SOLUCIONES EXPLÍCITAS PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR NO-CLÁSICA PARA UN MATERIAL SEMI-INFINITO

Domingo A. Tarzia †‡ , Luis T. Villa *‡
† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.
** Facultad de Ingeniería, Univ. Nac. de Salta, Buenos Aires 177, 4400 Salta, Argentina.*
‡ CONICET, Argentina.

Resumen: Se obtienen soluciones explícitas para la ecuación del calor no-clásica para un material semi-infinito a través de diferentes métodos: soluciones independientes de la variable espacial; soluciones independientes de la variable temporal, soluciones a variables separables y utilizando la transformada de Laplace.

Palabras claves: *Ecuación del calor no-clásica, material semi-infinito, separación de variables, transformada de Laplace, soluciones explícitas.*
2000 AMS Subjects Classification: 35C05, 35C15, 35K05, 80A20.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se considera el siguiente problema no lineal para la ecuación del calor no-clásica para un material semi-infinito:

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} i)\ u_t - u_{xx} = -\Phi(x)F\left(u_x(0,t),t\right), & x>0, t>0 \\ ii)\ u(0,t) = g(t), & t>0 \\ iii)\ u(x,0) = h(x), & x>0 \end{cases}.$$

Tales problemas están motivados por la modelización de la regulación de la temperatura en un medio isótropo, con una fuente no uniforme la cual provee un enfriamiento o calentamiento del sistema dependiendo de las propiedades de F con relación al desarrollo del flujo del calor en el borde $x=0$ [3, 5], por ejemplo, si se supone:

$$\text{(2)}\qquad \Phi(x)>0, \qquad V\ F(V,t)>0, \quad \forall V\neq 0, \quad F(0)=0,,$$

entonces la fuente enfría cuando $u_x(0,t)>0$ y calienta cuando $u_x(0,t)<0$. Algunas referencias en el tema son [1, 4, 6 - 9, 11, 12]. Otro problema no lineal para la ecuación del calor no-clásica para un material semi-infinito está dado por:

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} i)\ v_t - v_{xx} = -\Psi(x)F\left(v(0,t),t\right), & x>0, t>0 \\ ii)\ v_x(0,t) = g_o(t), & t>0 \\ iii)\ v(x,0) = h_o(x), & x>0 \end{cases}.$$

Ambos problemas están relacionados entre sí, a través del siguiente resultado:

Teorema 1 [11]

a) Si u es una solución del problema (1) entonces v definida por

$$\text{(4)}\qquad v(x,t) = u_x(x,t), \quad x>0, \quad t>0,$$

es una solución del problema (3) con las siguientes relaciones entre los datos:

$$\text{(5)}\qquad \Psi(x)=\Phi'(x), \quad h_o(x)=h'(x), \quad g_o(t)=\dot{g}(t)+\Phi(0)F(u_x(0,t),t).$$

b) Si v es una solución del problema (3) entonces u definida por la siguiente expresión

$$\text{(6)}\qquad u(x,t)=\int_0^x v(z,t)dz+\int_0^t g_o(\tau)d\tau, \quad x>0, \quad t>0,$$

es una solución del problema (1) con las siguientes relaciones entre los datos:

(7) $$\Phi(x)=\int_0^x \Psi(z)dz, \quad h(x)=\int_0^x h_o(z)dz, \quad g(t)=\int_0^t g_o(\tau)d\tau .$$

c) *La solución del problema (1) puede ser obtenida por la siguiente representación integral:*

(8) $$u(x,t)=\int_0^{+\infty} G(x,t,\xi,0)h(\xi)d\xi-2\int_0^x K_x(x,t,0,\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} G(x,t,\xi,\tau)\Phi(\xi)d\xi\right)F(V(\tau),\tau)d\tau$$

donde la función $V=V(t)$ *definida por* $V(t)=u_x(0,t),\, t>0$ *(el flujo de calor en el borde* $x=0$*) satisface la ecuación integral de Volterra siguiente:*

(9) $$V(t)=V_0(t)+\int_0^t R(t-\tau)F(V(\tau),\tau)\,d\tau \quad , \quad t>0$$

donde

(10) $$V_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)h'(\xi)d\xi-\int_0^t\frac{\dot{g}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right]$$

(11) $$K(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)$$

(12) $$G(x,t,\xi,\tau)=K(x,t,\xi,\tau)-K(-x,t,\xi,\tau)$$

(13) $$R(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_0^{+\infty}\xi\exp\left(-\xi^2/4t\right)\Phi(\xi)d\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}z\exp\left(-z^2\right)\Phi\left(2z\sqrt{t}\right)dz .$$

El objetivo del trabajo es el de obtener soluciones explícitas del problema (1) que, sin pérdida de generalidad, se supone:

(14) $$g(t)=0$$

a través de diferentes métodos: soluciones independientes de la variable espacial; soluciones independientes de la variable temporal, soluciones a variables separables y utilizando la transformada de Laplace.

2. SOLUCIONES EXPLICITAS

Lema 2. *Para el problema (1), con* $g(t)=0$*, se tienen los siguientes resultados:*

i) No existe ninguna solución $u=U(t)$ *independiente de la variable espacial* x.

ii) Para el caso $u=U(x)$*, independiente de la variable temporal* t*, se tienen las siguientes soluciones explícitas:*

(a) Si existe $\alpha\in\mathbb{R}$ *tal que* $F(\alpha,t)=0,\forall t>0$*, entonces existe una solución* $u(x,t)=\alpha x$ *de* (1) *para* $h(x)=\alpha x, V(t)=\alpha$ *cualquier sea la función real* Φ.

(b) Si $F(v,t)=F(v)$ *es independiente de la variable temporal* t*, y se cumplen las restricciones* $h(0)=0,\ F(\alpha)\neq 0$ y $h'(0)=\alpha$ *para algún* $\alpha\in\mathbb{R}$*, entonces* $u(x)=h(x)$ *es solución del problema* (1) *para* $V(t)=\alpha,\ \Phi(\mathrm{x})=\dfrac{h''(x)}{F(\alpha)}$.

Teorema 3. *Para el problema (1), con* $g(t)=0$, *para una función real* $F=F(V,t)$ *y para cuatro parámetros reales* $\lambda, \upsilon \neq 0, \mu \neq 0, \eta \neq 0$ *se obtiene, por separación de variables, la solución explícita del problema* (1) *dada por*

(15) $$u(x,t)=U(x)T(t)$$

con

(16) $$V(t)=\mu T(t), \quad h(x)=\eta U(x), \; \Phi(x)=\upsilon U(x),$$

donde $U=U(x)$ *y* $T=T(t)$ *son soluciones de los siguientes problemas diferenciales:*

(17) $$\begin{cases} U''(x)-\lambda U(x)=0, \quad x>0 \\ U(0)=0, \quad U'(0)=\mu\,(\neq 0) \end{cases}$$

(18) $$\begin{cases} \dot{T}(t)-\lambda T(t)=-\upsilon F(\mu T(t),t), \quad t>0 \\ T(0)=\eta \end{cases}$$

respectivamente.
Más aún, en los siguientes casos de F la solución de (18) viene dada por:

a) *Si* $F(V,t)=\alpha_0 V$ *entonces* $T(t)=\eta\exp((\lambda-\upsilon\alpha_o\mu)t)$.

b) *Si* $F(V,t)=F_1(t)+F_2(t)V$ *entonces* :

$$T(t)=\exp(\lambda t-\upsilon\mu\, G_2(t))\left[\eta-\upsilon\int_0^t F_1(\tau)\exp(\lambda\tau-\upsilon\mu\, G_2(\tau))\,d\tau\right],$$

donde $G_2(t)=\int_0^t F_2(\tau)\,d\tau$.

c) *Si* $F(V,t)=F_3(t)V^n$ *entonces* :

$$T(t)=\exp(\lambda t)\left[\eta^{1-n}+\upsilon\mu^n(n-1)\int_0^t F_3(\tau)\exp(\lambda(n-1)\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Teorema 4. *Para el caso particular en que*

(19) $$F(V(t),t)=\alpha_0\,V(t), \quad (\alpha_0\in R),$$

y utilizando la transformada de Laplace se pueden obtener soluciones explícitas, a saber:

i) $h(x)=h_0, \quad \Phi(x)=\Phi_0, \quad V(t)=\dfrac{h_0}{\sqrt{\pi t}}\left[1-Q\left(\alpha_0\Phi_0\sqrt{t}\right)\right],$

$$u(x,t)=h_0\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{h_0\Phi_0\alpha_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1-Q\left(\alpha_0\Phi_0\sqrt{\tau}\right)}{\sqrt{\tau}}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau,$$

donde:

(20) $$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\exp\left(-\xi^2\right)d\xi, \quad \operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x), \quad Q(x)=\sqrt{\pi}x\exp\left(x^2\right)\operatorname{erfc}(x).$$

ii) $h(x)=h_0x, \quad \Phi(x)=bx, \quad V(t)=h_0e^{-b\alpha_0t}, \quad u(x,t)=h_0xe^{-b\alpha_0t}.$

iii) $h(x)=h_0x^3, \quad \Phi(x)=bx, \quad V(t)=\dfrac{6h_0}{b\alpha_0}\left(1-e^{-b\alpha_0t}\right), \; u(x,t)=h_0x^3+\dfrac{6h_0}{b\alpha_0}x\left(1-e^{-b\alpha_0t}\right).$

iv) $h(x)=h_0 x,\quad \Phi(x)=bx^3,\quad V(t)=h_0\cos(at),\quad u(x,t)=-\dfrac{b\alpha_0 h_0}{a}\operatorname{sen}(at)+h_0 x\cos(at)$

con $a=\sqrt{6b\alpha_0}$.

v) $h(x)=h_0 x^3, \Phi(x)=bx^3, V(t)=\dfrac{6h_0}{a}\operatorname{sen}(at), u(x,t)=h_0 x^3\cos(at)+\dfrac{6h_0}{a}x\operatorname{sen}(at).$

vi) $h(x)=h_0 x, \Phi(x)=\alpha_1\operatorname{senh}(\alpha_2 x), V(t)=h_0\left(1-\alpha_2{}^2 t\right), u(x,t)=h_0 x-h_0\alpha_2 t\operatorname{senh}(\alpha_2 x).$

Prueba. Sea $S=S(t)$ el núcleo resolvente de la ecuación integral (9) para el caso (14) y (19), es decir:

(21)
$$V(t)=V_0(t)-\alpha_0\int_0^t S(t-\tau)V_0(\tau)\,d\tau .$$

Si se definen las transformadas de Laplace siguientes:

(22)
$$\nu(s)=\mathrm{L}(V(t)),\quad v_0(s)=\mathrm{L}(V_0(t)),\quad \sigma(s)=\mathrm{L}(S(t)),\quad r(s)=\mathrm{L}(R(t))$$

entonces se tiene que $\sigma(s)=\dfrac{r(s)}{1+\alpha_0 r(s)}$. □

Teorema 5 *Se obtienen para el problema (3) resultados similares a los obtenidos para el problema (1).*

Observación 1 *Recientemente se han obtenido resultados para el problema de Stefan para la ecuación no-clásica del calor en [2, 10]*

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP Nº 0460 de CONICET-UA, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

[1] A.C. BERRONE, D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *Asymptotic behavior of a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite material*, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), pp. 1161-1177.

[2] A.C. BRIOZZO, AND D.A. TARZIA, *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problem of a non-classical heat equation with temperature boundary condition at a fixed face*, Electron. J. Diff. Eq., 2006 (2006) 21 1-16.

[3] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.

[4] J.R. CANNON, AND H.M. YIN, *A class of non-linear non-classical parabolic equations*, J. Diff. Eq., 79 (1989), pp. 266-288.

[5] H.S. CARSLAW, AND C.J. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[6] K. GLASHOFF, AND J. SPREKELS, *An application of Glicksberg's theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats*, SIAM J. Math. Anal., 12 (1981), pp. 477-486.

[7] K. GLASHOFF, AND J. SPREKELS, *The regulation of temperature by thermostats and set-valued integral equations*, J. Integral Eq., 4 (1982), pp. 95-112.

[8] N. KENMOCHI, *Heat conduction with a class of automatic heat source controls*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 186 (1990), pp. 471-474.

[9] N. KENMOCHI, AND M. PRIMICERIO, *One-dimensional heat conduction with a class of automatic heat source controls*, IMA J. Appl. Math., 40 (1988), pp. 205-216 .

[10] D.A. TARZIA, *A Stefan problem for a non-classical heat equation*. MAT - Serie A, 3 (2001), pp. 21-26.

[11] D.A. TARZIA, AND L.T. VILLA, *Some nonlinear heat conduction problems for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source*, Rev. Unión Mat. Argentina, 41 (1998), pp. 99-114.

[12] L.T. VILLA, *Problemas de control para una ecuación unidimensional no homogenea del calor*, Rev. Unión Mat. Argentina, 32 (1986), pp. 163-169.