binarias (ver CA2), fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales (ver CA3), cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar (ver CA4), determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase (ver CA5). Para finalizar, se encuentra una clase de apoyo para no matemáticos sobre algunos conceptos básicos del análisis funcional (ver CA).



Otras aplicaciones se encuentran explicitadas en [43].

## APENDICE 1

### DIMENSIONES FISICAS

La ecuación del calor para un material unidimensional isótropo y homogéneo está dada por:

$$(A1-1) \quad \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

donde:

$$(A1-2) \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \text{ tiempo} \\ x : \text{ variable del material unidimensional} \\ \rho > 0 : \text{ densidad de masa} \\ c > 0 : \text{ calor específico} \\ k > 0 : \text{ conductividad térmica} \\ a^2 = \alpha = \frac{k}{\rho c} > 0 : \text{ difusividad térmica} \\ \theta = \theta(x, t) : \text{ temperatura del punto material } x \text{ al instante } t \\ q(x, t) = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) : \text{ flujo de calor en el punto material } \\ \quad x \text{ al instante } t \text{ (con respecto a la dirección de} \\ \quad \text{los } x > 0 \text{ ) por unidad de tiempo y de área trans} \\ \quad \text{versal.} \end{array} \right.$$

La condición de Stefan para un problema de solidificación o fusión unidimensional a una fase está dada por:

$$(A1-3) \quad k \frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t), t) = \pm \rho \ell \dot{s}(t)$$

donde:

$$(A1-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell : \text{calor latente de fusión por unidad de masa} \\ L = \rho \ell : \text{calor latente de fusión por unidad de volumen} \\ Ste = \frac{c\theta}{\ell} : \text{número de Stefan.} \end{array} \right.$$

Si con [A] se representa la *dimensión* de la variable física A y se tienen en cuenta las siguientes:

UNIDADES BASICAS:

$$(A1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\text{Masa}] = m \quad , \quad [\text{Longitud}] = x \quad , \quad [\text{Tiempo}] = t \\ [\text{Temperatura}] = T \quad , \quad [\text{Energía}] = \frac{m x^2}{t^2} \end{array} \right.$$

entonces, para las cantidades físicas definidas anteriormente, se obtienen las siguientes expresiones:

$$(A1-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\rho] = \frac{m}{x^3} \quad , \quad [L] = \frac{\text{energía}}{x^3} = \frac{m}{t^2 x} \quad , \quad [\ell] = \frac{x^2}{t} \\ [k] = \frac{mx}{Tt^3} \quad , \quad [c] = \frac{x^2}{Tt^2} \quad , \quad [\alpha] = \frac{x^2}{t} \\ [q] = \frac{\text{energía}}{t x^2} = \frac{m}{t^3} \quad , \quad \left[ \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = \left[ k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] = \frac{\text{energía}}{t x^3} = \frac{m}{x t^3} \\ [\rho c \theta] = \frac{\text{energía}}{x^3} = \frac{m}{x t^2} \quad , \quad \left[ \frac{x}{\sqrt{\alpha t}} \right] = 1 \quad , \quad [Ste] = 1 \end{array} \right.$$

## APENDICE 2

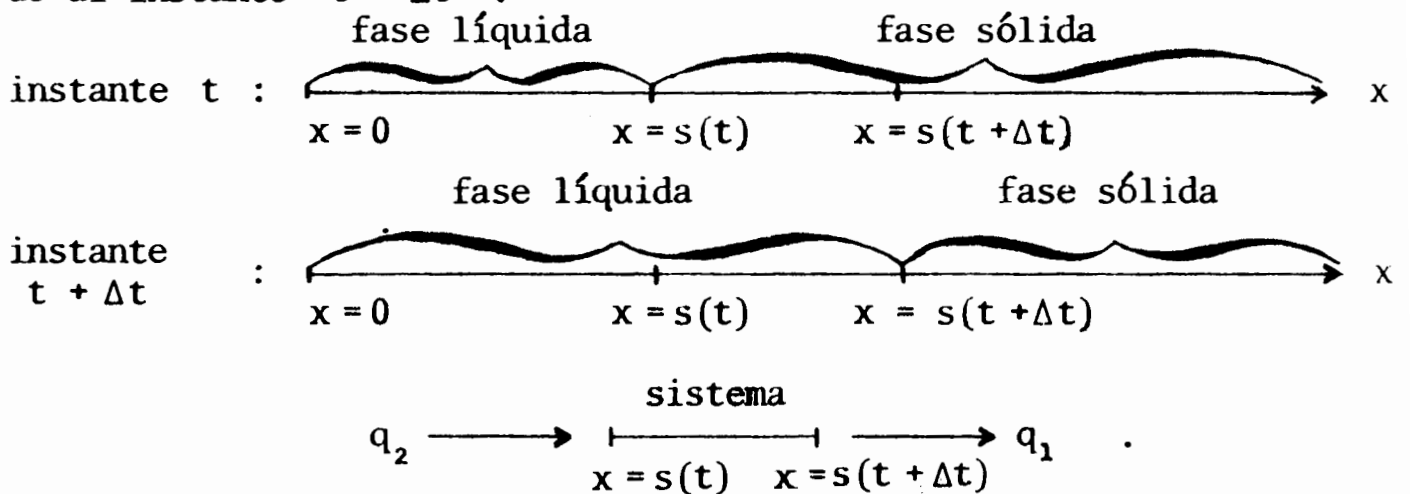
### DEDUCCION DE LA CONDICION DE STEFAN (5vii)

Deduciremos la condición de Stefan (5vii) correspondiente al problema de Stefan a dos fases, planteado en el Comentario E), consistente en hallar la función  $s(t)$  (frontera libre que separa las fases líquida y sólida) y la temperatura  $\theta(x, t)$  de manera que satisfagan el sistema (5). Por simplicidad, supondremos que el material semi-infinito  $x \geq 0$  tiene un área transversal A constante.

Por consideraciones físicas  $s(t)$  debe estar representada por una

función creciente del tiempo  $t$ .

Sea  $t > 0$  un instante de tiempo fijo y sea  $\Delta t$  un tiempo infinitamente pequeño (destinado a tender a cero); consideremos el sistema representado por el intervalo material  $(s(t), s(t + \Delta t))$ . Dicho sistema se encuentra en estado sólido al instante  $t$  y en estado líquido al instante  $t + \Delta t$ .



El sistema recibe en su parte izquierda  $x = s(t)$  una energía igual a:

$$(A2-1) \quad q_2 A dt = - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} (s(t), t) A dt$$

y en cambio, en su parte derecha  $x = s(t + \Delta t)$ , el sistema entrega una energía igual a:

$$(A2-2) \quad q_1 A dt = - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} (s(t + \Delta t), t + \Delta t) A dt$$

La energía sobrante, igual a  $(q_2 - q_1)A dt$ , se utiliza para transformar el sistema del estado sólido al estado líquido. La energía necesaria para dicha transformación está dada en función del calor latente de fusión de la siguiente manera:

$$(A2-3) \quad \rho \ell [s(t + \Delta t) - s(t)] A$$

con lo cual, por conservación de la energía, se obtiene la igualdad

$$(A2-4) \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} (s(t + \Delta t), t + \Delta t) - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} (s(t), t) = \rho \ell \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

que por pasaje al límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , se deduce la condición de Stefan (5vii).

## APENDICE 3

### EL PROBLEMA DE LA DIFUSION-CONSUMO DE OXIGENO EN TEJIDOS VIVOS

El problema consiste en lo siguiente [7]: Primeramente se deja difundir oxígeno en un medio; parte del oxígeno es absorbido por el medio siendo por lo tanto eliminado del proceso de difusión. La concentración de oxígeno en la superficie del medio es mantenida constante. Esta primera fase del problema continúa hasta alcanzar un estado estacionario en el cual el oxígeno no penetra más lejos en el medio. La provisión de oxígeno es entonces cortada y la superficie del medio es aislada de manera que no entre ni salga más oxígeno. El medio continúa absorbiendo el oxígeno disponible en su interior y por consiguiente la *frontera libre*, que establece la separación entre la zona de concentración positiva y nula de oxígeno y que marca el ancho de penetración máximo en el caso estacionario, comienza a retroceder hacia la frontera aislada. El problema más importante es el de localizar el movimiento de la frontera libre durante esta fase del proceso y determinar la distribución de oxígeno en el medio como una función del tiempo.

El proceso de difusión con absorción o consumo está representado por la ecuación:

$$(A3-1) \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} - m$$

donde:

$$(A3-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(\xi, \tau) : \text{es la concentración de oxígeno libre a difundirse} \\ \quad \text{a la distancia } \xi \text{ del borde externo del medio} \\ \quad (\xi = 0) \text{ al instante } \tau . \\ D > 0 : \text{coeficiente de difusión} \\ m > 0 : \text{razón de consumo de oxígeno por unidad de volumen} \\ \quad \text{del medio.} \end{array} \right.$$

El proceso de difusión-consumo de oxígeno consta de dos partes:

- i) la primera parte consiste en hallar la solución estacionaria  $C_{\infty}(\xi)$  y el punto  $\xi = \xi_{\infty}$  (a partir del cual la concentración y su gradiente son nulos) de manera que satisfagan el siguiente sistema:



$$(A3-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} D C_{\infty}' - m = 0 \quad , \quad 0 < \xi < \xi_{\infty} \\ C_{\infty}(0) = C_0 \quad , \\ C_{\infty}(\xi_{\infty}) = C_{\infty}'(\xi_{\infty}) = 0 \quad , \end{array} \right.$$

donde  $C_0$  representa la concentración de oxígeno entrante por la superficie exterior del medio  $\xi = 0$ .

La solución de (A3-3) está dada por:

$$(A3-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{\infty}(\xi) = \frac{m}{2D} (\xi - \xi_{\infty})^2 \quad , \\ \xi_{\infty} = \left( \frac{2DC_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} . \end{array} \right.$$

ii) la segunda parte consiste en aislar el borde  $\xi = 0$  y por lo tanto el oxígeno ya existente en el medio, en la región  $0 \leq \xi \leq \xi_{\infty}$ , continúa a ser consumido. El punto de concentración cero que inicialmente está dado por  $\xi = \xi_{\infty}$  retrocede hacia  $\xi = 0$ . Si representamos con  $S(\tau)$  la posición de dicho punto al instante  $\tau$ , entonces el problema consiste en hallar  $C = C(\xi, \tau)$  y  $S = S(\tau)$  soluciones del siguiente sistema:

$$(A3-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{\tau} - D C_{\xi\xi} = -m \quad , \quad 0 < \xi < S(\tau) \quad , \quad \tau > 0 \\ C(\xi, 0) = C_{\infty}(\xi) \quad , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_{\infty} \\ C_{\xi}(0, \tau) = 0 \quad , \quad \tau > 0 \\ C(S(\tau), \tau) = C_{\xi}(S(\tau), \tau) = 0 \quad , \quad \tau > 0 \\ S(0) = \xi_{\infty} \quad , \end{array} \right.$$

donde  $\tau = 0$  es el instante cuando el borde  $\xi = 0$  es aislado.

Realizando el cambio de variables:

$$(A3-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\xi}{\xi_{\infty}} \quad , \quad t = \frac{D}{\xi_{\infty}^2} \tau \quad , \\ u = \frac{1}{2C_0} C \quad , \quad s(t) = \frac{S(\tau)}{\xi_{\infty}} \quad , \end{array} \right.$$

el problema (A3-5) se reduce a la forma adimensional siguiente:

$$(A3-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = -1 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} (1-x)^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(s(t), t) = u_x(s(t), t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ s(0) = 1 . \end{array} \right.$$

En [23] se indica que el tratamiento exitoso de cáncer por radioterapia está determinado principalmente por la posibilidad de aplicar una dosis de radiación lo suficientemente grande como para dañar considerablemente las células cancerosas sin dañar las células sanas circundantes, y mantenerse aún dentro del nivel de tolerancia a la radiación de los tejidos. Se ha demostrado que la susceptibilidad de las células cancerosas a la radiación aumenta con concentraciones crecientes de oxígeno dentro del tumor; más aún, existe una disminución de 2 a 3 veces en la dosis de radiación que se precisaría para obtener el grado de destrucción de las células oxigenadas con respecto de las células en ausencia total de oxígeno.

#### APENDICE 4

##### EQUIVALENCIA ENTRE CIERTOS PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE DE TIPO EXPLÍCITO E IMPLÍCITO.

Consideremos la siguiente formulación general de un problema de frontera libre para la ecuación del calor o difusión:

$$(A4\ 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} - u_t = F(x,t) \quad , \quad a < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \alpha u_x(a,t) + \beta u(a,t) = f(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \\ u(s(t),t) = g(s(t),t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \gamma(s(t),t)\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t) + h(s(t),t) \quad , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \end{array} \right.$$

y los siguientes tres pasos particulares:

PROBLEMA P1 (problema de frontera libre de tipo implícito con condiciones de Cauchy).

$$(A4\ 2) \quad \gamma \equiv 0 \quad , \quad g_x \neq h \quad .$$

PROBLEMA P2 (problema de frontera libre de tipo implícito de la forma difusión-consumo de oxígeno):

$$(A4\ 3) \quad \gamma \equiv g \equiv h \equiv 0 \quad , \quad F \neq 0 \quad .$$

PROBLEMA P3 (problema de frontera libre de tipo explícito de la forma Stefan):

$$(A4-4) \quad \gamma \neq 0 \quad .$$

En [37] se presenta un método simple para reducir los problemas (P1) y P2) a un problema del tipo (P3), bajo razonables condiciones (ver en [37] las hipótesis sobre los datos y las definiciones para que el triple  $\{T, s(t), u(x, t)\}$  sea solución en los diferentes casos). Entonces, bajo ciertas hipótesis [37], se tienen las siguientes equivalencias:

EJERCICIO 4:

i) Si  $(T, s, u)$  es solución de (P1) con  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$  entonces  $(T, s, v)$  con  $v = u_x$  es solución del siguiente problema (P3):

$$(A4-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{xx} - v_t = F_x(x, t) \quad , \quad a < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(a, t) = f(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = \varphi'(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \\ v(s(t), t) = h(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \left[ h(s(t), t) - g_x(s(t), t) \right] \dot{s}(t) = -v_x(s(t), t) + F(s(t), t) + \\ \quad + g_t(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \quad . \end{array} \right.$$

ii) Recíprocamente, si  $(T, s, v)$  es solución de (A4-5) entonces  $(T, s, u)$  , con  $u$  definido por:

$$(A4-6) \quad u(x, t) = - \int_x^{s(t)} v(\xi, t) d\xi + g(s(t), t) \quad ,$$

es solución de (P1) con  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$  .

EJERCICIO 5:

i) Si  $(T, s, u)$  es solución de (P2) con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  entonces  $(T, s, v)$  con  $v = u_t$  es solución del siguiente problema (P3):

$$(A4-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{xx} - v_t = F_t(x, t) \quad , \quad a < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(a, t) = \dot{f}(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = \varphi''(x) - F(x, 0) \quad , \quad a \leq x \leq b \\ v(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ F(s(t), t) \dot{s}(t) = -v_x(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \quad . \end{array} \right.$$

ii) Recíprocamente, si  $(T, s, v)$  es solución de (A4-7), entonces  $(T, s, u)$ , con  $u$  definido por:

$$(A4-8) \quad u(x, t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_{\xi}^{s(t)} [v(y, t) + F(y, t)] dy,$$

es solución de (P2) con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ .

Para finalizar conviene recalcar la conveniencia de tener el problema bajo una formulación del tipo (P3), ya sea desde un punto de vista teórico como numérico.

## APENDICE 5

### ALGUNAS SOLUCIONES DADAS POR STEFAN

Se dijo anteriormente que Lamé-Clapeyron en 1831 hallaron la solución exacta del problema de solidificación (2) o de fusión (2bis) en [21] (problema de Stefan a una fase), y que Neumann, en los alrededores de 1840 (?) [4,44], explicaba a sus alumnos en la universidad la solución exacta del problema (5) (problema de Stefan a dos fases). El propio J. Stefan publicó en los años 1890 varias soluciones exactas, a saber:

- i) Solución de Lamé-Clapeyron del problema (2) ó (2bis) [39-41].
- ii) Solución de Neumann del problema (5) [39].
- iii) Solución cuasi-estacionaria del problema (2) ó (2bis) [39-40].
- iv) Problema inverso de Stefan a una fase con una frontera que tiene velocidad constante ( $\dot{s}(t) = m$ ) [40,41].

La solución de Lamé-Clapeyron y de Neumann y sus propiedades serán desarrolladas con mayores detalles en el cursillo C3, con lo cual aquí solo explicitaremos los caso iii) y iv).

- iii) La *solución cuasi-estacionaria* del problema (2bis) es aquella que se obtiene de resolver el siguiente problema de frontera libre (se supone, sin pérdida de generalidad, que  $\theta_f = 0$ ; en caso contrario se realiza una traslación de la escala de temperatura):

$$(A5-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \theta_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{ii)} \quad \theta(0,t) = \theta_0 > 0 \quad , \quad t > 0 \\ \text{iii)} \quad \theta(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ \text{iv)} \quad -k\theta_x(s(t),t) = \rho l \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{v)} \quad s(0) = 0 \end{array} \right.$$

## EJERCICIO 6:

Verificar que la solución de (A5-1) está dada por:

$$(A5-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x,t) = \theta_0 \left( 1 - \frac{x}{s(t)} \right) \quad , \\ s(t) = \sqrt{\frac{2k\theta_0}{\rho l} t} \quad . \end{array} \right.$$

Para mayores detalles sobre soluciones aproximadas ver CG1.

iv) Consideremos el siguiente problema inverso de Stefan a una fase con una frontera que tiene velocidad constante  $m > 0$ , es decir: Hallar la temperatura  $\theta = \theta(x,t)$ , y por ende  $\theta(0,t)$ , de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(A5-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \alpha\theta_{xx} = \theta_t \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{ii)} \quad \theta(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ \text{iii)} \quad k\theta_x(s(t),t) = \rho l \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{iv)} \quad \dot{s}(t) = m > 0 \quad , \quad s(0) = 0 \quad (s(t) = mt) \quad . \end{array} \right.$$

## EJERCICIO 7:

Verificar que la solución de (A5-3) está dada por:

$$(A5-4) \quad \theta(x,t) = \frac{l}{c} \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (mt - x) \right] \right\} \quad ,$$

con lo cual se obtiene lo siguiente: Para que en el problema de solidificación (2) la frontera libre avance con velocidad constante  $m$  es condición necesaria y suficiente que la temperatura en el borde fijo  $x = 0$  sea variable en el tiempo de la forma:

$$(A5-5) \quad f(t) = \theta(0,t) = -\frac{l}{c} \left[ \exp \left( \frac{m^2 t}{\alpha} \right) - 1 \right] < 0 = \theta_f \quad , \quad \forall t > 0 \quad .$$

Para mayores detalles sobre el problema inverso de Stefan ver el cursillo C4.

## APENDICE 6

### EL METODO DE SEMEJANZA, LA FUNCION DE ERROR Y SU APLICACION A LA ECUACION DEL CALOR.

La ecuación del calor para un cuerpo unidimensional isótropo y homogéneo está dada por:

$$(A6-1) \quad \theta_t = a^2 \theta_{xx} \quad (\text{ver Apéndice 1}) \quad .$$

#### EJERCICIO 8:

Verificar que la ecuación (A6-1) es *invariante* bajo una transformación de las variables  $x, t$  de la manera siguiente:

$$(A6-2) \quad \xi = \lambda x \quad , \quad \tau = \lambda^2 t \quad (\lambda \neq 0) \quad ,$$

es decir, si  $\theta(x, t) = \theta\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda^2}\right) = \varphi_\lambda(\xi, \tau)$  , entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$(A6-3) \quad (A6-1) \iff \varphi_{\lambda\tau} = a^2 \varphi_{\lambda xx} \quad , \quad \forall \lambda \neq 0 \quad .$$

#### EJERCICIO 9 (Método de semejanza)

Si las condiciones de contorno para la ecuación (A6-1) no se modifican bajo un cambio de escala del tipo (A6-2), entonces la temperatura  $\theta$  satisface la igualdad:

$$(A6-4) \quad \theta(x, t) = \theta(\lambda x, \lambda^2 t) \quad , \quad \forall x, t \quad , \quad \forall \lambda \neq 0 \quad .$$

Si se pone  $\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{t}}$  , se obtiene

$$(A6-5) \quad \theta(x, t) = \theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}, \frac{1}{4a^2}\right) = \phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

con lo cual, la temperatura  $\theta$  depende sólo del argumento  $z = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$  llamada *variable de semejanza*. Entonces:

i) La función  $\theta = \theta(x, t)$  es solución de (A6-1) si y sólo si la función  $\phi = \phi(z)$  es solución de la ecuación diferencial:

$$(A6-6) \quad \phi''(z) + 2z\phi'(z) = 0 \quad .$$

ii) La solución general de (A6-6) está dada por:

$$(A6-7) \quad \phi(z) = C_1 + C_2 \int_0^z \exp(-u^2) du \quad , \quad C_1, C_2 : \text{constantes} \quad .$$

## EJERCICIO 10.

Se define como *función de error* a:

$$(A6-8) \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du = \operatorname{erf}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad .$$

i) La función  $f$  tiene las siguientes propiedades:

a)  $f(0) = 0$  ; b)  $f(+\infty) = 1$  ; c)  $f(-x) = -f(x)$

d)  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) > 0$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  ; e)  $f''(x) = -2xf'(x) < 0$  ,  
 $\forall x > 0$

f) Puede ser representada por una serie de potencias  $f(x) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad , \quad \text{cuyo radio de convergencia es } +\infty .$$

ii) Teniendo en cuenta la función de error  $f$  , la temperatura  $\theta$  viene dada por:

$$(A6-9) \quad \theta(x,t) = A + B f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

donde las constantes  $A$  y  $B$  se determinan de las **condiciones** de contorno del problema correspondiente a la ecuación (A6-1).

iii) Aplicar el método anterior para resolver los problemas:

$$I) \begin{cases} \theta_t = a^2 \theta_{xx} , & x > 0 , t > 0 \\ \theta(x,0) = \theta_0 , & x > 0 \\ \theta(0,t) = \theta_b , & t > 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} \theta_t = a^2 \theta_{xx} , & x \in \mathbb{R} , t > 0 \\ \theta(x,0) = \begin{cases} \theta_0 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

## EJERCICIO 11.

Se define como *función de error complementaria* a:

$$(A6-10) \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - f(x) \quad .$$

Además, se definen las funciones iteradas de error complementaria de la siguiente manera:

$$(A6-11) \quad \begin{cases} i^0 \operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erfc}(x) \\ i^1 \operatorname{erfc}(x) = i \operatorname{erfc}(x) = \int_x^{+\infty} \operatorname{erfc}(t) dt \\ i^n \operatorname{erfc}(x) = \int_x^{+\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc}(t) dt \quad , \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades:



i) Integrando por partes, se tiene:

$$\int_x^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t^2} dt .$$

Repetiendo el proceso, se obtiene:

$$\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(x) = \exp(-x^2) \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{2^2 x^5} - \dots (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1} x^{2n-1}} + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t^{2n}} dt \right] .$$

$$\text{Como } \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t^{2n}} dt < \exp(-x^2) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}} = \frac{\exp(-x^2)}{(2n-1) x^{2n-1}} \text{ y como}$$

el término de la derecha tiende a 0 cuando  $x \rightarrow +\infty$ , entonces se tiene la siguiente aproximación, válida para valores de  $x$  grandes:

$$(A6-12) \quad \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2^2 x^4} - \frac{3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots .$$

ii) Verificar que se tienen las expresiones:

$$(A6-13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } i \operatorname{erfc}(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} - x \operatorname{erfc}(x) . \\ \text{b) } i^2 \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{4} \left[ (1 + 2x^2) \operatorname{erfc}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2) \right] . \end{array} \right.$$

#### EJERCICIO 12.

i) Deducir la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(A6-14) \quad 2n i^n \operatorname{erfc}(x) = i^{n-2} \operatorname{erfc}(x) - 2x i^{n-1} \operatorname{erfc}(x) .$$

ii) Verificar que:

$$(A6-15) \quad i^n \operatorname{erfc}(0) = \frac{1}{2^n \Gamma(1 + \frac{n}{2})} .$$

iii) Verificar que la función  $y(x) = i^n \operatorname{erfc}(x)$  satisface la ecuación diferencial:

$$(A6-16) \quad y'' + 2xy' - 2ny = 0 .$$

iv) La función  $\theta(x,t) = t^m g\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$  es solución de (A6-1) si y sólo si la función  $g = g(z)$   $\left(z = \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$  es solución de la ecuación diferencial:

$$(A6-17) \quad g''(z) + 2z g'(z) - 4m g(z) = 0 .$$

v) Verificar que la función  $\theta(x,t) = t^{n/2} i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$  es solu-

ción de (A6-1),  $\forall n \in \mathbf{N}$  .

vi) Aplicar el resultado anterior para verificar que la función  $\theta(x,t) = -\frac{2ha}{k} \sqrt{t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$  es solución del siguiente problema:

$$(A6-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_t = a^2 \theta_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ \theta(x,0) = 0, \quad x > 0 \\ k \theta_x(0,t) = h, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

### REFERENCIAS

- [1] ALBRECHT, J. - COLLATZ, L - HOFFMANN, K.H. (Ed.), "Numerical Treatment of Free Boundary Value Problems", Birkhäuser Verlag, Basel (1982).
- [2] BANKOFF, S.G., "Heat conduction of diffusion with change of phase", in Advances in Chemical Engineering, Vol.5, Academic Press, New York (1964), 75-150.
- [3] BLOCK, H., "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", Arkiv Matematik Astronomi Fysik, 6 N° 31(1911), 1-42.
- [4] BRILLOUIN, M., "Sur quelques problèmes non résolus de la Physique Mathématique classique. Propagation de la fusion", Annales de L'Inst. H. Poincaré, 1(1930/31), 285-308.
- [5] CARSLAW, H.S.-JAEGER, J.C., "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).
- [6] CRANK, J., "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).
- [7] CRANK, J.-GUPTA, R.S., "A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue", Journal Institute Math. Appl., 10(1972), 19-33.
- [8] DATZEFF, A., "Sur le problème linéaire de Stefan", Mémorial des Sciences Physiques N°69, Gauthier-Villars, Paris (1970).
- [9] ELLIOT, C.M.-OCKENDON, J.R., "Weak and variational methods for moving boundary problems", Pitman, London (1982).
- [10] FASANO, A., "Un esempio di controllo ottimale in un problema del tipo di Stefan", Boll. U.M.I., 4(1971), 846-858.
- [11] FASANO, A., "Alcune osservazioni su una classe di problemi a contorno libero per l'equazione del calore", Le Matematiche, 29(1974) . 397-411.
- [12] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., "General free boundary problems for the heat equation", J. Math. Anal. Appl. Part I: 57(1977), 694-723;

Part II: 58(1977), 202-231; Part III: 59(1977), 1-14.

- [13] FASANO, A.-PRIMICERIO, M. (Ed) , *"Free boundary problems : Theory and applications"*, Vol.I,II, Pitman, London (1983).
- [14] FRIEDMAN, A. , *"Partial differential equations of parabolic type"*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.Y. (1964).
- [15] GEVREY, M. , *"Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique"*, J. Math. Pures Appl. , (6) 9(1913), 305-471.
- [16] GEVREY, M. , *"Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite)"*, J. Math. Pures Appl. , (6)10(1914), 105-148.
- [17] GOODMAN, T.R. , *"The heat-balance integral and its applications to problems involving a change of phase"*, Trans. of the ASME, 80(1958), 335-342.
- [18] GOURSAT, E. , *"Cours d'analyse mathématique"*, Gauthier-Villars, Paris(1927).
- [19] HOLMGREN, E. , *"Sur l'équation de la propagation de la chaleur"*, Arkiv Matematik Astronomi Fysic, 4 N°14(1908), 1-11.
- [20] HOLMGREN, E. , *"Sur l'équation de la propagation de la chaleur , Deuxième note"*, Arkiv Matematik Astronomi Fysic, 4 N°18 (1908), 1-28.
- [21] LAME, G.-CLAPEYRON, B.P. , *"Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide"*, Annales Chimie Physique, 47 (1831), 250-256.
- [22] LEVI, E.E. , *"Sull'equazione del calore"*, Ann. Mat. Pura Appl. , (3) 14 (1908), 187-264.
- [23] LIAPIS. A.I.-LIPSCOMB, G.G.-CROSSER, O.K.-TSIROYIANNI - LIAPIS, E. , *"A model of oxygen diffusion in absorbing tissue"*, Mathematical Modelling, 3(1982), 83-92.
- [24] LUNARDINI, V.J. , *"Heat transfer in cold climates"*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1981).
- [25] MAGENES, E. , *"Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems"*, in Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations, H.G. Garnier (Ed.) , D. Reidel Publ. Comp. , Dordrecht (1976), 239-312.
- [26] MAGENES, E. (Ed.) , *"Free boundary problems"*, Vol. I , II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (1980).
- [27] MUEHLBAUER, J.C.-SUNDERLAND, J.E. , *"Heat conduction with freezing or melting"*, Appl. Mech. Reviews, 18(1965), 951-959.
- [28] OCKENDON, J.R.-HODGKINS, W.R.(Ed.) . *"Moving boundary problems in heat flow and diffusion"*, Clarendon Press, Oxford(1975).
- [29] ÖZİŞİK, M.N. , *"Heat conduction."*, J. Wiley, New York(1980).
- [30] PEKERIS, C.L.-SLICHTER, L.B. , *"problem of ice formation"* . J. Appl. Physics, 10(1939), 135-137.
- [31] PRIMICERIO, M. , *"Problemi a contorno libero per l'equazione della*

- diffusione*", Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 32(1973/74), 183-206.
- [32] PRIMICERIO, M., "*Problemi di diffusione a frontiera libera*", Boll. U.M.I., 18 A (1981), 11-68.
- [33] PROTTER, M.H.-WEINBERGER, H.F., "*Maximun principles in differential equations*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1967).
- [34] QUILGHINI, D., "*Un problema di controllo ottimale nel cambiamento di stato in uno strato*", Ann. Mat. Pura Appl., 84(1970), 309-320.
- [35] RUBINSTEIN, L.I., "*The Stefan problem*", Trans. Math. Monographs Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).
- [36] RUBINSTEIN, L.I., "*The Stefan problem: comments on its present State*", J. Inst. Math. Appl., 24(1979), 259-277.
- [37] SCHATZ, A., "*Free boundary problems of Stephan type with prescribed flux*", J. Math. Anal. Appl. 28(1969), 569-580.
- [38] SESTINI, G. "*Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*", Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari, N°55-56, (1960).
- [39] STEFAN, J., "*Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung*", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe, 98(1889), 473-484.
- [40] STEFAN, J., "*Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere*", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe, 98(1889), 965-983. Annalen der Physik und Chemie, 42(1891) 269-286.
- [41] STEFAN, J., "*Über die Theorie der Eisbildung*", Monatshefte für Mathematik und Physik, 1(1890), 1-6.
- [42] TARZIA, D.A., "*Sobre el problema de Stefan unidimensional*", Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile, Conferencia del 9 Diciembre 1981, 31 pag.
- [43] TARZIA, D.A., "*Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan*", Mathematicae Notae, 29(1981-82), 147-241.
- [44] WEBER, H., "*Die Partiellen Differential Gleichungen der Mathematischen Physic, nach Riemann's Vorlesungen*", Braunschweig, (1901), T. II.
- [45] WILSON, D.G.-SOLOMON, A.D.-BOGGS, P.T. (Ed.), "*Moving boundary problems*", Academic Press, New York (1978).

**PROMAR (CONICET-UNR)**

Instituto de Matemática "Beppo Levi"

Avenida Pellegrini 250

2000 Rosario - ARGENTINA.

# Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil

Domingo Alberto TARZIA

Continuando la Introducción del presente Seminario, en este Cursillo se estudiarán los problemas de frontera móvil para la ecuación del calor unidimensional. Se tendrá como base trabajos de principios de siglo, en especial al [11, Cap.29]. Dicho Capítulo, a mi criterio, está escrito de una manera clara e inteligente y por lo tanto su lectura es vivamente recomendada, como así también los trabajos originales [1,9, 10,12-14].

Previamente se analizarán algunas propiedades básicas de la ecuación del calor unidimensional; sobre todo su solución fundamental y la llamada fórmula de salto que son elementos necesarios para obtener la existencia de una solución, expresable por los potenciales de calor, en problemas de conducción del calor con fronteras móviles. Asimismo se verán consecuencias de la fórmula de Green que nos darán un método para obtener la unicidad de soluciones regulares.

La importancia de los problemas con frontera móvil no radica sólo en sí misma (ver en [18, p. 154-158] numerosas referencias sobre diferentes métodos teóricos, numéricos y aplicaciones) sino que su estudio es necesario para los problemas de frontera libre, en especial para el problema de Stefan. Más aún, se verá en el Cursillo C5 que un problema de frontera libre de tipo Stefan podrá interpretarse como el límite de una

## sucesión de problemas de frontera móvil.

Para comenzar se verán:

### I. DIVERSOS PROBLEMAS DE FRONTERA MÓVIL CON SOLUCIÓN EXPLÍCITA.

Una formulación matemática general de problemas de conducción del calor unidimensional con una *frontera móvil* (conocida *a priori*) para un medio semi-infinito es la siguiente: Hallar las funciones  $\theta_1 = \theta_1(x,t)$  y  $\theta_2 = \theta_2(x,t)$  de manera que satisfagan el sistema:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 \theta_{1_{xx}} = \theta_{1_t} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ a_2^2 \theta_{2_{xx}} = \theta_{2_t} \quad , \quad s(t) < x \quad , \quad t > 0 \\ \theta_1(0,t) = \psi_1(t) \quad , \quad t > 0 \\ \theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = \psi_2(t) \quad , \quad t > 0 \\ \theta_2(x,0) = h(x) \quad , \quad x > 0 = s(0) \end{array} \right.$$

donde  $s = s(t)$  es la dada ley de movimiento de la frontera móvil con la condición  $s(0) = 0$  y  $\psi_1, \psi_2$  y  $h$  son funciones dadas.

El problema anterior puede separarse en dos problemas de conducción del calor: uno para el intervalo  $(0, s(t))$  y el otro para el intervalo  $(s(t), +\infty)$ . El primer problema consiste en hallar  $\theta_1 = \theta_1(x,t)$ , solución de:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 \theta_{1_{xx}} = \theta_{1_t} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \quad (s(0) = 0) \\ \theta_1(0,t) = \psi_1(t) \quad , \quad t > 0 \\ \theta_1(s(t),t) = \psi_2(t) \quad , \quad t > 0 \end{array} \right.$$

y el segundo consiste en hallar  $\theta_2 = \theta_2(x,t)$ , solución de:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2^2 \theta_{2_{xx}} = \theta_{2_t} \quad , \quad s(t) < x \quad , \quad t > 0 \\ \theta_2(x,0) = h(x) \quad , \quad x > 0 = s(0) \\ \theta_2(s(t),t) = \psi_2(t) \quad , \quad t > 0 \end{array} \right.$$

donde  $s = s(t)$  es la dada frontera móvil con  $s(0) = 0$ .

#### OBSERVACION 1.

Numerosos problemas de este tipo han sido considerados en [15-17],

algunos de los cuales serán presentados aquí. Para una mayor información de las soluciones exactas dadas y su forma de obtención se recomienda ver dichos trabajos.

#### EJERCICIO 1.

Bajo las hipótesis:

$$(4) \quad \psi_1(t) = A_1 t^{n/2}, \quad \psi_2(t) = A_2 t^{n/2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad s(t) = \beta\sqrt{t}, \quad h(x) = 0,$$

los problemas (2) y (3) tienen por solución a:

$$(5) \quad \begin{cases} \theta_1(x, t) = C_1 (4t)^{n/2} i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) + C_2 (4t)^{n/2} i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\ \theta_2(x, t) = C_3 (4t)^{n/2} i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

donde las constantes  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) están dadas por:

$$(6) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{A_1 i^n \operatorname{erfc}\left(-\frac{\beta}{2a_1}\right) - A_2 i^n \operatorname{erfc}(0)}{\Delta} \\ C_2 = \frac{A_2 i^n \operatorname{erfc}(0) - A_1 i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2a_1}\right)}{\Delta} \\ C_3 = \frac{A_2}{4^{n/2} i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2a_2}\right)} \end{cases}, \quad \Delta = 4^{n/2} i^n \operatorname{erfc}(0) \left[ i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{-\beta}{2a_1}\right) - i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2a_1}\right) \right].$$

Cabe destacar que esta solución puede ser extendida a los casos en que las funciones  $\psi_1$  y  $\psi_2$  sean polinomios de cualquier potencia en  $t$  o  $\sqrt{t}$ . Para el caso particular:

$$(7) \quad \psi_1(t) = A_1, \quad \psi_2(t) = A_2 \quad (n = 0)$$

la solución viene dada por:

$$(8) \quad \theta_1(x, t) = A_1 + (A_2 - A_1) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2a_1}\right)}, \quad \theta_2(x, t) = A_2 \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2a_2}\right)}.$$

#### EJERCICIO 2

Bajo las hipótesis:

$$(9) \quad \psi_2(t) = 0, \quad h(x) = Ax + B, \quad s(t) = \beta\sqrt{t}$$

el problema (3) tiene por solución:



$$(10) \begin{cases} \theta_2(x,t) = Ax + B + C_1 \sqrt{t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) + C_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ C_1 = \frac{-A\beta}{\operatorname{ierfc}\left(\frac{\beta}{2a_2}\right)}, \quad C_2 = \frac{-B}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2a_2}\right)}. \end{cases}$$

### ÉJERCICIO 3.

Bajo la hipótesis  $h(x) = 0$ , el problema (3) tiene las soluciones siguientes (por simplicidad se usa  $\theta = \theta_2$ ,  $a = a_2$ ,  $\psi = \psi_2$ ):

A) Caso  $s(t) = \beta\sqrt{t}$ :

$$\text{i) } \theta(x,t) = \frac{C \exp\left(\frac{\beta^2}{2a^2}\right) x \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)}{\beta t\sqrt{t}} \quad \text{si } \psi(t) = \frac{C}{t}$$

$$\text{ii) } \theta(x,t) = C \exp\left(\frac{\beta^2}{4a^2}\right) \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)}{\sqrt{t}} \quad \text{si } \psi(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}$$

B) Caso  $s(t) = \beta t$ :

$$\text{i) } \theta(x,t) = C \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \quad \text{si } \psi(t) = C \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sqrt{t}}{2a}\right)$$

$$\text{ii) } \theta(x,t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \quad \text{si } \psi(t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\beta^2 t}{4a^2}\right)$$

$$\text{iii) } \begin{cases} \theta(x,t) = C \exp\left[-\frac{\beta}{2a^2}(x - \beta t)\right] V(x,t), \\ V(x,t) = \frac{1}{2} \left[ \exp\left[-\frac{\beta}{2a^2}(x - \beta t)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \beta t}{2a\sqrt{t}} - \frac{\beta}{2a}\sqrt{t}\right) + \right. \\ \left. + \exp\left[\frac{\beta}{2a^2}(x - \beta t)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \beta t}{2a\sqrt{t}} + \frac{\beta}{2a}\sqrt{t}\right) \right] \quad \text{si } \psi(t) = C \end{cases}$$

$$\text{iv) } \theta(x,t) = C \exp\left[-\frac{\beta}{2a^2}(x - \beta t)\right] \int_0^t V(x,\tau) d\tau \quad \text{si } \psi(t) = Ct$$

$$\text{v) } \theta(x,t) = \frac{\pi C}{2} \exp\left[-\frac{\beta}{2a^2}(x - \beta t)\right] \int_0^t \frac{V(x,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad \text{si } \psi(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}$$

C) Caso  $s(t) = \beta t^{3/2}$ :

$$\text{i) } \theta(x,t) = \frac{Cx}{\beta t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \quad \text{si } \psi(t) = C \exp\left(-\frac{\beta^2 t^2}{4a^2}\right)$$

## II. LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR $u_{xx} = u_t$ .

Sea  $K(x,t;\xi,\tau)$  la función definida por:

$$(11) \quad K(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] & \text{si } t > \tau \\ 0 & \text{si } t \leq \tau \end{cases}$$

conocida como la *solución fundamental* de la ecuación del calor, la cual goza de las propiedades siguientes:

LEMA 1:

i)  $K$  es una función  $C^\infty$  en las variables  $x,t$  excepto en el punto  $(x = \xi, t = \tau)$ , satisface la ecuación del calor

$$(12) \quad K_{xx} - K_t = 0$$

y la condición siguiente

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t;\xi,\tau) dx = 1 \quad .$$

ii)  $K$  es una función  $C^\infty$  en las variables  $\xi,\tau$  excepto en el punto  $(\xi = x, \tau = t)$ , satisface la ecuación adjunta del calor

$$(14) \quad K_{\xi\xi} + K_\tau = 0$$

y las siguientes propiedades

$$(15) \quad K_x = -K_\xi, \quad K_t = -K_\tau \quad .$$

iii) Derivando un número cualquiera de veces la función  $K$  respecto de las variables  $x,t,\xi,\tau$  se obtienen nuevas funciones  $K^i(x,t;\xi,\tau)$  que tienen las mismas propiedades que la función  $K$ . Cada una de estas funciones consideradas como función de las variables  $x,t$  es una solución de la ecuación del calor  $u_{xx} - u_t = 0$ , regular en todo el plano excepto en el punto  $(x = \xi, t = \tau)$ ; considerada como función de las variables  $\xi,\tau$  es una solución de la ecuación adjunta del calor  $u_{\xi\xi} + u_\tau = 0$ , regular en todo el plano excepto en el punto  $(\xi = x, \tau = t)$ . Además, todas estas funciones son idénticamente nulas para  $t \leq \tau$ .

DEMOSTRACION.

Toda derivada parcial de  $K$ , respecto de  $x,t$ , es una suma fini

ta de términos de la forma:

$$\frac{P(x, \xi)}{(t - \tau)^{n + \frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}\right]$$

donde  $P$  es un polinomio y  $n \in \mathbb{N}$ . Esta expresión tiende a cero cuando  $(t - \tau) \rightarrow 0^+$  siempre que  $x - \xi$  no tienda también a cero.

El resto queda como EJERCICIO 4.

#### OBSERVACION 2.

De la solución fundamental  $K$  se pueden deducir por cuadraturas, nuevas integrales de la ecuación del calor. Sean  $P(\xi, \tau)$  y  $Q(\xi, \tau)$  dos funciones continuas cualesquiera de las coordenadas  $(\xi, \tau)$ , las cuales se mueven a lo largo de una curva  $C$ . La integral curvilínea:

$$(16) \quad u(x, t) = \int_C K(x, t; \xi, \tau) [P(\xi, \tau) d\xi + Q(\xi, \tau) d\tau]$$

representa una integral de la ecuación del calor  $u_{xx} - u_t = 0$ , la cual es regular, junto con todas sus derivadas parciales, en todo dominio  $D$  que no tenga ningún punto en común con la curva  $C$ ; más aún, si el punto  $(x, t) \in D$ , entonces se pueden aplicar las fórmulas habituales de derivación un número cualquiera de veces.

De acuerdo a la definición de  $K$ , para el cálculo de  $u(x, t)$  se debe tomar la porción de  $C$  situado por debajo de la característica  $t = \text{cte}$  pasando por el punto  $(x, t)$ , es decir  $\tau < t$ . Además,  $u$  es nula para todo punto  $(x, t)$  situado por debajo de la característica que pasa por el punto de  $C$  de ordenada mínima; también es nula para todo punto situado en dicha característica que no pertenezca a  $C$ . Por otra parte, arriba de la característica que deja a  $C$  por debajo,  $u$  es una función holomorfa de las variables  $x, t$ .

Para analizar que sucede con  $u(x, t)$  cuando el punto  $(x, t)$  se acerca a un punto de la curva  $C$ , se estudiarán dos casos (ver párrafo siguiente):

- (I) la curva  $C$  es un segmento de característica representado por el intervalo  $(a, b)$  con  $a < b$ .
- (II) la curva  $C$  está representada por  $\xi = s(\tau)$ , donde  $s$  es una función continua en el intervalo  $(a, b)$  con  $a < b$ .

### III. FÓRMULA DE POISSON Y DEL SALTO PARA LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL.

En primer lugar estudiaremos el Caso (I) en que la curva  $C$  es un segmento de característica  $t = \tau$  representado por el intervalo  $(a, b)$ , con  $a < b$ . Sea la siguiente integral definida:

$$(17) \quad u(x, t) = \int_a^b K(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi$$

donde  $\varphi$  es una función continua en  $(a, b)$ . La función  $u$  satisface la ecuación del calor  $u_{xx} - u_t = 0$ , es regular en todo punto que satisfaga  $t > \tau$ , es nula en todo punto debajo de la característica  $t = \tau$ , y en todo punto de esta característica fuera del segmento  $[a, b]$  (es decir, para  $x < a$  ó  $x > b$ ). Solo resta estudiar cual es el límite de la expresión

$$(18) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi, \quad t > \tau$$

cuando el punto  $(x, t)$ , con  $t > \tau$ , tiende hacia un punto perteneciente a  $(a, b) \times \{\tau\}$ . Para ello veremos, en primer lugar, el siguiente:

LEMA 2.

Sea:

$$(19) \quad I(t) = \int_a^b F(x) \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}} dx,$$

donde  $F$  es una función continua o al menos integrable y acotada, teniendo a lo sumo discontinuidades de primera especie (saltos). Entonces se tienen los resultados:

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) = \begin{cases} \text{(i)} & 0 & \text{si } 0 < a < b \\ \text{(ii)} & \sqrt{\pi} F(0^+) & \text{si } a = 0 < b \\ \text{(iii)} & -\sqrt{\pi} F(0^-) & \text{si } b < a = 0 \\ \text{(iv)} & \sqrt{\pi} (F(0^+) + F(0^-)) & \text{si } a < 0 < b \end{cases}$$

DEMOSTRACION.

i) Sea  $M = \sup_{x \in [a, b]} |F(x)|$ . Por lo tanto, se tiene que  $|I(t)| \leq \frac{M}{\sqrt{t}} (b-a) \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$ , lo cual tiende a cero cuando  $t \rightarrow 0^+$ .

ii) Sean  $\beta, \eta$  dos números que satisfagan  $0 < \eta < \beta < b$  de manera

que  $|F(x) - F(0^+)| \leq \eta$ ,  $\forall x \in [0, \beta]$ . Se puede elegir  $\beta$  pequeño de manera que  $\eta$  sea inferior a cualquier número dado. Se puede escribir

$$(21) \begin{cases} I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) & , \quad \text{donde} \\ I_1(t) = F(0^+) \int_0^\beta \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}} dt & , \quad I_3(t) = \int_\beta^b \frac{F(x)}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dt \\ I_2(t) = \int_0^\beta [F(x) - F(0^+)] \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}} dt & . \end{cases}$$

De acuerdo a la parte i), se tiene que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} I_3(t) = 0$ . Haciendo en la expresión de  $I_1$  el cambio de variable  $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ , se obtiene:

$$I_1(t) = 2F(0^+) \int_0^{\beta/2\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz \rightarrow \sqrt{\pi} F(0^+) \quad , \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+ .$$

Por otra parte, dado  $\epsilon > 0$ , se tiene:

$$|I_2(t)| \leq \eta \int_0^\beta \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}} dx = 2\eta \int_0^{\beta/2\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz \leq \eta \sqrt{\pi} < \epsilon$$

eligiendo  $\beta$  de manera que  $\eta < \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}$ , con lo cual se obtiene que  $I(t) \rightarrow \sqrt{\pi} F(0^+)$ , cuando  $t \rightarrow 0^+$ .

Para el caso (iii) se usa el resultado obtenido para (ii), y para el caso (iv) se utilizan los resultados de los dos casos anteriores para la descomposición siguiente:  $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$ .

Ahora veremos el estudio correspondiente a (18).

LEMA 3.

Si  $\varphi$  es continua en  $[a, b]$  y si  $u(x, t)$  está dada por (18), entonces se tiene:

$$(22) \quad \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, \tau) \\ x = x_0, t > \tau}} u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x_0) & \text{si } x_0 \in (a, b) \\ \frac{\varphi(a)}{2} & \text{si } x_0 = a \\ \frac{\varphi(b)}{2} & \text{si } x_0 = b \end{cases}$$

ii)

$$(23) \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,\tau) \\ t > \tau}} u(x,t) = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in (a,b) \quad (\text{Fórmula de Poisson})$$

Más aún, si  $x_0$  es uno de los extremos  $a$  ó  $b$ , el límite de la integral (18) depende de la forma como el punto  $(x,t)$  se acerca al punto límite  $(a,\tau)$  ó  $(b,\tau)$ .

DEMOSTRACION.

i) Se quiere hallar el límite de la integral

$$(24) \quad u(x_0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a-x_0}^{b-x_0} \frac{\varphi(x_0+\eta)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right] d\eta$$

cuando  $t \rightarrow \tau^+$ . Si  $x_0 \in (a,b)$ , entonces  $a-x_0 < 0$  y  $b-x_0 > 0$  con lo cual el límite es  $\varphi(x_0)$ ; si  $x_0 = a$  ó  $x_0 = b$ , se obtiene  $\frac{\varphi(a)}{2}$  ó  $\frac{\varphi(b)}{2}$  respectivamente aplicando (20).

ii) Supongamos ahora que  $(x,t) \rightarrow (x_0,\tau)$  de una manera cualquiera con  $x_0 \in (a,b)$ . Se quiere pues hallar el límite de la integral

$$(25) \quad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+\eta)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right] d\eta = I_1(x,t) + I_2(x,t),$$

donde:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right] d\eta = \\ &= \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{b-x}{2\sqrt{t-\tau}}} \exp(-z^2) dz, \\ I_2(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+\eta) - \varphi(x_0)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right] d\eta. \end{aligned} \right.$$

Para la primera integral se tiene que  $I_1(x,t) \rightarrow \varphi(x_0)$ , cuando  $(x,t) \rightarrow (x_0,\tau)$ , con  $x_0 \in (a,b)$ .

En cuanto a la segunda integral, se tiene que  $|I_2(x,t)| \rightarrow 0$ , cuando  $(x,t) \rightarrow (x_0,\tau)$ , con  $x_0 \in (a,b)$ , usando la descomposición  $\int_{a-x}^{b-x} = \int_{a-x}^{-\epsilon} + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{b-x}$ , donde  $\epsilon > 0$  pequeño. Para ello, sea

$\delta = \sup_{x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), \eta \in (-\epsilon, \epsilon)} |\varphi(x+\eta) - \varphi(x_0)|$  , con lo cual el valor

absoluto de la segunda integral es inferior a  $\delta$  , y por lo tanto puede ser más pequeño que todo número positivo dado tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Siendo  $\epsilon$  elegido de esta manera, se demuestra que la primera y la tercera integral tienden a 0 , cuando  $(x,t) \rightarrow (x_0,\tau)$ , con  $x_0 \in (a,b)$  (EJERCICIO 5), obteniéndose de este modo la fórmula de Poisson (23), que en forma más explícita resulta ser:

$$(27) \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,\tau) \\ t > \tau}} \int_a^b \varphi(\xi) K(x,t;\xi,\tau) d\xi = \varphi(x_0) \quad , \quad \forall x_0 \in (a,b) .$$

### OBSERVACION 3.

Es importante observar que la presente demostración no puede aplicarse cuando el punto  $(x,t)$  tiende hacia uno de los puntos extremos  $(a,\tau)$  ó  $(b,\tau)$  , pues la segunda expresión de la integral  $I_1(x,t)$  (26) está indeterminada cuando  $x \rightarrow a$  ( $x \rightarrow b$ ) y  $t \rightarrow \tau^+$  simultáneamente. El límite de esta integral depende de la manera como el punto  $(x,t)$  se acerque a  $(x_0,\tau)$  con  $x_0 = a$  ó  $b$  . Para ello, analizaremos, por ejemplo, el caso  $x_0 = a$  . Sabemos que  $u(x,t)$  y  $I_1(x,t)$  tienen igual límite cuando  $(x,t) \rightarrow (a,\tau)$  , siempre que  $I_1(x,t)$  tenga límite.

Además,  $I_1(x,t)$  puede descomponerse como sigue:

$$(28) \quad I_1(x,t) = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}}}^0 \exp(-z^2) dz + \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{b-x}{2\sqrt{t-\tau}}} \exp(-z^2) dz .$$

El segundo sumando tiende a  $\frac{\varphi(x_0)}{2}$  cuando  $(x,t) \rightarrow (a,\tau)$  ; en cambio, el primer sumando tiene límite si y sólo si  $\frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}} \rightarrow -\lambda$  cuando  $(x,t) \rightarrow (a,\tau)$  , y en dicho caso el límite del primer sumando será:  $\frac{\varphi(x_0)}{2} \operatorname{erf}(\lambda)$  . Resumiendo, se tiene el siguiente resultado:

### COROLARIO 4.

Si  $\lim_{(x,t) \rightarrow (a,\tau)} \frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}} = -\lambda$  , entonces

$$(29) \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (a,\tau) \\ t > \tau}} u(x,t) = \frac{\varphi(x_0)}{2} (1 + \operatorname{erf}(\lambda)) .$$



En caso contrario  $u(x,t)$  no tiene límite.

Algo similar puede decirse para el caso  $x_0 = b$  (EJERCICIO 6).

OBSERVACION 4 [11].

Si  $\varphi$  es continua en  $(-\infty, +\infty)$  de manera que  $\varphi(\xi)\exp(-K\xi^2)$  sea acotada, entonces la integral definida

$$(30) \quad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi$$

es una solución de la ecuación del calor  $u_{xx} - u_t = 0$  que es holomorfa en la banda limitada por  $t = \tau$  y  $t = \tau + \frac{1}{4K}$ , y tiende hacia  $\varphi(x_0)$  cuando el punto  $(x,t) \rightarrow (x_0,\tau)$ , siendo este último resultado conocido también como *fórmula de Poisson*. Además, si  $\varphi(\xi)\exp(-K\xi^2)$  es acotada para toda constante positiva  $K$ , entonces  $u(x,y)$  es holomorfa en toda la región  $t > \tau$ . Lo mismo puede decirse si  $\varphi$  es acotada.

Por otra parte, si  $\varphi$  es discontinua en  $x_0$ , se tiene  $\lim_{t \rightarrow \tau^+} u(x_0,t) = \varphi(x_0)$ , en cambio no existe el límite de  $u(x,t)$  cuando  $(x,t) \rightarrow (x_0,\tau)$  con  $t > \tau$ .

Ahora estudiaremos el caso (11) en que la curva  $C$  está representada de la siguiente manera:

$$(31) \quad C \begin{cases} \xi = s(\tau) & , \text{ con } s \text{ función continua} \\ a < \tau < b & , \text{ con } a < b \end{cases}$$

Sea la siguiente integral definida:

$$(32) \quad \Phi(x,t) = \int_C K(x,t;s(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t \leq a \end{cases}$$

donde  $\varphi$  es una función continua en  $[a,b]$ .

La función  $\Phi$  satisface la ecuación del calor  $\Phi_{xx} - \Phi_t = 0$ , es de clase  $C^\infty$  en toda región del plano que no tenga ningún punto en común con la curva  $C$ , y es además continua cuando el punto  $(x,t)$  viene sobre la curva  $C$ , pues la integral (32) es uniformemente con-

vergente en un entorno de un punto cualquiera de este arco. En efecto, sea  $M = \sup_{\tau \in [a,b]} \varphi(\tau)$ , con lo cual se tiene:

$$(33) \quad |\Phi(x,t) - \Phi(x,t_0)| \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = M \sqrt{\frac{t-t_0}{\pi}}, \quad a \leq t_0 < t \leq b$$

que es pequeño con la diferencia  $(t - t_0)$ .

Otras propiedades que caracterizan a la función  $\Phi$  son:

LEMA 5 [11].

- i) Si  $t > b$  entonces  $\Phi$  es una función holomorfa de las dos variables  $(x,t)$ .
- ii) Si  $t \in (a,b)$  entonces  $\Phi$  es una función holomorfa de la variable  $x$ .
- iii) Si  $(x_0,t) \notin C$ ,  $\forall t \in [a,b]$ , entonces  $\Phi(x_0,t)$  es una función de clase  $C^\infty$  en  $(a,b)$ , pero no es, en general, una función holomorfa de la variable  $t$  en el caso en que  $\varphi$  sea sólo una función continua cualquiera. Más aún, llamando  $f(t) = \Phi(x_0,t)$ , ésta resulta ser una función de clase 2 de Holmgren en  $(a,b)$ , es decir:

$$(34) \quad \begin{cases} a) & f \in C^\infty(a,b) \\ b) & \exists M, r > 0 / |f^{(n)}(t)| < M \frac{(2n)!}{r^n}, \quad \forall t \in (a,b) \end{cases}$$

OBSERVACION 5.

El concepto de función de clase 2 fue introducido por Holmgren en sus trabajos [12,13]. Por otra parte, la clase 1 está formada por las funciones holomorfas, las cuales son también de clase 2.

Por otra parte, veremos que  $\Phi_x$  es discontinua cuando el punto  $(x,t)$  atraviesa la curva  $C$ , obteniéndose como consecuencia la importante fórmula del salto (43).

La derivada de  $\Phi$  respecto de  $x$  está dada por:

$$(35) \quad \begin{cases} \Phi_x(x,t) = \int_a^t K_x(x,t;s(\tau),\tau) \varphi(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} \Psi(x,t) \\ \Psi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \varphi(\tau) \frac{x-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau \end{cases}$$

La función  $\Psi$  es una solución de la ecuación del calor  $\Psi_{xx} - \Psi_t = 0$  y regular en toda la banda  $a < t < b$  excepto sobre la curva  $C$ . Se puede extender su definición a todo el plano  $(x,t)$  tomando  $\varphi(\tau) = 0$ ,  $\forall \tau > b$ . De esta forma resulta ser una función holomorfa de la variable  $x$  para cada  $t = \text{cte}$ . Además, si  $(x_0, t) \notin C$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , entonces  $\Psi(x_0, t)$  es una función de  $t$  de clase 2 de Holmgren en  $(a, b)$ .

A continuación veremos una propiedad auxiliar. Sea  $F$  la función definida por:

$$(36) \quad F(x, t) = \int_a^t \frac{x-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau,$$

integral que tiene sentido cuando  $(x, t) \in C$ , es decir para  $x = s(t)$  con  $t \in [a, b]$ ; por otra parte veremos que  $F(x, t)$  tiende hacia límites diferentes según que el punto  $(x, t)$  esté a la derecha o a la izquierda de la curva  $C$ .

LEMA 6.

Si  $s \in C^1(a, b)$ , entonces se tiene el resultado siguiente:

$$(37) \quad \lim_{x \rightarrow s(t)^\pm} F(x, t) = F(s(t), t) \pm 1$$

donde  $+(-)$  significa que el punto  $x$  se mueve por la derecha (izquierda) de  $s(t)$  para cada  $t \in (a, b)$ .

DEMOSTRACION. Sea

$$(38) \quad F_1(x, t) = \int_a^t -2 \frac{s'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau.$$

que resulta ser continua sobre la curva  $C$  por ser una integral que tiene la forma ya estudiada en (32).

Además, haciendo los cambios de variables  $z = \frac{x-s(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}$  y  $z = \frac{s(t)-s(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}$  se obtienen respectivamente:

$$(39) \quad F(x, t) + F_1(x, t) = \int_{\frac{x-s(a)}{2\sqrt{t-a}}}^{+\infty} 4 \exp(-z^2) dz,$$

$$(40) \quad F(s(t), t) + F_1(s(t), t) = \int_{\frac{s(t) - s(a)}{2\sqrt{t-a}}}^0 4 \exp(-z^2) dz \quad .$$

Pasando al límite cuando  $x \rightarrow s(t)^\pm$  y teniendo en cuenta (39) y (40) y que  $F_1$  es continua, se deduce que:

$$\lim_{x \rightarrow s(t)^\pm} F(x, t) - F(s(t), t) = 4 \int_0^{\pm + \infty} \exp(-z^2) dz = \pm 2\sqrt{\pi}$$

que resulta ser (37), resultado que en forma más explícita se reduce a:

$$(41) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow s(t)^\pm} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \frac{x-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{s(t) - s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(s(t) - s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau \pm 1 \quad . \end{aligned}$$

Esta última expresión es un caso particular de la conocida fórmula del salto que obtendremos a continuación.

LEMA 7 [11].

Si  $s \in C^1(a, b)$  y  $\varphi$  es Lipschitz en  $(a, b)$  entonces se tiene la siguiente fórmula del salto:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow s(t)^\pm} \Psi(x, t) &= \pm \varphi(t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \varphi(\tau) \frac{s(t) - s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{(s(t) - s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau \quad . \end{aligned} \right.$$

que resulta ser equivalente a la siguiente expresión:

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow s(t)^\pm} \int_a^t \varphi(\tau) K_x(x, t; s(\tau), \tau) d\tau &= \\ &= \mp \frac{\varphi(t)}{2} + \int_a^t \varphi(\tau) K_x(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau \quad . \end{aligned} \right.$$

DEMOSTRACION. (EJERCICIO 7)

Utilizar la descomposición siguiente:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t [\varphi(\tau) - \varphi(t)] \frac{x - s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - s(\tau))^2}{(t-\tau)}\right] d\tau +$$

$$+ \frac{\varphi(t)}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \frac{x - s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau$$

y aplicar el resultado anterior al segundo sumando para obtener (42).

#### OBSERVACION 6.

En [7,8], la fórmula del salto es obtenida bajo las hipótesis:

$$(44) \quad \varphi \in C^0(a,b) \quad , \quad s \text{ Lipschitz en } (a,b)$$

las cuales son más débiles que las exigidas en el Lema 7 pero con una demostración muchísimo más laboriosa.

#### COROLARIO 8.

Si la curva  $C$  es un segmento paralelo al eje  $t$  ( $s(t) \equiv x_0$ ,  $\forall t \in (a,b)$ ), entonces la integral del segundo miembro en (42) es nula y por lo tanto se tiene:

$$(45) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \int_a^t \varphi(\tau) K_X(x, t; x_0, \tau) d\tau = \mp \frac{\varphi(t)}{2} .$$

#### IV. ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA FORMULA DE GREEN. ESTUDIO DE LA UNICIDAD.

Sean:

$$(46) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(v) = v_{xx} - v_t : \text{ operador del calor,} \\ \mathcal{L}^*(v) = v_{xx} + v_t : \text{ operador adjunto del calor.} \end{cases}$$

#### LEMA 9.

Si  $u, v$  son dos funciones regulares en un dominio  $D$  del plano  $x, t$  cuya frontera es  $\partial D$ , entonces se tiene la fórmula de Green siguiente:

$$(47) \quad \iint_D [v \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}^*(v)] dx dt = \oint_{\partial D} uv dx + (vu_x - uv_x) dt .$$

#### DEMOSTRACION.

Se utiliza el teorema de Green en el plano teniendo en cuenta la igualdad:

$$(48) \quad v \mathcal{L}(u) - u \mathcal{L}^*(v) = (vu_x - uv_x)_x - (uv)_t .$$

#### COROLARIO 10 (EJERCICIO 7).

1) Si  $\mathcal{L}(u) = 0$  y  $\mathcal{L}^*(v) = 0$ , entonces se tiene:

$$(49) \quad \oint_{\partial D} uv \, dx + (v u_x - u v_x) dt = 0 \quad .$$

Casos particulares para  $v = 1, x, x^2 - 2t$  se obtienen respectivamente:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \oint_{\partial D} u \, dx + u_x \, dt = 0 \quad , \quad \text{(ii)} \quad \oint_{\partial D} xu \, dx + (x u_x - u) dt = 0 \\ \text{(iii)} \quad \oint_{\partial D} u(x^2 - 2t) dx + [(x^2 - 2t)u_x - 2xu] dt = 0 \quad . \end{array} \right.$$

2) Si  $\mathcal{L}(u) = 0$ ,  $v = 1$  y se toma la relación de Green para  $u^2$  en tonces se tiene:

$$(51) \quad 2 \iint_D u_x^2 \, dx \, dt = \oint_{\partial D} u^2 \, dx + 2uu_x \, dt \quad .$$

Como una consecuencia importante de (51) se deduce la unicidad en el problema de frontera móvil siguiente:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en } D = \{(x,t) / s_1(t) < x < s_2(t) \quad , \quad a < t < b\} \\ u(x,0) = h(x) \quad , \quad s_1(a) \leq x \leq s_2(a) \\ u(s_2(t), t) = f_2(t) \quad , \quad a < t < b \\ u(s_1(t), t) = f_1(t) \quad , \quad a < t < b \end{array} \right.$$

donde  $f_1, f_2, h$  son funciones continuas y  $s_1, s_2$  son funciones Lipschitz con  $s_1 < s_2$  (hipótesis bajo las cuales veremos que existirá solución).

LEMA 11.

Si el problema (52) tiene soluciones regulares en  $D$ , entonces to das coinciden.

DEMOSTRACION.

Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones regulares de (52). Sea  $z = u_2 - u_1$  que satisface  $\mathcal{L}(z) = 0$  en  $D$  y  $z/\partial_p D = 0$  en la frontera parabólica  $\partial_p D$  de  $D$ . Sea  $P = (x_0, t_0) \in D$  y sean  $P_2 = (s_2(t_0), t_0)$  y  $P_1 = (s_1(t_0), t_0)$ . Consideremos como  $D'$  el dominio  $D \cap \{t < t_0\}$ . En tonces, utilizando (51) para  $z$  y el conjunto  $D'$ , se tie ne:

$$(53) \quad 2 \iint_{D'} z_x^2 dx dt + \int_{s_1(t_0)}^{s_2(t_0)} z^2(x, t_0) dx = 0 \quad ,$$

con lo cual  $z \equiv 0$  en  $\overline{D'}$ . Como el punto  $(x_0, t_0)$  es arbitrario en  $D$ , se obtiene la unicidad para el problema (52).

#### EJERCICIO 8.

Demostrar la unicidad en el problema (52) utilizando el principio del máximo (ver Cursillo C2). Este método, consistente en utilizar el hecho de que la función  $z$  (ver demostración del Lema anterior) no puede tener ni máximo ni mínimo en el interior de  $D$ , era ya conocido a principios de siglo (ver [9, p. 372]).

#### OBSERVACION 7.

Un tercer método para demostrar la unicidad de soluciones regulares en el problema (52) ha sido utilizado. Sean  $D$  y  $z$  como en el Lema 11. Sea la integral

$$(54) \quad J(t) = \frac{1}{2} \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z^2(x, t) dx \quad , \quad t \in [a, b] \quad ,$$

realizada sobre el segmento  $(s_1(t), s_2(t))$ . Entonces, se tiene:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dJ}{dt}(t) &= \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z z_t dx = \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z z_{xx} dx = \\ &= - \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z_x^2 dx \leq 0 \quad , \quad \forall t \in (a, b) \quad . \end{aligned} \right.$$

Como  $z(x, a) = 0$ ,  $\forall x \in [s_1(a), s_2(a)]$ , se obtiene  $J(a) = 0$  y por lo tanto  $J(t) \leq 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . Por hipótesis  $J$  es no negativa, con lo cual  $J \equiv 0$  en  $[a, b]$ . De la continuidad de  $z$  se deduce que  $z \equiv 0$ , de donde surge la unicidad del problema (52).

#### OBSERVACION 8.

Siempre hemos supuesto que las soluciones son regulares (hipótesis de continuidad necesarias para que los métodos y procedimientos utilizados sean aplicables). Un análisis de las hipótesis para que cada uno de los tres métodos utilizados para la demostración de la unicidad de solución en (52) sea posible, está realizado en la conferencia [3].

los inconvenientes surgen por la existencia de las llamadas *soluciones singulares*; éstas son aquellas funciones, soluciones de la ecuación del calor, que tienden a cero cuando uno se acerca a la frontera normalmente, sin ser ellas mismas idénticamente nulas. Por ejemplo, la función

$$(56) \quad \psi(x,t) = \frac{x}{2t\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) .$$

es una solución singular para la ecuación del calor  $u_{xx} - u_t = 0$ , en el dominio  $x > 0$ ,  $t > 0$ . Obsérvese que  $\psi$  no es continua en  $(0,0)$ .

#### OBSERVACION 9.

Un nuevo método, consistente en aplicar el Teorema de punto fijo de Banach, ha sido utilizado para probar la unicidad (y por ende, la existencia) de solución en un problema de frontera móvil con condiciones de contorno no-lineales [5] (ver el Ejemplo 5, que será tratado más adelante).

#### LEMA 12.

Sea  $D$  el dominio definido en (52) y sean

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_t = \{(x,\tau) / s_1(\tau) < x < s_2(\tau), a < \tau < t\}, \quad t \in (a,b) \\ A = (s_1(a), a), \quad B = (s_2(a), a) \\ P = (s_1(t), t), \quad Q = (s_2(t), t) \\ \partial_p D_t = \widehat{PABQ} : \text{frontera parabólica de } D_t \\ \partial D_t = \partial_p D_t \cup \widehat{QP} : \text{frontera de } D_t . \end{array} \right.$$

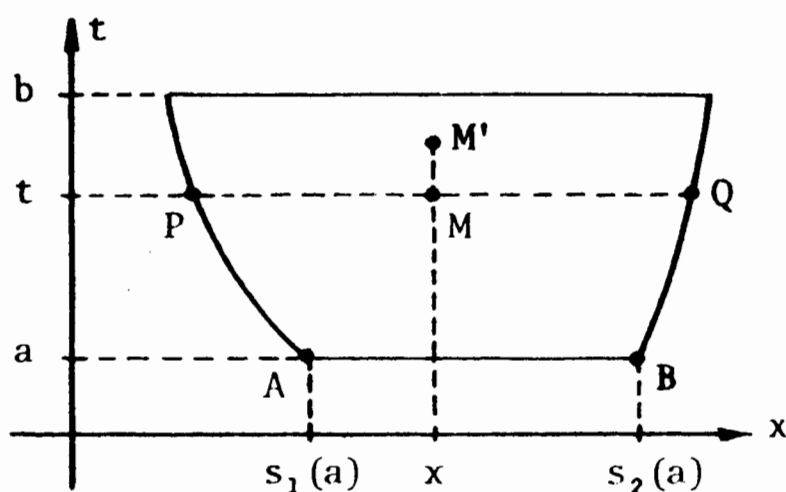
Si  $u$  es una solución regular de la ecuación del calor  $u_{xx} - u_t = 0$  en  $D$ , entonces se tiene para  $u$  la representación integral siguiente:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = \int_{\partial_p D_t} K(x,t;\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi + \\ + \left[ K(x,t;\xi,\tau) u_\xi(\xi,\tau) - u(\xi,\tau) K_\xi(x,t;\xi,\tau) \right] d\tau . \end{array} \right.$$

#### DEMOSTRACION.

Sean  $M = (x,t) \in D$  y  $M' = (x,t+h) \in D$  con  $h > 0$  destinado a tender a 0. Si se utiliza la fórmula (47) tomando  $u = u(x,t)$  (que satisface la ecuación del calor  $\mathcal{L}(u) = 0$ ),  $v = K(x,t+h;\xi,\tau)$  (que





satisface la ecuación adjunta del calor  $\mathcal{L}^*(v) = 0$  ) y se reemplazan las variables  $x, t$  por las  $\xi, \tau$  entonces se obtiene

$$(59) \quad \int_{PQ} u(\xi, \tau) K(x, t+h; \xi, \tau) d\xi = \int_{PABQ} uv d\xi + (v u_{\xi} - u v_{\xi}) d\tau$$

El primer miembro de (59) tiene por límite  $u(x, t)$  cuando  $h \rightarrow 0^+$  pues  $s_1(t) < x < s_2(t)$  ; en cambio el límite del segundo miembro de (59) se obtiene rápidamente por continuidad, obteniéndose de este modo (58).

#### OBSERVACION 10.

La fórmula (59) no da la solución al problema de contorno (52) pues el segundo miembro no puede ser calculado si no se conoce simultáneamente  $u$  y  $u_{\xi}$  a lo largo de las curvas  $s_1$  y  $s_2$  . Sin embargo , se puede eliminar  $u_{\xi}$  sobre toda porción de contorno compuesto de un segmento de recta (ver [11, p. 321]).

De la solución fundamental  $K$  se definen:

$$(60) \quad \begin{cases} G(x, t; \xi, \tau) = K(x, t; \xi, \tau) - K(-x, t; \xi, \tau) : \text{Función de Green en } x > 0 \\ N(x, t; \xi, \tau) = K(x, t; \xi, \tau) + K(-x, t; \xi, \tau) : \text{Función de Neumann en } x > 0 \end{cases}$$

las cuales tienen las siguientes propiedades:

#### EJERCICIO 9.

$$(61) \quad \begin{cases} \text{i)} G_{\xi\xi} + G_{\tau} = 0 & , & \text{ii)} N_{\xi\xi} + N_{\tau} = 0 & , & \text{iii)} G_x = -N_{\xi} \\ \text{iv)} N_x = -G_{\xi} & , & \text{v)} G(x, t; 0, \tau) = 0 & , & \text{vi)} G(0, t; \xi, \tau) = 0 \\ \text{vii)} G_{\xi}(0, t; 0, \tau) = 0 & & & & \text{viii)} N_{\xi}(x, t; 0, \tau) = 0 \end{cases}$$

## EJERCICIO 10.

Si  $u = u(\xi, \tau)$  satisface  $u_{\xi\xi} - u_{\tau} = 0$ , entonces se tienen las siguientes identidades de Green:

$$(62) \quad \begin{cases} \text{i)} & (G u_{\xi} - u G_{\xi})_{\xi} - (G u)_{\tau} = 0 \\ \text{ii)} & (N u_{\xi} - u N_{\xi})_{\xi} - (N u)_{\tau} = 0 \end{cases}$$

las cuales serán útiles para problemas con condición de contorno tipo Dirichlet y Neumann respectivamente.

## EJERCICIO 11.

1) Si  $u$  es una solución regular del problema

$$(63) \quad \begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \text{ii)} & u(x, 0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq b = s(0) \\ \text{iii)} & u(s(t), t) = 0, \quad t > 0 \\ \text{iv)} & u(0, t) = f(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

se integra la identidad de Green (62 i) en el dominio  $D_{t, \epsilon} = \{(\xi, \tau) / 0 < \xi < s(\tau), \epsilon < \tau < t - \epsilon\}$  ( $\epsilon > 0$ ) y se realiza el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , entonces se obtiene la siguiente representación integral:

$$(64) \quad \begin{cases} u(x, t) = \int_0^b h(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi + \int_0^t f(\tau) G_{\xi}(x, t; 0, \tau) d\tau + \\ + \int_0^t u_{\xi}(s(\tau), \tau) G(x, t; s(\tau), \tau) d\tau \end{cases}$$

2) Si  $u$  es una solución regular del problema (63 bis) (problema (63) con la condición (63 ivbis) en lugar de la (63 iv), donde

$$(63 \text{ ivbis}) \quad u_x(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

se integra la identidad de Green (62 ii) en el dominio  $D_{t, \epsilon}$  y se realiza el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , entonces se obtiene la siguiente representación integral:

$$(65) \quad \begin{cases} u(x, t) = \int_0^t h(\xi) N(x, t; \xi, 0) d\xi - \int_0^t g(\tau) N(x, t; 0, \tau) d\tau + \\ + \int_0^t u_{\xi}(s(\tau), \tau) N(x, t; s(\tau), \tau) d\tau \end{cases}$$

## OBSERVACION 11.

Las fórmulas (64) y (65) serán utilizadas en el problema de Stefan a una fase para obtener la ecuación integral equivalente para la nueva función incógnita  $v(t) = u_x(s(t), t)$  (conocido como método de Friedman [7]) con condiciones de contorno (63 iv) y (63 iv bis) (ver Cursillo C5).

Como una consecuencia de todo lo visto anteriormente se deducen las siguientes propiedades [9-14].

## LEMA 13.

Si  $u$  es una solución regular de la ecuación del calor  $u_{xx} - u_t = 0$  en un dominio  $D$ , entonces:

- i) Todas las derivadas parciales de  $u$  son regulares en  $D$ .
- ii) A lo largo de un segmento  $t = \text{cte}$ , interior a  $D$ ,  $u$  es una función holomorfa en la variable  $x$ .
- iii) A lo largo de un segmento  $x = \text{cte}$ , interior a  $D$ ,  $u$  es una función de clase 2 de Holmgren en la variable  $t$  (lo mismo puede decirse para  $u_x$ ).
- iv) Inversamente, dadas dos funciones  $\varphi = \varphi(t)$  y  $\psi = \psi(t)$  de clase 2 de Holmgren en  $(a, b)$ , existe una única solución de la ecuación del calor que satisface las condiciones de Cauchy para  $x = x_0$ :

$$(66) \quad u(x_0, t) = \varphi(t), \quad u_x(x_0, t) = \psi(t)$$

y que es regular en el rectángulo limitado por las rectas  $t = a$ ,  $t = b$ ,  $x = x_0 \pm r$ , con  $r > 0$  convenientemente elegido. La única solución está dada por la serie uniformemente convergente:

$$(67) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{\varphi^{(n)}(t)}{(2n)!} (x-x_0)^{2n} + \frac{\psi^{(n)}(t)}{(2n+1)!} (x-x_0)^{2n+1} \right]$$

- v) La última propiedad vale también si se toma un arco de curva  $AB$ , representada por  $x = s(t)$ , holomorfa en  $t$  en el intervalo  $(a, b)$ , en lugar de un segmento paralelo al eje  $t$ . Si  $u$  es una solución regular de la ecuación  $u_{xx} - u_t = 0$  en un dominio  $D$  que contiene al arco  $AB$  en su interior, entonces la función  $u(s(t), t)$  es de clase 2 de Holmgren en  $(a, b)$ .

Inversamente, dadas dos funciones  $\varphi$  y  $\psi$  de clase 2 de Holmgren en  $(a, b)$ , existe una única solución de la ecuación del calor que resulta ser regular en un dominio que contiene al arco  $AB$  y es limitado por  $t = a$ ,  $t = b$ ,  $x = s(t) \pm r$ , con  $r > 0$  convenientemente elegido, y que satisface a lo largo de  $AB$  las

condiciones de Cauchy siguientes:

$$(68) \quad u(s(t), t) = \varphi(t) \quad , \quad u_x(s(t), t) = \psi(t) \quad .$$

OBSERVACION 12.

Los últimos resultados resultan útiles en el estudio del llamado *problema inverso de Stefan* (ver Cursillo C4).

## V. ALGUNOS EJEMPLOS DE EXISTENCIA DE SOLUCION.

Se analizará aquí la existencia de solución de algunos problemas de frontera móvil para la ecuación del calor, dados en una formulación bastante general, a través de las *ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie* [11, cap. 30], teoría que asegurará la existencia de solución bajo las hipótesis que se darán. Conviene recalcar que se supone que *las soluciones son representables por los potenciales de calor a través de la solución fundamental*, el cual no es el caso de las soluciones singulares (ver [3]). Por otra parte, la unicidad de solución se obtiene como consecuencia de algunos de los métodos vistos anteriormente. Se considerarán los siguientes problemas:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en } D = \{(x, t) / s(t) < x, a < t < b\} \\ \text{ii) } u(x, a) = 0 \quad , \quad x \geq s(a) \\ \text{iii) } u(s(t), t) = f(t) \quad , \quad a < t < b \end{array} \right.$$

donde  $f \in C^0(a, b)$  y  $s$  es una función Lipschitz en  $(a, b)$  .

Para la existencia de solución de (69), se representará a  $u$  como una integral del tipo (35), analizada anteriormente, de la forma siguiente:

$$(70) \quad u(x, t) = \int_a^t \lambda(\tau) K_x(x, t; s(\tau), \tau) d\tau$$

donde  $\lambda$  es una función continua a ser determinada en  $(a, b)$  .

La función  $u$  , definida por (70), es una solución regular en  $D$  de (69 i) , que verifica además la condición (69 ii). Para satisfacer la restante condición (69 iii) se utiliza la correspondiente fórmula del salto cuando  $x \rightarrow s(t)^+$  , obteniéndose de este modo la ecuación integral de Volterra de segunda especie siguiente:

$$(71) \quad -\frac{\lambda(t)}{2} + \int_a^t \lambda(\tau) K_X(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau = f(t) \quad , \quad t \in (a, b) \quad .$$

que determinará la función  $\lambda$  .

COROLARIO 14.

Si en el ejemplo 1), la frontera móvil es fija, es decir  $s(t) \equiv x_0$  ,  $\forall t \in (a, b)$  , entonces la ecuación integral (71) puede resolverse inmediatamente teniendo por solución a  $\lambda(t) = -2f(t)$  . Es decir que

$$(72) \quad u(x, t) = -2 \int_a^t f(\tau) K_X(x, t; x_0, \tau) d\tau$$

es la solución del problema:

$$(73) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & , \quad x > x_0 , \quad t > a \\ u(x, a) = 0 & , \quad x \geq x_0 \\ u(x_0, t) = f(t) & , \quad t > a \end{cases}$$

$$2) \quad (74) \quad \begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en } D = \{(x, t) / s_2(t) < x < s_1(t) , \quad a < t < b\} \\ \text{ii)} & u(x, a) = 0 \quad , \quad s_2(0) \leq x \leq s_1(0) \\ \text{iii)} & u(s_1(t), t) = f_1(t) \quad , \quad a < t < b \\ \text{iv)} & u(s_2(t), t) = f_2(t) \quad , \quad a < t < b \end{cases}$$

donde  $s_1, s_2$  y  $f_1, f_2$  son funciones Lipschitz y continuas en  $(a, b)$  respectivamente, con  $s_1 < s_2$  . Sin pérdida de generalidad se ha supuesto que la temperatura inicial es nula.

Para la existencia de solución de (74), se tratará de representar a  $u$  por una suma de dos integrales del tipo (35), analizadas anteriormente, de la forma siguiente:

$$(75) \quad u(x, t) = \int_a^t \lambda_1(\tau) K_X(x, t; s_1(\tau), \tau) d\tau + \int_a^t \lambda_2(\tau) K_X(x, t; s_2(\tau), \tau) d\tau$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2$  son dos funciones continuas a ser determinadas en el intervalo  $(a, b)$  .

La función  $u$  , definida por (75), es una solución regular en  $D$  de (75 i) , que verifica además la condición (75 ii) . Para satisfacer

las dos restantes condiciones (75 iii-iv) se utiliza la correspondiente fórmula del salto cuando  $x \rightarrow s_1^+(t)$  y  $x \rightarrow s_2^-(t)$  respectivamente. El sistema de ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie que se obtiene es el siguiente:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\lambda_1(t)}{2} + \int_a^t \lambda_1(\tau) K_X(s_1(t), t; s_1(\tau), \tau) d\tau + \\ + \int_a^t \lambda_2(\tau) K_X(s_1(t), t; s_2(\tau), \tau) d\tau = f_1(t) \\ \int_a^t \lambda_1(\tau) K_X(s_2(t), t; s_1(\tau), \tau) d\tau + \frac{\lambda_2(t)}{2} + \\ + \int_a^t \lambda_2(\tau) K_X(s_2(t), t; s_2(\tau), \tau) d\tau = f_2(t) \end{array} \right.$$

que determinará las funciones  $\lambda_1, \lambda_2$ .

#### EJERCICIO 12.

Resolver los problemas (69) y (74) considerando que la temperatura inicial es no nula, es decir:

$$(69 \text{ ii bis}) \quad u(x, 0) = h(x) \quad , \quad x \geq s(a) \quad \text{en el problema (69) ,}$$

$$(74 \text{ ii bis}) \quad u(x, 0) = h(x) \quad , \quad s_1(a) \leq x \leq s_2(a) \quad \text{en el problema (74) .}$$

$$3) \quad (77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en } D = \{(x, t) / 0 < x < s(t), 0 < t < T\} \\ \text{ii) } u(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b = s(0) \\ \text{iii) } u(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iv) } u_x(0, t) = g(t) \quad , \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

donde  $h \in C^0[0, b]$  ,  $g \in C^0(0, T)$  y  $s$  es una función Lipschitz en  $(0, T)$  con  $b > 0$ .

Para la existencia de solución de (77), se representará a  $u$  de la manera siguiente:

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = H(x, t) + \int_0^t K(x, t; 0, \tau) \lambda_1(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t K(x, t; s(\tau), \tau) \lambda_2(\tau) d\tau \\ \text{con } H(x, t) = \int_0^t K(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi \end{array} \right.$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2$  son dos funciones continuas a ser determinadas en el intervalo  $(0, T)$ .

La función  $u$ , definida por (78), satisface (77 i, ii). De las dos condiciones restantes resulta el sistema de ecuaciones integrales siguiente:

$$(79) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\frac{1}{2} \lambda_1(t) + \int_0^t K_X(0, t; s(\tau), \tau) \lambda_2(\tau) d\tau = g(t) - H_X(0, t) \\ \text{ii)} & \int_0^t K(s(t), t; 0, \tau) \lambda_1(\tau) d\tau + \int_0^t K(s(t), t; s(\tau), \tau) \lambda_2(\tau) d\tau = -H(s(t), t) \end{cases}$$

Verificar que (79 i, ii) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie (79 i, ii bis) (EJERCICIO 13), (ver [2]), donde:

$$(79 \text{ ii bis}) \quad \begin{cases} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k_1(t, \tau) \lambda_1(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k_2(t, \tau) \lambda_2(\tau) d\tau + \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda_2(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{H(s(\tau), \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \end{cases}$$

con

$$(80) \quad \begin{cases} k_1(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{K(s(y), y; 0, \tau)}{\sqrt{t-y}} dy \\ k_2(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{K(s(y), y; s(\tau), \tau)}{\sqrt{t-y}} dy \end{cases}$$

sistema que determinará las funciones  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Más aún, en [2] se demuestra que si  $h$  verifica además la condición

$$(81) \quad \exists N > 0 / 0 \leq h(x) \leq N(b-x), \quad \forall x \in [0, b]$$

entonces  $u_x(s(t), t)$  existe y es continuo en  $(0, T)$ . Este resultado será útil en el estudio teórico del problema de Stefan a una fase (ver Cursillo C5).

EJERCICIO 14.

i) Hallar la solución del problema

$$(82) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & x > s(t), & 0 < t < T \\ u(x, 0) = 0, & x \geq s(0) \\ u_x(s(t), t) = 0 & & 0 < t < T \end{cases}$$





$$(88) \begin{cases} \lambda_1(\tau) = \int_0^t K_{12}(t, \tau) \lambda_2(\tau) d\tau + f_1(t) \\ \lambda_2(\tau) = \int_0^t K_{21}(t, \tau) \lambda_1(\tau) d\tau + \int_0^t K_{22}(t, \tau) \lambda_2(\tau) d\tau + f_2(\tau) \end{cases} ,$$

con:

$$(89) \begin{cases} K_{12}(t, \tau) = 2K(0, t; s(\tau), \tau) \left[ \left( \frac{s(\tau)}{2(t-\tau)} \right)^2 - \frac{1}{2(t-\tau)} \right] \\ K_{21}(t, \tau) = -2K(s(t), t; 0, \tau) \\ K_{22}(t, \tau) = K(s(t), t; s(\tau), \tau) \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau} \\ f_1(t) = -\frac{h(b)}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{b^2}{4t}\right) + 2 \int_0^b h'(\xi) K(0, t; \xi, 0) d\xi - 2g(t) \\ f_2(t) = -2 \int_0^b h(\xi) K(s(t), t; \xi, 0) d\xi + 2\chi(t) \end{cases} .$$

A continuación se verá una aplicación del Ejemplo 4) al problema no-lineal siguiente:

$$5) \begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \text{ en } D = \{(x, t) / 0 < x < s(t), 0 < t < T\} \\ \text{ii)} & u(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b = s(0) \\ \text{iii)} & u(s(t), t) = \chi(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iv)} & u_x(0, t) = G(u(0, t), t) \quad , \quad 0 < t < T \end{cases} \quad (90)$$

donde  $h \in C^1[0, b]$  ,  $\chi \in C^0[0, T]$  ,  $G \in C^0(-\infty, +\infty) \times [0, T]$  ,  $s$  es Lipschitziana en  $[0, T]$  , con  $h(0) = 0$  ,  $h(b) = \chi(0)$  y  $b > 0$  .

Se considera el siguiente operador:

$$(91) \quad F : B_R \rightarrow B_R \quad / \quad F(y) = z$$

donde

$$(92) \begin{cases} B_R = \{y \in C^0[0, T] / \|y\| = \max_{0 \leq t \leq T} |y(t)| \leq R\} \\ z(t) = v(0, t) \text{ con } v = v(x, t) \text{ \u00fanica soluci\u00f3n de (82) tomando} \\ \text{do } g(t) = G(y(t), t) \end{cases} .$$

En [4] se demuestra que para un  $R > 0$  oportuno se puede aplicar el teorema de punto fijo de Schauder, con lo cual se garantiza la exis

tencia de solución en (90) (Ejercicio 16).

#### EJERCICIO 17.

Si además  $G = G(\xi, t)$  es una función monótona creciente de  $\xi \in (-\infty, +\infty)$  entonces aplicando el principio del máximo el problema (90) admite a lo sumo una solución.

#### OBSERVACION 13.

En [5] se demuestra que bajo ciertas hipótesis complementarias sobre  $G$ , la aplicación  $F$  es una contracción en  $[0, T]$  para un dato  $T$  convenientemente pequeño, llamado  $T_0$ . La constante de contracción  $k(T_0)$  y el mismo  $T_0$  no dependen del dato inicial con lo cual la demostración puede repetirse en  $[nT_0, (n+1)T_0]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) y por lo tanto se tiene la existencia y unicidad de solución en  $[0, T]$ , cualquiera sea  $T > 0$ , aplicando el Teorema de punto fijo de Banach. Además, se demuestran propiedades sobre dependencia continua y monótona de la solución respecto de los datos, existencia y unicidad en el caso en que  $s(0) = 0$ . En otro trabajo [6] se realizan estimaciones para  $u$  y sus derivadas.

#### REFERENCIAS

- [1] BLOCK, H., "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", Arkiv Matematik Astronomi Fysik, 6 N°31(1911), 1-42.
- [2] CANNON, J.R.-HILL, C.D., "Existence, uniqueness, stability, and monotone dependance in a Stefan problem for the heat equation", J. Math. Mech., 17(1967), 1-19.
- [3] DOETSCH, G., "Les équations aux dérivées partielles du tipe parabolique", Enseig. Math., 35(1936), 43-87.
- [4] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., "Esistenza e unicità della soluzione per una classe di problemi di diffusione con condizioni al contorno non lineari", Boll. U.M.I., 3(1970), 660-667.
- [5] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., "Su un problema unidimensionale di diffusione in un mezzo a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineari", Ann. Mat. Pura ed Appl., 93(1972), 333-357.
- [6] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., "La diffusione del calore in uno strato de spessore variabile in presenza di scambi termici non lineari con l'ambiente", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 50(1973), 269-330.
- [7] FRIEDMAN, A., "Free boundary problems for parabolic equations I.

- Melting of solids*", J. Math. Mech., 8(1959), 499-517.
- [8] FRIEDMAN, A., "Partial differential equations of parabolic type", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).
- [9] GEVREY, M., "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", J. Math. Pure Appl., (6) 9(1913), 305-471.
- [10] GEVREY, M., "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite)", J. Math. Pures Appl., (6)10(1914), 105-148.
- [11] GOURSAT, E., "Cours d'analyse mathématique", Gauthier-Villars, Paris (1927).
- [12] HOLMGREN, E., "Sur l'équation de la propagation de la chaleur", Arkiv Matematik Astronomi Fysik, 4 N°14(1908), 1-11.
- [13] HOLMGREN, E., "Sur l'équation de la propagation de la chaleur. Deuxième note", Arkiv Matematik Astronomi Fysik, 4 N° 18(1908), 1-28.
- [14] LEVI, E.E., "Sull'equazione del calore", Ann. Mat. Pura Appl., (3) 14(1908), 187-264.
- [15] REDOZUBOV, D.V., "On linear heat problems with one moving boundary", Soviet Physics-Technical Physics, 2(1957), 1993-2000.
- [16] REDOZUBOV, D.V., "The solution of linear thermal problems with a uniformly moving boundary in a semiinfinite region", Soviet Physics-Technical Physics, 5(1960), 570-574.
- [17] REDOZUBOV, D.V., "The solution of certain types of linear thermal problems in limited and semiinfinite regions with motion of the boundary according to a  $\beta\sqrt{t}$  law", Soviet Physics - Technical Physics, 7(1962), 459-461.
- [18] TARZIA, D.A., "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Mathematicae Notae, 29(1981-82), 147-241.

PROMAR (CONICET-UNR)  
 Instituto de Matemática "Beppo Levi"  
 Universidad Nacional de Rosario  
 Avenida Pellegrini 250  
 2000 ROSARIO - ARGENTINA

1875

1875

1875

1875

# Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico

Julio E. BOUILLET

Comenzaré refiriéndome al principio del máximo para el operador parabólico lineal - en una dimensión espacial -  $Lu := u_t - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x$ .

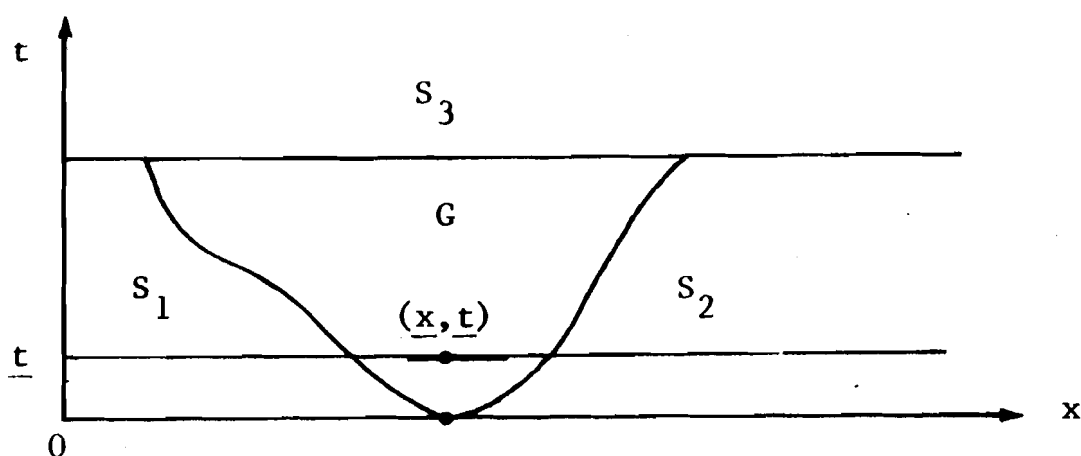
Es sabido que para soluciones de  $\Delta u = u_{xx} + u_{tt} = 0$  (en  $G$ , dominio acotado en las dos variables  $(x,t)$ , por ejemplo), si  $u < M$  en  $\partial G$  entonces  $u < M$  en  $G$ , y que si además  $u(x_0, t_0) = M = \max_{\bar{G}} u$ ,  $(x_0, t_0) \in G$ , entonces  $u \equiv M$ : es el llamado principio fuerte del máximo, y se deduce de la fórmula del promedio de Gauss:

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u dx, \quad \forall x \in G \quad \text{si} \quad \overline{B(x,r)} \subset G.$$

La situación es más complicada en el caso parabólico, y la ilustraremos en el caso de una variable espacial  $x$ . Supondremos siempre que  $Lu$  es uniformemente parabólico, eso es  $a(x,t) > \mu > 0$ , para  $(x,t) \in G$ ,  $G$  un dominio acotado, y que  $|b(x,t)| < B$ ,  $(x,t) \in G$ . Supondremos  $u \in C^2(G)$ .

Principio del Máximo: Para soluciones clásicas de  $Lu = u_t -$

-  $a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x < 0$  en  $G$  dominio acotado. Supondremos a  $G$  como en el dibujo. [ El resultado y el método se generalizan a dominios acotados cualesquiera, en cualquier número de variables, para operadores  $Lu := u_t - \mathcal{E}(x,t,u,Du,DDu) < 0$ , donde  $\mathcal{E}$  es una función con cierta propiedad de monotonía en las  $n^2$  variables ocupadas por  $DDu$ , siempre que las soluciones clásicas  $u$  tengan Hessiano  $DDu$  simétrico, y  $u \in C(\bar{G})$  ]



Teorema: Si  $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  y  $u(x,t) < M$  en  $S_1 \cup S_2$ , entonces  $u(x,t) < M$  en  $G \cup S_3$  también, ie, en  $\bar{G}$ .

Demostración: Sea  $v := u(x,t) - \epsilon(1+t)$ . Es claro que  $v < M$  en  $S_1 \cup S_2$ . Si fuera  $v > M$  en algún punto de  $G$ , sea

$$\underline{t} = \inf \{ t : \exists x : (x,t) \in G \text{ y } v(x,t) > M \}$$

como  $v < M - \epsilon$  en  $S_1 \cup S_2$ ,  $\underline{t} > 0$ . Entonces para todo  $(x,t) \in G$  con  $t < \underline{t}$  será  $v < M$ ; luego  $v(x,\underline{t}) < M$  por continuidad. Como existen  $(x_k, t_k)$ ,  $t_k \downarrow \underline{t}$ , tales que  $v(x_k, t_k) > M$ , y además  $v(x,\underline{t}) < M - \epsilon$  en  $S_1$  y  $S_2$ , luego existe  $(\underline{x}, \underline{t}) \in G$  tal que

$v = M = \max \{v(x,t), (x,t) \in G, t < \underline{t}\}$ . En este punto  $(\underline{x}, \underline{t})$ :

$$v_t = u_t - \varepsilon > 0, \quad v_x = u_x = 0, \quad v_{xx} = u_{xx} < 0,$$

y

$$0 > Lu(\underline{x}, \underline{t}) = u_t - au_{xx}(\underline{x}, \underline{t}) > \varepsilon > 0, \text{ absurdo.}$$

Entonces, con  $\varepsilon > 0$  arbitrario,  $u - \varepsilon(1+t) < M$  en  $G$ , luego  $u < M + \varepsilon(1+t)$ . Esto implica  $u < M$  en  $\bar{G}$ .

### El teorema del punto frontera

Supongamos que haya un punto de  $\partial G$ , que tomaremos como origen de coordenadas,  $(0,0) \in \partial G$ , tal que el triángulo

$$T(x_0, \alpha_0) := \{(x, t) : 0 < x < x_0, -\alpha_0 x \leq t < 0\}$$

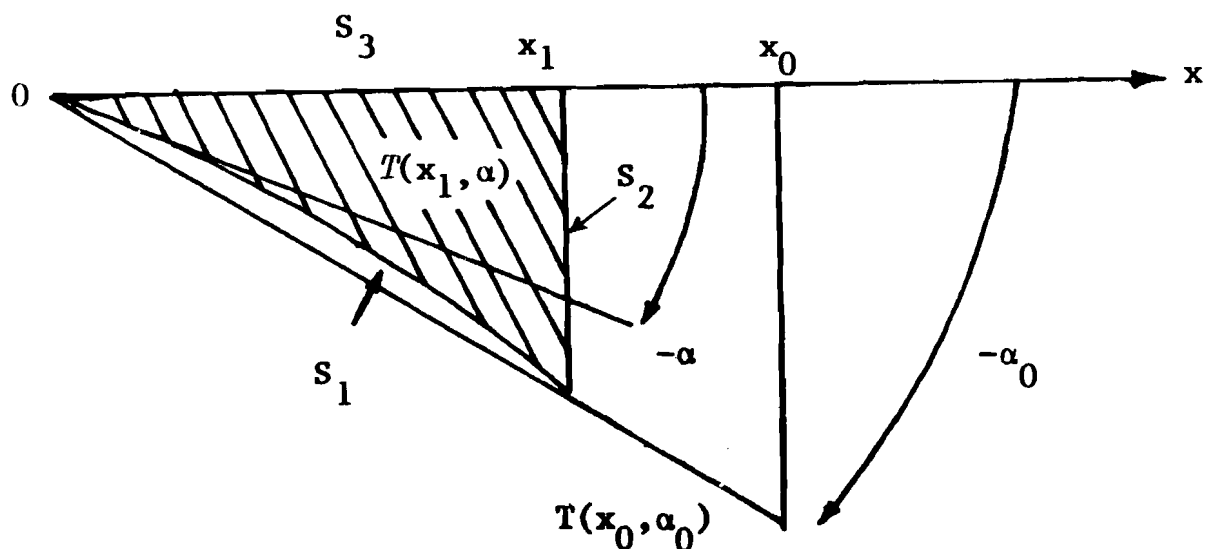
está contenido en  $G$ , y sea  $u(0,0) = M$ , y  $u(x,t) < M$  en  $T(x_0, \alpha_0)$ . Entonces  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{(0,0)} < 0$  para todo vector  $\bar{n}$  que penetre en  $T(x_0, \alpha_0)$ , si  $u$  es solución de  $Lu < 0$  en  $G$ . (N. B. El resultado se transcribe con modificaciones obvias al caso  $\{(x,t) : -x_0 < x < 0, \alpha_0 x < t < 0\} \subset G$ )

Demostración. Sea  $h = h(x,t) = t + \lambda x^2 + \alpha x$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$ . Entonces  $D_x h(x,0) = 2\lambda x + \alpha$  y  $D_x h(0,0) = \alpha > 0$ ;  $Lh = 1 - 2\lambda a(x,t) + b(x,t)(2\lambda x + \alpha) < 1 + B(2\lambda x + \alpha) - 2\lambda a < 1 + B(2\lambda x + \alpha) - 2\lambda \mu$ .

Luego si  $x < \frac{1}{\lambda}$  y  $\lambda > \frac{1}{2\mu} (1 + B(2 + \alpha))$ ,  $Lh < 0$ .

Sea entonces  $\alpha < \alpha_0$  y  $x_1 < \frac{1}{\lambda} < \frac{2\mu}{1+B(2+\alpha)}$  tales que

$$T(x_1, \alpha) := \{(x, t) : 0 < x < x_1 < x_0, -\lambda x^2 - \alpha x < t < 0\} \subset T(x_0, \alpha_0)$$





$$\begin{aligned} \partial T(x_1, \alpha) &= \{t = -\lambda x^2 - \alpha x, 0 < x < x_1\} \cup \{x = x_1, -\lambda x_1^2 - \alpha x_1 < t < 0\} \\ &\cup \{0 < x < x_1, t = 0\} \\ &= S_1 \cup S_2 \cup S_3. \end{aligned}$$

Como  $u < M$  en  $S_2$ ,  $\exists \delta_{x_1} : u < M - \delta_{x_1}$ . Por otra parte  $h(x, t) = t + \lambda x^2 + \alpha x$ ,  $h(x_1, t) = t + \lambda x_1^2 + \alpha x_1$  está acotada sobre  $S_2$ , de modo que para un  $\epsilon > 0$ ,  $u + \epsilon h < M$  sobre  $S_2$ .

Sobre  $S_1$  es  $h(x, t) = 0$ , y  $S_1 \subset T(x_0, \alpha_0)$ , luego  $u < M$  y  $u + \epsilon h < M$  si  $t < 0$ , siendo  $(u + \epsilon h)(0, 0) = M$ . Como  $L(u + \epsilon h) < 0$ , por el principio del máximo preliminar, será  $u + \epsilon h < M$  en  $T(x_1, \alpha)$ ,  $(u + \epsilon h)(0, 0) = M$ .

Ahora si el vector  $\bar{n} = (n_1, n_2)$  "atraviesa" a  $T(x_1, \alpha)$ , es decir, si  $\frac{n_2}{n_1} > -\alpha$ ,  $n_2 < 0$ , entonces

$$0 > \frac{\partial}{\partial \bar{n}} (u + \epsilon h)(0, 0) = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(0, 0) + \epsilon (\alpha n_1 + n_2), \text{ luego}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(0, 0) < -\epsilon (\alpha n_1 + n_2) < 0. \quad \underline{\text{c.q.d.}}$$

Es fácil ver que la elección de  $x_1$  es posible cualquiera sea  $\alpha < \alpha_0$ , dado que  $D_x h(0, 0) = \alpha$ . Luego el resultado vale para cualquier vector  $\bar{n}$  que atraviese a  $T(x_0, \alpha_0)$ .

Dado el sentido de evolución que presentan las soluciones  $u(x, t)$  de  $Lu = 0$ , por ej., es suficiente el resultado anterior con  $n_2 < 0$  (i.e., la derivada en una dirección que apunta hacia atrás en  $t$ )

No obstante, es posible extender este resultado al caso en que, por ejemplo, el triángulo

$$\{(x,t) : 0 < x < x_0, -\alpha_0 x < t < \beta_0 x, \alpha_0 > 0, \beta_0 > 0\} \subset G,$$

$u < M$  en él y  $u(0,0) = M$ .

La hipótesis usada en el teorema es algo así como una condición de Lipschitz "hacia atrás" en  $t$ , verificada en el punto  $(0,0) \in \partial G$  por la frontera  $\partial G$ .

#### Observaciones:

1. Es interesante notar que no basta pedir que  $\partial G$  tenga una condición de cono ( ó triángulo) local:

Ejemplo: Sean  $\alpha > \beta > 0$ , y  $G$  el dominio comprendido en  $x_0 > x > 0$  entre las rectas  $\alpha x - t = 0$  y  $\beta x - t = 0$ . Sea  $L := u_t - u_{xx}$  y  $u(x,t) = (\alpha x - t)(\beta x - t)$ . Es fácil ver que  $u < 0$  en  $G$ ,  $u(0,0) = 0$ ,  $Lu < 0$  (si  $x_0$  es pequeño) en  $G$ , y toda derivada direccional de  $u$  es cero en  $(0,0)$ . Otro tanto ocurre si  $0 > \alpha > \beta$ .

2. El teorema es *falso* para las ecuaciones elípticas y parabólicas en más de 2 variables: (hay que exigir una frontera mejor)

Ejemplo:  $u(x,y) = -x.y$  es negativa en el primer cuadrante,  $u(0,0) = 0$ ,  $\Delta u = 0 = u_t - \Delta u$ , y toda derivada es 0 en  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Multiplicando las ecuaciones de dos planos del espacio  $(x,y,t)$  se obtienen contraejemplos parabólicos donde el máximo no sea alcanzado

en una paralela al eje  $t$ .

3. Si la condición de triángulo "tipo Lipschitz hacia atrás" es reemplazada por otra de tipo Hölder, el resultado del teorema, para la única derivada interior  $D_x u$ , puede ser falso:

Ejemplo:  $u(x,t) = -x(t + \frac{1}{2}x^2)$  es solución de  $u_t = \frac{1}{3} u_{xx}$ ; para  $x > 0$ ,  $t > -\frac{1}{2}x^2$ , es  $u < 0$ ,  $u(0,0) = 0$  y  $u_x(0,0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(0,0)$  para todo  $\bar{n} = (n_1, n_2)$ ,  $n_2 > 0$ .

Aquí la frontera es Hölder de exponente  $1/2$  en  $(0,0)$ . (como función de  $t$ ). Es claro que el mismo contraejemplo es válido para exponentes  $< 1/2$ .

En cambio, no conozco ejemplos ni contra ejemplos al teorema para fronteras que tengan un exponente Hölder en  $(1/2, 1)$ .

4. El teorema del punto frontera se demuestra, en el caso de varias variables espaciales, bajo la hipótesis de existencia de esfera tangente interior al dominio  $G$  en el punto de la frontera donde se alcanza el máximo, y empleando el teorema que sigue, que en nuestra exposición es consecuencia de aquel. Consecuencia de este teorema será que, en un punto de la frontera de  $G$  en las antedichas condiciones donde  $u = \sup_G u$ , toda derivada interior a  $G$  deberá ser  $< 0$ .

En el caso que tratamos sólo puedo dar como referencia del teorema del punto frontera a una observación y apéndice en el trabajo "Stefan problem with a convective boundary condition" de A. D. Solomon, V. Alexiades, D. G. Wilson, Quarterly Appl. Math. XL(2), July 1982.

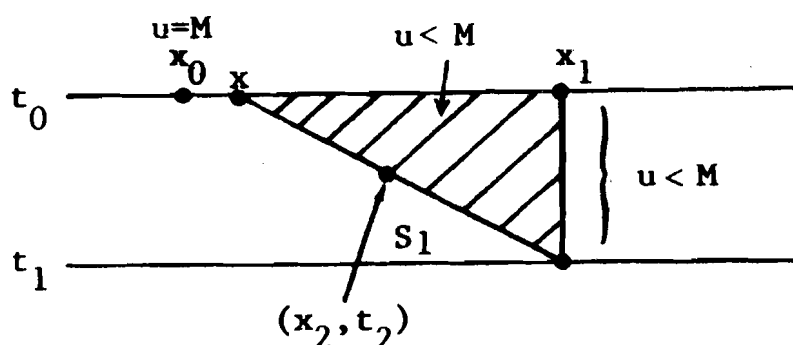
Principio fuerte del Máximo.

Sea ahora un dominio  $G$  arbitrario y  $u(x_0, t_0) = M = \sup_G u$ ,  $(x_0, t_0) \in G$ ,  $Lu < 0$  en  $G$ . Entonces

(i)  $u(x, t_0) = M$  en la componente conexa de  $G \cap \{t_0\}$  que contiene a  $(x_0, t_0)$ ; y

(ii)  $u(x_0, t) = M$ ,  $t < t_0$ , en la componente conexa de  $G \cap \{x_0\}$  que contiene a  $(x_0, t_0)$ .

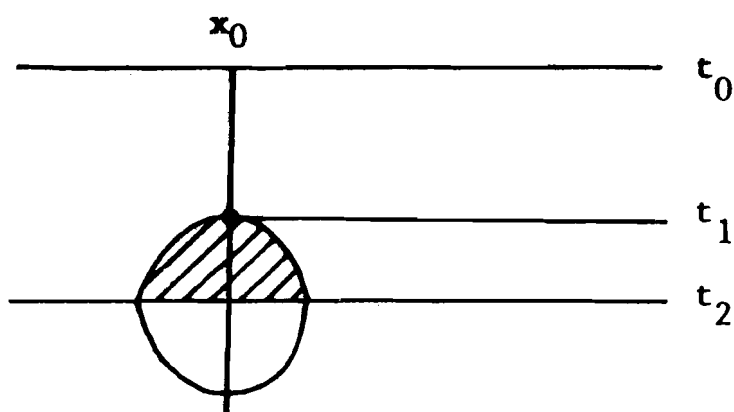
Demostración de (i). Supongamos por contradicción que en  $(x_1, t_0)$ ,  $x_0 < x_1$ , sea  $u(x_1, t_0) < M$ .



Entonces por continuidad,  $u(x_1, t) < M$  en un segmento cerrado

$\{x_1\} \times (t_1, t_0) \subset G$ , convenientemente pequeño para que el triángulo cerrado  $(x_0, t_0), (x_1, t_0), (x_1, t_1)$  esté contenido en  $G$ . Desplacemos ahora el punto  $(x, t_0)$ , de  $x_1$  a  $x_0$ , hasta que el triángulo ahora determinado toque un punto  $(x_2, t_2) \in G$  donde  $u = M$  (posiblemente  $(x_0, t_0)$ ):  $(x_2, t_2)$  debe estar en el segmento  $S_1 \setminus \{(x_1, t_1)\}$ . Aplicando el teorema del punto frontera al triángulo  $(x_2, t_2), (x_1, t_2), (x_1, t_1)$  se obtiene  $\text{grad } u(x_2, t_2) \neq 0$ ,  $u(x_2, t_2) = M = \text{máximo interior a } G$ , donde  $u$  es diferenciable, absurdo.

Demostración de (ii). Nuevamente supongamos que  $u(x_0, t_1) < M$ ,  $t_1 < t_0$ .



Por continuidad hay un entorno de la forma  $(t-t_1) \leq -\lambda(x-x_0)^2, t < t_1$ , simétrico con respecto a  $t_2$ , (ver dibujo) y contenido en  $G$ , donde  $|t_1-t_2|$  será determinado de modo que si  $h(x,t) := -\{(t-t_1) + \lambda(x-x_0)^2\}$ ,  $Lh(x,t) = -1 + 2\lambda a(x,t) - \lambda^2(x-x_0)b(x,t) \leq -1 + 2\lambda(A + |x-x_0|B) < 0$  si  $\lambda$  es pequeño y lo mismo  $|x-x_0| = \sqrt{\lambda^{-1}(t_1-t_2)}$ . Haciendo  $t_1 \nearrow t_0$ , y manteniendo constante  $|t_1-t_2|$ , se tocará un  $(x_3, t_3)$  del borde del entorno, donde  $u(x_3, t_3) = M$ : si  $x_3 \neq x_0$ , entonces se puede colocar la región triangular dentro del entorno (donde  $u < M$ ) y llegar a la contradicción  $\text{gradu}(x_3, t_3) \neq 0$ , como antes.

Si en cambio  $x_3 = x_0$ , será, dentro del entorno,  $u < M - \delta_{t_2}$  en  $t = t_2$ , y si  $h(x,t) = -\{(t-t_3) + \lambda(x-x_0)^2\}$ ,  $u + \epsilon h < M$  en  $t = t_2$ ,  $u + \epsilon h = u < M$  en los lados, luego  $u + \epsilon h < M$  en toda la mitad superior del entorno y  $u + \epsilon h = M$  en  $(x_0, t_3)$ .

Pero entonces

$$0 < \frac{\partial}{\partial t} (u + \epsilon h)(x_0, t_3) = \frac{\partial u}{\partial t} (x_0, t_3) + \epsilon(-1),$$

es decir  $\frac{\partial u}{\partial t} (x_0, t_3) > \epsilon$ : si  $(x_0, t_3) \in G$  esto es absurdo.

### Observaciones:

1. El resultado del principio fuerte sigue siendo válido si el punto

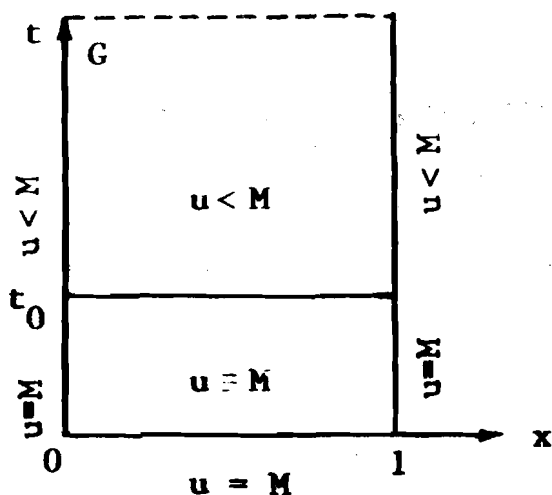
$(x_0, t_0) \in S_3$  en nuestra primera figura, supuesto que  $Lu < 0$  se verificase en  $G \cup S_3$  ( la "tapa"  $S_3$  de un dominio  $G$  acotado se define como aquellos  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \partial G$  para los cuales  $\{(x, t) : t < \bar{t}, |x - \bar{x}|^2 + (t - \bar{t})^2 < \epsilon\} \subset G$  para algún  $\epsilon > 0$ ): la parte (i) de la demostración sigue válida. En la parte (ii) la conclusión  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_3) > \epsilon$  no es contradictoria si  $t_3 = t_0$  y  $(x_0, t_0) \in S_3$ ; pero como allí se verifica la inecuación,

$$0 > Lu(x_0, t_0) = (u_t - a(x_0, t_0)u_{xx} + b(x_0, t_0)u_x(x_0, t_0)) >$$

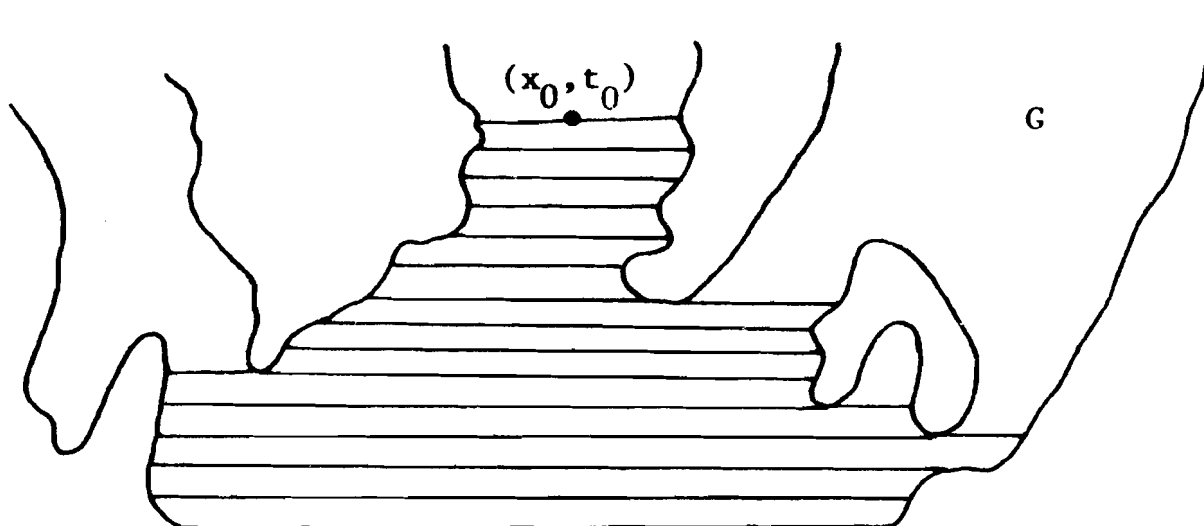
$$> u_t(x_0, t_3) > \epsilon > 0,$$

pues  $u_x(x_0, t_0) = 0$  y  $u_{xx}(x_0, t_0) < 0$ , por ser  $(x_0, t_0)$  un máximo de  $u(x, t_0)$  como función de  $x$ .

2. Es posible que una solución  $u(x, t)$  de, por ejemplo,  $u_t - u_{xx} = 0$  sea constante en una subregión de  $G$  sin serlo idénticamente en  $G$ : ver figura adjunta: Puesto que los datos son  $u < M$  para  $t > t_0$ , debe ser  $u < M$  en  $t > t_0$ , por el teorema del punto frontera.



3. Ejemplo: Si  $u(x_0, t_0) = M = \sup_G u$ , entonces  $u \equiv M$  en la zona rayada



4. Este principio fuerte del máximo sólo involucra entornos de puntos interiores a  $G$ , donde  $u = \sup_G u$ . Sus conclusiones son válidas, por lo tanto, con sólo suponer  $0 < \mu_K < a(x, t) < A_K$ ,  $|b(x, t)| < B_K$ , para todo compacto  $K \subset G$ .

5. La parabolicidad uniforme  $a(x, t) > \mu > 0$  es esencial en el principio fuerte del máximo y en el del punto frontera, como podría verse estudiando la solución autosemejante  $v = v(x/\sqrt{t})$  de  $v_t = (v^\alpha v_x)_x$ ,  $0 < \alpha < 1$ , con  $v(0, t) = 1$ ,  $v(x, 0) = 0$ . Es sabido que  $\exists a > 0$  tal que  $v = v_x = 0 = \text{mín } v$  si  $x = a \cdot \sqrt{t}$  (basta comenzar con un  $t_0 > 0$  para tener datos continuos).

Es obvio que se alcanza el mínimo  $v = 0$  en el interior del dominio, con  $v_x = 0$ .

6. El teorema del punto frontera es válido si  $a(x, t)$  no se mantiene acotado en el punto. En cambio, el principio fuerte del máximo no lo es:

Ejemplo (Walter):

$$u_t = k(t)u_{xx}, \quad k(t) = \frac{2}{1-t} \quad \text{si } t < 1, \quad k(t) > 0 \quad \text{si } t > 1$$

y  $G = (0, \pi) \times (0, T)$ ,  $u(x, t) = (1-t)^2 \text{sen } x$  si  $0 < t < 1$ ,  $u(x, t) = 0$  si  $t > 1$ .

Estos teoremas son válidos para operadores lineales  $Lu$  en varias variables, bajo hipótesis convenientes. Para el teorema del punto frontera se pide la existencia en el punto de una esfera tangente a  $\partial G$  cuyo interior  $\subset G$ . [Referencias: Protter-Weinberger: "Maximum Principles in Differential equations", Prentice-Hall, 1967 - W. Walter: "Differential and integral inequalities", Springer, 1970 - A. Friedman: "Partial Differential Equations of Parabolic Type", Prentice-Hall, 1964. Hay también resultados relativos a ecuaciones no hiperbólicas (ni lineales, en general) en los cuales  $u(x, t) = M = \max\{u, (x, t) \in \bar{G}\}$  implica  $u \equiv M$  en cierta subregión de  $G$ : R. Redheffer, Indiana U. Math. J. (21), 3, 1971.]

Estos resultados sobre el principio del máximo en sus dos versiones y el teorema de la derivada en el punto de la frontera son frecuentemente empleados en la teoría de ecuaciones parabólicas de segundo orden, tanto para problemas de contorno, asegurando unicidad de las soluciones (ver por ejemplo las referencias de Protter-Weinberger y Friedman) como para problemas de frontera libre, como se verá en otras lecciones de este Seminario.



# Soluciones autosemejantes

## con cambio de fase

Julio E. BOUILLET

I. El título de estas lecciones se refiere a las soluciones de la forma  $u = u(x,t) = u(x/\sqrt{t}) = u(\eta)$ ,  $\eta = x/\sqrt{t}$ , de la ecuación

$$(1) \quad D_t E(u) = D_{xx} \alpha(u)$$

para  $x > 0$ ,  $0 < t < T$ . Aquí  $E(u)$  podría tener el significado de una energía por unidad de volumen, habitualmente

$$E(u) = \int_0^u C(s)\rho(s)ds,$$

donde  $C$  es capacidad calórica y  $\rho$  densidad, supuestas ambas funciones de  $u$ . En cuanto a  $\alpha(u)$ , recordemos que la ecuación de la conducción del calor podría escribirse

$$(2) \quad C(u)\rho(u)D_t u = D_x(k(u)D_x u)$$

cuando la conductividad  $k$  también depende de la temperatura  $u$ : entonces  $\alpha(u) = \int_0^u k(s)ds$  es la llamada variable de Kirchhoff, y es inmediato que (2) se puede escribir de la forma (1).

Querríamos, sin embargo, permitir que  $E$  y  $\alpha$  sean tan sólo funciones crecientes y acotadas de  $u$ , e interpretar el significado de los posibles saltos de  $E$ , por ejemplo: estarán relacionados con cambios de fase del medio que ocupa la semirrecta  $x > 0$ . Desde luego, hipótesis tan magras sobre los coeficientes de la ecuación (1) nos obligarán a interpretar la solución  $u = u(x/\sqrt{t}) = u(\eta)$  en un sentido generalizado.

Comencemos suponiendo que se pueden efectuar las derivaciones en (1): arribamos así a la ecuación ordinaria

$$(3) \quad -\frac{1}{2} \eta E(u)' = \alpha(u)'' \quad , \quad \text{donde } (.)' = \frac{d}{d\eta}(.).$$

Condiciones en  $x = 0$  y  $t = 0$ , compatibles con la hipótesis  $u = u(x/\sqrt{t})$  son tan sólo la especificación de los valores  $u(0)$  y  $u(+\infty)$ , que llamaremos respectivamente  $A > 0$  y  $0$ . Cualquier otro par de valores se reduce a éstos por un simple cambio de función incógnita. Supondremos siempre que  $E(0) = 0$  y  $\alpha(0) = 0$ , cosa que puede lograrse aún luego del cambio aludido, y, por supuesto, que tanto  $E$  como  $\alpha$  están definidas en  $[0, A]$  al menos.

Es costumbre interpretar a (1) en el "sentido de las distribuciones", a saber: se supone que  $E(u(x,t))$  y  $\alpha(u(x,t))$  son localmente integrables y

$$(4) \quad \forall \psi(x,t) \in C_0^\infty((0, +\infty) \times (0, T)), \iint \{D_t \psi \cdot E(u) + D_{xx} \psi \cdot \alpha(u)\} dx dt = 0.$$

Si en (4) se reemplaza  $\psi(x,t) = g(t) \cdot \phi(x/\sqrt{t})$ , con  $g \in C_0^\infty(0, T)$  y  $\phi \in C_0^\infty(0, +\infty)$  se llega - luego de unas cuantas integraciones por partes, empleando el soporte compacto de  $g$  y  $\phi$  para que desaparezcan

los términos integrados- a

$$(5) \quad \forall \phi(\eta) \in C_0^\infty(0, +\infty), \int \left\{ -\frac{1}{2}(\eta\phi(\eta))' E(u) + \phi''(\eta) \cdot \alpha(u) \right\} d\eta = 0,$$

donde se supone que  $E(u(\eta))$  y  $\alpha(u(\eta))$  son localmente integrables.

Esta es, precisamente, la forma de interpretar a (3) en el "sentido de las distribuciones". Nuevas integraciones por partes nos permiten escribir a (5) en la forma equivalente

$$(6) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0, +\infty), \int \phi''(\eta) \left\{ \alpha(u(\eta)) + \frac{1}{2} \int_0^\eta s E(u(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^\eta ds \int_0^s E(u(r)) dr \right\} d\eta = 0,$$

de la cual se deduce que, salvo posible redefinición en un conjunto de medida nula,

$$(7) \quad \alpha(u(\eta)) = -\frac{1}{2} \int_0^\eta s E(u(s)) ds + \frac{1}{2} \int_0^\eta ds \int_0^s E(u(r)) dr + K\eta + B,$$

para ciertas constantes  $K$  y  $B$  (Observemos que (7) se podría obtener integrando dos veces a (3), lo cual es otra forma de pensar en soluciones generalizadas).

Surge de (7) que la función compuesta  $V(\eta) := \alpha(u(\eta))$  debe ser absolutamente continua, y derivando,

$$(8) \quad V'(\eta) + \frac{1}{2}\eta E(u(\eta)) = \frac{1}{2} \int_0^\eta E(u(s)) ds + K \quad \text{p.p. } \eta,$$

luego  $h(\eta) := V'(\eta) + \frac{1}{2}\eta E(u(\eta))$  es también absolutamente continua (luego de posible redefinición en un conjunto de medida nula).

Volveremos en seguida sobre este hecho; observemos antes que entonces

$$(9) \quad (V'(\eta) + \frac{1}{2} \eta E(u(\eta)))' = \frac{1}{2} E(u(\eta)), \quad \text{p.p. } \eta \in (0, \infty).$$

Es fácil comprobar que las proposiciones (5), (6), (7), (8) y (9) son equivalentes si  $V(\eta)$  y  $h(\eta)$  son absolutamente continuas, y las emplearemos en forma indistinta para referirnos con precisión a una eventual solución  $u(\eta)$  de la ecuación (3). Aún no hemos dicho nada del significado de las condiciones de contorno.

Volvamos a (8) y a la continuidad de la función  $h(\eta) = V'(\eta) + \frac{1}{2} \eta E(u(\eta))$ , que escribiremos en la forma más familiar (ver (2))

$$(10) \quad k(u(\eta))u'(\eta) + \frac{1}{2} \eta E(u(\eta)).$$

Supongamos que  $E$  experimenta un salto en  $u = u_i \in (0, A)$ ,  $E(u_i^-) < E(u_i^+)$ ,  $E(u_i^+) - E(u_i^-) = L > 0$ . Supongamos que  $u_i = u(\eta_i)$ ,  $u(\eta)$  monótona, como se verá luego.

La continuidad de  $h(\eta)$  nos dirá que

$$(11) \quad k(u)u' + \frac{1}{2} E(u(\eta)) \Big|_{\substack{\eta = \eta_i^- \\ u = u_i^+}} = k(u)u' + \frac{1}{2} \eta E(u(\eta)) \Big|_{\substack{\eta = \eta_i^+ \\ u = u_i^-}}$$

La suposición de monotonía de  $u(\eta)$  hace que los límites

$$\frac{1}{2} \eta_i E(u(\eta_i^-)) = \frac{1}{2} \eta_i E(u_i^+) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \eta_i E(u_i^-)$$

existan, y por lo tanto también existen los límites de  $k(u(\eta))u'(\eta)$  a ambos lados, siendo

$$(12) \quad (k(u)u') \Big|_{\substack{\eta = \eta_i^+ \\ u = u_i^-}} - (k(u)u') \Big|_{\substack{\eta = \eta_i^- \\ u = u_i^+}} = \frac{1}{2} \eta_i (E(u_i^+) - E(u_i^-)) = \frac{1}{2} \eta_i \cdot L$$

Si recordamos que  $\eta = x/\sqrt{t}$ , (12) nos dice que a través de la curva  $x = \eta_i \sqrt{t} = s(t)$ , el flujo térmico (en el caso de la conducción de calor)  $-k(u)D_x u = -\frac{1}{\sqrt{t}} k(u)u'$  experimenta un salto que es proporcional a  $\dot{s}(t) = \frac{1}{2}\eta_i \frac{1}{\sqrt{t}}$ , siendo  $L$  - el "calor latente" del cambio de fase - la constante de proporcionalidad.

De la continuidad de  $h(\eta)$  también obtenemos -bajo supuesto de la monotonía de  $u(\eta)$  - que las anteriormente descritas son las únicas discontinuidades posibles para el flujo (de la solución auto-semejante)  $(k(u)u')(\eta) = \alpha(u(\eta))' = v'(\eta)$ , independientemente del comportamiento de  $k(u) > 0$ , o de la función monótona creciente  $\alpha$ . De paso, la solución autosemejante de un problema de conducción regido por (1) podrá tener, a lo sumo, una cantidad numerable de cambios de fase (¡menos mal!).

El caso  $u_i = 0$ , eso es,  $E(0) = 0$ ,  $E(0+) = L > 0$ , merece un comentario aparte: la mera hipótesis  $u(x, 0+) = 0$ , ó  $u(+\infty) = 0$  en nuestro caso autosemejante no asegura la unicidad de la solución: supongamos, por ejemplo, que  $E(u) = u + L$  para  $u > 0$ ,  $E(0) = 0$ ,  $L > 0$  y  $k(u) \equiv 1$ . (11) se reduce en este caso a

$$-u'(\eta_i) = \frac{1}{2} L \eta_i, \quad u(\eta_i) = 0 = u(\eta) \quad \text{si } \eta > \eta_i :$$

estamos en presencia de la solución del clásico problema de Stefan a una fase, cuando en  $t = 0$  el dominio  $x > 0$  está ocupado por hielo a  $0^\circ\text{C}$ .

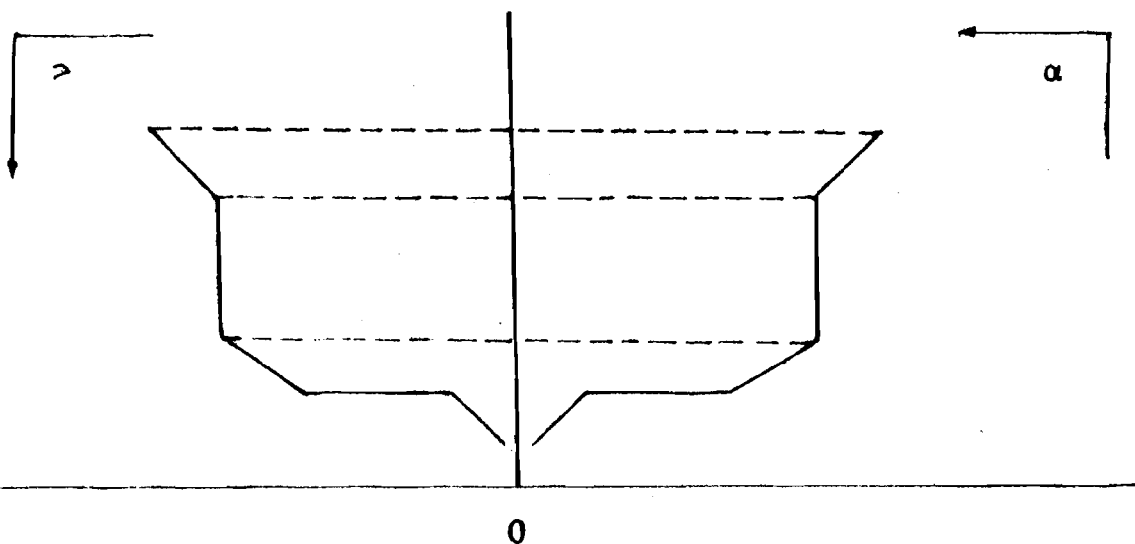
Pero  $\tilde{u}(\eta) = A \cdot \operatorname{erfc}(\eta/2)$  es otra solución de (9) (ó (3) para estos  $E$  y  $k$ ), que es *positiva* para todo  $\eta > 0$  y tiende a cero,  $\eta \rightarrow +\infty$ . Corresponde al problema de conducción térmica sin convec-

ción en un medio  $x > 0$  ocupado por *agua* a  $0^\circ\text{C}$ , y se obtendría tam  
bién con el coeficiente de energía modificado  $\tilde{E} \equiv u$ , es decir

$$\tilde{E}(s) = E(s) - E(0+) .$$

Por lo tanto, si  $E$  es discontinua en la temperatura inicial, corresponde especificar la energía del estado inicial, que tomaremos como  $E(0) = 0$ .

II. Hemos obtenido la noción de cambio de fase como propiedad de nuestra hipotética solución  $u(\eta)$  de, por ejemplo, (9), que hemos supuesto monótona decreciente. En realidad, *convendrá probar primero la monotonía de  $v(\eta) = \alpha(u(\eta))$ , y deducir de este hecho la unicidad de la solución de (5) - (9). Entonces la monotonía de  $u(\eta)$  es inmediata si  $\alpha$  admite una inversa a izquierda  $v$ , es decir si  $v(\alpha(u)) = u$  para todo  $u$ ; para ello  $\alpha$  no deberá ser constante en ningún intervalo, como lo indica la figura.*



Y sin embargo, puede resultar conveniente admitir que  $\alpha(u) = \int_0^u k(s) ds$  tenga intervalos donde  $\alpha = \text{constante}$ , eso es,  $k(s) = 0$ : veamos esto procediendo formalmente con la ecuación (3) supuesta en la forma

$$(13) \quad -\frac{1}{2} \eta E(u(\eta))' = (k(u(\eta)) u'(\eta))' = \alpha(u(\eta))'' .$$

Admitimos que  $E$  tiene una inversa a izquierda  $F$ , y definimos

$$(14) \quad v(\eta) := E(u(\eta)) : \text{ entonces } u(\eta) = F(v(\eta)) = F(E(u(\eta)))$$

y de (13) obtenemos

$$-\frac{1}{2} \eta v'(\eta) = (\{k(F(v(\eta)))F'(v(\eta))\}v'(\eta))' .$$

Poniendo  $k(v) := k(F(v))F'(v)$  resulta

$$(15) \quad -\frac{1}{2} \eta v'(\eta) = (k\tilde{\sim}(v(\eta))v'(\eta))' .$$

Si  $E$  experimenta un salto en  $u_i \in (0, A)$ , es fácil ver que  $F'(v) = 0$  en  $(E(u_i^-), E(u_i^+))$  y por lo tanto, también  $k\tilde{\sim}(v) = 0$  en este intervalo. Entonces  $\alpha\tilde{\sim}(v) = \int_0^v k\tilde{\sim}(s) ds = \text{constante en } (E(u_i^-), E(u_i^+))$ .

A la incógnita  $v(\eta) := E(u(\eta))$  de (14), (15) se la suele llamar variable "de entalpía". Bajo nuestras suposiciones provisionarias,  $v(\eta)$  es también una función monótona decreciente. Notemos que

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{\sim}(v) &= \int_0^v k\tilde{\sim}(s) ds = \int_0^v k(F(s))F'(s) ds = \int_0^{F(v)} k(F) dF = \\ &= \alpha(F(v)) = \alpha(u) . \end{aligned}$$

Si llevamos  $E(u(\eta)) = v(\eta)$  y  $\alpha\tilde{\sim}(v(\eta)) = \alpha(u(\eta))$  a la ecuación (7) obtendremos precisamente la versión generalizada de (15).

Dados a suponer, admitamos que el "flujo de la variable de entalpía"  $k\tilde{\sim}(v(\eta))v'(\eta)$  tiende a cero,  $\eta \rightarrow +\infty$  - es decir cuando  $v \rightarrow 0$  - y que se puede definir la función  $\eta(v)$  inversa de  $v(\eta)$ .

Resulta

$$-\frac{1}{2} \eta(v) = \left( \frac{k(v)}{\eta'(v)} \right)' ,$$

e integrando entre 0 y  $v$  y teniendo en cuenta que  $\frac{k(v)}{\eta'(v)} \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$ :



$$-\frac{1}{2} \int_0^v \eta(s) ds = \tilde{k}(v)/\eta'(v)$$

o bien

$$(16) \quad \eta'(v) \cdot \int_0^v \eta(s) ds = -2\tilde{k}(v), \quad v \in (0, E(A)).$$

Las condiciones de contorno son  $\eta(E(A)) = 0$ ,  $\eta > 0$ . La primera surge de  $u(0) = A$ , y la segunda es para descartar la solución negativa de (16), que correspondería al problema simétrico a (1) para  $x < 0$ .

(16) se presta para el enfoque numérico del problema autosemejante con cambio de fase, y fue empleada inicialmente para obtener soluciones autosemejantes particulares dando  $\eta(v)$  y obteniendo así  $\tilde{k}(v)$ . Que yo sepa, no fue usada sino muy recientemente para proporcionar resultados de existencia de solución para coeficientes  $\tilde{k}(\cdot) > 0$  e integrables en el intervalo de variación de  $v$ .

Además, definiendo  $U(x) := \int_0^x \eta(s) ds$ , (16) se transforma en una ecuación de segundo orden con singularidad no lineal

$$(17) \quad -U''(x) = \tilde{k}(x)/U(x), \quad x \in (0, E(A)).$$

Esta forma, además de facilitar ciertas demostraciones por el empleo de nociones de convexidad (signo de  $U''$ ), permite un enfoque unificado de diversos problemas de valores iniciales o de contorno y con fronteras libres relativos a la solución  $u(\eta) = u(x/\sqrt{t})$ .

III. Es otra la ecuación integral a la que quiero referirme, y constituye un útil valioso en el estudio del comportamiento de la solución  $u(\eta)$ . En su forma original fue introducida por F. V. Atkinson y L. P. Peletier en 1974, para hallar la función inversa  $\eta(u)$  de la solución de

$$-\frac{1}{2} \eta u'(\eta) = (k(u(\eta))u'(\eta))' .$$

En nuestra presentación, para  $E$  y  $\alpha$  monótonas crecientes, constituye además una linda aplicación del uso de la integral de Stieltjes-Lebesgue y sus propiedades de cambio de variables, tal como se la encuentra en el libro de Análisis Funcional de F. Riesz y B. Sz. Nagy, cap. III, nos. 57 y 58.

La deducción de esta ecuación es bastante artificiosa, pero no lo era menos la de su versión original, restringida al caso en que  $\int_0^A (k(s)/s) ds = +\infty$ .

Comencemos suponiendo que la función  $v(\eta) := \alpha(u(\eta))$  es monótona (decreciente) y pensemos a  $\alpha$  y a  $v$  (ver figura en II) como gráficos, completando los saltos mediante paralelas a los ejes, como hace F. Riesz en el libro citado. Sean  $\bar{v}$  y  $\underline{v}$  las funciones monótonas tales que  $\underline{v} < v < \bar{v}$ , con  $\underline{v} = v = \bar{v}$  en los puntos donde  $v$  es función continua (es útil observar que, para todo  $x$ ,  $\underline{v}(x) = \limsup_{s \rightarrow x^-} v(s)$  y  $\bar{v}(x) = \liminf_{s \rightarrow x^+} v(s)$ ).

Entonces

$$(18) \quad \underline{v}(V(\eta)) < u(\eta) < \bar{v}(V(\eta)),$$

$$\text{y} \quad E(\underline{v}(V(\eta))) < E(u(\eta)) < E(\bar{v}(V(\eta))).$$

De (8) resulta  $K = V'(0+) < 0$ ,

$$(19) \quad 0 > V'(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^\eta (E(u(s)) - E(u(\eta))) ds + K$$

entonces

$$(20) \quad -K > \frac{1}{2} \int_0^\eta (E(u(s)) - E(u(\eta))) ds > \frac{1}{2} \int_0^\eta (E(\underline{v}(V(s))) - E(\bar{v}(V(\eta)))) ds$$

pero si  $V(s) > V(\eta)$  y  $s < \eta$ ,  $\underline{v}(V(s)) > \bar{v}(V(\eta))$ , y donde  $V(s) = V(\eta)$  con  $\eta_1 < s < \eta < \eta_2$  deberá ser  $V'(\eta) = 0$  (por la supuesta monotonía de  $V$ ), luego  $\frac{1}{2} \int_{\eta_1}^\eta (E(u(s)) - E(u(\eta))) ds = \text{constante} = \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^\eta E(u(s)) ds - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) E(u(\eta))$ , de donde  $E(u(\eta))$  es derivable p.p. y  $E(u(\eta))' = 0$ , eso es,  $E(u(\eta)) = \text{constante}$  en  $(\eta_1, \eta_2)$ . En ambos casos resulta

$$-K > \frac{1}{2} \int_0^\eta (E(u(s)) - E(u(\eta))) ds > 0$$

y por lo tanto  $0 > V'(\eta) > K$  para todo  $\eta$ .

Recordando entonces que

$$h(\eta) := V'(\eta) + \frac{1}{2}\eta E(u(\eta)) \quad \text{y} \quad h'(\eta) = \frac{1}{2} E(u(\eta))$$

(ver (9)) resulta:

$$h'(\eta) - \frac{1}{\eta} h(\eta) = -\frac{V'(\eta)}{\eta},$$

$$\left(\frac{h(\eta)}{\eta}\right)' = -\frac{V'(\eta)}{\eta^2},$$

e integrando

$$(21) \quad h(\eta) = \eta \int_\eta^\infty \frac{V'(s)}{s^2} ds + \frac{1}{2}\eta E(u(+\infty))$$

es decir

$$(22) \quad -V'(\eta) + \eta \int_{\eta}^{\infty} \frac{V'(s)}{s^2} ds = \frac{1}{2} \eta (E(u(\eta)) - E(u(+\infty)))$$

y ahora podemos asegurar que si  $V'(\eta) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &\geq \eta \int_{\eta}^{\infty} \frac{V'(s)}{s^2} ds = \frac{1}{2} \eta (E(u(\eta)) - E(u(+\infty))) = \\ &= \frac{1}{2} \eta E(u(\eta)) \geq 0 \end{aligned}$$

lo cual implica  $V(s) = \alpha(u(s)) = \text{constante}$  en  $(\eta, +\infty)$ ,

$E(u(s)) = 0$  si  $s \in (\eta, +\infty)$ . (aquí estamos usando la condición  $E(u(+\infty)) = 0$  "inicial" en  $\eta = +\infty$  si  $E$  tiene un salto en  $0 = E(0) < E(0+)$ , ver observación al final de I).

(23) Se deduce que si  $V(\eta) > \inf \{V(\eta), \eta > 0\}$  entonces  $V'(\eta) < 0$

y  $V(\eta) = \alpha(u(\eta))$  es estrictamente decreciente; luego para ningún  $\eta$  el valor  $u(\eta)$  puede pertenecer a un intervalo  $(u_1, u_2)$  donde  $\alpha = \text{constante}$ :  $u(\eta)$  tiene entonces saltos correspondientes a los intervalos de constancia de  $\alpha > 0$ , y  $v(\alpha(u(\eta))) = u(\eta)$ : esta igualdad se verifica salvo un conjunto numerable de  $\eta$ .

Resumiendo: si logramos probar que  $V(\eta)$  es monótona, entonces para toda solución generalizada  $u(\eta)$  de (9) es  $v(V(\eta)) = v(\alpha(u(\eta))) = u(\eta)$ .

Pero - casos patológicos aparte - examinemos la igualdad (21), con  $E(u(+\infty)) = E(0) = 0$ , como advertimos.

Resulta poniendo  $\alpha(u(\eta)) = V(\eta)$ ,

$$\frac{\alpha(u(\eta))'}{\eta} + \frac{1}{2} E(u(\eta)) = \int_{\eta}^{\eta(0)} \frac{\alpha(u(s))'}{s^2} ds,$$

$$- 2 \frac{\alpha(u(\eta))'}{\eta} = E(u(\eta)) + 2 \int_{\eta(0)}^{\eta} \frac{\alpha(u(r))'}{r^2} dr ,$$

$$\eta = - 2 \frac{\alpha(u(\eta))'}{E(u(\eta)) + 2 \int_{\eta(0)}^{\eta} \frac{\alpha(u(r))'}{r^2} dr}$$

e integrando entre  $\eta$  y  $\eta(A)$ :

$$- \frac{1}{2} \eta^2 = - 2 \int_{\eta}^{\eta(A)} \frac{\alpha(u(\eta))' d\eta}{E(u(\eta)) + 2 \int_{\eta(0)}^{\eta} \frac{\alpha(u(r))' dr}{r^2}}$$

pero (por (7))  $\alpha(u(\eta))$  es absolutamente continua con respecto a  $\eta = \eta(x)$ , la función inversa a  $u$ . Luego (ver Riesz-Nagy, N° 58),

$$(24) \quad (\eta(x))^2 = 4 \int_x^A \frac{d\alpha(u)}{E(u) + 2 \int_0^u \frac{d\alpha(r)}{(\eta(r))^2}} , \quad x \in (0, A] .$$

Esta es la ecuación integral buscada, satisfecha por la función inversa  $\eta(x)$  de la solución supuesta  $u$  (cuya unicidad está aún por verse).

Probemos ahora que  $\eta(x)$  nos suministra una solución de (9), si  $\eta(x)$  satisface (24). Necesitamos un lema.

Lema.  $\alpha(u)$  es absolutamente continua con respecto a  $\eta(u)$  en  $(a, A_1)$ ,  $0 < a < A_1 < A$ , supuesto  $\eta(a) < +\infty$  (ver definiciones en Riesz-Nagy, N° 58).

Demostración. Sean  $(a_k, b_k)$  intervalos disjuntos contenidos en  $(a, A_1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} (\eta(a_k) - \eta(b_k))(\eta(a_k) + \eta(b_k)) &= 4 \int_{a_k}^{b_k} \frac{d\alpha(u)}{E(u) + 2 \int_0^u \frac{d\alpha(t)}{(\eta(t))^2}} > \\ &= \frac{4}{E(b_k) + 2 \int_0^{b_k} \frac{d\alpha(t)}{(\eta(t))^2}} \cdot |\alpha(b_k) - \alpha(a_k)| ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\alpha(b_k) - \alpha(a_k)| &\leq \frac{1}{4} (E(\bar{A}) + \frac{2}{(\eta(A_1))^2} \alpha(A_1)) \cdot 2\eta(a) \cdot |\eta(b_k) - \\ &= \eta(a_k)| \leq \frac{1}{4} M(a, A_1) \cdot |\eta(b_k) - \eta(a_k)| \end{aligned}$$

Luego  $\sum |\eta(b_k) - \eta(a_k)| \rightarrow 0$  implica  $|\alpha(b_k) - \alpha(a_k)| \rightarrow 0$ .

De (24) obtenemos

$$(\eta(x))^2 - (\eta(A_1))^2 = 4 \int_x^{A_1} \frac{d\alpha(u)}{E(u) + 2 \int_0^u \frac{d\alpha(t)}{(\eta(t))^2}} ,$$

$$0 < a < x < A_1 < A$$

$$= 4 \int_{\eta(x)}^{\eta(A_1)} \frac{\alpha(u(\eta))' d\eta}{E(u(\eta)) + 2 \int_0^u \frac{d\alpha(t)}{(\eta(t))^2}} , \quad \eta(x) > \eta(A_1) .$$

(aquí hemos usado el Lema y el resultado ya citado de Riesz-Sz. Nagy).

Nuevamente,

$$(\eta(x))^2 - (\eta(A_1))^2 = 4 \int_{\eta(x)}^{\eta(A_1)} \frac{\alpha(u(\eta))' d\eta}{E(u(\eta)) + 2 \int_{\eta(0)}^{\eta} \frac{\alpha(u(s))' ds}{(\eta(u(s)))^2}} .$$

Recordando que  $\eta(u(s)) = s$ , y derivando con respecto a  $\eta = \eta(x)$ ,

$$(26) \quad 2\eta = -4 \frac{\alpha(u(\eta))'}{E(u(\eta)) + 2 \int_{\eta(0)}^{\eta} \frac{\alpha(u(s))' ds}{s^2}}$$

es decir

$$-\frac{1}{2}\eta E(u(\eta)) - \eta \int_{\eta(0)}^{\eta} \frac{\alpha(u(s))' ds}{s^2} = \alpha(u(\eta))',$$

donde  $\alpha(u(\eta))$  es absolutamente continua con respecto a  $\eta$ , por el Lema, o bien

$$(27) \quad \alpha(u(\eta))' + \frac{1}{2}\eta E(u(\eta)) = \eta \int_{\eta}^{\eta(0)} \frac{\alpha(u(s))' ds}{s^2}.$$

(comparar con (22)).

Luego  $h(\eta) := \alpha(u(\eta))' + \frac{1}{2}\eta E(u(\eta))$  es absolutamente continua como función de  $\eta$ , y basta ver que la derivada del miembro derecho es

$$-\frac{\alpha(u(\eta))'}{\eta} + \int_{\eta}^{\eta(0)} \frac{\alpha(u(s))'}{s^2} ds = \frac{1}{2} E(u(\eta))$$

gracias a (26).

La arbitrariedad de la selección de  $a < A_1$ ,  $0 < a < u(\eta) < A_1 < A$  concluye la demostración. La integral  $\int_{\eta(0)}^{\eta}$  se obtiene como límite de  $\int_{\eta(a)}^{\eta}$ .

Hemos probado que para todo  $\eta$ ,  $0 < \eta < \eta(0) < +\infty$  la función  $u(\eta)$  obtenida por inversión del gráfico de  $\eta(x)$  es solución generalizada de la ecuación  $-\frac{1}{2}\eta E(u(\eta))' = \alpha(u(\eta))''$ , en el sentido (9). La misma ecuación (27) demuestra que si  $\eta(0) < +\infty$ ,  $u(\eta)$ , extendida como cero para  $\eta > \eta(0)$  es solución de (9) tal que  $u(0) = A$ ,  $u(+\infty) = 0$ .

Con otro cambio de variable, (24) se escribe también así:

$$(\eta(x))^2 = 4 \int_{\alpha(x)}^{\alpha(A)} \frac{d\alpha}{E(v(\alpha)) + 2 \int_0^{\alpha} \frac{dr}{(\eta(v(r)))^2}},$$

$$(28) \quad (\eta(v(V)))^2 = 4 \int_V^{\alpha(A)} \frac{d\alpha}{E(v(\alpha)) + 2 \int_0^\alpha \frac{dr}{(\eta(v(r)))^2}}$$

$$\eta(v(V)) = \sigma(V) \iff V = V(\sigma) = \alpha(\eta^{-1}(\sigma)) = \alpha(u(\sigma)).$$

La solución de (28) da, pues, la inversa de la variable de Kirchhoff. Emplearemos (28) para esbozar la demostración de existencia de solución de (24). Recordemos que  $u(\eta)$  elude (es decir, salta) los valores donde  $\alpha = \text{constante}$ . Por lo tanto, para nuestra soluciones generalizadas  $u(\eta)$ , es  $v(\alpha(u(\eta))) = u(\eta)$  pp. Resulta instructivo razonar sobre la figura de II.

Consideremos el operador  $T$  definido así

$$(29) \quad T\xi > 0, \quad (T\xi(V))^2 := 4 \int_V^{\alpha(A)} \frac{d\alpha}{E(v(\alpha)) + 2 \int_0^\alpha \frac{dr}{(\xi(r))^2}}, \quad V \in (0, \alpha(A)].$$

$T$  opera sobre las funciones decrecientes  $\xi(V)$ , con  $\xi(A) = 0$ , y es monótono, en el sentido que  $\xi_1 < \xi_2$  implica  $T\xi_1 < T\xi_2$ . Además

$$(T\xi(V))^2 < 4 \int_V^{\alpha(A)} \frac{d\alpha}{E(v(\alpha))} \quad \text{si} \quad V \in \text{soporte de } E \circ v$$

( $E \circ v$  es monótona creciente, así que soporte  $E \circ v = [V_0, A]$ ,  $V_0 > 0$ ).

Para demostrar que existe  $\xi$  tal que  $T\xi = \xi$  bastará probar la existencia de una función  $\xi_0(V)$  tal que  $T\xi_0 > \xi_0$ ; veremos además que si  $E \circ v = 0$  en  $(0, V_0)$ , entonces el punto fijo  $\xi = T\xi = +\infty$  en  $(0, V_0)$ .

Sea  $\xi_0(t) = \max \{ \lambda(V_0 - t), \mu(A - t) \}$ ,  $\lambda > \mu > 0$ . Sea  $t_0 = t_0(\lambda, \mu) < V_0$  tal que  $\lambda(V_0 - t_0) = \mu(A - t_0)$ .



Se ve que  $t_0 = \frac{\lambda V_0 - \mu A}{\lambda - \mu}$ ,  $V_0 - t_0 = \frac{\mu(A - V_0)}{\lambda - \mu}$ ,  $A - t_0 = \frac{\lambda(A - V_0)}{\lambda - \mu}$ . Vea

mos que eligiendo a  $\mu$  convenientemente, para todo  $\lambda > \mu$  se tiene

$T\xi_0 > \xi_0$ .

(30) Si  $t_0 < x < A$ ,

$$(T\xi_0(x))^2 = 4 \int_x^A \left\{ (E(v(s))) + \frac{2}{\lambda \mu} \frac{V_0^{-(\mu/\lambda)A}}{V_0(A - V_0)} - \frac{2}{\mu^2} \frac{1}{A - t_0} \right\} + \frac{2}{\mu^2(A-s)} \}^{-1} ds.$$

Existe un  $\mu > 0$  tal que el paréntesis (...) es  $> 0$  para todo  $\lambda > \mu$ , luego

$$(T\xi_0(x))^2 > (\mu(A-x))^2 = (\xi_0(x))^2 \text{ si } t_0 < x < A \text{ y,}$$

por la continuidad de  $T\xi_0(x)$ , y de  $\xi_0(x)$ ,

$$(T\xi_0(t_0))^2 > \mu^2(A-t_0)^2 = \lambda^2(V_0-t_0)^2.$$

(31) Si  $0 < x < t_0 < V_0$ ,

$$\begin{aligned} (T\xi_0(x))^2 &= 4 \int_x^{t_0} \left( 2 \int_0^s \frac{dt}{(\xi_0(t))^2} \right)^{-1} ds + (T\xi_0(t_0))^2 = \\ &= 2\lambda^2 \int_x^{t_0} \frac{ds}{(V_0-s)^{-1} - V_0^{-1}} + (T\xi_0(t_0))^2 > \\ &> \lambda^2(V_0-x)^2 - \lambda^2(V_0-t_0)^2 + (T\xi_0(t_0))^2 = \\ &= \lambda^2(V_0-x)^2 = (\xi_0(x))^2. \end{aligned}$$

Entonces la sucesión  $\xi_0 < T\xi_0 < \dots < T^n \xi_0 < \dots$  está acotada

superiormente para cada  $x \in (V_0, \alpha(A))$ , y aplicando dos veces el teorema de la convergencia acotada, se ve que su límite puntual  $\xi(x)$  satisface  $\xi = T\xi$ , como se buscaba. (Este límite será el único punto fijo de  $T$ , bajo condiciones que aseguren la unicidad de la solución de (5)-(9), dado que  $\alpha(u(\eta))$  se obtendrá por inversión de  $\xi(V) = \eta(v(V))$ , ver (28)).

Como  $\xi(x) > \xi_0(x)$  cualquiera sea  $\lambda > 0$ , resultará que  $\eta(v(V)) = +\infty$  en  $(0, V_0)$  si  $E_0 v = 0$  en  $(0, V_0)$ .

#### IV. Un teorema de comparaci3n y aplicaciones.

Consideremos (28) y (29), y supongamos  $E > E_1$  en  $(0, A)$ . Llamemos  $T_1$  al operador de (29) con  $E$  reemplazado por  $E_1$ .

Entonces

$$(T_1 \xi_0(x))^2 > 4 \int_x^{\alpha(A)} \frac{d\alpha}{E(v(\alpha)) + 2 \int_0^\alpha \frac{dt}{(\xi_0(t))^2}} = (T \xi_0(x))^2 > (\xi_0(x))^2,$$

Pero iterando resulta  $T_1^n \xi_0 > T^n \xi_0$ ,

$$(T_1^n \xi_0(x))^2 < 4 \int_x^{\alpha(A)} \frac{d\alpha}{E_1(v(\alpha))}, \quad x \in \text{soporte de } E_1 \circ v,$$

para todo  $n$ . Esto demuestra que el punto fijo  $\xi_1 = T_1 \xi_1$  satisface  $\xi_1(x) > \xi(x) = T \xi(x)$ , siendo  $\xi_1(x) = +\infty$  en  $(0, V_1)$  si  $E_1 \circ v = 0$  en  $(0, V_1)$ .

Es claro que, volviendo a (28), resultará  $\eta_1(v(V)) > \eta(v(V))$ , siendo  $\eta$  y  $\eta_1$  constantes donde  $\alpha$  es constante (los saltos de  $v$ ).

Tenemos entonces

(32) Teorema. Si  $E(u) > E_1(u)$ ,  $u \in (0, A)$ , entonces  $\eta_1(u) > \eta(u)$  ó, lo que es equivalente,  $u_1(\eta) > u(\eta)$ .

Si ahora  $E_{(n)}(u) \uparrow E(u)$ ,  $u \in (0, A]$ , entonces las respectivas  $\eta_{(n)}(u)$  cumplen

$$\eta_1(u) > \eta_2(u) > \dots > \eta_n(u) > \dots > \eta(u), \text{ luego}$$

$$\eta_n \downarrow \tilde{\eta} > \eta, \quad u \in (0, A), \text{ y}$$

$$\eta(u)^2 = 4 \int_u^A \frac{d\alpha(x)}{E(x) + 2 \int_x^{\alpha(t)} \frac{dt}{\eta_n(t)^2}} < 4 \int_u^A \frac{d\alpha(x)}{E(x) + 2 \int_0^x \frac{dt}{\eta_n(t)^2}},$$

que tiende a

$$4 \int_u^A \frac{d\alpha(x)}{E(x) + 2 \int_0^x \frac{d\alpha(t)}{\tilde{\eta}(t)^2}} \quad ; \text{ pero } \eta_n(u) \searrow \tilde{\eta}(u) \text{ , y}$$

$$\eta_n(u)^2 = 4 \int_u^A \frac{d\alpha(x)}{E_{(n)}(x) + 2 \int_0^x \frac{d\alpha(t)}{\eta_n(t)^2}} \searrow 4 \int_u^A \frac{d\alpha(x)}{E(x) + 2 \int_0^x \frac{d\alpha(t)}{\tilde{\eta}(t)^2}} .$$

Por la unicidad supuesta, debe ser  $\eta = \tilde{\eta}$  pp. Y vale un resultado análogo si  $E_n \searrow E$  : entonces  $\eta^{(n)}(u) \nearrow \eta(u)$  en  $(0, A]$ .

Ahora, si  $E_n \rightarrow E$  en  $(0, A)$ ,  $E, E_n$  monótonas crecientes,

$$(33) \quad E_{(n)} := \inf\{E, E_k, k > n\} < E_n, E < \sup\{E, E_k, k > n\} =: E^{(n)}$$

y también  $E_{(n)}, E^{(n)}$  son monótonas y  $E_{(n)} \nearrow E, E^{(n)} \searrow E$ , y las soluciones correspondientes

$$\eta_{(n)}(u) \nearrow \eta_n(u) \searrow \eta^{(n)}(u) \text{ ,}$$

$$\eta_{(n)}(u) \nearrow \eta(u) \searrow \eta^{(n)}(u) .$$

Se deduce que  $\eta_n(u) \rightarrow \eta(u)$  pp. en  $(0, A]$ . es decir, la dependencia continua de  $\eta$  con respecto a  $E$ .

Como todas las funciones son monótonas, la convergencia es uniforme en todo intervalo cerrado donde  $\eta(x)$  es continua (es decir, en todo  $[\epsilon, A]$ ,  $\epsilon > 0$ , si  $\alpha(\cdot)$  no posee saltos).

El mismo enunciado es válido para las  $u_n(\eta)$

Si tomamos  $-\frac{1}{2} \eta u'(\eta) = \alpha(u(\eta))$  , (28) se escribe

$$\begin{aligned} \eta(x)^2 &= 4 \int_x^A \frac{d\alpha(s)}{s + 2 \int_0^s \frac{d\alpha(r)}{\eta(r)^2}} = \\ &= 4 \int_\alpha^{\alpha(A)} \frac{d\tilde{\alpha}}{v(\tilde{\alpha}) + 2 \int_0^{\tilde{\alpha}} \frac{dt}{\eta(v(t))^2}} = \eta(v(\alpha))^2 . \end{aligned}$$

Sea  $\eta(v(\alpha)) =: \sigma(\alpha)$ , y

$$\sigma(\alpha)^2 = 4 \int_\alpha^{\alpha(A)} \frac{ds}{v(s) + 2 \int_0^s \frac{dt}{\sigma(t)^2}} .$$

Si ahora  $E_1 > v > E_2$ , en  $(0, \alpha(A)]$  el teorema (32) dice que

$$\sigma_1(\alpha) < \eta(v(\alpha)) < \sigma_2(\alpha), \quad \alpha \in (0, \alpha(A)]$$

$\sigma_i$  continuas, decrecientes *estrictas*. Como  $\eta$  es constante en el conjunto de valores de  $v(\alpha)$  que constituyen un segmento *vertical* de su gráfico (y corresponden a intervalos donde  $\alpha = \text{const.}$ ), estas desigualdades suministran sub y super funciones para  $\eta(x)$ ,  $x \in (0, A]$ :

$$\sigma_1(\alpha(x)) < \eta(x) < \sigma_2(\alpha(x))$$

En particular, si  $\alpha_{(n)}(x) < \alpha(x) < \alpha^{(n)}(x)$ , todos gráficos,  $x \in (0, A)$  y  $E_{(n)}$ ,  $v$ ,  $E^{(n)}$  son sus gráficos inversos, respectivamente, las igualdades anteriores dan

$$\sigma^{(n)}(\alpha) < \eta(v(\alpha)) < \sigma_{(n)}(\alpha) .$$

Con un razonamiento análogo al efectuado sobre  $E$  se deduce la

continuidad de la dependencia de  $\eta(x)$ , con respecto a  $\alpha$ , y consi  
deraciones similares a las ya efectuadas con respecto a la continui-  
dad de la dependencia de  $u(\eta)$  con respecto a variaciones de  $\alpha$ .

V. Vamos a dar condiciones que aseguren la monotonía de  $V(\eta) = \alpha(u(\eta))$ , suponiendo que  $u(\eta)$  sea solución de (9).

(34) Teorema. Si  $E$  y  $\alpha$  no tienen saltos comunes, entonces  $V(\eta)$  es monótona (y será decreciente en nuestras hipótesis).

Demostración. Supongamos que  $V(a) = V(b) = C$ ,  $0 < a < b < +\infty$  y  $V(\eta) > C$  en  $(a, b)$ . Probaremos que  $V(\eta) = C$  en  $(a, b)$ .

Recordemos que  $V(\eta)$  es absolutamente continua. Integrando por partes en (5) y sumando y restando  $E(v(C))$  se obtiene, para toda  $\phi(\eta)$  suave,  $\text{sop } \phi \subset (0, +\infty)$ ,

$$(35) \quad 0 = \int \phi'(\eta) V'(\eta) d\eta + \frac{1}{2} \int \phi'(\eta) \cdot \eta (E(u(\eta)) - E(v(C))) d\eta \\ + \frac{1}{2} \int \phi(\eta) (E(u(\eta)) - E(v(C))) d\eta .$$

Recordemos ahora las desigualdades (18): podemos suponer que  $C$  es un punto de continuidad de  $v$  (entonces  $v(C) = \underline{v}(C) = \bar{v}(C)$ ) y que  $v(C)$  es también punto de continuidad de  $E$ . Esto se debe a la hipótesis de que  $E$  y  $\alpha$  no saltan en el mismo valor de  $u$ , y por lo tanto el valor tomado por  $v$  en un intervalo  $C_1 < C < C_2$  donde  $v = \text{constante}$ , es un valor donde  $E$  es continua: este valor  $v = \text{constante}$  sería tal que  $\alpha(v)$  es un segmento vertical (ie, un salto de  $\alpha$ ). Si  $E$  tuviese un salto en  $v(C)$  y  $v$  no fuese constante alrededor de  $C$  - es decir, si  $\alpha$  no salta en  $v(C)$  - desplazando un poco el valor  $C$  se obtendría la situación deseada  $V(a_1) = V(b_1) = C_1$ ,  $V(\eta) > C_1$  en  $(a_1, b_1)$ , con  $E(v(C))$  continua en  $C_1$ , para nuevos valores de  $a_1 < b_1$  y  $C_1$ , y por la continuidad de  $V(\eta)$  tendríamos el resultado.

De (18) obtenemos

$$(36) \quad E(\underline{v}(V(\eta)))-E(v(C)) < E(u(\eta))-E(v(C)) < E(\bar{v}(V(\eta)))-E(v(C)).$$

Tomemos entonces  $\phi(\eta) = \phi_n(\eta)$ , lineal por trozos e igual a 1 en  $(a + 1/n, b - 1/n)$ , y nula fuera de  $(a, b)$ . La segunda integral de (35) da, por un lado, usando (36),

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \int_a^{a+1/n} \eta \{E(\underline{v}(V(\eta)))-E(v(C))\} d\eta &< \frac{n}{2} \int_a^{a+1/n} \eta \{E(u(\eta))-E(v(C))\} d\eta < \\ &< \frac{n}{2} \int_a^{a+1/n} \eta \{E(\bar{v}(V(\eta)))-E(v(C))\} d\eta . \end{aligned}$$

Por ser  $C$  un punto de continuidad de los integrandos, los extremos de estas desigualdades tienden a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Una conclusión análoga se aplica al extremo  $b$ .

La primera integral de (35) tiene límite inferior  $> 0$ : en el extremo  $a$  se obtiene

$$n \int_a^{a+1/n} V'(\eta) d\eta = n(V(a+1/n)-V(a)) > 0 ,$$

y en  $b$ ,

$$-n \int_{b-1/n}^b V'(\eta) d\eta = -n(V(b)-V(b-1/n)) > 0.$$

Luego  $\liminf \int \phi'_n(\eta) V'(\eta) d\eta > 0$ , de donde

$$(37) \quad \int \phi'_n(\eta) V'(\eta) d\eta > -\epsilon , \quad \epsilon > 0 \text{ arbitrario, para } n \text{ grande.}$$

Teniendo en cuenta lo expuesto y la forma de las funciones  $\phi_n(\eta)$ , es fácil ver que la tercera integral de (35) tiende a



$$(38) \quad \frac{1}{2} \int_a^b \{E(u(\eta)) - E(v(C))\} d\eta < \varepsilon .$$

Pero como  $v(C) = \underline{v}(C) = \bar{v}(C)$  y  $V(\eta) > C$  en  $(a,b)$ , de (36) resulta que el integrando de (38) es no negativo, y, por lo tanto,  $E(u(\eta)) = E(v(C))$  p.p. en  $(a,b)$ . De (8) resulta

$$(39) \quad V'(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^a (E(u(s)) - E(v(C))) ds + K = \text{constante}$$

para  $a < \eta < b$ , y por lo tanto  $V(\eta)$  es lineal en  $(a,b)$ , de donde  $V(\eta) = C$  en  $(a,b)$ . El teorema quedó así demostrado.

VI. A esta altura queda ya justificado lo hecho en III, y aún bastante por hacer con las soluciones autosemejantes. Indicaré en forma breve lo más resaltante.

De (23) sabemos que  $V'(\eta) < 0$  si  $V(\eta) > \inf\{V(\eta): \eta > 0\}$  y que  $u(\eta) = v(V(\eta))$  p.p. Reemplazando en (8) queda una ecuación para  $V(\eta)$

$$(8 \text{ bis}) \quad V'(\eta) + \frac{1}{2} \eta E(v(V(\eta))) = \frac{1}{2} \int_0^\eta E(v(V(s))) ds + V'(0^+)$$

(19) nos dice ahora que  $V'(\eta) < 0$  es monótona *creciente* para  $\eta \rightarrow +\infty$ , luego existe  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} V'(\eta)$ . Pero  $\int_0^\eta V'(s) ds = V(\eta) - V(0^+) = \alpha(u(\eta)) - \alpha(A)$ , y como  $\alpha(u(\eta)) > 0$  y *decrece*, tiene límite, y resulta  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} V'(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \alpha(u(\eta))' = 0$ .

Esto nos indica que el flujo  $(k(u)u')(\eta) = \alpha(u(\eta))'$  de la solución autosemejante *tiende a cero cuando  $\eta \rightarrow \infty$* , y este hecho, físicamente sensato, usado para obtener (16), es consecuencia de las hipótesis sobre  $E$  y  $\alpha$ .

Observemos que, casos patológicos aparte,  $V(+\infty) = \alpha(u(+\infty)) = 0$  por nuestras condiciones sobre la solución (decreciente)  $u(\eta)$ . Entonces es fácil probar que

$$(40) \quad -V'(0^+) = -(k(u)u')(0^+) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E(u(\eta)) d\eta.$$

Esta igualdad dice que toda la energía presente en el medio en un instante dado entró al mismo como flujo en  $x = 0$  (suponemos que la energía del estado inicial es cero, como siempre).

Nos resta probar que

(41) Teorema. Hay a lo sumo una solución  $u(\eta)$  de (9), con  $u(0) =$

$$= A > 0, \quad E(u(+\infty)) = 0.$$

Idea de la demostración: supongamos  $u(\eta)$ ,  $\tilde{u}(\eta)$  son soluciones; tomemos  $V(\eta)$ ,  $\tilde{V}(\eta)$ . Basta considerar los casos

$$(i) \quad \tilde{V}(\eta) > V(\eta) \quad \text{en } (a,b), \quad \tilde{V}(a) = V(a), \quad \tilde{V}(b) = V(b), \quad V(b) > 0;$$

$$(ii) \quad \tilde{V}(\eta) \geq V(\eta) \quad \text{en } (a,+\infty), \quad a > 0.$$

En el caso (i),  $\tilde{V}$  y  $V$  son *estrictamente* decrecientes en  $(a,b)$ ,

$$\text{luego } E(v(\tilde{V}(b-))) = E(v(V(b-))) \quad \text{y} \quad E(v(\tilde{V}(a+))) = E(v(V(a+))) \quad \text{y}$$

$$\text{de (8 bis)} \quad 0 > \tilde{V}'(b-) - V'(b-) - (\tilde{V}'(a+) - V'(a+)) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \{E(v(\tilde{V}(s))) - E(v(V(s)))\} ds > 0.$$

Luego  $E(v(\tilde{V}(\eta))) = E(v(V(\eta)))$  p.p. en  $(a,b)$ . Restando las respectivas ecuaciones (8 bis) se obtiene  $(\tilde{V} - V)' = \text{constante en } (a,b)$ , y la conclusión  $\tilde{V} = V$  en  $(a,b)$  sigue como en (39).

Si fuera  $V(b) = 0 = \alpha(u(b))$  resultaría  $V(\eta) = 0$ ,  $\eta > b$  y nos hallaríamos en el caso siguiente:

Caso (ii):  $E(v(V(\eta)))$  es monótona decreciente e integrable en

$(0,+\infty)$  ((40)), luego  $\eta E(v(V(\eta))) \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow \infty$ , y lo mismo ocurre con

$\eta E(v(\tilde{V}(\eta)))$ . La demostración es parecida a la del caso (i): basta

observar que  $\tilde{V}'(\eta)$ ,  $V'(\eta)$  tienden a cero,  $\eta \rightarrow +\infty$ .

VII. Aunque aún quedan cabos sueltos y situaciones que merecen discusión, voy a terminar estas notas aquí, con algunas indicaciones bibliográficas.

Los textos clásicos -que *no traen* la teoría que describimos- son

J. Crank, "The Mathematics of Diffusion", Clarendon Press, Oxford, 1956;

H. S. Carslaw - J.C. Jaeger, "Conduction of Heat in Solids", Clarendon Press, Oxford, 1959.

Los temas que vimos, para el caso  $E(u) \equiv u$ ,  $\alpha(u(\eta)) = \int_0^{u(\eta)} k(s) ds$ ,  $k(s) > 0$  si  $s > 0$ , aparecen en

F.V. Atkinson - L.A. Peletier, Similarity solutions of flows through porous media, Archive for Rational Mechanics and Analysis 42, p. 369-379, 1971,

y más acabadamente, en la forma aludida en III, en

F.V. Atkinson - L.A. Peletier, Similarity solutions of the non linear diffusion equation, Archive for Rational Mechanics and Analysis 54, p. 373-391, 1974.

La observación de que los métodos de este último trabajo son aplicables al caso tratado en el trabajo anterior, y la generalización de los mismos para tratar la ecuación  $(k(u)u')'(\eta) = -\frac{1}{2} \eta E(u(\eta))'$  (13), con  $k > 0$  e integrable Lebesgue y ciertas restricciones sobre  $E$ , figuran en

J.E. Bouillet, On similarity solutions of the equation of diffusion in one dimension, Trabajos de Matemática 15, Instituto Argentino de Matemática, CONICET, Buenos Aires, 1977.

J.E. Bouillet - D.A. de Saravia - L.T. Villa, Similarity solutions of the equation of one dimensional heat conduction, Journal of Differential Equations 35, N° 1, p. 55-65, 1980. (ver también Revista de la Unión Matemática Argentina 28, N° 3-4, p. 224, 1977-78).

En este último trabajo aparecen ya las técnicas desarrolladas en estas Lecciones.

Para las observaciones de los párrafos finales de II., relativas a las ecuaciones (16) y (17), se debe acudir en principio al libro de Crank ya citado. En enfoque numérico de (16) se efectúa en un trabajo, en preparación, sobre el cual existen las comunicaciones siguientes:

D.A. de Saravia - J.E. Bouillet, Aproximación lineal por trozos de las soluciones de similaridad de la ecuación de la difusión, con coeficiente dependiente de la concentración, Comunicación a la Reunión Anual de la U.M.A., Salta, 1980. Revista de la Unión Matemática Argentina 30, N°1, p. 55-56, 1981.

J.E. Bouillet - J.P. Milaszewicz - D.A. de Saravia, On approximate similarity solutions of one-dimensional diffusion equations, Comunicación (Poster Session) al SIAM 30<sup>th</sup> Anniversary Meeting, Stanford, California, Julio de 1982.

En cuanto al enfoque de diversos problemas autosemejantes de valores iniciales y de contorno relativos a (17), el trabajo de J.E. Bouillet - S.M. Gomes, An equation with a singular nonlinearity related to dif

fusion problems in one dimension, aparecerá en el Quarterly of Applied Mathematics.

Aquí se estudia, en realidad, una generalización de nuestra ecuación autosemejante que tiene la forma

$$-\frac{1}{N+1} \eta u'(\eta) = (k(u(\eta)) |u'(\eta)|^{N-1} u'(\eta))', \quad N > 0, \eta = x/t^{1/(N+1)}$$

(ver las referencias de este trabajo).

La idea de abarcar una generalidad tal que permita tratar la ecuación (1) con funciones monótonas  $E$  y  $\alpha$  es relativamente reciente, pero ignoro si ha sido desarrollada para el caso autosemejante. Mi intención fue (y es) extraer todo el jugo posible a esa idea con los recursos del Análisis Real Elemental, especialmente la teoría de la diferenciación clásica de Lebesgue y la noción de integral de Stieltjes, tal como están expuestos en las ya citadas "Leçons d'Analyse Fonctionnelle", de F. Riesz y B. Sz. Nagy, Gauthier-Villars - Akadémiai - Kiadó, Paris-Budapest, 1955.

Mis primeros intentos de alcanzar estas hipótesis generales contaron con la cooperación de L.T. Villa, entre 1978 y 1979, y doy término a estas notas expresándole mi reconocimiento.

# El problema inverso de Stefan

Luis T. VILLA

## 1. INTRODUCCION

Tal como ya se ha visto en cursillos anteriores, recordemos que el problema de cambio de fase, conocido en la literatura como problema de Stefan, nace con los trabajos de LAME-CLAPEYRON (1831), NEUMANN (inédito) y de STEFAN (1890). Precisamente, a continuación escribimos el problema de Stefan que designaremos como (P): Determinar dos funciones  $u = u(x, t)$ ,  $s = s(t)$  de modo que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} (1.1) \quad Du_{xx} = u_t; \quad (x, t) \in D_{t_0} = \{(x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t \leq t_0\} \\ (1.2) \quad s(0) = 0 \\ (1.3) \quad u(0, t) = f(t) \text{ ó } u_x(0, t) = g(t); \quad 0 < t \leq t_0 \\ (1.4) \quad u(s(t), t) = 0; \quad 0 < t \leq t_0 \\ (1.5) \quad -ku_x(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t); \quad 0 < t \leq t_0 \end{array} \right.$$

donde  $D, \rho, l, k$  son constantes.

Como sabemos, el problema (P) puede considerarse como un modelo matemático descriptivo de un proceso de cambio de fase (un ejemplo simple lo constituye la fusión o solidificación en el sistema hielo-agua)  $u(x, t)$ ,  $s(t)$  representan respectivamente la distribución de la temperatura en la nueva fase y la posición de la interfase al tiempo  $t$ .  $\dot{s}(t) = \frac{d}{dt}s(t)$  es la velocidad de avance de la nueva fase sobre la preexistente que se considera siempre a temperatura constante, en este caso cero sin perder generalidad. //

$f(t)$  ó  $g(t)$  son datos en el problema.

Como la ley con que se mueve la interfase que es parte del contorno del dominio de interés es una incógnita más del problema (frontera libre) se dice que (P) es un problema de frontera libre para la ecuación unidimensional del calor en una fase. Sobre aspectos matemáticos de este problema remitimos a cursillos anteriores correspondientes y sus referencias. Acá, ahora nos interesa destacar los dos aspectos siguientes:

i) En muchos procesos tecnológicos (crecimiento de cristales por ej.) interesa particularmente el conocido como problema inverso a (P), en adelante designado como  $(P)'$ . Crudamente hablando, un problema inverso puede establecerse diciendo: en lugar de encontrar la solución a un dado problema, se busca un problema físicamente razonable para una dada solución. Esta idea data al parecer desde los tiempos de Euler. En otras palabras, en el problema (directo) se conoce la causa actuante (en nuestro caso  $f(t)$  ó  $g(t)$ ) y se busca determinar el efecto correspondiente (en nuestro caso el perfil de temperatura y  $s(t)$ ); en el inverso se prescribe el efecto (la ley para  $s(t)$  y por ello este problema es de frontera móvil y no libre) y hay que encontrar como causar ese efecto deseado ( $f(t)$  ó  $g(t)$ ).

ii) Debido a la no-linealidad que introduce en (P) la condición (1.5), en general la resolución de este problema (directo) entraña considerables dificultades matemáticas. En cambio, en el problema inverso correspondiente  $(P)'$ , al ser dada  $s(t)$ , la resolución resulta un poco menos complicada y de ella se puede inferir información útil sobre (P) (naturalmente de la resolución de (P) también se obtiene información sobre  $(P)'$ , es decir que ambos problemas se complementan). Estos aspectos comentados precedentemente, posiblemente ya constituyen una motivación suficiente para el objetivo central de este cursillo, cual es el de tratar aspectos básicos del problema inverso de Stefan  $(P)'$  aso-



ciado al problema de Stefan (P).

Con lo que dijimos hasta ahora, estamos en condiciones de formular correctamente (P)', lo que hacemos seguidamente: determinar una función  $u = u(x, t)$  que satisfaga (1.1), (1.4), (1.5), asignada a priori una función  $s = s(t)$  en // clase oportuna. Claramente, el conocimiento de la solución  $u(x, t)$  del problema (P)' permite calcular  $f(t)$  ó  $g(t)$  sobre el contorno  $x = 0$  que darán un proceso tal que la nueva fase avance sobre la preexistente con la ley asignada.

El método general de resolución de problemas con una // frontera móvil para la ecuación del calor y por lo tanto / en particular para (P)' se basa esencialmente, como es sa bido, en la teoría de los potenciales térmicos, lo que a / su vez lleva a la necesidad de resolver ecuaciones integrales tipo Volterra. La dificultad asociada con la solución / de ecuaciones de este tipo y el hecho de que afortunadamente hay casos especiales para ciertas leyes de movimiento / de la frontera para las cuales se puede hallar soluciones / exactas en forma más o menos simple, explica el porqué de / la sección 2.

Las secciones 3 y 4 tratan lo que podríamos llamar un / comienzo de tratamiento sistemático sobre la resolución // del problema, comentándose en la sección 4 un aspecto particularmente interesante sobre el mismo, cual es su rela- / ción con un problema de Cauchy no-característico para una / ecuación parabólica unidimensional. En la sección 5 se comentan brevemente consideraciones sobre existencia y unicidad de la solución.

## 2. ALGUNOS CASOS ESPECIALES PARA CIERTAS LEYES DE MOVIMIENTO DE LA FRONTERA

Caso a) Si se asigna una ley de movimiento de la frontera según  $s(t) = \alpha \sqrt{t}$ ,  $\alpha = \text{cte.}$ , se ve que (P)' tiene solu- / ción exacta y se encuentra rápidamente usando la transfor- / mación de semejanza

$$(2.1) \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}, \quad t > 0$$

En este caso se encuentra:

$$(2.2) \quad u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi} \rho \ell \alpha \sqrt{D}}{2k} e^{-\alpha^2/4D} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{D}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}\right) \right]$$

$$(\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy)$$

y en consecuencia:

$$(2.3) \quad f(t) = \frac{\sqrt{\pi} \rho \ell \alpha \sqrt{D}}{2k} e^{-\alpha^2/4D} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{D}}\right) = \text{cte.}$$

#### OBSERVACION 2.1.

Toda vez que las propiedades térmico materiales  $D, \rho, \ell, k, c_p$ , del sistema se consideran constantes y conocidas como puede resultar tedioso arrastrarlas en todos los cálculos, es útil recordar que ello puede obviarse escribiendo/ (P) en las variables  $\bar{x}, \bar{t}$ , donde

$$\bar{x} = \frac{c_p}{\ell} x, \quad \bar{t} = \frac{kc_p}{\rho \ell^2} t \quad (D = \frac{k}{\rho c_p})$$

Caso b) En este caso consideramos un modelo que describe / el proceso de cambio de fase de un casquete esférico de es pesor  $R_0 - r_0$  inicialmente a la temperatura de transición y aislado en la superficie  $r = R_0$ :

$$(2.4) \quad D \left[ u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right] = u_t; (r, t) \in D_{t_0} = \left\{ (r, t) / r_0 < r < s(t) \leq R_0, \right. \\ \left. 0 < t \leq t_0 \right\}$$

$$(2.5) \quad s(0) = r_0, \quad s(t_0) = R_0$$

$$(2.6) \quad u(r_0, t) = f(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.7) \quad u(s(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.8) \quad -k u_r(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

queremos considerar el problema inverso a (2.4)-(2.8) si se asigna una ley para  $s(t)$  tal que

$$(2.9) \quad s(t) \dot{s}(t) = \beta = \text{cte.}$$

Para abordar el problema, comenzamos introduciendo una // función  $V(r, t)$  definida como

$$(2.10) \quad V(r, t) = ru_r + ut + \frac{\rho l}{k} s(t) \dot{s}(t), \quad (r, t) \in D_{t_0}$$

habida cuenta de una oportuna clase para  $u$ , podemos escribir

$$D V_{rr} = u_t + ru_{tr}$$

$$V_t = u_t + r u_{tr} + \frac{\rho l}{k} (s(t) \dot{s}(t)).$$

teniendo presente (2.9) es claro entonces que  $V(r, t)$  satisface el siguiente problema

$$(2.11) \quad D V_{rr} = V_t, \quad (r, t) \in D_{t_0}$$

$$(2.12) \quad s(0) = r_0$$

$$(2.13) \quad V(r_0, t) = F(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.14) \quad V(s(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.15) \quad V_r(s(t), t) = -\lambda \dot{s}(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(\lambda = \text{cte.})$$

por otra parte, de (2.5) y (2.9) es claro que la  $s(t)$  asig

nada tiene la forma

$$(2.16) \quad s(t) = \sqrt{r_0^2 + 2at}, \quad a = \frac{1}{2} \frac{R_0^2 - r_0^2}{t_0}$$

Si ahora se introduce la variable  $\zeta$  como

$$(2.17) \quad \zeta = r_0^2 + 2at$$

llamando  $U(r, \zeta)$  a  $V(r, \frac{\zeta - r_0^2}{2a})$  y  $\sigma(\zeta)$  a  $s(\frac{\zeta - r_0^2}{2a})$ , el problema (2.11) - (2.15) se puede escribir como

$$(2.18) \quad \delta U_{rr} = U_{\zeta}, \quad (r, \zeta) \in D_{\zeta_0} = \left\{ (r, \zeta) / r_0 < r < \sigma(\zeta) \leq R_0, \right. \\ \left. r_0^2 \leq \zeta \leq \zeta_0 \right\}$$

$$(2.19) \quad \sigma(r_0^2) = r_0$$

$$(2.20) \quad U(r_0, \zeta) = G(\zeta), \quad r_0^2 \leq \zeta \leq \zeta_0$$

$$(2.21) \quad U(\sigma(\zeta), \zeta) = 0, \quad r_0^2 \leq \zeta \leq \zeta_0$$

$$(2.22) \quad U_r(\sigma(\zeta), \zeta) = -\gamma \frac{d\sigma}{d\zeta}, \quad r_0^2 \leq \zeta \leq \zeta_0$$

$$(\gamma = 2a\lambda, \quad \delta = \frac{D}{2a})$$

Notemos ahora que (2.18)-(2.22) constituye un problema tipo (P), y precisamente en el caso anterior resolvimos su inverso (P)' con  $s(t) = \sqrt{t}$ . Luego, con el mismo procedimiento se resuelve el inverso asociado a (2.18)-(2.22).

Haciendo las cuentas se encuentra

$$(2.23) \quad U(r, \zeta) = \gamma \sqrt{\delta} e^{1/4\delta} \int_{r/2\sqrt{\delta}\zeta}^{1/4\delta} e^{-\xi^2} d\xi$$

teniendo ahora en cuenta las transformaciones efectuadas y

trabajando sobre (2.23) se obtiene

$$(2.24) \left\{ \begin{array}{l} u(r, t) = \frac{\rho L}{k} \beta \left( \frac{s(t) - r}{r} \right) \frac{2}{r} \int_r^{s(t)} \left[ \int_{z/2\sqrt{s}}^{1/2\sqrt{s}} e^{-\xi^2} d\xi \right] dz \\ v = \sqrt{s} e^{-1/4s} \\ s(t) = \sqrt{r_0^2 + 2at} \end{array} \right.$$

ahora se puede efectivamente verificar que el par dado por (2.24) resuelve el problema inverso asociado a (2.4)-(2.8) que nos hemos planteado

El caso de cambio de fase desde afuera (desde la superficie  $r = R_0$ ) se resuelve análogamente.

Caso c) En este caso tratamos el problema inverso asociado a (P) cuando para la frontera móvil se asigna la ley  $s(t) = at$ .

Ahora la idea a usar para abordar la resolución de (P) es introducir la transformación

$$(2.25) \quad x = s(t) - \mu$$

Entonces, llamando  $v(\mu, t)$  a  $u(s(t) - \mu, t)$  se tiene para la función  $v(\mu, t)$  el siguiente problema

$$(2.26) \quad D \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - s(t) \frac{\partial v}{\partial \mu} = v_t, \quad \text{en } D_{t_0} = \left\{ (\mu, t) / 0 < \mu < s(t), 0 < t \leq t_0 \right\}$$

$$(2.27) \quad v(0) = 0$$

$$(2.28) \quad v(s(t), t) = f(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.29) \quad v(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.30) \quad k \frac{\partial v}{\partial \mu}(0, t) = \rho L s(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

teniendo presente la ley asignada para  $s(t)$  ahora se reem-

plaza  $\dot{s}(t)$  por  $\alpha$  en (2.26) y (2.30), luego de esto, una sencilla cuenta muestra que si se introduce una función  $W(\mu, t)$  como

$$(2.31) \quad v(\mu, t) = e^{\frac{\alpha}{2D}\mu - \frac{\alpha^2}{4D}t} \cdot W(\mu, t)$$

para  $W(\mu, t)$  el problema (2.26)-(2.30) se escribe:

$$(2.32) \quad DW_{\mu\mu} = W_t \text{ en } \bar{D}_{t_0}$$

$$(2.33) \quad s(0) = 0$$

$$(2.34) \quad W(s(t), t) = f(t) \cdot e^{-\frac{\alpha}{2D}s(t) + \frac{\alpha^2}{4D}t}, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.35) \quad W(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.36) \quad W_{\mu\mu}(0, t) = \lambda e^{\frac{\alpha^2}{4D}t}, \quad 0 < t \leq t_0 \quad (\lambda = \frac{\rho l \alpha}{k})$$

ahora (2.32)-(2.36) se resuelve inmediatamente y se encuentra

$$(2.37) \quad W(\mu, t) = \frac{\lambda D}{\alpha} \left[ e^{\frac{\alpha}{2D}\mu} - e^{-\frac{\alpha}{2D}\mu} \right] e^{\frac{\alpha^2}{4D}t}$$

en consecuencia

$$v(\mu, t) = \frac{\lambda D}{\alpha} \left[ e^{\frac{\alpha}{D}\mu} - 1 \right]$$

y teniendo presente la transformación efectuada se obtiene

$$(2.38) \quad \begin{cases} u(x, t) = \frac{\lambda D}{\alpha} \left[ e^{\frac{\alpha}{D}(s(t) - x)} - 1 \right] \\ s(t) = \alpha t \end{cases}$$

se puede verificar que el par (2.38) resuelve el problema

propuesto.

Para finalizar esta sección es oportuno ver que entre los procesos de cambio de fase acá considerados, se puede suponer razonablemente que hay una clase de los mismos // que satisfacen la siguiente restricción adicional

$$(2.39) \quad s(t)u_t + \dot{s}(t)ru_r = 0, \quad (r,t) \in D_{t_0}$$

La condición (2.39) fué introducida por D.QUILGHINI en [1] y tiene un importante significado físico dado que asegura la persistencia de la fase en formación.

Veremos ahora una manera muy simple de resolver el // problema inverso de Stefan para medios planos, cilíndricos y esféricos cuando se asigna una ley de movimiento para la interfase tal que

$$(2.40) \quad s(t) \dot{s}(t) = \text{cte}$$

Tomando un caso concreto, consideremos la solidificación hacia afuera de un estrato líquido de espesor  $R_0 - r_0$ . El referido proceso puede describirse por el siguiente modelo:

$$(2.41) \quad D \left[ u_{rr} + \frac{2p+1}{r} u_r \right] = u_t, \quad (r,t) \in D_{t_0} = \left\{ (r,t) : \right. \\ \left. r_0 < r < s(t) \leq R_0, \quad 0 < t \leq t_0 \right\}$$

$$(2.42) \quad s(0) = r_0, \quad s(t_0) = R_0$$

$$(2.43) \quad u(r_0, t) = f(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.44) \quad u(s(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.45) \quad u_r(s(t), t) = -\frac{\lambda}{D} \dot{s}, \quad 0 < t \leq t_0$$

$p = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ , respectivamente para medios planos, esféricos y cilíndricos)

siendo la nomenclatura para variables, constantes y funciones la misma que la usada en puntos anteriores.

Supongamos entonces, que existe un par  $(\bar{s}, \bar{u})$  que satisface el problema inverso asociado a (2.41)-(2.45) y además verifica la condición (2.39). Combinando (2.39) con (2.41) se puede escribir:

$$(2.46) \quad (r^{2p+1} u_r)_r + \frac{1}{D} \frac{\dot{s}}{s} r^{2p} (r^{2p+1} u_r) = 0, (r, t) \in D_{t_0}$$

Integrando (2.46) y aplicando (2.44), (2.45) se obtiene

$$(2.47) \quad u(r, t) = \frac{a}{D} s^{(j-1)} \exp\left(\frac{\dot{s}}{2D}\right) \int_r^{s(t)} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2D} \frac{\dot{s}}{s^2} z^2\right]}{z^{(j-1)}} dz$$

lo notable es ahora? que si pretendemos que (2.47) satisfaga (2.41), haciendo las cuentas se encuentra que ello es posible si se impone que

$$(2.48) \quad s(t) \dot{s}(t) = \text{cte.} = a$$

es claro que tomando la constante  $a$  como

$$a = \frac{1}{2} \frac{R_0^2 - r_0^2}{t_0}$$

la solución del problema inverso con ley de movimiento para la interfase según (2.40) se obtiene como

$$(2.49) \quad \begin{cases} \bar{u}(r, t) = \frac{a}{D} \frac{a}{s(t)} \exp\left(\frac{a}{2D}\right) \int_r^{s(t)} \exp\left[-\frac{a}{2D} \frac{z^2}{s^2(t)}\right] dz \\ \bar{s}(t) = \left[ r_0^2 + 2 a t \right]^{1/2} \end{cases}$$



$$(2.50) \begin{cases} \bar{u}(r, t) = \frac{\lambda a}{D} \exp\left[\frac{a}{2D}\right] \int_r^{s(t)} \frac{\exp\left[-\frac{a}{2D} \frac{z^2}{s^2(t)}\right]}{z} dz \\ \bar{s}(t) = \left[r_0^2 + 2 a t\right]^{1/2} \end{cases}$$

$$(2.51) \begin{cases} \bar{u}(r, t) = \frac{\lambda}{D} a s(t) \exp\left(\frac{a}{2D}\right) \int_r^{s(t)} \frac{\exp\left[-\frac{a}{2D} \frac{z^2}{s^2(t)}\right]}{z^2} dz \\ \bar{s}(t) = \left[r_0^2 + 2 a t\right]^{1/2} \end{cases}$$

(2.49), (2.50), (2.51) son respectivamente para medios // planos, cilíndricos y esféricos.

Quizas sea posible seguir resolviendo algunos otros / casos especiales de leyes para  $s(t)$  en forma simple como / vimos hasta ahora pero ello extendería demasiado esta sec / ción dentro del contexto general del cursillo y demanda / ría demasiado tiempo. De hecho vamos a citar referencias / de algunos trabajos donde se han resuelto casos especia / les para el problema inverso de Stefan, aunque generalmen / te no ya en forma tan sencilla. Citamos por ej.: Lamé - / Clapeyron [2] (1831); J.Stefan [3] (1891); G.A.Martynov [4] (1960); D.Langford [5, 6, 7] (1966-1967); G.W.Bluman [8] // (1974).

### 3. ENFOQUES PRELIMINARES SOBRE TRATAMIENTOS SISTEMATICOS PARA LA RESOLUCION DEL PROBLEMA

Entre los trabajos que de alguna manera inician un // tratamiento sistemático del problema, parece oportuno co / mentar [9] (B.Lyubov, 1949) y [10] (V.T.Borisov, B.Lyubov, D.E. Temkin, 1955). Aunque en principio se estudia el pro

blema de Stefan (P), el método usado se adapta para considerar simultáneamente la resolución de su inverso (P)'. El análisis se basa esencialmente en la idea de obtener el perfil de temperatura  $u(x, t)$  en  $D_{\tau} = \{(x, t) / 0 < x < s(t), 0 < t < \tau\}$  como un desarrollo en serie de potencias (de  $\frac{s(t) - x}{s(t)}$  en [9] y de  $s(t) - x$  en [10]).

En [9] luego de adimensionalizar el modelo (variables/adimensionales  $z, \tau$  en lugar de  $x, t$ ) se introduce la transformación

$$(3.1) \quad \xi = 1 - \frac{z}{s(\tau)}$$

y a  $V(\xi, \tau)$  como la nueva función temperatura.

Para  $V(\xi, \tau)$  se propone entonces

$$(3.2) \quad V(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau) \xi^n$$

haciendo las cuentas y teniendo presente (3.1), finalmente se encuentra

$$(3.3) \quad u(x, t) = u_0 - \frac{D\rho k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D^n} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$$

$$\left[ \frac{s(t) - x}{s(t)} \right]^n \frac{d^n}{dt^n} s^{2n}(t)$$

nótese que se consideró  $u(s(t), t) = u_0 = \text{cte}$ )

En [10] se comienza por integrar en la región DCBD // que se muestra en la Fig. 1, aplicando la fórmula de // Green,

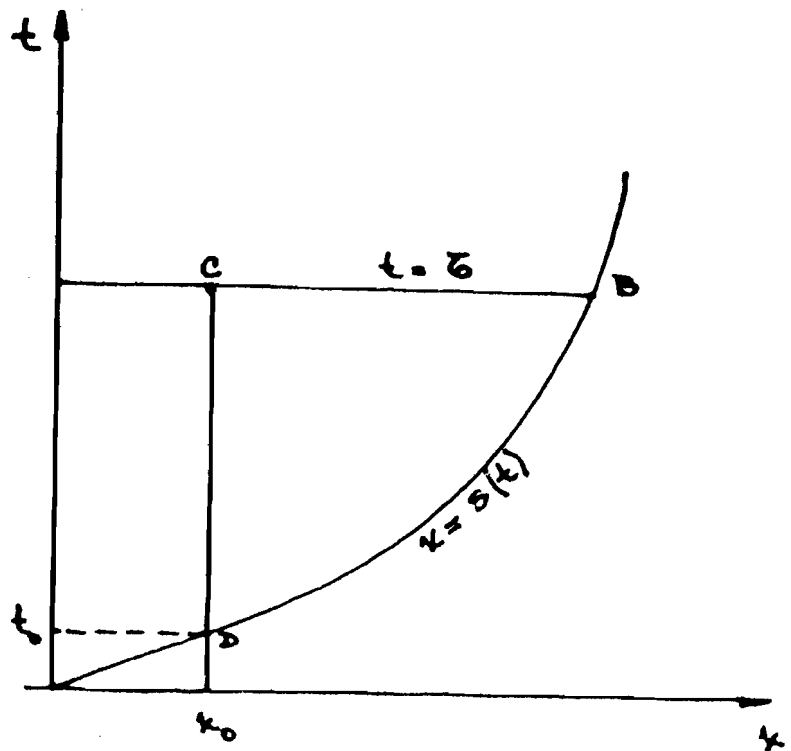


Fig. 1

la expresión

$$(3.4) \quad V(x, t) \mathcal{L}u(x, t) - u(x, t) \mathcal{M}V(x, t) = \\ = D \frac{\partial}{\partial x} [Vu_x - uV_x] - \frac{\partial}{\partial t} (uV)$$

donde  $\mathcal{L}u = Du_{xx} - u_t$  y  $\mathcal{M}$  el adjunto de  $\mathcal{L}$ , es decir,

$$\mathcal{M}V = D V_{xx} + V_t$$

Se considera luego  $u$  y  $V$  tales que  $\mathcal{L}u = 0$ ,  $\mathcal{M}V = 0^{(*)}$ .

En definitiva se reduce la cuestión a un problema con oportunas condiciones de contorno para  $V(x, t)$ :

$$(3.5) \quad V(x, t) \Big|_{t=\bar{t}} = 0, \quad V(x_0, t) = 0,$$

$$V_x \Big|_{x=x_0} = \varphi(\bar{t}, t)$$

donde por ahora  $\varphi$  es una función arbitraria. De este modo de la integración de (3.4) se obtiene

$$(3.6) \quad \alpha \int_{t_0}^{\bar{t}} \dot{s}(t) V(s(t), t) dt - \\ - \int_{t_0}^{\bar{t}} [u_0 - u(x_0, t)] \varphi(\bar{t}, t) dt = 0$$

$$(\alpha = -\frac{D}{v})$$

ahora se propone  $V$  como

$$(3.7) \quad V(x, \tau - t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\tau - t) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

se trabaja ahora sobre (3.7) teniendo presente (3.5) y (\*), la expresión obtenida para  $V$  se evalúa en  $x = s(t)$  y se // lleva a (3.6) de donde luego de un proceso de integración/ por partes se obtiene finalmente

$$(3.8) \quad u(x, t) = u_0 - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{D^k (2k+2)!} \cdot \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (s(t) - x)^{2k+2}$$

Habida cuenta de la convergencia de las correspondientes / series, no es difícil comprobar que (3.3) y (3.8) satisfacen el problema (P)'. .

En (3.3) y (3.8) se tienen entonces expresiones que re suelven formalmente el problema inverso (P) .

Asignada la  $s(t)$ , la cuestión de la convergencia de la serie exige un examen aparte.

Se propone al lector resolver los casos a) y c) pro-// puestos en la sección 2, aplicando las fórmulas (3.3) y // (3.8).

Para finalizar esta sección es oportuno observar que / el problema inverso de Stefan de la solidificación o fu-// sión a velocidad constante de un casquete esférico de espe-// sor  $R_0 - r_0$  inicialmente a la temperatura de transición, / se puede resolver simplemente usando las ideas comentadas/ precedentemente en esta sección. En efecto, consideremos / por ej. el caso de solidificación hacia afuera a partir de la superficie  $r = r_0$  con una ley para  $s(t)$  como

$$(3.9) \quad s(t) = r_0 + m t$$

El modelo matemático pertinente sería:

$$(3.10) \quad D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = u_t, \quad (r, t) \in D_{t_0} = \left\{ (r, t) / \right. \\ \left. r_0 < r < s(t) \leq R_0, \quad 0 < t \leq t_0 \right\}$$

$$(3.11) \quad s(0) = 0$$

$$(3.12) \quad u(r_0, t) = f(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(3.13) \quad u(s(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(3.14) \quad -k u_r(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

Introduciendo las funciones  $V$ ,  $h$  y la variable  $x$  como

$$(3.15) \quad r \cdot u(r, t) = V(r, t), \quad h(t) = s(t) - r_0 \\ x = r - r_0$$

el problema (3.10)-(3.14) para  $V(x, t)$  se escribe así:

$$(3.16) \quad DV_{xx} - V_t = 0, \quad 0 < x < h(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(3.17) \quad h(0) = 0$$

$$(3.18) \quad V(0, t) = F(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(3.19) \quad V(h(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(3.20) \quad V_x(h(t), t) = -\frac{l}{c_p D} (h(t) + r_0) \dot{h}(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

teniendo presente (3.9) y (3.15) se ve que  $h(t) = m t$ .

Ahora se propone  $V(x, t)$  como:

$$(3.21) \quad V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) (h(t) - x)^n$$

donde los  $a_n(t)$  se pueden calcular como en [11]:

$$a_1 = \frac{l}{c_p} (h(t) + r_0) \frac{m}{D}$$

$$a_n = \frac{l}{c_p} (h(t) + r_0) \frac{1}{n!} \left( \frac{m}{D} \right)^{n-1} + \frac{l}{c_p} \frac{D}{m} \frac{(n-2)}{n!} \left( \frac{m}{D} \right)^n$$

$$n = 2, 3, \dots$$

y entonces en (3.21) se obtiene

$$(3.22) \quad V(x, t) = \frac{l}{c_p} (h(t) + r_0) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{m}{\alpha} (h(t) - x) \right]^n - 2 \frac{l}{c_p} \frac{\alpha}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{m}{\alpha} (h(t) - x) \right]^{n-1} + \frac{l}{c_p} \frac{\alpha}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{m}{\alpha} (h(t) - x) \right]^n$$

volviendo al problema original (recordemos (3.15)), se obtiene

$$u(r, t) = \frac{l}{c_p} \left\{ \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right] - 1 \right\} - 2 \frac{l}{c_p} \frac{\alpha}{m} \frac{1}{r} \left\{ \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right] - 1 \right\} + 2 \frac{l}{c_p} \frac{(s(t) - r)}{r} \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right] + G(r, t)$$

donde

$$G(r, t) = \frac{l}{c_p} \frac{(s(t) - r)}{r} + \frac{l}{c_p} \frac{\alpha}{m} \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right]^n - \frac{l}{c_p} \frac{(s(t) - r)}{r} \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right]$$

ahora, no es difícil verificar que  $G(r, t) = 0$  y en consecuencia se tiene

$$(3.23) \left\{ \begin{aligned} u(r, t) &= \frac{l}{c_p} \left\{ \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right] - 1 \right\} - \\ &- 2 \frac{l}{c_p} \frac{\alpha}{m} \frac{1}{r} \left\{ \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right] - 1 \right\} \\ &+ 2 \frac{l}{c_p} \frac{(s(t) - r)}{r} \exp \left[ \frac{m}{\alpha} (s(t) - r) \right] \\ s(t) &= r_0 + m t \end{aligned} \right.$$

puede verificarse que el par (3.23) resuelve el problema inverso de Stefan que nos planteamos para el cambio de fase de un casquete esférico a velocidad constante. Es oportuno comentar por otra parte que (3.23) fué comunicada en [5], habiéndose encontrado por otro camino en [12].

Finalmente se sugiere analizar  $\frac{d}{dt}u(r_0, t)$  en (3.23), // las conclusiones son interesantes.

#### 4. EL PROBLEMA DE CAUCHY NO CARACTERISTICO PARA UNA ECUACION PARABOLICA Y EL INVERSO DE STEFAN

La consideración del problema inverso de Stefan (P)' / en relación con un problema de Cauchy no-característico para una ecuación parabólica unidimensional, fué efectuada / en los trabajos [13] (C.D.Hill, 1967) y [14, 15] (D.Colton, 1972, 1974). Las conclusiones alcanzadas son importantes en la evolución del tratamiento de nuestro problema y por ello las comentaremos en esta sección.

Si bien en ambos trabajos se considera la ecuación parabólica

$$4.1) u_{xx} + a(x, t)u_x + b(x, t)u - c(x, t)u_t = F(x, t)$$

fijaremos nuestra atención solamente en el caso particular de la ecuación que nos interesa:

$$(4.2) \quad u_{xx} - u_t = 0$$

Refiriéndonos primero a lo hecho en [13], consideremos / un problema de Cauchy no-característico para (4.2) donde / los datos de Cauchy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u(s(t), t) &= f(t) \\ u_x(s(t), t) &= g(t) \end{aligned}$$

están dados sobre una curva no-característica  $x = s(t)$  (/ recordemos que las características para (4.2) son  $t = \text{cte}$ ). Es de notar ahora que el problema (4.2)-(4.3) resulta no / bien planteado en el sentido de Hadamard, a este respec- / to recordemos que un problema de contorno se dice bien // planteado en tal sentido si:

Existe solución

La solución es única

La solución depende continuamente de los datos en el / sentido que "pequeños" cambios en los datos producen peque- / ños cambios en la solución. La palabra entre comillas es / porque su interpretación puede variar de problema a pro- / blema.

Resulta oportuno citar el siguiente ejemplo en [16] (C Pucci, 1959):

Fijados dos naturales  $k$  y  $n$ , sea

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}_n(x, t) &= n^{-2k} \left[ e^{nx} \operatorname{sen}(2n^2 t + nx) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-nx} \operatorname{sen}(2n^2 t - nx) \right] \end{aligned}$$

esta función satisface (4.2) y las condiciones



$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}_n(0, t) &= 2 n^{-2k} \operatorname{sen} 2 n^2 t \\ \mathcal{U}_{n_x}(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

para  $n \rightarrow \infty$  la sucesión  $\{\mathcal{U}_n(0, t)\}$  converge uniformemente a cero y también todas sus derivadas hasta el orden  $k-1$ , // mientras que para cualesquier  $|x_0| > 0$ ,  $\mathcal{U}_n(x_0, t)$  toma valores arbitrariamente grandes para  $n$  suficientemente grande. Esto significa que una variación arbitrariamente pequeña en los datos del problema trae consigo una variación arbitrariamente grande en la solución. Falla entonces, la dependencia continua con los datos y ya se puede asegurar / que (4.2)-(4.3) es no bien planteado en el sentido de Hadamard tal como se anunció precedentemente.

Es claro que nuestro problema (P)' es precisamente un problema de Cauchy no-característico para la ecuación del calor con los datos de Cauchy

$$u(s(t), t) = 0 ; u_x(s(t), t) = -\left(\frac{\rho \ell}{k}\right) \dot{s}(t)$$

esta es una importante característica a observar sobre // (P)' por lo comentado precedentemente.

La idea básica es entonces, estudiar (4.2)-(4.3) en el dominio complejo (notemos que como consecuencia del Teorema de Cauchy-Kowalewski, el problema de Cauchy no-característico resulta bien planteado en ese dominio) lo que impone el requerimiento que  $s(t)$  sea una función analítica de  $t$ . El análisis se basa esencialmente en los siguientes puntos:

a) Definir y construir una solución fundamental para (4.2), ella resulta

$$(4.6) \quad S(x, t, \xi, \tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(x - \xi)}{(\tau - t)} E \left\{ \frac{(\xi - x)^2}{4(\tau - t)} \right\}$$

$$\text{donde } E \{ z \} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n + \frac{3}{2})}$$

Recordemos que la solución fundamental usual para (4.2) está dada por

$$(4.7) \quad w(x, t, \xi, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\zeta-t)}} \exp\left\{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\zeta-t)}\right\}$$

y se adapta particularmente para resolver un problema de valores iniciales característico para (4.2) ya que usualmente los datos se asignan sobre  $t = 0$  que es característica para la ecuación.

b) Se usa (4.6) para obtener una representación de la solución de (4.2)-(4.3) la que resulta ser

$$(4.8) \quad u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left\{ \frac{[x-s(t)]^{2j}}{(2j)!} u(s(t), t) + \frac{[x-s(t)]^{2j+1}}{(2j+1)!} [s'(t)u(s(t), t) + u_x(s(t), t)] \right\}$$

para el problema (P)', (4.8) se reduce a

$$(4.9) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} [x-s(t)]^{2n}$$

Recordamos ahora que una función  $\varphi(t)$  es clase 2 de Holmgren si  $\varphi(t) \in C^{\infty}$  y existen dos constantes  $b_0$  y  $b$  tales / que

$$(4.10) \quad \left| \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} \right| \leq b_0 \frac{(2n)!}{b^n}, \quad n=0, 1, \dots$$

Se puede ver que (4.9) converge para

$$(4.11) \quad |x-s(t)| \leq b_0 \quad \text{con} \quad b_0 < \frac{1}{2} \sqrt{2b}$$

con tal que  $s(t)$  sea clase 2 de Holmgren.

Vimos entonces un análisis más general que los comentarios en las secciones anteriores, que permitió en particular encontrar una fórmula resolutive para (P)' y al mismo tiempo precisar la clase para  $s(t)$  que da sentido a la // mencionada fórmula a travez del análisis de convergencia/ que llevó a establecer la región dada en (4.11) (todo este análisis se encuentra en [13] ).

Se propone al lector aplicar (4.8) para intentar resolver el problema inverso de Stefan para la esfera planteado al final de la sección 3 y la (4.9) para resolver casos / especiales de leyes para  $s(t)$  al estilo de los planteados en la sección 2.

Para finalizar se sugiere comparar la (4.9) con la /// (3.8) encontrada en [10] comentada en la sección 3. La analogía es notable.

Con relación a lo hecho en [14, 15] cabe destacar que/ la idea básica es la misma que en [13] es decir, plantear el problema en el dominio complejo dados los aspectos que ya comentamos.

Hay, sí, diferencias en cuanto al método seguido para / encontrar una representación de la solución.

Al parecer el método usado por D. Colton se adapta mejor cuando se trata de ecuaciones parabólicas a coeficientes variables, particularmente funciones del tiempo.

## 5. CONSIDERACIONES SOBRE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION

Con referencia a esta cuestión comentaremos lo realizado en [17] (D. Quilghini, 1967).

Recordemos el problema (P) introducido en la sección 1

$$(5.1) \quad D u_{xx} = u_t, \quad (x, t) \in D_{t_0}$$

$$(5.2) \quad s(0) = 0$$

$$(5.3) \quad u(0, t) = f(t) \quad , \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(5.4) \quad u(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(5.5) \quad -k u_x(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t) \quad , \quad 0 < t \leq t_0$$

Sean  $s(t) \geq 0$ , absolutamente continua y  $f(t)$  una función definida continua para  $t > 0$  e integrable en cada intervalo  $[0, T]$ , poniendo

$$(5.6) \quad u(x, t) = V(x, t) + U(x, t), \quad 0 < x, \quad 0 < t \leq t_0$$

donde

$$(5.7) \quad V(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau$$

$$(5.8) \quad U(x, t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{\dot{s}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+s(\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right] \right\} d\tau$$

Se puede verificar que la  $u(x, t)$  dada por (5.6) satisface/ (5.1) y (5.3) para verificar (5.4) y (5.5) basta que resulte:

$$(*) \quad u(s(t), t) = V(s(t), t) + U(s(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

En efecto, supuesta la (\*) por el principio del máximo se tiene:

$$(5.9) \quad u(x, t) = V(x, t) + U(x, t) = 0, \quad \text{en } s(t) < x, \quad 0 < t \leq t_0$$

ya que  $u(x, t)$  satisface el problema

$$Du_{xx} - u_t = 0, \text{ en } s(t) < x, 0 < t \leq t_0$$

$$\lim_{x \rightarrow s(t)} u(x, t) = 0, 0 < t \leq t_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, 0 < t \leq t_0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0, x > 0$$

como consecuencia de (5.9) se sigue

$$(5.10) \quad \frac{\partial}{\partial x} (V(x, t) + U(x, t)) \equiv 0, \text{ en } s(t) < x, 0 < t \leq t_0$$

Por otra parte, a la vista de ([18], Quilghini, 1963) en / las hipótesis hechas sobre  $s(t)$  se tiene:

$$(5.11) \quad D \lim_{x \rightarrow s(t)^-} U_x(x, t) - D \lim_{x \rightarrow s(t)^+} U_x(x, t) = \lambda \dot{s}(t), \\ 0 < t \leq t_0$$

y observando que  $V_x(x, t)$  es continua cualesquiera sean  $x$  y  $t$  positivos, de (5.10) sigue (5.5).

Asignada  $s(t)$ . (\*) provee una ecuación integral tipo // Volterra de primera especie para resolver respecto de  $f(t)$ . Nótese que la referida ecuación integral no es reducible a 2<sup>a</sup> especie, siendo el núcleo:

$$\frac{s(t)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left[ - \frac{s^2(t)}{4D(t - \tau)} \right]$$

Asignando  $s(t)$  en clase oportuna, por ej en la clase de // las soluciones del problema directo (P), (\*) admite seguramente solución.

El teorema de unicidad probado es:

En cada intervalo  $[0, T]$  la ecuación integral (\*) admite

a lo sumo una solución  $f(t)$  en la clase de las funciones definidas continuas para  $t > 0$ , integrables en  $[0, T]$ .

Queremos finalmente destacar que en la revisión efectuada en [19] (D.A. Tarzia, 1981/82) hay abundantes referencias sobre el problema inverso de Stefan que nos ocupó, en particular sobre los avances efectuados posteriores a los aspectos básicos comentados en este cursillo/ y naturalmente también sobre generalizaciones del problema.

Luis T. Villa

Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de Salta - Buenos Aires N<sup>o</sup> 177 - 4.400 - SALTA - REPUBLICA ARGENTINA.

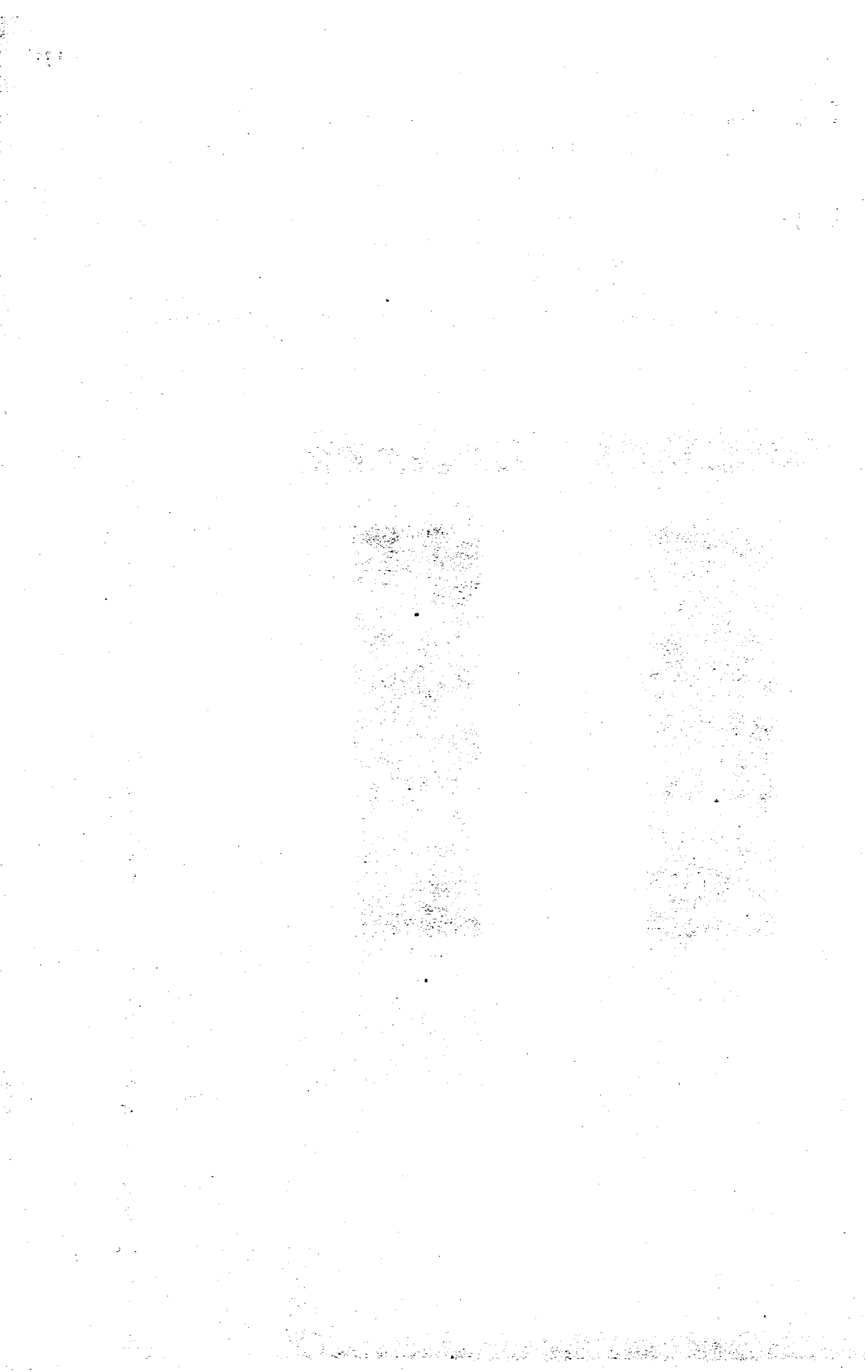
REFERENCIAS

- [1] D.QUILGHINI "Un problema di controllo ottimale nel cambiamento di stato". ANN.MAT.PURA APPL., (4) 84/ (1970), pp.309-320.
- [2] LAME and CLAPEYRON "Memoire sur la solidification/ par refroidissement d'un globe liquide" ANN.CHIMIE ET PHYSIQUE, 47, 250-256 (1831).
- [3] J.STEFAN "Veber die Theorie der Eisbildung, insbesondere uber die Eisbildung im Polarmeere" ANNALEN DER PHISIK UN CHEMIE 42 (1891), 269-286.
- [4] G.A.MARTYNOV "Solution of the inverse Stefan problem in the case of spherical symetry" SOVIET PHYSICS DOKL, 5 (1960), 215-218.
- [5] D.LANGFORD "A closed form solution for the constant velocity solidification of spheres initially at the transition temperature" BR.J.APPL.PHYS.17 , 286 (1966).
- [6] D.LANGFORD "The freezing of spheres" INT.J. HEAT / MASS TRANSFER, vol 9, 827-828 (1966).
- [7] D.LANGFORD "Pseudo-similarity solutions of the one dimensional diffusion equation with applications / to the phase change problem" QUART.APPL.MATH. 25 / (1967), 45-52.
- [8] G.W.BLUMAN "Applications of the general similarity solutions of the Heat Equation to boundary-value / problems" QUART.APPL.MATH.. 31 (1974), 403-415.

- [9] B.LYUBOV "Dokl Akad Nauk SSSR 68, N<sup>o</sup> 5, 847-850 / (1949).
- [10] V.T.BORISOV, B.LYUBOV, D.E.TEMKIN "Dokl Akad Nauk SSSR 104, N<sup>o</sup> 2, 223-226 (1955).
- [11] LUIS T.VILLA "Una nota sobre un problema inverso/ de Stefan para la ecuación del calor en el caso / de simetría esférica" INFORME INTERNO, DEPTO CIEN CIAS EXACTAS UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA.BUENOS AIRES N<sup>o</sup> 144 - 4.400 - SALTA.
- [12] D.LANGFORD "Stefan Melting Problem" Doctoral Dis- sertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy N.Y. January 1965.
- [13] C.D.HILL "Parabolic Equations in One space varia- ble and the Non-Characteristic Cauchy Problem" // COM.ON PURE AND APPL.MATH. vol XX, 619-633 (1967)
- [14] D.COLTON "The Non-characteristic Cauchy problem / for parabolic equation in one space variable"SIAM J.MATH.ANAL. vol 5, N<sup>o</sup> 2, April 1974.
- [15] D.COLTON "The noncharacteristic Cauchy problem // for parabolic equations in one space variable" // SIAM J.MATH.ANAL. vol N<sup>o</sup> 2, April 1974.
- [16] C.PUCCI "Alcune limitazioni per le soluzioni di e quazioni paraboliche" ANN.MAT.PURA APPL vol 48, / 1959, pp.161-172.
- [17] D.QUILGHINI "Sul problema inverso di quello di // Stefan" RIV.MAT.UNIV.PARMA (2) 8 (1967) 131-142.



- [18] D.QUILGHINI "Su di un nuovo problema di tipo di Stefan" ANN.MAT.PURA APPL. (4) 62 (1963) 59-97.
- [19] D.TARZIA "Una revisión sobre problemas de frontera/móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan. MATHEMATICAE NOTAE. Año XXIX - 1981 / 82. Pág 147-241.



# Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase

Luis T. VILLA

## 1. INTRODUCCION

El objetivo de este cursillo es considerar una cierta cuestión conectada con el problema inverso de Stefan motivo del cursillo sobre el problema inverso de Stefan.

Esencialmente, la cuestión que trataremos puede establecerse del modo siguiente:

Supongamos que interesa analizar ciertos procesos de cambio de fase encuadrados dentro de las restricciones generales de validez de los modelos matemáticos correspondientes vistos en el cursillo sobre el problema inverso y otras adicionales.

Concretamente, dado un sistema material consistente en un estrato de espesor  $R_0 - r_0$  con simetría plana, cilíndrica o esférica, con propiedades térmico-materiales constantes y a la temperatura de transición, de entre los procesos de cambio de fase que transformen el estrato con leyes asignadas  $s = s(t)$  de movimiento de la interfase en un tiempo  $t_0$  (es decir  $s(0) = r_0$ ,  $s(t_0) = R_0$ ) quisiéramos encontrar aquel que lo haga extremando alguna magnitud física de interés como puede ser por ej una temperatura superficial media (en la superficie de interacción con el exterior) o el flujo total de calor intercambiado, lo que en definitiva se vincula con la economía del proceso. Desde el punto de vista matemático tenemos un problema optimal para el inverso de Stefan que pasamos a formular en la siguiente sección.

## 2. FORMULACION DE UN PROBLEMA OPTIMAL EN LA CONDUCCION / DEL CALOR CON CAMBIO DE FASE

Para tomar un caso, consideremos la solidificación // del estrato desde la superficie  $r = r_0$ .

Dado el modelo:

$$(2.1) \quad D \left[ u_{rr} + \frac{2p+1}{r} u_r \right] - u_t = 0, \quad (r, t) \in D_{t_0} = \\ = \left\{ (r, t) / r_0 < r < s(t) \leq R_0, \quad 0 < t \leq t_0 \right\}$$

$$(2.2) \quad s(0) = r_0$$

$$(2.3) \quad u(r_0, t) = f(t), \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.4) \quad u(s(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

$$(2.5) \quad u_r(s(t), t) = - \frac{\lambda}{D} \dot{s}(t), \quad 0 < t \leq t_0 \quad (\lambda = \frac{l}{c_p})$$

y la clase  $H_{t_0, R_0}$  ( $t_0 > 0$  asignado) de funciones  $s=s(t)$  / definida por

A)  $s(0) = r_0$ ,  $s(t_0) = R_0$ ,  $s$  continuamente diferenciable en  $[0, t_0]$ ,  $\dot{s}(0) > 0$

B) Existe una solución  $u = u(x, t)$  del respectivo problema inverso de Stefan.

Decidir si existe un par  $(\bar{s}, \bar{u})$ ,  $\bar{s} \in H_{t_0, R_0}$ ,  $\bar{u}$  solu-

ción del problema inverso asociado a (2.1)-(2.5) para esa  $\bar{s}$  tal que se minimice el siguiente funcional

$$(2.6) \quad \emptyset = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} |u(r_0, t)| dt$$

Notemos que  $\emptyset$  está expresado precisamente una temperatura media en la superficie  $r = r_0$ .

La resolución de este problema entraña considerable complejidad matemática y nos vamos a restringir a continuación solamente a tratar un caso más simple correspondiente a una clase de procesos más restringida. En [1] (D. Quilghini, 1970) trató para un estrato plano un problema optimal análogo al planteado aquí mas arriba, referente a una determinada clase de procesos de cambio de fase. Los resultados obtenidos en [1] se pueden resumir como sigue:

1) Entre los pares de funciones  $(s, u)$  con  $s$  dada y  $u$  solución del problema inverso de Stefan correspondiente, verificándose:

$$s(t_0) = x_0, \quad t_0 > 0 \text{ dado,}$$

$$(a) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)s(t)} \int_{\varepsilon_1 s(t)}^{\varepsilon_2 s(t)} u(x, t) dx \right] \leq 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son constantes cualesquiera tales que  $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ , el par

$$(2.7) \quad \begin{cases} s(t) = x_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \\ u(x, t) = u_0 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) / \operatorname{erf} \left( \frac{x_0}{2\sqrt{t_0}} \right) \right\} \end{cases}$$

con

$$(2.8) \quad u_0 = \frac{\sqrt{\pi} x_0}{2\sqrt{t_0}} \exp \left( -\frac{x_0^2}{4t_0} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{x_0}{2\sqrt{t_0}} \right)$$

minimiza el funcional

$$F_1(s) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} |u(0, t)| dt$$

2) asignado  $u_0$ , y en consecuencia determinado  $t_0$  de (2.8),

el par (2.7) minimiza también el funcional

$$F_2(s) = \int_0^{t_1} u_x(0, t) dt$$

relativo al conjunto de pares  $(s, u)$ , con  $s(t_1) = x_0$  (cualesquiera sea  $t_1 > 0$ ), que verifiquen en  $(0, t_1]$  la condición (a) y para los que se tenga

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(0, t) = u_0$$

En [2] (A. Fasano, 1971), estudia también un problema / optimal al estilo del visto en [1] pero considerando que / el intercambio térmico en la cara  $x = 0$  sea físicamente / realizable, en efecto en dicho contorno considera una con / dición del tipo

$$u_x(0, t) + \alpha u(0, t) = \varphi(t) \quad , \quad 0 < t \leq t_0$$

con  $\alpha = \text{cte}$ ,  $\varphi$  continua en  $[0, t_0]$ .

Por otra parte, se considera  $s \in H_{x_0, t_0}^{(b)}$  resultando //

las correspondientes soluciones del problema inverso de / Stefan, continuas en  $\bar{D}_{t_0}$ .

La clase  $H_{x_0, t_0}^{(b)}$  es la constituida por aquellos  $s = s(t)$  (fijado  $t_0 > 0$ ) tales que:

A)  $s(0) = 0$ ,  $s$  continua en  $[0, T]$  y con derivada continua en  $(0, T]$ ,  $s(t) \geq 0$

B)  $s(t_0) = x_0$

C) Existe  $\frac{d^2 s}{dt^2}$  continua en  $(0, t_0]$

D) para  $t > 0$  es  $s(t) > 0$

E) existe una solución  $u(x, t)$  del correspondiente proble-

ma de Stefan.

$$(b) \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\epsilon} \int_{s(t)-\nu-\epsilon}^{s(t)-\nu} u(x,t) dx \right] \leq 0$$

como quiera que se elijan las constantes  $\nu \in (0, x_0)$  y  $\epsilon > 0$ , tales que  $s(t) - \nu - \epsilon > 0$

Los resultados se pueden resumir como sigue:

1) En la clase  $H_{x_0, t_0}^{(b)}$  la función

$$(2.9) \quad s(t) = \frac{x_0 t}{t_0}$$

con la solución relativa

$$(2.9)' \quad u(x,t) = 1 - \exp \left( \frac{x_0^2 t}{t_0^2} - \frac{x_0 x}{t_0} \right)$$

minimiza el funcional

$$F_1(s) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} |u(0,t)| dt$$

2) el proceso de transformación del estrato  $0 \leq x \leq x_0$  descrito por (2.9)-(2.9)' se realiza con el mínimo intercambio total de calor en la cara  $x = 0$  respecto de todos los procesos que, compatiblemente con A, B, C, D, E, y (b) se realizan en un tiempo no superior a  $t_0$ .

### 3. RESOLUCION DE UN PROBLEMA OPTIMAL PARA EL CAMBIO DE ESTADO DE UN ESTRATO ESFERICO

Vamos a plantear a continuación específicamente el problema en cuestión para el caso de solidificación de un estrato esférico ( $p = \frac{1}{2}$  en el modelo (2.1)-(2.5)).

Siguiendo la metodología de [1], introduciendo la transformación

$$(3.1) \quad z = \frac{r}{s(t)} \quad , \quad \frac{r_0}{s(t)} \leq z \leq 1 \quad , \quad 0 < t \leq t_0$$

y llamando  $T(z, t)$  a  $u(z \cdot s(t), t)$ , para la función  $T(z, t)$  / se puede escribir el siguiente problema

$$(3.2) \quad \begin{cases} T_{zz} + \frac{2}{z} T_z + \frac{s\dot{s}}{D} z T_z = \frac{s^2}{D} T_t \quad , \quad \frac{r_0}{s(t)} < z < 1, \\ 0 < t \leq t_0 \\ T(1, t) = 0 \quad , \quad 0 < t \leq t_0 \\ T_z|_{z=1} = - \frac{\lambda}{D} s \dot{s} \end{cases}$$

Resolviendo (3.2) para  $T_z$  y teniendo en cuenta (3.1) se / encuentra una expresión para  $u_r(r, t)$  que integrada respec<sub>to</sub> de  $r$  y  $s(t)$  da:

$$(3.3) \quad u(r, t) = \frac{\lambda}{D} s^2 \dot{s} \int_r^{s(t)} \frac{\exp \left[ \frac{s\dot{s}}{D} \left( 1 - \frac{\mu^2}{s^2} \right) \right]}{\mu^2} d\mu + \frac{1}{D} \int_r^{s(t)} \frac{e^{-\frac{\dot{s}}{2Ds} \eta^2}}{\eta^2} \left[ \int_\eta^{s(t)} G(y, t) dy \right] d\eta$$

donde

$$(3.4) \quad G(y, t) = \left[ s(t) u_t + \dot{s} y u_y \right] \frac{y^2}{s(t)} \cdot e^{\frac{\dot{s}}{2Ds} y^2}$$

o introduciendo la función  $W(y, t)$  como

$$(3.5) \quad W(y, t) = s(t) u_t + \dot{s} y u_y$$

la función  $G(y, t)$  se puede escribir

$$(3.6) \quad G(y, t) = \frac{W(y, t)}{s(t)} y^2 \exp \left( \frac{\dot{s}}{2Ds} y^2 \right)$$



Observando la representación dada por (3.3) para  $u(r, t)$  es claro que si hubiere una clase de procesos para los cuales se cumpla la restricción:

$$(3.7) \quad W(y, t) \leq 0$$

en esa clase particular de procesos, podríamos decir los definidos por la clase  $\bar{H}_{t_0, R_0}$  que además de verificar A) y B) verifica además la restricción (3.7), el funcional introducido por (2.6) se puede escribir:

$$(3.8) \quad \phi(s, \dot{s}, t) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} M_1(s, \dot{s}) dt + \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} M(s, \dot{s}, t) dt$$

donde

$$(3.9) \quad M_1(s, \dot{s}) = -\frac{\lambda}{D} s^2 \int_{r_0}^{s(t)} \frac{\exp\left[\frac{s\dot{s}}{D}\left(1 - \frac{\mu^2}{s^2}\right)\right]}{\mu^2} d\mu$$

$$(3.10) \quad M(s, \dot{s}, t) = -\frac{1}{D} \left[ \int_{r_0}^{s(t)} \frac{e^{-\frac{\dot{s}}{2Ds} \eta^2} \left\{ \int_{\eta}^{s(t)} G(y, t) dy \right\}}{\eta^2} d\eta \right]$$

[Obsérvese que en virtud de A), de (3.7) y de que  $\lambda < 0$ , se sigue que:  $M \geq 0$ ,  $M_1 \geq 0$ ].

Es oportuno puntualizar que la condición (3.7) tiene una interesante interpretación física. En efecto, se puede verificar que es equivalente a la siguiente:

$$(3.11) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\int_{\epsilon_1 s(t)}^{\epsilon_2 s(t)} u(r, t) r^2 dr}{\epsilon_2^3 - \epsilon_1^3} \frac{1}{s^3(t)} \right] \leq 0, t \in (0, t_0]$$

para cualesquiera  $\epsilon_1, \epsilon_2$  tales que  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 \leq 1$ . (3.11) expresa esencialmente el hecho de que la cantidad media de calor relativa a la porción de estrato limitada por las superficies  $r = \epsilon_1 s(t)$  y  $r = \epsilon_2 s(t)$  es no creciente como fun

ción del tiempo.

Por otra parte es necesario puntualizar que la clase /  $\bar{H}$  introducida es no vacía, en efecto por ej las siguientes funciones  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$  pertenecen a ella

$$(3.12) \quad s_0(t) = r_0 + m t, \quad m = \frac{R_0 - r_0}{t_0}$$

$$(3.13) \quad s_1(t) = \left[ r_0^2 + 2 a t \right]^{1/2}, \quad a = \frac{1}{2} \frac{R_0^2 - r_0^2}{t_0}$$

siendo  $u_0$ ,  $u_1$  respectivamente las correspondientes soluciones del problema inverso dadas por:

$$(3.12)' \quad u_0 = \lambda \left( 1 - 2 \frac{D}{m} \frac{1}{r} \right) \left[ e^{\frac{m}{D}(s_0 - r)} - 1 \right] +$$

$$+ 2 \lambda \left( \frac{s_0}{r} - 1 \right) e^{\frac{m}{D}(s_0 - r)}$$

$$(3.13)' \quad u_1 = \frac{\lambda}{D} a \left( \frac{s_1}{r} - 1 \right) - \frac{L}{2} e^{1/4k} \frac{1}{r} \int_r^{s_1(t)} \left[ \int_1^{ky} e^{-y^2/4k} dy \right] du$$

$$k = \frac{D}{2a}, \quad L = 2 \lambda \left( \frac{a}{D} \right)^2$$

recordamos que estos dos problemas inversos fueron resueltos en el cursillo sobre el problema inverso de Stefan (// secciones 2 y 3)

### Minimización de $\emptyset$

Siendo  $W = 0$  y por lo tanto  $G(y, t) = 0$  una condición / verificada (se deja como ejercicio) por el par  $(s_1, u_1)$  da do por (3.13)-(3.13)', es suficiente demostrar que la fun ción  $s_1$  minimiza, en la clase considerada, el funcional:

$$(3.14) \quad \bar{\vartheta} = \int_0^{t_0} M_1(s, \dot{s}) dt$$

A tal efecto consideramos una cualesquier función  $s \in \bar{H}_{t_0, R_0}$  y ponemos

$$(3.15) \quad \mathcal{S}(t) = s(t) - s_1(t), \quad t \in [0, t_0]$$

resultando

$$(3.16) \quad \mathcal{S}(0) = \mathcal{S}(t_0) = 0$$

y por otra parte se puede verificar que

$$(3.17) \quad \mathcal{S}(t) \leq 0, \quad t \in [0, t_0]$$

Denotando con  $\Delta(s)$  a la diferencia

$$\bar{\vartheta}(s) - \bar{\vartheta}(s_1)$$

y poniendo  $J(\varepsilon)$  como

$$(3.18) \quad J(\varepsilon) = \int_0^{t_0} M_1(s_1 + \varepsilon \mathcal{S}, \dot{s}_1 + \varepsilon \dot{\mathcal{S}}) dt, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

se tendrá:

$$(3.19) \quad \Delta(s) = J(1) - J(0) = \int_0^1 \frac{dJ}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

siguiendo ahora un clásico procedimiento se demuestra que

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} \geq 0, \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

en consecuencia se tiene  $\Delta(s) \geq 0$  y hemos probado que / en la clase  $\bar{H}_{t_0, R_0}$  el par  $(s_1, u_1)$  dado por (3.13)-(3.13)'

minimiza al funcional  $\bar{\vartheta}$ .

REFERENCIAS

- [1] D.QUILGHINI, Un problema di controllo ottimale nel  
cambiamento di stato di uno strato.  
ANN.MAT.PURA APPL., (4) 84 (1970), pp.309-320
- [2] A.FASANO, Un esempio di controllo ottimale in un /  
problema del tipo di Stefan.  
BOLLETTINO della UNIONE MATEMATICA ITALIANA (4) 4 /  
(1971), 846-858

Luis T. Villa

Facultad de Ciencias Exactas

Universidad Nacional de Salta

Buenos Aires N<sup>o</sup> 177

4.400 SALTA

REPUBLICA ARGENTINA

# Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional

Ricardo H. NOCHETTO

El propósito de estas notas es familiarizar al lector con el concepto matemático de aproximación numérica de un problema de contorno asociado a una ecuación diferencial, justificar las dificultades que surgen al analizar problemas de frontera libre, y luego realizar una clasificación y breve exposición de algunos métodos de aproximación numérica del problema de Stefan, particularmente unidimensional y a una fase. No obstante se indicará, cuando corresponda, si el algoritmo se extiende al caso multidimensional y/o a dos fases, citando en todos los casos bibliografía para continuar un estudio posterior.

Se ha preferido una presentación heurística de los diversos temas, haciendo hincapié en las ideas centrales, más que una exposición rigurosa que sería demasiado extensa y que puede hallarse por otra parte en los trabajos citados al final. En consecuencia estas notas pueden ser útiles como guía u orientación para un lector que desea iniciarse en el tema.

En §1 se discute el concepto de aproximación numérica exhibiendo los diversos aspectos matemáticos que involucra. Seguidamente se muestran diversos esquemas de discretización partiendo de un problema modelo elíptico lineal, luego estudiando uno parabólico lineal para concluir con el problema de Stefan unidimensional a una fase.

En §2 se clasifican en forma muy general los diversos métodos y se presentan sin mucho detalle algunos de los más interesantes, con el objeto de mostrar técnicas de aproximación y análisis, y comentar ciertas ventajas e inconvenientes que cada una posee, quedando abierta la posibilidad de un estudio exhaustivo de alguna de ellas siguiendo la bibliografía citada. Discusiones de esta naturaleza pueden verse también en [12] y [34].

## §1. La Aproximación Numérica

### 1.1. El Concepto de Aproximación Numérica

Trataremos en esta sección de explicar cuales son los aspectos matemáticos que deben considerarse al realizar una aproximación numérica de un problema (lineal o no) asociado a una ecuación diferencial.

Podemos decir que son esencialmente tres:

- (1.1) asociar al problema continuo un problema llamado "discreto" que consiste en resolver en  $\mathbb{R}^n$  una ecuación o inecuación vectorial. En el párrafo 1.2 describiremos desde un punto de vista heurístico los esquemas de aproximación que conducen al problema discreto, y citaremos bibliografía en la que pueden encontrarse estos temas tratados en detalle.
- (1.2) precisar el sentido en que la solución discreta  $u_{h,\tau,\epsilon}$  es próxima a la solución continua  $u$ , vale decir determinar los espacios normados adecuados y obtener en ellos estimaciones del error en función de los tamaños de las triangulaciones espacial  $h$  y temporal  $\tau$ , y posiblemente de un parámetro  $\epsilon$  que puede provenir de un proceso de regularización o penalización. Estos espacios son en general espacios de Sobolev y su elección está estrechamente ligada a la regularidad de la solución continua  $u$ . Los principales elementos pueden verse en [44] sobre todo orientados al análisis numérico, pudiendo recurrirse a [14], [27] o [28] para un tratamiento exhaustivo y su aplicación a la solución y estudio de regularidad de ecuaciones diferenciales.

Normalmente se obtiene una acotación del tipo

$$\|u - u_{h,\tau,\epsilon}\| \leq \sigma(h, \tau, \epsilon)$$

que permite establecer relaciones a priori entre  $h, \tau, \epsilon$  de modo que  $\sigma \rightarrow 0$ , y se dice que la aproximación tiene un orden de convergencia  $\sigma$  en la norma  $\|\cdot\|$ .

En los problemas de frontera libre la obtención de la frontera libre suele ser tanto o más importante que la determinación de la solución. Por ello el estudio de la convergencia de la frontera libre discreta a la frontera libre continua es un problema de gran interés y del que poco se conoce hasta el presente, sobre todo en problemas parabólicos. En §2.2.3 se comentan varios resultados y se cita bibliografía para una lectura posterior.

- (1.3) proponer un algoritmo (generalmente iterativo) que permita resolver aproximadamente el problema discreto y controlar el error. Este punto no será tratado en estas notas, pudiendo el lector interesado recurrir a [16], [43], [44] ó [45].

En ciertos casos se transforma el problema continuo en otro, por ejemplo mediante un cambio en la función incógnita, ya sea para su más adecuado tratamiento teórico o numérico (ver [9], [10], [15]) o porque esta nueva formulación proporciona diferente información del problema (ver [39]), pero luego se deben recuperar las variables discretas originales.

## 1.2. Esquemas de Aproximación

### 1.2.1. Problemas Elípticos

Consideremos en  $\Omega = \{x: 0 < x < 1\}$  el problema modelo

$$(1.4) \quad -u'' + \lambda u = f \quad \text{en } \Omega \quad (\lambda > 0)$$

$$(1.5) \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

Seguidamente formularemos algunos métodos que permiten asociar a (1.4)-(1.5) una ecuación vectorial en  $\mathbb{R}^n$ , que es el problema discreto. Tomemos por simplicidad una partición uniforme de  $\Omega$ , vale decir sea  $N \in \mathbb{N}$  y  $x_i = i \cdot (N+1)^{-1}$ ,  $0 < i < N+1$ . Sea  $h = (N+1)^{-1}$ .

#### 1.2.1.1 Método de Diferencias Finitas

Claramente para una función  $u$  regular, el cociente incremental relativo a la diferencia segunda centrada

$$h^{-2} (u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i))$$

aproxima a  $u''(x_i)$ . Esto sugiere asociar a  $u(x_i)$  el número real  $u_i$  a determinar de modo que se satisfaga la ecuación

$$(1.6) \quad -h^{-2} (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + \lambda u_i = f(x_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq N$$

con  $u_0 = \alpha$  ,  $u_{N+1} = \beta$  , que es la versión discreta de (1.4)-(1.5).

En notación vectorial (1.6) se escribe

$$(1.7) \quad \tilde{A} U = F$$

donde  $\tilde{A}$  es una matriz simétrica tridiagonal y  $F$  incluye a la no homogeneidad  $(f(x_i))$  y a los datos de contorno  $\alpha$  y  $\beta$ .

Un estudio detallado de la convergencia de las soluciones discretas a la solución continua puede verse en [11] y [17], mientras que en [43], [44] y [45] se proponen y analizan diversos algoritmos para la solución aproximada de (1.7).

### 1.2.1.2 Método de Elementos Finitos

Está basado en la formulación débil de una ecuación diferencial. Brevemente podemos decir que en lugar de verificarse la ecuación en forma puntual se satisface promediada por una clase de funciones de prueba regulares. En efecto sea  $\phi$  una función suave definida en  $\Omega$  y tal que  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ . Entonces si  $u$  es una solución de (1.4), multiplicando esta ecuación por  $\phi$  e integrando por partes resulta

$$(1.8) \quad \int_{\Omega} u' \phi' + \lambda u \phi = \int_{\Omega} f \phi .$$

Por otra parte si  $u$  es una solución de (1.8) para toda  $\phi$  en las condiciones anteriores y además si  $u$  es regular, entonces  $u$  es solución de (1.4), (ver [14] ó [28]) para un estudio detallado que incluye ecuaciones más generales y varias dimensiones.

Si restringimos la clase de funciones de prueba a un espacio  $V_h$  de dimensión finita y buscamos en ese conjunto una función  $u_h$  tal



que

$$(1.9) \quad \int_{\Omega} u_h' \phi_h' + \lambda u_h \phi_h = \int_{\Omega} f \phi_h$$

$$(1.10) \quad u_h(0) = \alpha, \quad u_h(1) = \beta,$$

para toda  $\phi_h \in V_h$  y que se anula en 0 y 1, nos encontramos frente a un método de Galerkin puro.

El método de elementos finitos (de clase  $C^0$ ) consiste en definir el espacio  $V_h$  como

$$(1.11) \quad V_h = \{ \phi_h : \phi_h \in C^0(\bar{\Omega}), \phi_h|_{I_i} \in P_k(I_i), 1 \leq i \leq N+1 \},$$

donde  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$  y  $P_k(I_i)$  es el conjunto de polinomios de grado menor o igual a  $k$  definidos en  $I_i$ . Para fijar ideas tomemos  $k=1$ . Entonces las funciones continuas  $\phi_i$  lineales en cada  $I_j$  y tales que  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$  forman una base de  $V_h$ . Por lo tanto podemos escribir

$$u_h = \sum_{i=0}^{N+1} u_i \phi_i, \quad u_0 = \alpha, \quad u_{N+1} = \beta,$$

y llevando esta expresión a (1.9) obtenemos la ecuación vectorial

$$(1.12) \quad \hat{A} \cdot U = (A + \lambda M) U = F,$$

donde  $U = (u_i)_{i=1}^N$ ,  $A$  (matriz de rigidez) y  $M$  (matriz de masa) tienen coeficientes

$$(1.13) \quad a_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i' \phi_j'$$

$$(1.14) \quad m_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j,$$

$$y \quad F = \left( \int_{\Omega} f \phi_1 - \alpha \phi_0' \phi_1' ; \int_{\Omega} f \phi_2 ; \dots ; \int_{\Omega} f \phi_{N-1} ; \int_{\Omega} f \phi_N - \beta \phi_{N+1}' \phi_N' \right) .$$

Una presentación en detalle, con discusiones de los distintos tipos de espacios  $V_h$  y aplicaciones a problemas elípticos, incluyendo estimaciones del error de aproximación en diversas normas puede verse en [5] ó [44].

### 1.2.2. Problemas Parabólicos

Para  $\Omega$  como en §1.2.1 sean  $Q = \Omega \times (0,1)$ , y el problema parabólico modelo

$$(1.15) \quad -u_{xx} + \lambda u + u_t = f, \quad \text{en } Q$$

$$(1.16) \quad u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \quad 0 < t < 1$$

$$(1.17) \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

#### 1.2.2.1 Método Semidiscreto. Consecuencias

Consiste en discretizar la ecuación diferencial sólo en la variable  $x$ , manteniendo continua la variable  $t$ . La discretización puede lograrse empleando el método de diferencias finitas o el de elementos finitos arribándose en cualquier caso a una ecuación vectorial del tipo (1.7) o (1.12) para cada  $t$ ,  $0 < t < 1$ .

En consecuencia se quiere hallar un vector  $U(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $0 < t < 1$ , tal que verifique el problema de valor inicial

$$(1.18) \quad \tilde{A} \cdot U(t) + M \dot{U}(t) = F(t), \quad 0 < t < 1$$

$$(1.19) \quad U(0) = U_0,$$

donde  $U_0$  debe elegirse cuidadosamente en relación con  $u_0$ , y  $M$  es la matriz identidad para el esquema de diferencias finitas o la matriz de masa (1.14), para el esquema de elementos finitos (sin integración numérica).

El análisis de la ecuación diferencial ordinaria (1.18) proporciona gran información sobre la convergencia de las soluciones semi discretas, provee las técnicas para el estudio del problema discreto y

por ello ha sido extensamente investigada (ver [44] para problemas lineales, o [7] y [47] para problemas no lineales regulares, tratados en general en varias dimensiones espaciales)..

Para obtener el problema discreto aplicamos el  $\theta$ -método de diferencias finitas en la variable  $t$  a la ecuación (1.18). En efecto siendo  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $1 \leq n \leq M = \tau^{-1}$ , asociamos a  $U(t_n)$  ( $t_n = n\tau$ ) un vector  $U_n$  a valores reales tal que se verifique

$$(1.20) \quad \tilde{A}(\theta U_n + (1-\theta) U_{n-1}) + \frac{1}{\tau} M(U_n - U_{n-1}) = \theta F(t_n) + (1-\theta) F(t_{n-1}),$$

que se puede reescribir como

$$(1.21) \quad (M + \tau \theta \tilde{A}) U_n = \tilde{F}_n.$$

Se puede probar (ver [44]) que para  $0 < \theta < \frac{1}{2}$  el parámetro  $\tau$  debe ser pequeño para obtener una solución discreta próxima a la continua (resultado de estabilidad). No obstante el caso  $\theta = 0$  para  $M = 1$  (diferencias finitas espaciales) permite el cálculo directo de la solución en el paso  $n$  conocida para el paso  $n-1$ . Los valores del parámetro  $\theta$  más empleados son:

$\theta = 0$	esquema explícito
$\theta = 1$	esquema implícito
$\theta = \frac{1}{2}$	esquema de Crank-Nicolson

#### 1.2.2.2 Método de Elementos Finitos (Espacio-Tiempo)

La ideal central es la misma que la expresada en §1.2.1.2 (ver [19]). Consideremos el problema modelo (1.15)-(1.17) y sea  $\phi(x, t)$  una función regular que se anula en  $\partial \Omega \times (0, 1)$ . Siendo  $u$  la solución de (1.15) multiplicamos por  $\phi$  ambos miembros de esta ecuación, integramos por partes en  $x$  y  $t$  en el dominio  $G = \Omega \times (\theta_1, \theta_2)$ , obteniendo:

$$(1.22) \quad A_G(u, \phi) = \int_G u_x \phi_x - u \phi_t + \int_0^1 u(\cdot, \theta_2) \phi(\cdot, \theta_2) - \int_0^1 u(\cdot, \theta_1) \phi(\cdot, \theta_1) \\ = \int_G f \phi.$$

Sean  $0 \leq n \leq \tau^{-1}$ ,  $t_n = n\tau$ . Entonces queda definido en  $Q$  el conjunto de nodos  $\{P_i^n = (x_i^n, t_n) : 0 \leq i \leq N+1, 0 \leq n \leq \tau^{-1}\}$ . Sean  $G_n = \Omega \times (t_{n-1}, t_n)$ ,  $1 \leq n \leq \tau^{-1}$ ,  $V_{h,\tau}$  el espacio discreto de funciones continuas de tipo  $Q_1$  (según [5]) en cada cuadrilátero  $P_i^{n+1}, P_{i+1}^{n+1}, P_{i+1}^n, P_i^n$ , y por lo tanto funciones seccionales lineales en  $x$  para todo  $t$  y finalmente sean  $\phi_i(x, t)$  elementos de  $V_{h,\tau}$  tales que  $\phi_i(P_j^n) = \delta_{ij}$  ( $0 \leq n \leq \tau^{-1}$ ).

El problema discreto asociado a (1.22) consiste en hallar una familia de vectores  $U_n \in \mathbb{R}^N$  ( $0 \leq n \leq \tau^{-1}$ ) tales que si  $u_{h,\tau}$  indica la función de  $V_{h,\tau}$  que vale  $U_n(i)$  en el nodo  $P_i^n$  se satisfaga

$$(1.23) \quad A_{G_n}(u_{h,\tau}, \phi_j) = \int_{G_n} f \phi_j, \quad (1 \leq n \leq \tau^{-1}),$$

con  $U_0$  como en (1.19),  $U_n(0) = \alpha(t_n)$ ,  $U_n(1) = \beta(t_n)$  para  $1 \leq n \leq \tau^{-1}$ .

(1.24) Nota: (1.23) origina una ecuación vectorial del tipo (1.21), que es una generalización del esquema de Crank-Nicolson en el sentido que si  $x_i^n = x_i^{n+1}$  ( $n \geq 0$ ) coincide con éste (ver [19]).

### 1.2.3 El Problema de Stefan

Tomemos como modelo el siguiente problema de Stefan unidimensional a una fase, consistente en hallar un par  $(u, s)$  tal que

$$(1.25) \quad -u_{xx} + u_t = 0 \quad \text{en } \Omega = \{(x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$$

$$(1.26) \quad u_x(0, t) = -1, \quad t > 0$$

$$(1.27) \quad s(0) = 0$$

$$(1.28) \quad u(s(t), t) = 0, \quad t > 0$$

$$(1.29) \quad u_x(s(t), t) = -\dot{s}(t), \quad t > 0.$$

Claramente debido al movimiento de la frontera libre  $s(t)$  el dominio espacial  $\Omega(t) = \{x; 0 < x < s(t)\}$  es variable en el tiempo por lo que es desconocida a priori la posición de la frontera libre discreta  $S_{n+1}$  correspondiente al tiempo  $t_{n+1}$ . Esta es la principal dificultad para la resolución numérica del problema de Stefan.

Las expresiones (1.28) y (1.29) resumen la información necesaria y suficiente sobre la frontera libre, y de acuerdo a la manera de emplearlas en el procedimiento numérico resulta la clasificación general de la sección siguiente.

A los efectos de fijar ideas consideremos un caso (ver [8]) en el que las expresiones (1.28) y (1.29) sirven para definir el dominio espacial discreto para el tiempo  $t_{n+1}$ . Es posible obtener la ecuación implícita para  $s(t)$

$$(1.30) \quad s(t) = t - \int_0^{s(t)} u(x, t) dx .$$

Llamando  $N_n = [S_n/h]$  la parte entera de  $S_n/h$  se propone el problema discreto que consiste en hallar el par  $(U_{n+1}, S_{n+1})$  tal que

$$(1.31) \quad h^{-1}(U_{n+1}(i) - U_n(i)) = \tau^{-2}(U_{n+1}(i+1) + U_{n+1}(i-1) - 2U_{n+1}(i)),$$

para  $1 \leq i \leq N_n - 1$  (esquema de diferencias finitas implícito,  $\tau$  y  $h$  se suponen fijos) en tanto que cerca de  $S_n$  proponemos

$$(1.32) \quad \tau^{-2}(U_{n+1}(N_n) - U_n(N_n)) = 2h^{-1} \left( \frac{U_{n+1}(N_n-1)}{S_{n+1} - (N_n-1)h} - \frac{U_{n+1}(N_n)}{S_{n+1} - N_n h} \right),$$

que resulta de suponer un comportamiento cuadrático de  $u$  cerca de  $S_{n+1}$  y que se anula en dicho punto, y en  $x=0$

$$(1.33) \quad U_{n+1}(1) - U_{n+1}(0) = -h .$$

La ecuación (1.30) para la interfase se expresa en forma discreta como

$$(1.34) \quad S_{n+1} = t_{n+1} - h \sum_{i=1}^{N_n-1} U_{n+1}(i) - \frac{1}{2}(S_{n+1} - (N_n-1)h) U_{n+1}(N_n) .$$

Luego (1.31) - (1.34) inducen un proceso iterativo que consiste en partir de un valor supuesto para  $S_{n+1}$ , resolver el problema lineal (1.31) - (1.33), recalcular  $S_{n+1}$  de (1.34) y recomenzar el proceso con este nuevo valor de  $S_{n+1}$ . La malla se modifica agregando un

nodo si se verifica  $(N_n + 1)h < S_{n+1}$ .

(1.35) Nota: el proceso iterativo converge a la solución (ver [8]) y claramente no se extiende a problemas multidimensionales. Observar que el método está basado en (1.30) que implica una cierta regularidad a priori de  $S$ , en particular  $s(t)$  es creciente.

## §2 Clasificación de los Métodos. Ejemplos

Seguidamente daremos una clasificación y algunos ejemplos de los métodos de aproximación numérica del problema de Stefan que está basada en el rol de la frontera libre en el procedimiento.

En una clase de métodos, que podríamos llamar "Métodos de Predicción de la Frontera Libre", se suponen regulares la solución y particularmente la frontera libre y esta propiedad se emplea o bien para predecir la posición de la frontera libre discreta en el paso  $n$  a partir de su ubicación en el paso  $n-1$  (ver §2.1.1, §2.1.2 y §2.1.3), o bien para realizar un cambio de variables que permite transformar un dominio variable en el tiempo en uno fijo pero requiriendo a posteriori el cálculo explícito de la frontera libre discreta para obtener la solución discreta (ver §2.1.4).

La otra familia de métodos, que llamamos "Métodos de Dominio Fijo", resuelven un problema (necesariamente no lineal) en un dominio invariante en el tiempo y la frontera libre discreta es una incógnita implícita que puede calcularse como el conjunto de nivel cero de la solución discreta. No requieren regularidad a priori de la solución ni de la frontera libre continuas (ver §2.2.1 y §2.2.2).

En general para el problema de Stefan la bondad de los datos no implica regularidad global de la frontera libre, pudiendo aparecer o desaparecer súbitamente o ser un conjunto con interior no vacío (mushy zone), independientemente de la dimensión espacial. Por esto y porque permiten resolver problemas multidimensionales a dos fases los Métodos de Dominio Fijo son más generales que los Métodos de Predicción de la Frontera Libre. No obstante cuando la geometría del problema o

las características del mismo aseguran un comportamiento regular de la frontera libre, los métodos de predicción pueden ser más eficientes.

## §2.1 Métodos de Predicción de la Frontera Libre

Presentaremos seguidamente algunos métodos de predicción o de dominio variable, pero debe observarse que la elección no es de ninguna manera completa, tanto en la variedad de métodos como en las referencias que en cada uno se indican. La idea de esta sección es mostrar algunos esquemas de aproximación, comentarlos brevemente e indicar sus inconvenientes y posibles aplicaciones.

### 2.1.1 Método de las Líneas

Consiste en asociar a la ecuación diferencial parcial una sucesión de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable espacial y definidas en cada nivel discreto de tiempo. Es un método clásico para el estudio de problemas de difusión con frontera fija y ha sido aplicado en la resolución de problemas de frontera libre por varios autores (ver [29], [31], [46] y la bibliografía allí indicada).

Consideremos el siguiente problema modelo

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} (k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}) + a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u - c(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

$$\text{en } t > 0 \quad 0 < x < s(t),$$

$$(2.2) \quad u_x(0,t) = \alpha_1(t) u(0,t) + \alpha(t) \quad , \quad t > 0$$

$$(2.3) \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad 0 < x < s(0)$$

$$(2.4) \quad u(s(t),t) = 0$$

$$(2.5) \quad u_x(s(t),t) = -\lambda \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 .$$

Tomando una partición uniforme en el tiempo de amplitud  $\tau$  aproximamos (2.1) - (2.5) por la siguiente sucesión de problemas de frontera libre para una ecuación diferencial ordinaria:

$$(2.6) \quad (k_n u'_n)' + a_n u'_n + b_n u_n - c_n \frac{1}{\tau} (u_n - u_{n-1}) = f_n$$

$$(2.7) \quad u'_n(0) = \alpha_{ln} u_n(0) + \alpha_n$$

$$(2.8) \quad u_n(s_n) = 0$$

$$(2.9) \quad u'_n(s_n) = -\frac{\lambda}{\tau} (s_n - s_{n-1}),$$

donde el subíndice  $n$  indica evaluación en  $t_n = n\tau$ .

Se emplea ahora el "método de la inmersión invariante" que consiste en transformar (2.6) en un sistema y luego por un cambio de funciones incógnita obtener un problema de frontera libre para un sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sea  $v_n$  tal que

$$(2.10) \quad u'_n = \frac{v_n}{k_n}$$

$$(2.11) \quad v'_n = \frac{c_n}{\tau} u_n - \frac{a_n}{k_n} v_n - b_n u_n + f_n - \frac{c_n}{\tau} u_{n-1},$$

con las respectivas condiciones de borde derivadas de (2.7) - (2.9). Suponiendo que la solución de este nuevo problema existe, se inmerge en la familia  $\{v_n(x,r), u_n(x,r)\}$  de soluciones de (2.10) - (2.11) que satisfacen

$$(2.12) \quad u_n(0,r) = r$$

$$(2.13) \quad v_n(0,r) = (\alpha_{ln} r + \alpha_n) k_n,$$

donde  $r \in \mathbb{R}$  es un parámetro. Analizando la solución de (2.10) - (2.13) puede comprobarse que

$$(2.14) \quad v_n(x,r) = R_n(x) u_n(x,r) + Z_n(x).$$

Como esta relación, conocida como transformación de Riccati, debe verificarse para todo  $r$  resulta el siguiente problema de valor inicial en las incógnitas  $R_n$  y  $Z_n$ :

$$(2.15) \quad R'_n = \left(\frac{c_n}{\tau} - b_n\right) - \frac{a_n}{k_n} R_n - \frac{1}{k_n} R_n^2$$

$$(2.16) \quad R_n(0) = \alpha_{ln} k_n$$

$$(2.17) \quad Z'_n = -\left(\frac{R_n}{k_n} + \frac{a_n}{k_n}\right) Z_n + f_n - \frac{c_n}{\tau} u_{n-1}$$



$$(2.18) \quad Z_n(0) = \alpha_n k_n .$$

Por otra parte como  $v_n(s_n) = Z_n(s_n)$  obtenemos la siguiente ecuación que define implícitamente  $S_n$

$$(2.19) \quad Z_n(s_n) = -\frac{\lambda}{\tau} k_n (s_n - s_{n-1}) .$$

Luego la función  $u_n(x)$  se calcula integrando (2.14) desde  $s_n$  a 0.

El esquema numérico consiste en resolver (2.15) - (2.19) discretizando  $R_n$  y  $Z_n$  en la variable  $x$ .

(2.20) Nota: bajo ciertas condiciones de regularidad de los datos se prueba que existen los pares  $(u_n, s_n)$  y las funciones

$$S_N(t) = \frac{1}{\tau} [(t - t_{n-1}) S_n + (t_n - t) S_{n-1}]$$

$$U_N(x, t) = \frac{1}{\tau} [(t - t_{n-1}) U_n(x) + (t_n - t) u_{n-1}(t)] ,$$

con  $N = T/\tau$ , convergen uniformemente al par  $(u, s)$  solución del problema de Stefan (ver [29], [30] y [31]). No obstante en estos trabajos no se estudia ni prueban resultados de convergencia del problema discreto en ambas variables.

(2.21) Nota: el método de las líneas se extiende a problemas multidimensionales en los que la frontera libre sea regular y de la forma  $x_n = x_n(x', t)$ . El problema se discretiza en  $(x', t)$  resultando una ecuación diferencial ordinaria en  $x_n$  (ver [32] y [33]).

### 2.1.2 Método de Elementos Finitos Móviles

Consideremos el problema modelo (ver [36])

$$(2.22) \quad -u_{xx} + u_t = 0 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T$$

$$(2.23) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad 0 < x < s_0 = s(0)$$

$$(2.24) \quad u(0, t) = \alpha(t) \quad , \quad t > 0$$

$$(2.25) \quad u(s(t), t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$(2.26) \quad u_x(s(t), t) = -\dot{s}(t) \quad , \quad t > 0,$$

y para cada  $t > 0$  dividimos el intervalo  $(0, s(t))$  en  $N$  partes, resultando  $h(t) = s(t)/N$ ,  $x_i = ih$  ( $0 \leq i \leq N$ ). Construimos una base  $(\phi_i(x, t))$  de elementos finitos seccionalmente lineales, y proponemos la función semidiscreta

$$(2.27) \quad v(x, t) = \alpha(t) \phi_0(x, t) + \sum_{i=1}^{N-1} U_i(t) \phi_i(x, t).$$

Procediendo como en §1.2.2.1 obtenemos la ecuación vectorial

$$(2.28) \quad M(t) \cdot U(t) + (N+A)(t) \cdot U(t) = F(t) \quad ,$$

donde  $U(t) = (U_i(t))$ ,  $M$  y  $A$  son las matrices de masa y rigidez y  $N$  es la matriz de coeficientes  $n_{ij} = \int_0^{s(t)} \phi_j \phi_i dt$ . Siendo  $0 \leq \theta \leq 1$  se asocia a (2.28) el esquema discreto

$$(2.29) \quad M(t_n + \frac{1}{2}\tau) \cdot \frac{1}{\tau} (U^{n+1} - U^n) + (N+A)(t_n + \frac{1}{2}\tau) \cdot (\theta U^{n+1} + (1-\theta) U^n) = F(t_n + \frac{1}{2}\tau) \quad ,$$

donde las matrices  $M$ ,  $N$  y  $A$  se calculan en  $t_n + \frac{1}{2}\tau$  luego de estimar  $s(t_n + \frac{1}{2}\tau)$ , que se realiza como sigue

$$(2.30) \quad s(\frac{1}{2}\tau) = s_0 + \frac{N\tau}{2S_0} u_0(x_{N-1})$$

$$(2.31) \quad s(t_n + \frac{1}{2}\tau) = s(t_{n-1} + \frac{1}{2}\tau) + \frac{U_{N-1}^n}{h(t_n)}$$

donde  $h(t_n) = s(t_{n-1} + \frac{1}{2}\tau)/N$ .

En [37] se prueba la convergencia de las soluciones discretas a la solución continua pero no se dan estimaciones del error. En [38] se aplica el método a problemas de dos fases.

(2.32) Nota: el método se emplea actualmente en problemas multidimensionales, pero tienen el inconveniente de que las matrices  $A$ ,  $M$  y  $N$  se deben recalcular al avanzar en el tiempo.

### 2.1.3 Método de Elementos Finitos Espacio-Tiempo

Para el problema modelo (2.22) - (2.26) empleamos el esquema del §1.2.2.2, que para  $n$ ,  $1 \leq n \leq T\tau^{-1} = N$  consiste en resolver (ver [19])

$$(2.33) \quad A_n(u_{h,\tau}, \phi_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq I$$

$$(2.34) \quad u_{h,\tau}(P_i^0) = u_0(x_i^0), \quad 0 \leq i \leq I$$

$$(2.35) \quad u_{h,\tau}(P_0^n) = \alpha(t_n), \quad 0 < n \leq N$$

$$(2.36) \quad u_{h,\tau}(P_I^0) = 0, \quad 0 < n \leq N,$$

donde se supone determinada a priori la frontera libre discreta  $s_n$ , que define  $P_I^n = (s_n, t_n)$  y con este punto al cuadrilátero de vértices  $P_0^n, P_I^n, P_I^{n-1}, P_0^{n-1}$  que aproxima a  $G_n$ . Esto se consigue de la igualdad

$$(2.37) \quad (S_{n+1} - S_n)/\tau = (Du_n + Du_{n+1})/2$$

$$\text{con} \quad Du_n = (u_{h,\tau}(P_I^n) - u_{h,\tau}(P_{I-1}^n)) / (x_I^n - x_{I-1}^n)$$

El proceso iterativo asociado a (2.33) - (2.37) consiste en proponer  $Du_{n+1}$ , resolver el problema lineal (2.33) - (2.36) y luego con los valores de  $u_{n+1}$  corregir  $S_{n+1}$  a partir de (2.37) para reiniciar el ciclo.

(2.38) Nota: el método es introducido en [19] y en [20], [21] ó [22] se estudia la aproximación de problemas parabólicos con dominio variable suavemente pero prescripto a priori (frontera móvil) y se obtienen estimaciones del error de aproximación en diversas normas y en función de  $h$  y  $\tau$ . Los elementos finitos empleados son continuos en el espacio pero admiten discontinuidades en el tiempo en cada etapa temporal.

(2.39) Nota: el método admite una generalización a más de una dimensión espacial (ver [2]).

#### 2.1.4 Transformación del Problema

El método es debido a J. Nitsche (ver [39]) y consiste en rea

lizar un cambio de variables, basado en la regularidad de la frontera libre, que reduce el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y una ecuación diferencial parcial no lineal con dominio in variable.

Consideremos el problema modelo:

$$(2.40) \quad U_{yy} - U_{\tau} = 0 \quad , \quad \text{en } \Omega = \{(y, \tau) : 0 < \tau \leq T_0, 0 < y < s(\tau)\}$$

$$(2.41) \quad U_y(0, \tau) = 0 \quad , \quad 0 < \tau \leq T_0$$

$$(2.42) \quad U(y, 0) = g(y), \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$(2.43) \quad U(s(\tau), \tau) = 0$$

$$(2.44) \quad U_y(s(\tau), \tau) + \dot{s}(\tau) = 0 \quad , \quad s(0) = 1$$

Para llevar el problema a uno con frontera fija introducimos las variables  $(x, t)$  tales que

$$(2.45) \quad x = s^{-1}(\tau) y$$

$$(2.46) \quad \frac{dt}{d\tau} = s^{-2}(\tau) \quad , \quad t(0) = 0.$$

Entonces (2.40) - (2.44) se transforma en

$$(2.47) \quad u_{xx} - u_t = x u_x(1, t) u_x \quad , \quad \text{en } Q = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$$

$$(2.48) \quad u_x(0, t) = 0$$

$$(2.49) \quad u(1, t) = 0$$

$$(2.50) \quad u(x, 0) = g(x)$$

$$(2.51) \quad u_x(1, t) s(t) + \dot{s}(t) = 0 \quad , \quad s(0) = 1 \quad ,$$

donde (2.47) es la citada ecuación no lineal en derivadas parciales, mientras que (2.46) y (2.51) son el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Mediante el cambio de función incógnita

$$(2.52) \quad u(x, t) = - \int_x^1 v(z, t) dz$$

se obtiene una formulación débil para  $v$  y la consiguiente formulación semidiscreta con elementos finitos espaciales, de la que resulta  $v_h$ . Suponiendo suficiente regularidad de  $v$  se prueba en [39] la estimación

$$(2.53) \quad \|v - v_h\|_{L^\infty(Q)} \leq c h^r \quad (r \geq 3),$$

donde  $r - 1 \geq 2$  es el grado de los polinomios interpolantes en cada elemento finito, ie el orden de convergencia es óptimo.

Finalmente deben recuperarse las variables originales. Para ello se propone

$$u_h(x, t) = - \int_x^1 v_h(z, t) dz$$

$$y = s_h(t) x, \quad \tau = \tau_h(t),$$

tales que

$$(2.54) \quad \dot{s}_h = -v_h(1) s_h, \quad s_h(0) = 1$$

$$(2.55) \quad \dot{\tau}_h = s_h^2, \quad \tau_h(0) = 0.$$

Luego para  $U_h(y, \tau) = u_h(x, t)$  se prueba en [39] que

$$(2.56) \quad \|s - s_h\|_{L^\infty(0, t_0)}, \|\tau - \tau_h\|_{L^\infty(0, t_0)}, \|U - U_h\|_{L^\infty(0, t_0; W_\infty^1)} \leq c h^r,$$

para algún  $t_0 > 0$ , que son estimaciones  $L^\infty$  óptimas para la convergencia de la solución y la frontera libre discretas.

(2.57) Nota: en [39] sólo se estudia el problema semidiscreto restando un análisis del problema discreto.

Es importante remarcar que [39], y en particular [10], poseen abundantes referencias bibliográficas sobre aspectos teóricos y numéricos del problema de Stefan.

## §2.2 Métodos de Dominio Fijo

Consisten en resolver un problema asociado a una ecuación o

inecuación en derivadas parciales sobre un dominio no dependiente del tiempo. La frontera libre discreta es una incógnita implícita no requiriéndose su cálculo en cada etapa temporal para avanzar a la siguiente, sino que puede obtenerse al final del proceso si se desea, buscando el conjunto de nivel cero de la solución discreta.

Estos métodos son multidimensionales y aplicables a problemas de dos fases (ver [35] y la bibliografía allí indicada).

### 2.2.1 Formulación Entálpica

Sea  $H(u) = c(u) + s g(u)$  la función entalpía, donde  $c$  es regular y estrictamente creciente y  $sg$  es la función signo.

La formulación entálpica consiste en hallar una función  $u$  que satisfaga en forma débil la ecuación no lineal:

$$(2.58) \quad - \Delta_x u + H(u)_t = f \quad \text{en } Q = \Omega \times (0, T)$$

sujeta a ciertos datos de contorno e inicial (ver [13]).

La discretización de este problema es motivo de intensa investigación debido en parte a la escasa regularidad global de la solución (ver [13]) y en parte a la dificultad de hallar la solución discreta de un problema monótono discontinuo. Lo habitual (ver [4] [23], [34] y [41]) es regularizar el salto de  $H$  parametrizando con  $\epsilon$  la nueva pendiente y obtener una ecuación diferencial no lineal regular semejante a (2.58).

Se discretiza esta nueva ecuación por ejemplo con un esquema de elementos finitos fijos en el espacio y un esquema implícito de diferencias finitas en el tiempo, resultando la ecuación vectorial

$$(2.59) \quad A U_n + \frac{1}{\tau} B_\epsilon(U_n) = F_n \quad (1 \leq n \leq T \tau^{-1})$$

donde  $A$  es la matriz de rigidez,  $B_\epsilon$  el operador monótono continuo de componentes  $B_\epsilon(U)_i = \int_\Omega H_\epsilon(U) \phi_i$  y  $F_n$  la no homogeneidad que incluye a  $f$  y los datos de contorno.

Siendo  $u_{\epsilon, h, \tau}(x, t) = U_n(x)$  si  $t_{n-1} < t \leq t_n$ , se prueba que (ver [23] y [41])

$$(2.60) \quad \|u - u_{\varepsilon, h, \tau}\|_{L^2(Q)} + \|H(u) - H_{\varepsilon}(u_{\varepsilon, h, \tau})\|_{L^{\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq c \varepsilon^{1/2},$$

para la relación a priori  $h = \varepsilon^{3/4}$ ,  $\tau = \varepsilon$ , y que el orden es  $\varepsilon$  para soluciones no degeneradas (ver [41]) bajo la relación  $h = \varepsilon$ ,  $\tau = \varepsilon^{3/2}$ . En [4] y [41] además se proponen métodos para la resolución del problema discreto (2.59).

### 2.2.2 Desigualdades Variacionales

Mediante la transformación de DUVAUT (ver [9], [10] y [15])

$$(2.61) \quad v(x, t) = \int_0^t u(x, s) ds$$

se transforma la ecuación (2.58) en una desigualdad variacional, que puede expresarse como el problema de hallar una función  $v$  en un adecuado espacio funcional tal que resuelva el siguiente problema de complementariedad:

$$(2.62) \quad v \geq 0$$

$$(2.63) \quad -\Delta_x v + v_t + g \geq 0$$

$$(2.64) \quad (-\Delta_x v + v_t + g) v = 0$$

bajo ciertas condiciones de contorno. Discretizando (2.62) - (2.64) con un esquema de elementos finitos fijos en el espacio y un  $\theta$ -esquema de diferencias finitas en el tiempo obtenemos el siguiente problema discreto

$$(2.65) \quad v_{n+1} \geq 0$$

$$(2.66) \quad A(\theta v_{n+1} + (1-\theta) v_n) + M \tau^{-1} (v_{n+1} - v_n) + G_n \geq 0$$

$$(2.67) \quad [A(\theta v_{n+1} + (1-\theta) v_n) + M \tau^{-1} (v_{n+1} - v_n) + G_n] \cdot v_{n+1} = 0,$$

donde  $A$  y  $M$  son las matrices de rigidez y de masa, y que puede resolverse por diversos métodos (ver [16], [18], [26], [43] y [44]).

Para una dimensión espacial en [1] se prueba la estimación de error

$$\|v_{h,\tau} - v\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon (h^2 + \tau)^{\frac{1}{4} - \varepsilon} + Ch^{-\frac{3}{2}} (h^2 + \tau).$$

En dos dimensiones espaciales puede verse [42] donde se obtiene una estimación del error y se muestran resultados numéricos.

### 2.2.3 Convergencia de la Frontera Libre Discreta

En numerosos problemas prácticos la incógnita principal es la posición de la frontera libre por lo que el estudio de la convergencia de la frontera libre discreta es un problema esencial, y del que poco se sabe en una dimensión espacial y nada en varias.

El motivo puede comprenderse con el siguiente ejemplo: sean  $f_n = \frac{1}{n}$ ,  $f = 0$  en  $(0,1)$ . Entonces  $f_n \rightarrow f$  uniformemente pero los conjuntos de no coincidencia (o de positividad)  $\Lambda$  verifican

$$\Lambda_n = (0,1) \not\rightarrow \Lambda = \emptyset,$$

y en consecuencia no basta con disponer de convergencia uniforme de las soluciones discretas para estimar la convergencia de la frontera libre discreta.

El siguiente resultado débil se enuncia en [1]. Sean  $f_n, f$  continuas en  $D$ ,  $\|f_n - f\|_{L^\infty(D)} = \varepsilon_n \rightarrow 0$  y sean  $\delta_n > 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ ,  $\Omega = \{f > 0\}$ ,  $\Omega_n = \{f_n > \delta_n\}$ . Entonces  $\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n$ , y la convergencia es interior, i.e.  $\Omega_n \subset \Omega$  si  $n \geq n_0$ .

Para problemas elípticos (problema del obstáculo) en [3] se prueba que la frontera libre discreta converge en  $L^\infty$  a la continua con un orden que es la raíz cuadrada de la norma  $L^\infty$  del error entre las soluciones discreta y continua.

Resultados de este tipo deben ser extendidos al caso parabólico.



BIBLIOGRAFIA

- [1] C. BAIOCCHI - G. A. POZZI, "Error estimates and free-boundary convergence for a finite difference discretization of a parabolic variational inequality", RAIRO Numer. Anal., Vol 11 N° 4 (1977), p 315-340.
- [2] R. BONNEROT - P. JAMET, "Numerical computation of the free boundary for the two-dimensional Stefan problem by Space-time finite elements", J. Comp. Phys., 25 (1977), pp 163-181.
- [3] F. BREZZI - L. A. CAFFARELLI, "Convergence of the discrete free boundaries for finite element approximations", a aparecer en RAIRO Numer. Anal.
- [4] L. CERMAK - M. ZLAMAL, "Transformation of dependent variables and the finite solution of non-linear evolution equations", Int. J. Numer. Meth. Engng., 15 (1980), p 31-40.
- [5] P. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North Holland (1978).
- [6] J. DOUGLAS, Jr., "A survey of numerical methods for parabolic differential equations", Advances in Computer, 2 (1961) p 1-54.
- [7] J. DOUGLAS, Jr. - T. DUPONT, "Galerkin methods for parabolic equations". SIAM J. Numer. Anal., Vol 7, N° 4 (1970) p 575-625.
- [8] J. DOUGLAS - T. GALLIE, "On the numerical integration of a parabolic differential equations subject to a moving boundary condition", Duke Math. J. 22, (1955), p 557-571.
- [9] G. DUVAUT, "Resolution d'un problème de Stéfan", C. R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), p 1461-1463.
- [10] G. DUVAUT, "The Solution of a Two-Phase Stefan Problem by a Variational Inequality", Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion (Ockendon-Hodgkins Eds.), Clarendon Press (1975), p 173-181.
- [11] G. FORSYTHE - W. WASOW, "Finite Difference Methods for Partial Differential Equations", Wiley, New York (1960).

- [12] L. FOX, "What are the best numerical methods?", Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion (Ockendon-Hodgkins Eds. 1975), Clarendon Press, p 210-241.
- [13] A. FRIEDMAN, "The Stefan problem in several space variables", Trans. AMS, 133 (1968), p 51-87.
- [14] A. FRIEDMAN, "Partial Differential Equations", Robert E. Krieger Pub. Co., Inc. (1969).
- [15] A. FRIEDMAN - D. KINDERLHERER, "A one phase Stefan Problem", Indiana Math. J., 24 (1975), p 1005-1035.
- [16] R. GLOWINSKI - J. L. LIONS - R. TREMOLIERES, "Analyse numérique des inéquations variationnelles", Vol 1-2, Dunod (1976).
- [17] P. HENRICI, "Elements of Numerical Analysis", Wiley, New York (1964).
- [18] Y. ICHIKAWA - N. KIKUCHI, "A one-phase multidimensional Stefan problem by the method of Variational Inequalities", Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol 14 p 1197-1220 (1979).
- [19] P. JAMET, "Elements finis espace-temps pour la résolution numérique de problèmes de frontières libres", Méthodes numériques en mathématiques appliquées, Presses de l'université de Montréal, 1976.
- [20] P. JAMET, "Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain", SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), pp 912-928.
- [21] P. JAMET, "Estimations d'erreur pour l'approximation de l'équation de la chaleur dans un domaine variable par des méthodes d'éléments finis espace-temps", Journées éléments finis 4,5 et 5,6/1977. Univ. Rennes.
- [22] P. JAMET, "Stability and convergence of a generalized Crank-Nicolson scheme on a variable mesh for the heat equation", SIAM J. Num. Anal. 17 (1980) p 530-539.
- [23] J. JEROME - ROSE, "Error Estimates for the Multidimensional Two-Phase Stefan Problem", Math. of Comp., Vol 39, N° 160 (1982), p 377-414.

- [24] H. KAWARADA - M. NATORI, "On numerical solutions of Stefan problem I", *Memoirs of Numerical Math.*, 1 (1974) p 43-64.
- [25] H. KAWARADA - M. NATORI, "On numerical solutions of Stefan problem II , Unique existence of numerical solution", *Memoirs of Numerical Math*, 2 (1975) p 1-20.
- [26] N. KIKUCHI - Y. ICHIKAWA, "Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 14 (1979), p 1221-1239 .
- [27] D. LADYZENSKAJA - V. SOLONNIKOV - N. URALCEVA, "Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type", *Translations of Mathematical Monographs A.M.S.* (1968).
- [28] J. L. LIONS - E. MAGENES, "Non-homogeneous boundary value problems and applications I, II y III", *Springer Verlag* (1972).
- [29] G. MEYER, "On a free interface problem for linear ordinary differential equations and the one phase Stefan problem", *Numer. Math.* 16 (1970), p 248-267.
- [30] G. MEYER, "A numerical method for two-phase Stefan problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol 8, N° 3 (1971) p 555-568.
- [31] G. MEYER, "One dimensional parabolic free boundary problems", *SIAM Rev.*, 19, Vol 1 (1977), p 17-34.
- [32] G. MEYER, "An application of the Method of Lines to multidimensional free boundary problems", *J. Inst. Maths. Applies* (1977) 20, p 317-329.
- [33] G. MEYER, "An alternating direction method for multidimensional parabolic free surface problems", *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 11 (1977), p 741-752.
- [34] G. MEYER, "Multidimensional Stefan Problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 (1973), p 522-538.
- [35] G. MEYER, "The numerical solution of multidimensional Stefan problems. A survey", *Moving Boundary Problems (WILSON-SOLOMON-BOGGS, ed)*, *Academic Press* (1978), p 73-89.

- [36] M. MORI, "Numerical solution of the Stefan problem by the finite element method", *Memoirs of Numer. Anal.*, 2 (1975), p 35-44.
- [37] M. MORI, "Stability and convergence of a finite element method for solving the Stefan problem", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 12 (1976) p 539-563.
- [38] M. MORI, "A finite element method for solving the two phase Stefan problem in one space dimension", *Publ RIMS, Kyoto Univ.*, 13 (1977), p 723-753.
- [39] J. NITSCHKE, "Finite element approximations to the one-dimensional Stefan problem", *Recent Advances in Numerical Analysis* (C. de Boor G. H. Golub, ed) Academic Press, New York (1978), p 119-142.
- [40] J. NITSCHKE, "A finite element method for parabolic free boundary problems", *Free Boundary Problems, Proceeding of a Seminar held in Pavia* (1980), p 277-318.
- [41] R. H. NOCHETTO, "Aproximación numérica del problema de Stefan multidimensional a dos fases por el método de regularización", *Tesis en Ciencias Matemáticas, Univ. Buenos Aires* (1983).
- [42] J. T. ODEN - N. KIKUCHI, "Finite element methods for certain free boundary-value problems in mechanics", *Moving Boundary Problems* (WILSON-SOLOMON-BOGGS, ed), Academic Press (1978), p 147-164.
- [43] J. M. ORTEGA - W. C. RHEINBOLDT, "Iterative solution of nonlinear equations in several variables", Academic Press (1970).
- [44] P. RAVIART - P. FAURRE, "Cours d'analyse numérique", *Ecole Polytechnique* (1976).
- [45] R. VARGA, "Matrix Iterative Analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs (1962).
- [46] F. VASIL'EV, "The Method of Straight Lines for the Solution of a One-Phase Problem of the Stefan Type", *U.S.S.R. Computational Math. and Math Physics. Vol 8, N° 1* (1968), p 81-101.
- [47] M. F. WEELER, "A priori  $L^2$  error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 (1973), p 723-759.

# Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional

Graciela G. GARGUICHEVICH—María C. SANZIEL

El propósito de estas notas no es referirnos a los métodos numéricos que aproximan las diversas formulaciones del problema de Stefan sino que analizaremos otro tipo de métodos analíticos, en general no iterativos, que surgen de modificaciones hechas a la formulación original del problema y que provienen, en su mayoría, de **consideraciones físicas**.

El objetivo principal de los mismos es el cálculo de la interfase o frontera libre  $s(t)$  y su valor radica en su simplicidad y en la rápida obtención de soluciones.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, al considerar problemas que no son equivalentes al de Stefan, que no "tienden" al mismo y que generalmente no tienen solución única, estos métodos han quedado bastante relegados. Sin embargo son de mucha utilidad en las aplicaciones donde se emplean para obtener una rápida estimación de la **ubicación** de la interfase y también como dato inicial en muchos métodos iterativos.

Nos limitaremos a introducir únicamente tres métodos: el método cuasi-estacionario, el del balance integral calórico y el método variacional de Biot.

Otros métodos pueden consultarse en las referencias por ejemplo en [13] y [16].

## §1. EL METODO CUASI-ESTACIONARIO.

La solución cuasi-estacionaria fué planteada por Stefan [17].

El problema de determinar la posición de la línea de derretimiento en una barra semi-infinita inicialmente a temperatura de fusión ( $0^\circ$ ) cuyo borde fijo se mantiene a temperatura constante positiva (problema de Stefan unidimensional a una fase), admite la siguiente formulación, que denominaremos P :

$$(1.1) \quad u_t = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0$$

$$(1.2) \quad u(0,t) = u_0 > 0 \quad t > 0$$

$$(1.3) \quad u(s(t),t) = 0 \quad t > 0$$

$$(1.4) \quad -\frac{k}{\rho \ell} u_x(s(t),t) = \dot{s}(t) \quad t > 0$$

$$(1.5) \quad s(0) = 0 \quad .$$

Donde:

u: temperatura

k: conductividad térmica

$\rho$ : densidad

$\ell$ : calor latente de fusión

c: calor específico

$a^2 = \frac{k}{\rho c}$  : difusividad térmica.

En el método cuasiestacionario se reemplaza en P la ecuación del calor (1.1) por

$$(1.6) \quad u_{xx} = 0 \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Este nuevo problema corresponde físicamente a procesos que se desarrollan muy lentamente ( $u_t \approx 0$ ), es decir, aquellos en los que el calor latente de fusión  $\ell \rightarrow \infty$ , o sea donde el número de Stefan  $Ste = \frac{c u_0}{\ell} \rightarrow 0$ , y se resuelve fácilmente obteniéndose la solución

$$(1.7) \quad u_1(x,t) = u_0 \left( 1 - \frac{x}{s_1(t)} \right) \quad 0 \leq x \leq s_1(t) \quad , \quad t > 0$$

$$(1.8) \quad s_1(t) = 2 a \xi_1 \sqrt{t} \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{Ste}{2}} \quad .$$

Se comprueba sin dificultad que  $\xi_1$  es la aproximación de primer orden del parámetro  $\xi$  correspondiente a la solución exacta de P :

$$(1.9) \quad u(x,t) = \frac{u_0}{\text{erf } \xi} \left[ \text{erf } \xi - \text{erf} \left( \frac{x}{2 a \sqrt{t}} \right) \right]$$

$$(1.10) \quad s(t) = 2 a \xi \sqrt{t} \quad , \quad \xi > 0 / \xi e^{\xi^2} \text{erf } \xi = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}}$$

donde  $\text{erf } y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-v^2} dv \quad .$

Esto significa que para  $Ste \ll 1$  el error que se comete al considerar (1.7) (1.8) en lugar de (1.9) (1.10) es despreciable.

## §2. EL METODO DE BALANCE INTEGRAL CALORICO.

Este método desarrollado por primera vez por T.R. Goodman [8] para problemas con cambio de fase, es análogo al método del momento integral usado en la teoría de capas límites de la mecánica de los fluidos [14] y se basa en el concepto físico de "profundidad de penetración térmica".

Esto es, como uno de los mecanismos de conducción del calor es la difusión, el efecto de la excitación en el borde  $x = 0$ , ya sea la temperatura  $u_0$  (cte o no) o un flujo dado, no se propaga inmediatamente a toda la barra, sino que dicho efecto se percibe en un intervalo acotado  $[0, \delta(t)]$  fuera del cual la temperatura permanece igual a su valor inicial.

Se puede así postular la existencia de una función  $\delta(t)$ , que mide la profundidad de la "capa térmica", tal que:

$$(2.1) \quad u(x, t) = u_i \quad x \geq \delta(t) \quad u_i = \text{temperatura inicial}$$

$$(2.2) \quad u_x(\delta(t), t) = 0 \quad t > 0$$

$$(2.3) \quad \delta(0) = 0 \quad .$$

Si la temperatura satisface la ecuación de Fourier (1.1) en  $(0, \delta(t))$ , entonces también se verifica:

$$(2.4) \quad \int_0^{\delta(t)} u_t \, dx = \int_0^{\delta(t)} a^2 u_{xx} \, dx \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Este promedio o "balance integral calórico" es un balance energético que, suponiendo que  $\delta$  sea continuamente diferenciable y usando la regla de Leibnitz, puede expresarse como:

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} u(x, t) \, dx = u(\delta(t), t) \dot{\delta}(t) + a^2 [u_x(\delta(t), t) - u_x(0, t)] \quad .$$

Para un problema sin cambio de fase que satisface las (2.1)-(2.3) se tendrá:

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} u(x, t) \, dx = u_i \dot{\delta}(t) - a^2 u_x(0, t) \quad .$$

Si se considera en cambio el problema P, la capa térmica  $\delta(t)$  coincidirá con la frontera libre  $s(t)$  y el balance integral calórico se podrá expresar

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} u(x, t) \, dx = a^2 [u_x(s(t), t) - u_x(0, t)] \quad .$$

Se plantea entonces un nuevo problema (1.2) a (1.5) y (2.7) que a diferencia del  $P$  no tiene solución única.

Para resolverlo se propone representar a la temperatura por una función  $u(t,x,s(t))$  que satisfaga (1.2) a (1.4) y que reemplazada en (2.7) permita obtener una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la incógnita  $s(t)$ , la que, junto con (1.5) posibilite su cálculo efectivo.

En general es conveniente, aunque no necesario, restringirse a funciones  $u$  polinómicas en la variable espacial  $x$ , es decir:

$$u(x,t,s(t)) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad a_j = a_j(t,s(t)), \quad n \in \mathbb{N}$$

El propósito expresado no siempre se puede concretar, ya que la presencia de  $\dot{s}(t)$  en (1.4) implica muchas veces la obtención de una ecuación de segundo orden. Para salvar esta dificultad se propone resolver un nuevo problema el que resulta de reemplazar la (1.4) por alguna otra ecuación de ella derivada que no contenga explícitamente a  $\dot{s}(t)$ . Derivando (1.3) respecto de  $t$  se obtiene:

$$(2.8) \quad u_x(s(t),t)\dot{s}(t) + u_t(s(t),t) = 0, \quad t > 0$$

la que combinada con (1.4) resulta:

$$(2.9) \quad \frac{k}{\rho l} \left[ u_x(s(t),t) \right]^2 = u_t(s(t),t), \quad t > 0.$$

Si además se supone que la (1.1) se verifica en  $x = s(t)$  se tendrá

$$(2.10) \quad \left[ u_x(s(t),t) \right]^2 = \frac{l}{c} u_{xx}(s(t),t), \quad t > 0.$$

El problema a resolver será (1.2), (1.3), (1.5), (2.7) y (2.10).

Si elegimos

$$(2.11) \quad u(x,t) = \alpha(t)(x - s(t)) + \beta(t)(x - s(t))^2$$

se llega a la ecuación

$$\dot{s}(t)s(t) = 6a^2 \left( \frac{1 + 2Ste - \sqrt{1 + 2Ste}}{5 + 2Ste + \sqrt{1 + 2Ste}} \right)$$

que tiene por solución

$$(2.12) \quad s_2(t) = 2a \xi_2 \sqrt{t}, \quad \xi_2 = \sqrt{3} \left( \frac{1 + 2Ste - \sqrt{1 + 2Ste}}{5 + Ste + \sqrt{1 + 2Ste}} \right)$$

resultando en (2.11)

$$\alpha(t) = \frac{l}{c} \frac{1 - \sqrt{1 + 2Ste}}{s(t)} \quad \beta(t) = \frac{\alpha(t)s(t) + u_0}{s^2(t)}$$



También podría elegirse como  $u$  a un polinomio de grado  $n > 2$ ; obviamente dicho grado deberá vincularse con el número de condiciones en  $x = 0$  y  $x = s(t)$  que se pretende que satisfaga  $u$ . En [11] se comparan las soluciones de los diferentes problemas que resultan de plantearse condiciones adicionales, las que se obtienen diferenciado respecto de  $t$  en (1.2) y (1.3) e imponiendo la validez de (1.1) en  $x = 0$  y/o  $x = s(t)$ . Aunque a veces pueda mejorar la aproximación, esto no siempre justifica las complicaciones introducidas en los cálculos.

También se propone un criterio de comparación entre las posibles soluciones aproximadas que se puede aplicar aún en aquellos problemas cuya solución exacta se desconoce ([9], [11]) y para ésto se define una medida del error de la solución aproximada  $u^*(x,t)$  correspondiente a  $s^*(t)$  como:

$$(2.13) \quad E(t) = \int_0^{s^*(t)} \left[ a^2 u_{xx}^*(x,t) - u_t^*(x,t) \right]^2 dx \geq 0 .$$

Otros refinamientos del método de balance integral calórico pueden verse en [2] y [6].

En el primero, en lugar de plantear un único balance siguiendo la profundidad de penetración de la temperatura de fusión  $s(t)$ , se sigue un número arbitrario de isotermas, escribiendo el balance integral para cada una de las regiones en que resulta dividida la fase líquida por las isotermas elegidas. Usando tan solo dos divisiones (correspondientes a  $x = x_1(t)$  definida por  $u(x_1(t), t) = \frac{u_0}{2}$  y  $x = s(t)$ ) se puede reducir el error de 6,5% a 1,2%. Obviamente un número mayor de subdivisiones atenta contra la simplicidad del método.

En el segundo en cambio, se obtiene un nuevo balance calórico a partir de la integración de la ecuación (1.1), dos veces con respecto al espacio  $x$  y una vez respecto del tiempo  $t$ . Usando esta nueva expresión las soluciones obtenidas son senciblemente mejores que las halladas en [8] en particular cuando  $Ste \gg 1$ .

Cuando se considera el problema de Stefan unidimensional a dos fases, en lugar de verificarse la (1.1) en  $(0, \delta(t))$  deberán plantearse dos ecuaciones

$$(2.14) \quad u_t^l = a_l^2 u_{xx}^l \quad 0 < x < s(t)$$

$$(2.15) \quad u_t^S = a_s^2 u_{tt}^S \quad s(t) < x < \delta(t)$$

donde  $u_\ell$ ,  $a_\ell$  y  $u_s$ ,  $a_s$  representan la temperatura y la difusividad térmica de las fases líquida y sólida respectivamente.

Las condiciones que debe verificar  $u_\ell$  son las mismas que en el problema a una fase, mientras que  $u_s$  deberá cumplir (2.1), (2.2), (2.3) y además  $u(s(t), t) = u_s(s(t), t) = 0$ .

Integrando la (2.14) en  $[0, s(t)]$  y la (2.15) en  $[s(t), \delta(t)]$  se obtienen los correspondientes balances para  $u_\ell$  y  $u_s$ .

La resolución de este nuevo problema puede verse en [13] donde se considera una aproximación lineal en  $x$  para  $u_\ell$  y cuadrática para  $u_s$ , procediéndose como en el problema a una fase.

Quando el método se aplica al problema de cambio de fase en una barra finita de longitud  $\ell$  [10], el balance se realiza sobre el intervalo  $[0, \ell]$  teniendo en cuenta la temperatura inicial de la barra y las condiciones de borde, para luego en pasos sucesivos determinar la capa térmica  $\delta(t)$  y la interfase  $s(t)$ .

El método se extiende a problemas donde las propiedades térmicas de los materiales depende de la temperatura [9] y también al análisis de problemas multidimensionales.

### §3. METODO VARIACIONAL DE BIOT.

El principio variacional de Biot [3] es aplicable a una amplia gama de procesos relacionados con la transferencia de calor y utiliza métodos análogos a los de la mecánica clásica.

Son características fundamentales del método:

- i) la introducción de un campo vectorial  $\bar{H}$ , llamado desplazamiento calórico que verifica

$$\dot{\bar{H}} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}(\bar{x}, t)$$

donde  $\dot{\bar{H}}$  es el vector que representa al flujo de calor por unidad de área.

- ii) los conceptos de potencial termal, función de disipación y fuerza termal generalizada.

En este enfoque la conducción del calor se describe a través de dos ecuaciones:

$$(3.1) \quad \rho c u = - \operatorname{div} \bar{H}$$

$$(3.2) \quad \operatorname{grad}_{\bar{x}} u + \frac{1}{k} \dot{\bar{H}} = 0$$

de las que se puede deducir la ley de Fourier eliminando  $\bar{H}$ .

Para obtener el principio variacional consideremos variaciones  $\delta \bar{H}$  y  $\delta u$  (en analogía a los desplazamientos virtuales) que verifican las ecuaciones (3.1) y (3.2).

Si multiplicamos escalarmente (3.2) por  $\delta \bar{H}$  e integramos sobre un volumen  $\tau$ , resulta:

$$(3.3) \quad \iiint_{\tau} \left( \operatorname{grad}_{\bar{x}} u + \frac{1}{k} \dot{\bar{H}} \right) \cdot \delta \bar{H} d\tau = 0$$

y aplicando la fórmula de Green:

$$(3.4) \quad \iiint_{\tau} \left[ -u \operatorname{div}(\delta \bar{H}) + \frac{1}{k} \dot{\bar{H}} \cdot \delta \bar{H} \right] d\tau = - \iint_A u \bar{n} \cdot \delta \bar{H} dA$$

donde  $A$  es la superficie frontera de  $\tau$  y  $\bar{n}$  la normal exterior a  $A$ .

Si definimos el potencial termal

$$(3.5) \quad V = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} c u^2 d\tau$$

resulta de (3.1) y (3.4) el principio variacional para la conducción térmica:

$$(3.6) \quad \delta V + \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{\bar{H}} \cdot \delta \bar{H} d\tau = - \iint_A u \bar{n} \cdot \delta \bar{H} dA$$

Este principio puede ser reformulado si se considera que el campo  $\bar{H}$  es también función de un cierto número de coordenadas generalizadas, convenientemente elegidas:

$$(3.7) \quad \bar{H} = \bar{H}(x, t, q_1, \dots, q_n)$$

$$(3.8) \quad \delta \bar{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$(3.9) \quad \delta V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i$$

por lo que (3.6) se escribe:

$$(3.10) \quad \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} + \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{H} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_i} d\tau \right] \delta q_i = - \sum_{i=1}^n \delta q_i \iint_A u \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_i} \cdot \bar{n} dA$$

y debido a la arbitrariedad de las variaciones:

$$(3.11) \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} + \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{H} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_i} d\tau = - \iint_A u \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_i} \cdot \bar{n} dA \quad i = 1, \dots, n$$

Este sistema de ecuaciones resulta similar a las lagrangianas de la mecánica clásica, si llamamos

$$(3.12) \quad D = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \frac{1}{k} \dot{H}^2 d\tau \quad \text{función de disipación}$$

$$(3.13) \quad Q_i = - \iint_A u \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_i} \cdot \bar{n} dA \quad \text{fuerza termal}$$

y las (3.11) se expresan:

$$(3.14) \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n$$

Cuando este principio se aplica en particular para el cálculo aproximado de la frontera libre en el problema P [12], se elige como única coordenada generalizada a dicha frontera libre  $s(t)$  y se reemplazan en P la ecuación (1.1) por:

$$(3.15) \quad \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{s}} = Q_s$$

donde

$$H = H(x, t, s)$$

$$\rho c u = - \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} c u^2 dx$$

$$D = \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} \frac{1}{k} \dot{H}^2 dx$$

$$Q_s = - u \frac{\partial H}{\partial s} \Big|_{x=0}^{x=s(t)}$$

y la (1.4) por

$$(3.16) \quad \dot{H}(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t)$$

Para resolver este nuevo problema se propone una distribución polinómica de la temperatura que satisfaga (1.2) y (1.3). Si se elige en particular

$$u = u_0 \left( 1 - \frac{x}{s} \right)^2$$

resulta

$$H = \frac{\rho c u_0 s}{3} \left(1 + \frac{x}{s}\right)^3 + \rho \ell s$$

$$V = \frac{1}{10} c \rho u_0^2 s$$

$$D = \frac{1}{2k} \left( \frac{13}{315} c^2 \rho^2 u_0^2 + \rho^2 \ell^2 + \frac{1}{3} c \rho \ell u_0 \right) s \dot{s}^2$$

$$Q_s = c \frac{u_0^2}{3} + \rho \ell u_0$$

y reemplazando en (3.15) se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$2 s \dot{s} = a^2 \left( \frac{588 \text{ Ste}^2}{52 \text{ Ste}^2 + 420 \text{ Ste} + 1260} + \frac{2.520 \text{ Ste}}{52 \text{ Ste}^2 + 420 \text{ Ste} + 1260} \right) = a^2 \beta$$

que tiene por solución, considerando la condición inicial (1.5):

$$s(t) = 2 \xi_3 a \sqrt{t} \quad \text{donde} \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\beta}$$

Para valores de  $\text{Ste} \ll 1$  el error que se comete es del orden del 0,5 % .

Otros problemas del tipo Stefan han sido resueltos aproximadamente con este método:

- en [4] y [5] se lo utiliza en un problema de ablación, es decir cuando a un sólido semiinfinito se le aplica un flujo de calor constante en el borde fijo, que provoca la remoción del material. En [5] se trata el caso de un material con propiedades térmicas constantes, mientras que en [4] las mismas dependen de la temperatura.
- en [7] se considera la solidificación de un material semi-infinito al que se le aplica en el borde fijo una temperatura variable en el tiempo. También se estudia un problema inverso: qué temperatura debe aplicarse en el borde para obtener una función prefijada como expresión de la frontera libre.
- en [15] se trata el calentamiento de un sólido semi-infinito por la aplicación de un flujo constante en el borde.
- en [1] se analiza el calentamiento aerodinámico de un sólido, inicialmente a temperatura de fusión.
- en [18] se resuelve el problema de solidificación (o derretimiento) de un medio finito sometido en uno de sus extremos a enfriamiento (o calentamiento) aerodinámico y radioactivo y aislado térmicamente en el otro con temperatura inicial distinta a la de cambio de fase

La precisión de los resultados obtenidos en cada caso se mide por comparación con la solución exacta, cuando ésta se conoce, o bien con otras soluciones aproximadas como las desarrolladas en los párrafos precedentes.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] AGRAWAL, H.C.: "*Biot's variational principle for moving boundary problems*", Proc. Symposium on moving boundary problems in heat flow and diffusion, Clarendon Press, Oxford (1975), 242-250.
- [2] BELL, G.E.: "*A refinement of the heat balance integral method applied to a melting problem*", Int. J. H. Mass Transfer, 21 (1978), 1357-1361.
- [3] BIOT, M.A.: "*Variational principles in heat transfer*", Oxford University Press (1970).
- [4] BIOT, M.A. - AGRAWAL, H.C.: "*Variational analysis of ablation for variable properties*", J. Heat Transfer, 86 c (1964), 437-442.
- [5] BIOT, M.A. - DAUGHADAY, H.: "*Variational analysis of ablation*", J. Aerospace Sc., 29 (1962), 227-229.
- [6] EL-GENK, M.S. - CRONENBERG, A.W.: "*Some improvements to the solution of Stefan-like problems*", Int. J. H. Mass Transfer, 22 (1979), 167-170.
- [7] GOL'DFARB, E.M. - ERESKOVSKII, O.S.: "*Biot's variational method in thermal conductivity problems involving a change in phase state with a plane phase separation boundary*", High Temperature, 4 (1966), 628-632.
- [8] GOODMAN, T.R.: "*The heat-balance integral and its applications to problems involving a change of phase*", Trans. of the ASME, 80 (1958) 335-342.
- [9] GOODMAN, T.R.: "*Application of integral methods to transient non-linear heat transfer*", Advances in heat transfer, Vol. 1, Acad. Press, New York (1964), 51-122.

- [10] GOODMAN, T.R. – SHEA, J.J.: *"The melting of finite slab"*, J. Appl. Mech. 27 E (1960), 16-24.
- [11] LANGFORD, D.: *"The heat balance integral method"*, Int. J. Heat Mass Transfer, 16(1973), 2424-2428.
- [12] LARDNER, T.J.: *"Approximate solutions to phase-change problems"*, AIAAJ, 5(1967), 2079-2080.
- [13] LUNARDINI, V.J.: *"Heat transfer in cold climates"*, Van Nostrand Reinhold Company (1981).
- [14] POLHAUSEN, K.: *"Zur naberungsweisen integration der Differentialgleichungen der laminaren Grenzschicht"*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1(1921), 252-258.
- [15] PRASAD, A. – AGRAWAL, H.C.: *"Biot's variational principle for a Stefan problem"*, AIAA Journal, 10(1972), 325-327.
- [16] SHARMA, O.P. – ROTENBERG, M. – PENNER, S.S.: *"Phase change problems with variable surface temperatures"*, AIAA Journal, 5(1967) 677-682.
- [17] STEFAN, J.: *"Ueber die theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere"*, Annalen der Physik und Chémie, 42 (1891), 269-286.
- [18] YEH, L.T. – CHUNG, B.T.F.: *"A variational analysis of freezing or melting in a finite medium subject to radiation and convection"*, J. Heat Transfer, 86 c (1964), 443-448.

# Indice

	PAG.
PREFACIO .....	1
1. TARZIA, D.A.: "Introducción al seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones".....	5
2. TARZIA, D.A.: "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil" (Cursillo C1) .....	33
3. BOUILLET, J.E.: "Algunos resultados sobre ecuaciones de $t_i$ parabólico" (Cursillo C2) .....	63
4. BOUILLET, J.E.: "Soluciones autosemejantes con cambio de fase" (Cursillo 6) .....	75
5. VILLA, L.T.: "El problema inverso de Stefan" (Cursillo C4)	105
6. VILLA, L.T.: "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase" (Cursillo C7) .....	133
7. NOCHETTO, R.H.: "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional" (Conferencia CG2) .....	143
8. GARGUICHEVICH, G.G. - SANZIEL, M.C.: "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional" (Conferencia CG1) .....	167

NOTA: El texto de los Cursillos y Conferencias restantes aparecerán en el CUADERNOS N° 12 (1984).



