UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

V SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 19 al 21 de Diciembre de 1994

25

Rosario - República Argentina
1995

Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, 25 (1995), 35–45.

EL PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE PARA EL LÍQUIDO SOBREENFRIADO CON UNA CONDICIÓN DE CONTORNO CONVECTIVO

DOMINGO A. TARZIA CRISTINA V. TURNER

I. Introducción

El estudio de la solidificación de un líquido sobreenfriado tiene un doble interés debido a:

a) que es un fenómeno termodinámicamente metaestable.

b) su relación con el problema de consumo-difusión del oxígeno.

a) La temperatura de equilibrio de fusión T_m, de un material puro es la temperatura a la cual el estado sólido y líquido del material puede coexistir en equilibrio termodinámico, (bajo las condiciones de presión ambiente).

A temperaturas mayores que T_m, la energía libre del líquido es menor que la del sólido, con lo cual de acuerdo a la Segunda Ley de Termodinámica, el líquido es una fase estable, lo mismo ocurre para temperaturas menores que $t < T_m$, en la cual la fase sólida es la estable por tener menos energía.

A pesar de esto, muchos materiales pueden ser enfriados a temperaturas menores que T_m, sin que la fase sólida aparezca. Por ejemplo el agua puede ser enfriada por debajo de temperaturas: $-40^0 C$ sin que solidifique, bajo muy estrictos controles. Otros materiales como los silicatos o polímeros pueden ser enfriados cientos de grados y se transforman en vidrios en vez de cristalizar (sólido desordenado o líquido amorfo).

La temperatura a la cual un líquido es enfriado $T < T_m$ se conoce como la temperatura de superenfriamiento y la temperatura $\Delta T = T_m - T$ es el grado de superenfriamiento.

El estado de superenfriamiento es un estado metaestable en el sentido que la energía libre es mayor que la del estado real (el sólido), pero es un mínimo local de energía libre respecto a otra variable coordenada (por ejemplo: orden),[8].

b) Ver V.

<u>II. Planteo del problema de frontera libre.</u>

Problema I:

Encontrar la temperatura $\theta(y,\tau)$ y la frontera libre $r(\tau)$ tal que:

$r(\tau)$ sea Lipschitz continua para $\tau > 0$;

$\dot{r}(\tau)$ sea continua para $\tau > 0$;

$\theta(y,\tau)$ sea continua para $0 \leq y \leq r(\tau)$ y $\tau > 0$;

$\theta_\tau(y,\tau)$, $\theta_{yy}(y,\tau)$ son continuas para $0 < y < r(\tau)$, $\tau > 0$;

$\theta_y(y,\tau)$ sea continua para $0 \leq y \leq r(\tau)$, $\tau > 0$;

$r(\tau)$ y $\theta(y,\tau)$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{gathered}
\theta_\tau = \alpha\theta_{yy}, \quad 0 < y < r(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_0 \\
\theta(r(\tau),\tau) = 0, \quad 0 < \tau < \tau_0 \\
k\theta_y(r(\tau),\tau) = -\rho\lambda\dot{r}(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_0 \\
k\theta_y(0,\tau) = h(\theta(0,\tau) - g(\tau)), \quad \tau > 0 \\
\theta(y,0) = \theta_0(y), \quad 0 \leq y \leq b \\
r(0) = b
\end{gathered}$$

Los parámetros son:

$\alpha =$ difusividad térmica del material (m^2/s)

$k =$ conductividad térmica del material $(KJ\,^0C/m)$

$\rho =$ densidad del material (Kg/m^3)

$\lambda =$ calor latente de fusión (KJ/Kg)

$h =$ coef. de transferencia calórica del fluido a la superficie del material $(KJs\,^0C/m^2)$

$g(\tau)$ = temperatura del fluido ambiente del material (^0C).

El frente de la fusión en el tiempo τ es $r(\tau)$, mientras $\theta(y,\tau)$ es la temperatura en la posición y y el tiempo τ.

En [1] está probado que la solución del Problema I existe. Este problema se conoce como, el modelo matemático para la solidificación del líquido sobreenfriado [3].

La solidificación del líquido sobreenfriado se debe a la transferencia convectiva de calor desde el fluido externo a temperatura $g(\tau)$ hacia la cara externa del material ($x = 0$).

Se puede adimensionalizar el problema mediante el siguiente cambio de variables

$$x = \frac{y}{b} \qquad t = \frac{k\tau}{\rho c b^2}$$

$$z(x,t) = \frac{c}{\lambda}\theta(y,\tau) \qquad s(t) = \frac{r(\tau)}{b}$$

Luego las variables (T, s, z) satisfacen el siguiente problema:

Problema II:

(1.1) $z_{xx} = z_t$, en D_T;

(1.2) $s(0) = 1$;

(1.3) $z(s(t),t) = 0$, $0 < t < T$;

(1.4) $z_x(s(t),t) = -\dot{s}(t)$, $0 < t < T$;

(1.5) $z(x,0) = \varphi(x)$, $0 < x < 1$;

(1.6) $z_x(0,t) = \beta[z(0,t) - G(t)]$, $0 < t < T$.

donde $\beta = \frac{h}{kb}$ es un parámetreo adimensional, y

$$D_T = \{(x,t)|0 < x < s(t), 0 < t < T\}$$

$$G(t) = \frac{c}{\lambda} g\left(\frac{b^2 \rho c t}{k}\right).$$

A continuación resumiremos los resultados obtenidos en [7].

III. El problema a una fase del líquido sobreenfriado

En esta sección consideraremos las siguientes hipótesis
$\varphi(x) \leq 0,\ 0 < x < 1$ y $G(t) \leq 0,\ t > 0$ y la condición de compatibilidad

$$\varphi'(0) = \beta[\varphi(0) - G(0)].$$

Las primeras propiedades elementales de la solución están resumidas en las siguientes Proposiciones:

Proposición 3.1. *Si (T, s, z) es una solución del Problema II, luego*
i) $z \leq 0$ en D_T.
ii) $\dot{s}(t) < 0,\ t > 0$.
iii) $\dot{G}(t) \leq 0,\ \varphi(x) \geq G(0) = \max_{t>0} G(t)$, *luego* $z \geq G(t)$ en D_T.
iv) $\varphi' \geq 0,\ \dot{G}(t) \leq 0$ *luego* $z_x \geq 0$ en D_T.
v) $\dot{G} \geq 0,\ \varphi'' > 0$ *luego* $z_t > 0$ en D_t.

Demostración. Todas estas propiedades se desprenden del Principio del Máximo. □

Proposición 3.2. *Si (T, s, z) satisfacen (1.1)-(1.6) del Problema II, luego se satisfacen las siguientes representaciones integrales para la solución:*

$$s(t) = 1 + \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \int_0^t z_x(0,\tau)\,d\tau - \int_0^{s(t)} z(x,t)\,dx \tag{3.1}$$

$$\frac{s^2(t)}{2} = \frac{1}{2} + \int_0^1 x\varphi(x)\,dx + \int_0^t z(0,\tau)\,d\tau - \int_0^{s(t)} xz(x,t)\,dx \tag{3.2}$$

$$s(t)\left[1 + \frac{\beta}{2}s(t)\right] = 1 + \frac{\beta}{2} + \int_0^1 (1+\beta x)\varphi(x)\,dx + \int_0^t \beta G(\tau)\,d\tau - \int_0^{s(t)} (1+\beta x)z(x,t)\,dx \tag{3.3}$$

$$\frac{\beta s^4(t)}{24} + \frac{s^3(t)}{6} = \frac{\beta}{24} + \frac{1}{6} + \int_0^1 \left(\frac{\beta x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)\varphi(x)\,dx - \int_0^{s(t)} \left(\frac{\beta x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)z(x,t)\,dx + \iint_{D_t} z(x,\tau)(\beta x + 1)\,dx d\tau \tag{3.4}$$

Demostración. Sale de la identidad de Green. □

Nota 1: En las siguientes secciones usaremos la notación

$$Q(t) = 1 + \frac{\beta}{2} + \int_0^1 (1+\beta x)\varphi(x)\,dx + \int_0^t \beta G(\tau)\,d\tau \tag{3.5}$$

En [1], [2] y [3] se puede ver que si $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x)$ es Hölder continua para $x = 1$ y $G(t)$ es una función continua a trozos en cada intervalo $(0,t)$, $t > 0$, entonces este problema posee una única solución para T "suficientemente pequeño".

Más aún, si la solución existe, ocurren tres diferentes comportamientos (ver [1], Teorema 8 and [2]).

(A) El problema tiene solución para T arbitrariamente grande.

(B) Existe una constante $T_B > 0$ tal que $\lim_{t\to T_B} s(t) = 0$.

(C) Existe una constante $T_C > 0$ tal que $\inf_{t\in(0,T_C)} s(t) > 0$ y $\lim_{t\to T_C} \dot{s}(t) = -\infty$.

Analizaremos la posibilidad de ocurrencia de estos tipos de comportamiento en conexión con los datos iniciales φ, de contorno, temperatura del fluido externo G y el coeficiente de transferencia β.

Proposición 3.3. *Si $\dot{G} \le 0$, $\varphi(x) \ge G(0)$ y la solución (T, s, z) del Problema II, es caso (B) luego $Q(T_B) = 0$.*

Demostración. Se toma límite cuando $t \longrightarrow T_B$ en (2.3) y se usa la acotación de z obtenida en la Proposición 2.1. □

Proposición 3.4. *Si (T, s, z) es una solución del Problema II, y los datos iniciales y de contorno satisfacen las siguientes hipótesis:*

i) $\varphi(x) \ge M(x-1)$, $\quad 0 \le x \le 1$, $\quad 0 < M < 1$;

ii) $G(t) \ge -M$

y existe un tiempo T_B tal que $Q(T_B) = 0$, luego la solución (T_B, s, z) es caso (B).

Demostración. Se puede probar usando el Principio de Máximo que $z(x,t) \ge M(x-1)$.

Si reemplazamos esta inecuación en (2.3) para $t = T_B$, entonces $s(T_B)$ satisface la siguiente inecuación

$$s(T_B)\left[(1-M) + s(T_B)\left[\frac{\beta(1-M)+M}{2}\right] + \beta s^2(T_B)\frac{M}{3}\right] \le 0.$$

La forma cuadrática entre corchetes tiene coeficientes $1 - M > 0$ y $\frac{\beta(1-M)+M}{2} > 0$, luego $s(T_B) = 0$. $\square$

La siguiente Proposición es una adaptación de la misma afirmación dada en [4].

Proposición 3.5. *Supongamos que* $t_0 < T$, $\lim_{t \to t_0} s(t) > 0$. φ *satisface la hipótesis iv) de la Proposición 2.1. Más aún* $Q(t) > 0 \; \forall t \leq t_0$. *Luego si definimos una función:*

$$\eta(t) = \begin{cases} \max\{x \in [0, s(t)] | z(x,t) \leq -1\} \\ 0 \quad \textit{if } z(x,t) > -1, \;\; x \in [0, s(t)] \end{cases}$$

entonces se sigue

$$\lim_{t \to t_0} \eta(t) < \lim_{t \to t_0} s(t).$$

Proposición 3.6. *Sea* (T, s, z) *una solución del Problema II tal que* $\varphi(x) \geq M(x-1)$, $0 \leq x \leq 1$ *y* $S_T = \inf_{t \in (0,T)} s(t) > 0$. *Si existen dos constantes* $d \in (0, S_T)$, $z_0 \in (0,1)$ *tales que* $Md \geq z_0$, *y*

$$z(s(t) - d, t) \geq -z_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

luego

$$\dot{s}(t) \geq \frac{\ln(1 - z_0)}{d}.$$

Demostración. Ver el Lema 2.4 en [2] y [4]. $\square$

Proposición 3.7. *Sea* (T, s, z) *una solución del of Problema II y* φ *satisface las hipótesis de la Proposición 2.1 iv), luego si la solución es de tipo (C), entonces* $Q(T_C) \leq 0$.

Demostración. Supongamos que $Q(T_C) > 0$, luego la isoterma $z = -1$ tiene que estar separada de la frontera libre. Esto se desprende de la Proposición 2.5.

Usando la Proposición 3.6 $\dot{s}(t)$ tiene una cota inferior, lo cual contradice el tipo (C) de solución. $\square$

Corolario 3.8. *Si (T, s, z) es una solución del Problema II y φ y G satisfacen las siguientes hipótesis:*

i) $\varphi(x) \geq M(x-1), \quad 0 \leq x \leq 1;$

ii) $G(t) \geq -M, \quad 0 < M < 1,$

y la solución es de tipo (C), entonces $Q(T_C) < 0$.

Demostración. Sigue de las Proposiciones 2.4 y 2.7. □

Proposición 3.9. *Sea (T, s, z) una solución del Problemaa II, φ y G satisfacen las siguientes hipótesis:*

i) $\varphi(x) \geq M(x-1), \quad M > 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$

ii) $G \in L^1(0, \infty)$.

Si la solución es de tipo (A), luego $Q(t) \geq 0$, $t > 0$. Más aún si $G(t) \geq -M, (M > 0)$, $\forall t > 0$, y si la solución es de tipo (A), resulta $Q(t) > 0$ $\forall t > 0$.

La demostración se basa en suponer que la tesis es falsa y encontrar una contradicción usando (3.4)

IV. Comportamiento asintótico de la solución

Proposición 4.1. *Sea (T, z, s) una solución del Problema II del tipo (A) bajo las hipótesis de la Proposición 3.9 y iii) de la Proposición 3.3. Luego si existe $\lim_{t\to\infty} G(t)$ y notamos $Q_\infty = \lim_{t\to\infty} Q(t)$, $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t)$, entonces s_∞ viene dada por*

$$s_\infty = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\beta Q_\infty}}{\beta} \tag{3.1}$$

Demostración. Resulta de tomar límite $t \longrightarrow \infty$ en (3.3). □

Proposición 4.2.

i) Para cada $t > 0$ la frontera libre del Problema II satisface la siguiente condición:

$$s(t) \geq 1 + \int_0^1 \varphi(x)\, dx + \beta t \inf_{0 \leq \tau \leq t} G(\tau).$$

ii) *Si* $\dot{G}(t) \leq 0$, $\varphi(x) \geq G(0)$, *luego*

$$s^2(t) \geq 1 + 2\int_0^1 x\varphi(x)\,dx + 2t \inf_{0\leq\tau\leq t} G(\tau).$$

Demostración. Salen usando la representación integral y la Proposición 3.1. □

V. El problema consumo difusión del oxígeno

Es interesante analizar cómo depende la solución z del problema de la temperatura externa $G(t)$.

Una manera adecuada para analizarlo es vía la llamada transformación clásica al Problema de consumo y difusión del oxígeno:

$$u(x,t) = \int_x^{s(t)} \left\{ \int_\gamma^{s(t)} [1 + z(\alpha,t)]\,d\alpha \right\} d\gamma$$

Usando esta transformación el Problema II se transforma en el siguiente problema:

Problema III:

$u_{xx} - u_t = 1$, en D_t;

$s(0) = 1$;

$u(s(t),t) = u_x(s(t),t) = 0, \quad t > 0$;

$u(x,0) = H(x), \quad 0 \leq x \leq 1$;

$u_x(0,t) - H'(0) = \beta[u(0,t) - H(0) + \|G\|_{1,t}], \quad t > 0.$

donde

$$H(x) = \int_x^1 \int_\gamma^1 (1 + \varphi(\alpha))\,d\alpha d\gamma.$$

De aquí en más φ satisfacerá las siguientes hipótesis

$$-1 < \varphi(x) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

luego

$$H(x) > 0, \quad H'(x) < 0, \quad H''(x) > 0, 0 \leq x \leq 1.$$

Proposición 5.1. *Sea (T, s, u) solución del Problema III, con $-1 < \varphi \leq 0$ en $[0,1]$ y iii) de la Proposición 2.1, luego $u(x,t) < H(x)$, $x \in (0, s(t))$, $t > 0$.*

Demostración. Sale de aplicar el Principio de Máximo a $W = u - H$. $\square$

Corolario 5.2. *Sea (T, s, u) una solución del Problema III. Si $G(t) > -1$, $t > 0$, luego $u(x,t) \geq 0$ en D_t.*

Demostración. Sale de la Proposición 2.1 *iii*) $\square$

El próximo resultado determina cómo la solución u depende de $G(t)$.

Proposición 5.3. *La solución (T, s, u) del Problema III, depende monótonamente de G. En particular si (T_i, s_i, u_i), $i = 1, 2$ son soluciones para G_1 y G_2 respectivamente y si $G_1(t) < G_2(t)$, luego $s_1(t) \leq s_2(t)$ y $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ en donde ambas estén definidas.*

Demostración. Sea $v(x,t)$ la función definida como:

$$v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$$

en los puntos donde ambas estén definidas.

Sea $t^* = \sup\{t | u_2(0,t) > u_1(0,t)\}$ y $t^{**} = \sup\{t | s_2(t) > s_1(t)\}$.

Supongamos que t^* y t^{**} sean finitos. Por definición v satisface el siguiente problema

$$\begin{gathered} v_{xx} = v_t, x \in (0, s_1(t)), t \in (0, t^{**}); \\ v(x, 0) = 0; \\ v(s_1(t), t) = u_2(s_1(t), t) > 0; \\ v_x(0,t) = \beta[v(0,t) + (\|G_2\|_{1,t} - \|G_1\|_{1,t})]. \end{gathered}$$

Afirmación 1: $t^* \neq t^{**}$. Supongamos que $t^* = t^{**}$. Luego

a) $s_1(t^*) = s_2(t^*)$

b) $\dot{s}_1(t^*) \geq \dot{s}_2(t^*)$

c) $v(s_1(t^*), t^*) = u_2(s_1(t^*), t^*) = u_2(s_2(t^*), t^*) = 0$.

Más aún $u_2(0,t) > u_1(0,t)$ para $t < t^*$, luego

$$v(0,t) > 0, \quad t < t^*$$

y

$$v(s_1(t),t) = u_2(s_1(t),t) > 0.$$

como $v(s_1(t^*),t^*) = 0$ es un mínimo, luego por el Principio de Mínimo aplicado a v en D_t resulta $v_x(s_1(t^*),t^*) < 0$ lo cual contradice a) debido a

$$v_x(s_1(t^*),t^*) = u_{2x}(s_1(t^*),t^*) = u_{2x}(s_2(t^*),t^*) = 0$$

Luego $t^* \neq t^{**}$.

Afirmación 2: $t^* < t^{**}$ resulta imposible:

En $[0,t^*]$, $s_1(t) < s_2(t)$, ya que $v(s_1(t),t) > 0$. Por definición $v(0,t) > 0$ para $t < t^*$ y $v(0,t^*) = 0$ con lo cual $v(0,t^*)$ es un mínimo y por lo tanto $v_x(0,t^*) > 0$, lo cual contradice

$$v_x(0,t^*) = \beta[v(0,t^*) + (\|G_2\|_{1,t^*} - \|G_1\|_{1,t^*})] = \beta[\|G_2\|_{1,t^*} - \|G_1\|_{1,t^*}] < 0.$$

Afirmación 3: $t^{**} < t^*$ es imposible:

Supongamos $t^{**} < t^*$, y como $v(0,t) > 0$, $v(s_1(t),t) = u_2(s_1(t),t) > 0$, para $t < t^{**}$, el punto $(s_1(t^{**}),t^{**})$ es un mínimo para v porque $v(s_1(t^{**}),t^{**})$ $= u_2(s_1(t^{**}),t^{**}) = u_2(s_2(t^{**}),t^{**}) = 0$. Luego por el Principio de Mínimo:

$$v_x(s_1(t^{**}),t^{**}) < 0$$

lo cual contradice

$$v_x(s_1(t^{**}),t^{**}) = u_{2x}(s_2(t^{**}),t^{**}) = 0.$$

Luego queda probada la Proposición. $\square$

REFERENCIAS

1. A. FASANO, M. PRIMICERIO, *General free-boundary problemas for the heat equation I*, Math. Anal Appl. 57 (1977), 694–723.

2. A. FASANO, M. PRIMICERIO, *New results on some classical parabolic free-boundary problemas*, Quarterly of Applied Mathematics 38 (1981), 439–460.

3. A. D. SOLOMON, V. ALEXIADES, D. G. WILSON, *The Stefan problema with a convective boundary condition*, Quarterly of Applied Mathematics 40 (1982), 203–217.

4. E. COMPARINI, R. RICCI, D. TARZIA, *Remarks on a one dimentional Stefan problema related to the diffusion-comsumption model*, Z. Angew. Math. Mech. 64 (1984), 543–550.

5. J. R. CANNON, C. D. HILL, *Remarks on a Stefan problema*, J. Math. Mech. 17 (1967), 433–441.

6. A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N J, 1964.

7. D. A. TARZIA, C. V. TURNER, *The one-phase supercooled Stefan problem with a convective boundary condition.*, to appear in Quarterly of Applied Math.

8. A.D. SOLOMON, V. ALEXIADES, *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere Publishing Corporation..

Domingo A. TARZIA
- Dpto. Matemática, FCE
Univ. Austral
Paraguay 1950
(2000) Rosario
- Promar (CONICET-UNR)
Inst. Mat. "B. Levi"
Av. Pellegrini 250
(2000) Rosario
ARGENTINA.
e-mail: tarzia@uaufce.edu.ar

Cristina V. TURNER
FaMAF,
Ciudad Universitaria
Universidad Nacional Córdoba
(5000) Córdoba
ARGENTINA.
e-mail: turner@mate.uncor.edu