TRANSFERENCIA DE CALOR EN DOS SÓLIDOS EN CONTACTO CON FLUJO CONTINUO Y SALTO TÉRMICO EN LA INTERFAZ

Domingo A. Tarzia[†‡], Guillermo F. Umbricht[†◇] y Mara Rossani[†‡]

[†] *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Godoy Cruz 2290, C1425FQB CABA, Argentina, GUmbricht@austral.edu.ar*

[‡]*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina.*
DTarzia@austral.edu.ar, MRossani@austral.edu.ar

[◇]*Laboratorio de Investigación, Desarrollo y Transferencia de la Universidad Austral (LIDTUA), Facultad de Ingeniería, Universidad Austral, Mariano Acosta 1611, B1629WWA Pilar, Buenos Aires, Argentina.*

Resumen: En este trabajo se aborda analíticamente el problema general de conducción de calor entre dos sólidos en contacto, con continuidad de flujo térmico y un salto de temperatura en la interfase. Se introduce una novedosa técnica de solución, basada en herramientas de la formulación variacional y el teorema del punto fijo. Se derivan condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución, proporcionando un marco robusto para el análisis de sistemas similares.

Palabras clave: *ecuación variacional elíptica, teorema de punto fijo, conducción de calor estacionario, salto térmico.*
2020 AMS Subject Classification: 35J86 - 37C25 - 80M30 - 49J40.

1. INTRODUCCIÓN

Aunque la literatura actual sobre problemas de conducción en sólidos en contacto es extensa, carece de generalidad. No hay registro de un enfoque general del problema, ya que todos los estudios se centran en casos específicos definidos por una geometría particular, ver por ejemplo, [5, 6].

Las ecuaciones variacionales elípticas [1, 3, 4] son una herramienta fundamental en el análisis matemático y tienen su origen en el cálculo de variaciones. Este enfoque busca encontrar funciones que optimicen un funcional, que típicamente expresa la energía de un sistema físico o la acción de una teoría mecánica.

El objetivo de este trabajo es doble. En primer lugar, se busca proporcionar un modelo matemático independiente de la geometría para la conducción de calor en estado estacionario en un cuerpo compuesto por dos sólidos en contacto a través de una interfaz estándar, considerando la continuidad de los flujos de calor y un salto de temperatura debido a la resistencia de contacto. Luego, se presenta una formulación variacional utilizando la teoría de ecuaciones variacionales elípticas [1, 3, 4]. En segundo lugar, se busca determinar las temperaturas en ambos sólidos y los flujos de calor comunes mediante la aplicación de un teorema de punto fijo [1, 2].

2. MODELADO MATEMÁTICO

Se estudia la conducción de calor en estado estacionario en un cuerpo S, compuesto por dos sólidos S_1 y S_2 en contacto térmico. Para definir espacialmente el cuerpo, se considera el siguiente dominio en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \mathring{\Omega}_1 \cap \mathring{\Omega}_2 = \emptyset, \quad \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Gamma_0, \\ \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_0, \quad \partial\Omega_2 = \Gamma_2 \cup \Gamma_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado con frontera regular que contiene a los dos sólidos S_1 y S_2 que ocupan los subdominios Ω_i, $(i = 1, 2)$ con fronteras regulares, siendo ambas fronteras de medida positiva. También se considera que la interfase Γ_0 entre los dos cuepos está representada por una frontera regular de medida positiva (ver Figura 1). Los dominios y las fronteras son regulares a los efectos de poder aplicar los Teoremas de Lax-Milgram y de Traza de Sobolev.

El fenómeno de transferencia de calor estacionario entre los sólidos S_1 y S_2 se modela mediante las siguientes ecuaciones elípticas clásicas:

$$-\kappa_1 \Delta u_1 = g_1 \ \text{ en } \ \Omega_1, \tag{2}$$

$$-\kappa_2\,\Delta u_2 = g_2 \ \text{ en } \ \Omega_2. \tag{3}$$

En las ecuaciones (2)-(3), los subíndices 1 y 2 se refieren a los sólidos definidos por los dominios Ω_1 y Ω_2, respectivamente. Las funciones $u_i \in H^1(\Omega_i)$ denotan los campos de temperatura, las funciones $g_i \in L^2(\Omega_i)$ son términos fuente y $\kappa_i \in \mathbb{R}^+$ representa la conductividad térmica para el sólido S_i $(i = 1, 2)$.

En la frontera exterior de cada sólido, se imponen condiciones de borde de Dirichlet nulas, es decir

$$u_1 = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_1, \tag{4}$$

$$u_2 = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_2. \tag{5}$$

Finalmente, en la interfaz entre los dos sólidos, existe una igualdad de flujos térmicos y un salto de temperatura debido a la resistencia de contacto térmico entre las superficies del material, a saber:

$$R\,(u_2 - u_1) = \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \ \text{ sobre } \ \Gamma_0, \tag{6}$$

$$\kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \ \text{ sobre } \ \Gamma_0, \tag{7}$$

donde la condición (6) denota el salto de temperatura en la interfaz de contacto, que es proporcional a los flujos, y la condición (7) representa la igualdad de los flujos de calor. Aquí, n denota el versor normal a Ω_1 en la dirección a Ω_2. La figura 1 ilustra el problema en estudio.

3. Formulación variacional

Para dividir el problema (2)-(7), en dos problemas más simples (ver Figura 1), se define

$$f : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{R},\ f = -\kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = -\kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \ \text{ sobre } \ \Gamma_0, \tag{8}$$

y se propone encontrar las funciones u_i en Ω_i, $(i = 1, 2)$ tales que u_1 satisfaga las condiciones (2), (4), (8) y u_2 satisfaga las condiciones (3), (5), (8), respectivamente, para $f \in L^2(\Gamma_0)$ dado. El problema se resolverá si y solo si la ecuación integral para f, usando la condición (6), tiene una solución única.

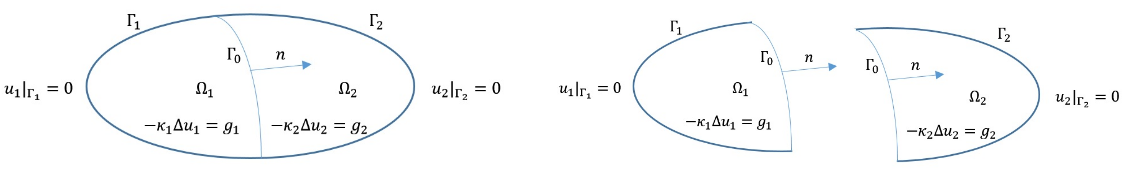

Figura 1: Esquema general del problema de contacto (izquierda), Esquema de los dos problemas de división (Derecha)

Se definen los clásicos espacios y funciones bilineales y lineales siguientes:

$$V_i = \left\{ v \in H^1(\Omega_i) / v\,|_{\Gamma_i} = 0 \right\}, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

$$a_i(u_i, v) = \kappa_i \int_{\Omega_i} \nabla u_i \cdot \nabla v\, dx, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

$$L_{1f}(v) = \int_{\Omega_1} g_1 v\, dx - \int_{\Gamma_0} f\, v\, dS, \quad L_{2f}(v) = \int_{\Omega_2} g_2 v\, dx + \int_{\Gamma_0} f\, v\, dS. \tag{11}$$

Aplicando técnicas clásicas como el Teorema de Lax-Milgram [1, 3], se pueden derivar:

Lema 1 *Sea* $f \in L^2(\Gamma_0)$. *Entonces:*

1. *La ecuación variacional elíptica para el problema* (2), (4) *y* (8) *está dada por*

$$u_1 \in V_1 : \ a_1(u_1, v) = L_{1f}(v), \quad \forall v \in V_1. \tag{12}$$

Se denota por u_{1f} *a la solución única de la ecuación variacional elíptica* (12) *para cada* $f \in L^2(\Gamma_0)$.

2. *La ecuación variacional elíptica para el problema* (3)*,* (5) *y* (8) *está dada por*

$$u_2 \in V_2 : \; a_2(u_2, v) = L_{2f}(v), \quad \forall v \in V_2. \tag{13}$$

Se denota por u_{2f} *a la solución única de la ecuación variacional elíptica* (13) *para cada* $f \in L^2(\Gamma_0)$*.*

Prueba.

Se tiene que a_i con $i = 1, 2$ es una forma bilineal, continua, coerciva y simétrica. Además, L_{if} es una funcional lineal y continua. Entonces, para cada $f \in L^2(\Gamma_0)$, existe un único $u_{if} \in V_i \subset H^1(\Omega_i)$ para $i = 1, 2$ que resuelve los problemas (12) y (13), respectivamente [1, 3, 4].

□

4. Solución del problema de resistencia utilizando punto fijo

Ahora, para resolver el problema (2)-(7), es necesario determinar $f \in L^2(\Gamma_0)$ de manera que

$$f = R\left(u_{1f} - u_{2f}\right) \;\text{ sobre }\; \Gamma_0, \tag{14}$$

donde $u_{1f} \in V_1$ y $u_{2f} \in V_2$ son las soluciones únicas de las ecuaciones variacionales elípticas (12) y (13) respectivamente, para cada $f \in L^2(\Gamma_0)$. Para lograr esto, se define el operador

$$T : L^2(\Gamma_0) \to L^2(\Gamma_0) \;\text{ tal que }\; T(f) = R\left(\gamma_{0\Omega_1}(u_{1f}) - \gamma_{0\Omega_2}(u_{2f})\right). \tag{15}$$

El problema se reduce a resolver la ecuación funcional $T(f) = f$ en $L^2(\Gamma_0)$ donde $\gamma_{0\Omega_i}(u_{if}) = u_{if}\big|_{\Gamma_0}$ es la traza en Γ_0 desde Ω_i. Por lo tanto, sólo queda por determinar bajo qué condiciones T es un operador contractivo. Por resultados clásicos de trazas en espacios de Sobolev [1, 3], se conoce que:

$$\|v_i\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \left\|\gamma_{0\Omega_i}\right\| \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}, \quad \forall v_i \in V_i,\, i = 1, 2, \tag{16}$$

y, además existen constantes $\lambda_i > 0 \; (i = 1, 2)$ tal que

$$\int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla v \, dx \geq \lambda_i \|v\|^2_{H^1(\Omega_i)} \quad \forall v \in V_i, \tag{17}$$

con lo cual

$$a_i(v, v) \geq \kappa_i \, \lambda_i \, \|v\|^2_{H^1(\Omega_i)}, \quad \forall v \in V_i. \tag{18}$$

Teorema 2 *La expresión*

$$R\left(\frac{\left\|\gamma_{0\Omega_1}\right\|^2}{\kappa_1 \lambda_1} + \frac{\left\|\gamma_{0\Omega_2}\right\|^2}{\kappa_2 \lambda_2}\right) < 1, \tag{19}$$

es una condición suficiente para que el problema de conducción de calor estacionario (2)-(7) *tenga solución única.*

Prueba.

Sean $f, g \in L^2(\Gamma_0)$. Si se usa $v = u_{1f} \in V_1$ en la ecuación variacional elíptica correspondiente a u_{1g}, y $v = u_{1g} \in V_1$ para la ecuación variacional elíptica correspondiente a u_{1f}, se obtiene:

$$\begin{cases} a_1(u_{1g}, u_{1f} - u_{1g}) = L_{1g}(u_{1f} - u_{1g}) = \displaystyle\int_{\Omega_1} g_1(u_{1f} - u_{1g}) \, dx - \int_{\Gamma_0} g(u_{1f} - u_{1g}) \, dS, \\ a_1(u_{1f}, u_{1g} - u_{1f}) = L_{1f}(u_{1g} - u_{1f}) = \displaystyle\int_{\Omega_1} g_1(u_{1g} - u_{1f}) \, dx - \int_{\Gamma_0} f(u_{1g} - u_{1f}) \, dS. \end{cases} \tag{20}$$

Al sumar las dos expresiones de (20), se deduce que

$$-a_1(u_{1g} - u_{1f}, u_{1g} - u_{1f}) = \int_{\Gamma_0} (u_{1g} - u_{1f})(g - f) \, dS, \tag{21}$$

y al usar (16) y (18) en (21), se obtiene:

$$\begin{aligned}\kappa_1\,\lambda_1\left\|u_{1g}-u_{1f}\right\|^2_{H^1(\Omega_1)} &\leq \left\|u_{1g}-u_{1f}\right\|_{L^2(\Gamma_0)}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\\ &\leq \left\|\gamma_{0\Omega_1}\right\|\left\|u_{1g}-u_{1f}\right\|_{H^1(\Omega_1)}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\,,\end{aligned}\tag{22}$$

lo que implica que

$$\left\|u_{1g}-u_{1f}\right\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \frac{\left\|\gamma_{0\Omega_1}\right\|}{\kappa_1\,\lambda_1}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\,.\tag{23}$$

De manera análoga, si se utiliza $v=u_{2f}\in V_2$ en la ecuación variacional elíptica correspondiente a u_{2g}, y $v=u_{2g}\in V_2$ para la ecuación variacional elíptica correspondiente a u_{2f}, se obtiene:

$$\begin{cases} a_2(u_{2f},u_{2g}-u_{2f}) = L_{2f}(u_{2g}-u_{2f}) = \displaystyle\int_{\Omega_2} g_2(u_{2g}-u_{2f})\,dx + \int_{\Gamma_0} f(u_{2g}-u_{2f})\,dS,\\ a_2(u_{2g},u_{2f}-u_{2g}) = L_{2g}(u_{2f}-u_{2g}) = \displaystyle\int_{\Omega_2} g_2(u_{2f}-u_{2g})\,dx + \int_{\Gamma_0} g(u_{2f}-u_{2g})\,dS.\end{cases}\tag{24}$$

Al sumar las dos expresiones de (24), se deduce que

$$-a_2(u_{2g}-u_{2f},u_{2g}-u_{2f}) = \int_{\Gamma_0}(u_{2f}-u_{2g})(g-f)\,dS,\tag{25}$$

y al usar (16) y (18) en (25), se obtiene:

$$\begin{aligned}\kappa_2\,\lambda_2\left\|u_{2g}-u_{2f}\right\|^2_{H^1(\Omega_2)} &\leq \left\|u_{2g}-u_{2f}\right\|_{L^2(\Gamma_0)}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\\ &\leq \left\|\gamma_{0\Omega_2}\right\|\left\|u_{2g}-u_{2f}\right\|_{H^1(\Omega_2)}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\,,\end{aligned}\tag{26}$$

lo que implica que

$$\left\|u_{2g}-u_{2f}\right\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \frac{\left\|\gamma_{0\Omega_2}\right\|}{\kappa_2\,\lambda_2}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\,.\tag{27}$$

Por lo tanto, al utilizar (23) y (27), se deduce que

$$\begin{aligned}\left\|u_{ig}-u_{if}\right\|_{L^2(\Gamma_0)} = \left\|\gamma_0(u_{ig}-u_{if})\right\|_{L^2(\Gamma_0)} &\leq \left\|\gamma_{0\Omega_i}\right\|\left\|u_{ig}-u_{if}\right\|_{H^1(\Omega_i)}\\ &\leq \frac{\left\|\gamma_{0\Omega_i}\right\|^2}{\kappa_i\,\lambda_i}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\,,\quad i=1,2.\end{aligned}\tag{28}$$

Finalmente, utilizando (28) en la definición de T, se puede obtener que

$$\begin{aligned}\|T(g)-T(f)\|_{L^2(\Gamma_0)} &\leq R\left[\left\|u_{1g}-u_{1f}\right\|_{L^2(\Gamma_0)} + \left\|u_{2g}-u_{2f}\right\|_{L^2(\Gamma_0)}\right]\\ &\leq R\left[\frac{\left\|\gamma_{0\Omega_1}\right\|^2}{\kappa_1\lambda_1}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)} + \frac{\left\|\gamma_{0\Omega_2}\right\|^2}{\kappa_2\lambda_2}\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\right]\\ &= R\left(\frac{\left\|\gamma_{0\Omega_1}\right\|^2}{\kappa_1\lambda_1} + \frac{\left\|\gamma_{0\Omega_2}\right\|^2}{\kappa_2\lambda_2}\right)\|g-f\|_{L^2(\Gamma_0)}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es un operador de Lipschitz. Además, T es un operador de contracción si se cumple la desigualdad (19), como se deseaba demostrar.

□

REFERENCIAS

[1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York (2011).

[2] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed point theory*. New York: Springer (2003).

[3] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Classics in Applied Mathematics 31, SIAM, Philadelphia (2000).

[4] D.A. Tarzia, *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre*. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (1981).

[5] G.F. UMBRICHT, D. RUBIO, D.A. TARZIA, *Bilayer one-dimensional convectiondiffusion- reaction-source problem: Analytical and numerical solution*. International Journal of Thermal Sciences 208 (2025), 109471.

[6] W.-B. YUAN, N. YU, L.-Y. LI, Y. FANG, *Heat transfer analysis in multi-layered materials with interfacial thermal resistance*. Composite Structures 293 (2022), 115728.