

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

V SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 19 al 21 de Diciembre de 1994

25

Rosario - República Argentina
1995

EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA UN PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE CON UNA CONDICIÓN DE CONTORNO CONVECTIVO

DOMINGO A. TARZIA

CRISTINA V. TURNER

I. Introducción

En este trabajo se estudia el comportamiento asintótico para $t \rightarrow \infty$ del siguiente problema de frontera libre parabólico (Problema de Stefan a una fase con una condición de contorno convectiva sobre la frontera fija $x = 0$) :

Problema P:

- (1) $z_{xx} = z_t$, en D_T ;
- (2) $s(0) = 1$;
- (3) $z(s(t), t) = 0$, $0 < t < T$;
- (4) $z_x(s(t), t) = -\dot{s}(t)$, $0 < t < T$;
- (5) $z(x, 0) = \varphi(x)$, $0 < x < 1$;
- (6) $z_x(0, t) = \beta[z(0, t) - G(t)]$, $0 < t < T$.

donde

$$D_T = \{(x, t) | 0 < x < s(t), 0 < t < T\},$$

$$\beta > 0, \quad \varphi(x) \geq 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{y} \quad G(t) \geq 0, \quad t > 0$$

y las condiciones de compatibilidad

$$\varphi'(0) = \beta[\varphi(0) - G(0)] \quad \text{y} \quad \varphi(1) = 0.$$

Se analizará el comportamiento asintótico de la frontera libre $s(t)$ en el Problema P. Otros análisis sobre comportamiento asintótico para problemas de Stefan se pueden ver en [1] y [2]. La existencia y unicidad para la solución del Problema P se puede ver en [3]. Aquí las condiciones sobre los datos serán tales que garantizan la existencia y unicidad de solución para T arbitrario en el Problema P. En [6] y [7] se puede ver el comportamiento asintótico de la solución de la inecuación variacional para el problema a dos fases de Stefan en n dimensiones, con $G(t) = \text{cte.} > 0$. En [5] se analiza la dependencia de la solución respecto de β y el comportamiento asintótico de la frontera libre para $G(t) = T_L > 0$. En ambos trabajos el comportamiento asintótico es independiente de β . En este trabajo analizamos el caso en que $G(t)$ no es constante para el Problema P.

II. Resultados preliminares.

A continuación resumiremos los resultados obtenidos en [9]

Proposición 1. Si (T, s, z) es solución de P, luego

- (i) $z(x, t) \geq 0$ en D_T .
- (ii) $\dot{s}(t) > 0$, $t > 0$.
- (iii) $\dot{G}(t) \geq 0$, $\varphi(x) \leq G(0) = \min_{t>0} G(t)$, luego $z(x, t) \leq G(t)$ en D_T .
- (iv) $\varphi' \leq 0$, $\dot{G}(t) \geq 0$ luego $z_x \leq 0$ en D_T .
- (v) $\dot{G} \geq 0$, $\varphi'' > 0$ luego $z_t(x, t) \geq 0$ en D_t .
- (vi) las siguientes representaciones integrales son satisfechas:

$$s(t) = 1 + \int_0^1 \varphi(x) dx - \int_0^t z_x(0, \tau) d\tau - \int_0^{s(t)} z(x, t) dx \quad (7)$$

$$\frac{s^2(t)}{2} = \frac{1}{2} + \int_0^1 x\varphi(x) dx + \int_0^t z(0, \tau) d\tau - \int_0^{s(t)} xz(x, t) dx \quad (8)$$

$$s(t) \left[1 + \frac{\beta}{2}s(t) \right] = Q(t) - \int_0^{s(t)} (1 + \beta x)z(x, t) dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta s^4(t)}{24} + \frac{s^3(t)}{6} &= \frac{\beta}{24} + \frac{1}{6} + \int_0^1 \left(\frac{\beta x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right) \varphi(x) dx \\ &\quad - \int_0^{s(t)} \left(\frac{\beta x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right) z(x, t) dx + \iint_{D_t} z(x, t) (\beta x + 1) dx d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

donde

$$Q(t) = 1 + \frac{\beta}{2} + \int_0^1 (1 + \beta x) \varphi(x) dx + \int_0^t \beta G(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Demostración. Para (i)–(v) usamos el principio de máximo[4].

(vi) sale usando la identidad de Green. $\square$

Observación 1 la relación (9) entre la frontera libre, la temperatura y la expresión $Q(t)$ definida en (11) ha sido usada en [8].

Proposición 2. La solución del Problema P depende monótonamente de G . En particular si $(z_1(x, t), s_1(t))$ y $(z_2(x, t), s_2(t))$ son soluciones del Problema P para G_1 y G_2 respectivamente y $G_1 < G_2$, entonces $s_1(t) < s_2(t)$ para $t > 0$ y $z_1(x, t) < z_2(x, t)$ en donde ambas estén definidas.

Demostración. La demostración consiste en suponer que existe un primer t_0 en donde $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ y $\dot{s}_1(t_0) > \dot{s}_2(t_0)$, con $s_1(t) < s_2(t)$ para $0 < t < t_0$ y $z_1(x, t) < z_2(x, t)$ para $0 < x < s_1(t)$, $0 < t < t_0$.

Ahora consideremos el problema que satisface $v(x, t) = z_1(x, t) - z_2(x, t)$

- (i) $v_{xx} = v_t$ $D = \{(x, t) | 0 < x < s_1(t), t < t_0\}$;
- (ii) $v(x, 0) = 0$, $0 < x < 1$;
- (iii) $v(s_1(t), t) = -z_2(s_1(t), t) < 0$;
- (iv) $v_x(0, t) = \beta [v(0, t) - (G_1(t) - G_2(t))]$.

Supongamos ahora que existe $t_1 < t_0$ tal que $v(0, t_1) = 0$. Luego $(0, t_1)$ es un punto de máximo para $v(x, t)$ en D , con lo cual $v_x(0, t_1) < 0$. Si reemplazamos la última desigualdad en (iv)

$$v(0, t_1) < G_1(t_1) - G_2(t_1) < 0.$$

Lo cual es una contradicción. Luego $v(0, t) < 0$, $\forall t > 0$.

Usando el principio de máximo para v concluimos $v(x, t) < 0$ en D .

Pero $v(s_1(t_0), t_0) = 0$, con lo cual $(s_1(t_0), t_0)$ es un máximo para v en D , y por lo tanto

$$v_x(s_1(t_0), t_0) > 0.$$

Calculemos ahora

$$v_x(s_1(t_0), t_0) = z_{1x}(s_1(t_0), t_0) - z_{2x}(s_1(t_0), t_0) = \dot{s}_2(t_0) - \dot{s}_1(t_0) < 0,$$

lo cual es una contradicción. Con lo cual $s_1(t) < s_2(t)$ y $z_1 < z_2$ en D . $\square$

Observación 2. Para cada β fijo la solución (s, z) de P se llamará (s_β, z_β) de P_β y P_∞ al problema en donde la condición (6) fue reemplazada por $z_\infty(0, t) = G(t)$, $0 < t < T$, y su solución (s_∞, z_∞) .

Teorema 3. Si (T, s_β, z_β) es una solución de P_β con las siguientes hipótesis sobre φ y G

(H1) $\varphi'(x) \leq 0$ para $0 \leq x \leq 1$.

(H2) $\dot{G}(t) \geq 0$, para $t > 0$.

(H3) $\max_{[0,1]} \varphi(x) \leq G(0)$, luego

(a) $z_\beta(x, t) \leq z_\infty(x, t)$ en D_T , $s_\beta(t) \leq s_\infty(t) \forall \beta > 0, t > 0$.

(b) Dependencia monótona:

$\beta_1 \leq \beta_2$, luego $z_{\beta_1}(x, t) \leq z_{\beta_2}(x, t)$ en D_T y $s_{\beta_1}(t) \leq s_{\beta_2}(t)$.

Demostración. La demostración se puede ver en [9].

III. Comportamiento asintótico.

Aquí presentamos resultados similares a los de [1], [2].

Teorema 4.

(a) Si $\int_0^\infty G(\tau) d\tau < \infty$, luego $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_\infty$ donde s_∞ es la única solución de la ecuación

$$x \left(1 + \frac{\beta}{2} x \right) = A(\beta, \varphi, G), x > 1 \quad (12)$$

donde

$$A(\beta, \varphi, G) = 1 + \frac{\beta}{2} + \int_0^1 (1 + \beta\xi)\varphi(\xi)d\xi + \beta \int_0^\infty G(\tau) d\tau.$$

(b) Sea (s, z) una solución del Problema P con $\int_0^\infty G(\tau) d\tau = \infty$. Para cada $t_0 \geq 0$, sea (σ, v) la solución del siguiente problema

- (i) $v_{xx} = v_t, 0 < x < \sigma(t), t \geq t_0$;
- (ii) $v_x(0, t) = \beta[v(0, t) - G(t)], t \geq t_0$;
- (iii) $v(\sigma(t), t) = 0, t \geq t_0$;
- (iv) $\sigma(t_0) = 0$;
- (v) $\dot{\sigma}(t) = -v_x(\sigma(t), t), t \geq t_0$.

Luego

$$1 \leq \left(\frac{s(t)}{\sigma(t)} \right)^2 \leq 1 + \frac{C(t_0)}{\sigma^2(t)}, t > t_0, \quad (13)$$

donde

$$C(t_0) = s^2(t_0) + \frac{2s(t_0)}{\beta} + \frac{2 \int_0^{s(t_0)} (1 + \beta x) z(x, t_0) dx}{\beta}. \quad (14)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1.$$

Demostración. (a) Usando (9), la acotación de $z(x, t) > 0$ en D_T y la hipótesis $\int_0^\infty G(\tau) d\tau < \infty$ resulta:

$$s(t) \left(1 + \frac{\beta}{2} s(t) \right) \leq A(\beta, \varphi, G).$$

Luego se obtiene:

$$s(t) \leq s_\infty \quad \text{para } t \geq 0 \quad (16)$$

donde $s_\infty = \frac{\sqrt{1+2\beta A}-1}{\beta}$ es la única solución de la ecuación (12).

(b) ver [9].

Teorema 5. Si (T, s_β, z_β) es la solución del Problema P con la hipótesis (H3), $\int_0^t G(\tau) d\tau = \infty$, $\int_{t_0}^t G(\tau) d\tau < \infty$, para todo t y t_0 , y además se cumple $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \max_{[t_0, \infty)} G(\tau) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \|G\|_{[t_0, \infty)} = 0$, entonces se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s_\beta(t)}{\sqrt{2 \int_0^t G(\tau) d\tau}} = 1$$

Demostración. Usando la función auxiliar $v(x, t)$ del Teorema 4 (b), y la representación integral (9) para (σ_β, v_β) , se obtiene

$$\frac{\beta \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau}{1 + \|G\|_{[t_0, t]}} \leq \sigma_\beta(t) \left(1 + \frac{\beta}{2} \sigma_\beta(t)\right). \quad (19)$$

Ahora usamos (9) para (s_β, z_β) y el hecho que $\sigma_\beta(t) < s_\beta(t)$ con lo cual:

$$\frac{\beta \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau}{(1 + \|G\|_{[t_0, t]}) \beta \int_0^t G(\tau) d\tau} \leq \frac{s_\beta(t) \left(1 + \frac{\beta}{2} s_\beta(t)\right)}{\beta \int_0^t G(\tau) d\tau} \leq 1 + \frac{D(\beta, \varphi)}{\int_0^t G(\tau) d\tau}. \quad (20)$$

Luego tomamos límite $t \rightarrow \infty$ y después $t_0 \rightarrow \infty$ y obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s_\beta(t)}{\sqrt{2 \int_0^t G(\tau) d\tau}} = 1 \text{ for all } \beta \quad \square$$

Lema 6. Si (T, s_β, z_β) es una solución del Problema P, y los datos satisfacen las hipótesis (H1), (H2) y (H3) entonces

$$\int_0^t [G(\tau) - z_\beta(0, \tau)] d\tau \leq \frac{s_\infty(t)}{\beta} (1 + \|G\|_t), \forall \beta > 0.$$

Demostración. Sale de usar (9) y aplicar el Teorema 3.

Teorema 7. Si (T, s_β, z_β) es una solución del Problema P y los datos satisfacen (H1), (H2) y (H3), luego (s_β, z_β) y (s_∞, z_∞) satisfacen las siguientes inecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{s_\infty^2(t) - s_\beta^2(t)}{2} + \int_0^{s_\beta(t)} x(z_\infty(x, t) - z_\beta(x, t)) dx \\ &\leq \int_0^t (G(\tau) - z_\beta(0, \tau)) d\tau \leq \frac{s_\infty(t)}{\beta} (1 + \|G\|_t), \forall \beta > 0. \end{aligned}$$

Demostración. Se obtienen las representaciones integrales para ambos pares usando (8), luego se sustraen y se aplica el Lema 6.

Corolario 8. (Convergencia $\beta \rightarrow \infty$) Si (s_β, z_β) es una solución del Problema P y (s_∞, z_∞) lo es de P_∞ , bajo las hipótesis (H1), (H2) y (H3), luego:

- (i) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} s_\beta(t) = s_\infty(t)$ para cada $t > 0$
- (ii) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} z_\beta(x, t) = z_\infty(x, t)$ para cada $0 \leq x < s_\infty(t)$, para cada $t > 0$.

Proof. Usando el Teorema y el hecho que $s_\beta(t) \leq s_\infty(t)$ y $z_\beta \leq z_\infty$ para todo β , resulta

$$0 \leq \frac{s_\infty^2(t) - s_\beta^2(t)}{2} \leq \frac{s_\infty(t)}{\beta} (1 + \|G\|_t)$$

para todo β , luego

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} s_\beta(t) = s_\infty(t)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} z_\beta(t) = z_\infty(t)$$

para cada $0 \leq x < s_\infty(t)$, para cada $t > 0$. $\square$

Corolario 9. Si (s_β, z_β) es solución del Problema P, luego

$$(i) s_\beta(t) \leq \sqrt{\frac{2}{\beta} Q(t)}, t > 0$$

$$(ii) s_\beta(t) \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta Q(t)}{1 + G(t)}}}{\beta}, t > 0.$$

Demostración. Sale de (9) y Proposición 1. $\square$

REFERENCIAS

1. J. R. CANNON, C. D. HILL, *Remarks on a Stefan problem*, J. Math. Mech. 17 (1967), 433-441.
2. J.R.CANNON, M.P. PRIMICERIO, *Remarks on the one-phase Stefan problem for the heat equation with the flux prescribed on the fixed boundary*, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), 361-373.
3. A. FASANO, M. PRIMICERIO, *General free-boundary problems for the heat equation*, J. Math. Anal Appl. I ;II: 58 (1977), 202-231 57 (1977), 694-723.
4. A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N J, 1964..
5. A.D. SOLOMON, V. ALEXIADES, D.G. WILSON., *The Stefan problem with a convective boundary condition*, Quart. of Appl. Math. 40 (1982), 203-217.
6. D.A. TARZIA., *Etude de l'inéquation variationnelle proposée par DUVAUT pour le problème de Stefan à deux phases II*, Boll. Un. Mat. Italiana. 2 B (1983), 589-603.
7. D.A.TARZIA., *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C.R. Acad. Sci. Paris. 288 A (1979), 941-944.
8. D.A. TARZIA, C.V. TURNER., *The one-phase supercooled Stefan problem with a convective boundary condition*, to appear in Quart. of Appl. Math..
9. D.A. TARZIA, C.V. TURNER., *The asymptotic behavior for the one-phase Stefan Problem with a convective boundary condition.*, Preprint 1995.

Domingo A. TARZIA
 - Dpto. Matemática, FCE
 Univ. Austral
 Paraguay 1950
 (2000) Rosario
 - Promar (CONICET-UNR)
 Inst. Mat. "B. Levi"
 Av. Pellegrini 250
 (2000) Rosario
 ARGENTINA.
 e-mail: tarzia@uaufce.edu.ar

Cristina V. TURNER
 FaMAF, U.N.C
 Ciudad Universitaria
 Universidad Nacional Córdoba
 (5000) Córdoba
 ARGENTINA.
 e-mail: turner@mate.uncor.edu