CONSEJO NACIONAL DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS Y TECNICAS
INSTITUTO ARGENTINO DE MATEMATICA
I.A.M.

TRABAJOS DE MATEMATICA 53

ENCUENTRO 1982 DE ECUACIONES DIFERENCIALES

BUENOS AIRES – 1983

ISSN 0325-6677

Encuentro 1982 de Ecuaciones Diferenciales
Instituto Argentino de Matemática - (CONICET). Buenos Aires
Trabajos de Matemática N°. 53

SOBRE EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE CORRESPONDIENTE A UN LIQUIDO SUPERENFRIADO

por

Domingo Alberto Tarzia

I. Introducción.

Daremos aquí un breve resúmen de algunas propiedades sobre el problema de Stefan unidimensional a una fase correspondiente a un líquido superenfriado.

El problema clásico de Stefan unidimensional a una fase (caso fusión) consiste en hallar la temperatura $\Theta = \Theta(y,\tau)$ y la frontera libre $r = r(\tau)$, soluciones del siguiente sistema:

(1a) $\Theta_\tau = \alpha\Theta_{yy}$, $0< y< r(\tau)$, $0 < \tau < \tau_0$

(1b) $\Theta(r(\tau),\tau) = 0$, $0< \tau < \tau_0$

(1c) $k\Theta_y(r(\tau),\tau) = -\rho\ \ell\ \ r'(\tau)$, $0 < \tau < \tau_0$

(1d) $k\Theta_y(0,\tau) = \psi(\tau)$, $0 < \tau < \tau_0$

(1e) $\Theta(y,0) = \phi(y)$, $0 < y < b$

(1f) $r(0) = b$

donde

k : conductividad térmica, ρ : densidad de masa

$$
(2)\quad \begin{cases} c : \text{calor específico}, & \ell : \text{calor latente de fusión} \\[2ex] \alpha = \dfrac{k}{\rho c} : \text{difusividad térmica}, & \phi : \text{temperatura inicial} \\[2ex] \psi : \text{flujo de calor en el borde fijo} \quad y = 0 . \end{cases}
$$

Realizando el siguiente cambio de variables:

$$
(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{y}{b} , & t = \dfrac{k}{\rho c b^2}\, \tau \\[3ex] z(x,t) = \dfrac{c}{\ell}\, \theta(y,\tau) , & s(t) = \dfrac{r(\tau)}{b} \end{cases}
$$

el problema (1) se transforma de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
(4a) & z_{xx} = z_t , \quad 0 < x < s(t) , \quad 0 < t < T \\[1.5ex]
(4b) & z(s(t),t) = 0 , \quad 0 < t < T \\[1.5ex]
(4c) & z_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) , \quad 0 < t < T \\[1.5ex]
(4d) & z_x(0,t) = g(t) , \quad 0 < t < T \\[1.5ex]
(4e) & z(x,0) = h(x) , \quad 0 < x < 1 \\[1.5ex]
(4f) & s(0) = 1
\end{array}
$$

donde:

$$
(5)\quad \begin{cases} g(t) = \dfrac{bc}{\ell k}\, \psi(\tau) , & h(x) = \dfrac{c}{\ell}\, \phi(y) \\[3ex] T = \dfrac{k}{\rho c b^2}\, \tau_0 . \end{cases}
$$

Observación I: Las nuevas variables independientes x,t y las nuevas variables dependientes $z(x,t)$, $s(t)$ son adimensionales.

Además, la condición de flujo (1d) sobre el borde fijo $y = 0$ puede ser reemplazado por una condición de temperatura, es decir:

$$\text{(1d bis)} \qquad \Theta(0,\tau) = \psi_0(\tau), \quad 0<\tau<\tau_0$$

la cual se transforma en:

$$\text{(4d bis)} \quad \begin{cases} Z(0,t) = g_0(t), \quad 0<t<T \\ \\ \text{con } \; g_0(t) = \frac{c}{\ell}\,\psi_0(\tau) = \end{cases}$$

Diremos que el triple (T,s,z) es una *solución clásica* del problema de frontera libre (4) si y sólo si:

(i) $T>0$.

(ii) $s\in C[0,T]$, $\dot{s}\in C(0,T)$, $s(t)>0$ en $[0,T)$.

(iii) La función $z = z(x,t)$ es continua y acotada en $0<x<s(t)$, $0<t<T$; la función $z_x(x,t)$ es acotada en dicho dominio, y continua en el mismo salvo un eventual número finito de puntos sobre la frontera parabólica; las funciones $z_{xx}(x,t)$ y $z_t(x,t)$ son continuas en $0<x<s(t)$, $0<t<T$.

(iv) Se satisfacen las condiciones (4).

El problema de Stefan ordinario $(h>0,\ g<0)$ ha sido muy ampliamente estudiado. Más aún, la existencia de solución esta probada $\forall\, T$ con la propiedad $\dot{s}(t) > 0)$. Una extensa bibliografía sobre el tema puede encontrarse en las recientes revisiones realizadas en [P2, T1].

De aquí en adelante analizaremos el problema de Stefan unidimensional a una fase correspondiente a un líquido superenfriado, es decir, consideraremos el caso:

(6) $h < 0, \quad g > 0$

sobre el cual estudiaremos algunas de sus propiedades. Veremos que el problema difiere substancialmente del problema de Stefan ordinario. Sólo demostraremos las más simples, enviándose al lector a los trabajos originales para las restantes propiedades que se indican.

II. Estudio de los diferentes casos.

II.1. Caso $h < 0, \quad g \equiv 0$.

Aquí $h(x)$ es una función continua en $[0,1]$. A continuación daremos una lista de algunas de las propiedades correspondientes al problema (4), (II-1), a saber:

Propiedad 1. [FP 1,2,3] Si $h(1) = 0$ y $h(x)$ es una función de Hölder-continua en $x = 1$, es decir

(7) $\exists H > 0 \ / \ h(x) > -H(1-x), \quad x \in [0,1]$

entonces el problema (4), (II-1) posee una solución para $T > 0$ suficientemente pequeño. Además, la unicidad y la dependencia continua respecto de los datos son también analizadas.

Propiedad 2. [FP 1,2,3 - Sh 1,2] Si la solución del problema (4), (II-1) existe, entonces ocurrirá uno de los tres casos siguientes:

(A) El problema tiene solución $\forall\, T > 0$.

(B) $\exists\, T = T_B > 0 \;/\; \lim_{t \to T_B} s(t) = 0.$

(C) $\exists\, T = T_c > 0 \;/\; \inf_{t \in (0,T_c)} s(t) > 0, \quad \underline{\lim}_{t \to T_c} \dot{s}(t) = -\infty$.

Antes de analizar la ocurrencia de estos casos en conexión con el comportamiento del dato inicial $h(x)$, veremos algunas otras propiedades preliminares como así también hipótesis complementarias para la existencia y unicidad de solución. La condición de compatibilidad $h(1) = 0$, utilizada en [Sh 1,2] ha sido eliminada en los recientes trabajos [FP 4,6], en los cuales se permite a z ser discontinua en el punto $(1,0)$

Propiedad 3. [FP 4] Si (T,s,z) es una solución del problema (4), (II-1) entonces se tiene:

a)
$$(8)\quad \begin{cases} z(x,t) < 0 & \text{en } D_T \\ \\ \dot{s}(t) = -z_x(s(t),t) < 0, & 0 < t < T. \end{cases}$$

b) Si además, $h'(x) > 0$, entonces

$$(9)\quad z_x(x,t) > 0 \quad \text{en } D_T \ .$$

c) Se tienen las siguientes ecuaciones integrales:

$$(10i)\quad s(t) = Q - \int_0^{s(t)} z(x,t)\,dx, \quad t \in (0,T)$$

$$(10ii)\quad \frac{s^2(t)-1}{2} = -M_1 + \int_0^t z(0,\tau)d\tau - \int_0^{s(t)} xz(x,t)dx\ , \quad t\in(0,T)$$

$$(10iii)\quad \frac{s^3(t)-1}{3} = -M_2 + 2\int_0^t \tau\dot{s}(\tau)d\tau - \int_0^{s(t)} (x^2-2t)z(x,t)dx =$$

$$= -M_2 + 2\iint_{D_t} z(x,\tau)dx\, d\tau - \int_0^{s(t)} x^2 z(x,t)dx\ , \quad t\in(0,T)$$

donde

$$(11)\quad \begin{cases} Q = 1 + \int_0^1 h(x)dx\ , \quad M_1 = -\int_0^1 x\, h(x)dx \\ \\ D_T = \left\{(x,t)/0< x< s(t),\quad 0< t< T\right\}, \quad M_2 = -\int_0^1 x^2 h(x)dx. \end{cases}$$

Demostración. a) y b) son una consecuencia directa del principio del máximo.
c) Si consideramos la identidad de Green

$$(12)\quad \iint_{D_t} (v\, Lu - u\, L^*v)dx\, d\tau = \oint_{\partial D_t} (v\, u_x - u\, v_x)d\tau + uv\, dx$$

donde $L(v) = v_{xx} - v_t$ representa el operador del calor y $L^*(v) = v_{xx} + v_t$ su adjunto, entonces las fórmulas (10i), (10ii), (10iii) se obtienen poniendo en (12) $u = z(x,t)$ y $v = 1$, $v = x$, $v = x^2-2t$ respectivamente.

Propiedad 4. [FP 4,6] (Teorema de no-existencia).

(i) Si $h(x) = h< -1$, entonces el problema (4),(II,1) no tiene solución.

(ii) Si $h(x) < -1$ en (0,1), entonces el problema (4), (II-1) no tiene solución.

(iii) Si para algún $\sigma < 0$ es

$$(13)\quad \int_x^1 d\xi \int_\xi^1 (1+h(y))\, dy < 0\ , \quad \forall\ x\in(1-\sigma,1)$$

entonces el problema (4), (II-1) no tiene solución.

Demostración (i) Del hecho que $h(x)$ es una constante se tiene $h(x) = h = -1 + Q$ con $Q \leq 0$. Aplicando el principio del máximo en (4) se deduce $0 < s(t) < 1$, $t \in (0,T)$ y $z(x,t) > -1 + Q$ en D_T. Por lo tanto, de (10i) se obtiene $s(t) < Q + (1 - Q)s(t)$, $t \in (0,T)$, es decir $0 < Q(1 - s(t))$, lo cual resulta ser una contradicción. Para (ii), ver [FP 4] y para (iii) ver [FP 6].

Observación 1. El miembro de la izquierda en la desigualdad (13) representa el dato inicial del problema de frontera libre (58), (59) correspondiente a la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivientes.

Propiedad 5. [FP 6] (Teorema de unicidad). Si

(14) $\exists\, \sigma > 0 \;/\; h(x) \geq -1\ , \quad h \not\equiv -1 \quad \text{en} \quad (1-\sigma, 1)$

entonces el problema (4) no puede tener dos soluciones distintas.

Propiedad 6. [FP 6] (Teorema de existencia) i) Si

(15) $\underline{\lim}_{x \to 1}\ h(x) > -1$

entonces el problema (4), (II-1) posee una solución clásica.

(ii) Si

(16) $\exists\, \sigma > 0 \;/\; h(x) > -1 \quad \text{en} \quad (1-\sigma, 1)$

entonces el problema (4), (II-1) posee una solución clásica.

Observación 2. Por lo tanto, la existencia y unicidad de una solución local (en el tiempo) clásica del problema (4), (II-1) depende sólo de los valores de la función continua $h(x)$ en un entorno a la izquierda del punto $x = 1$, resultados que pueden resumirse de la siguiente manera:

(i) Si $h(1) > -1$, el problema (4), (II-1) tiene una única solución local.

(ii) Si $h(1) = -1$ y $h(x) > -1$ en algún entorno $(1-\sigma, 1)$ a la izquierda del punto $x = 1$, el problema (4), (II-1) tiene una única solución local.

(iii) Si $h(1) = -1$ y $h(x) < -1$ en algún entorno $(1-\sigma, 1)$ a la izquierda el punto $x = 1$, el problema (4), (II-1) no tiene solución.

(iv) Si $h(1) < -1$, el problema (4), (II-1) no tiene solución.

A continuación veremos algunos resultados que nos permitirán distinguir para la solución del problema (4) los tres posibles casos (A), (B) y (C).

Propiedad 7. [FP 4, P3, CRT 1] Sea (T,s,z) una solución de (4), (II-1) con $s_T = \operatorname{Inf}_{t\in(0,T)} s(t) > 0$. Si h verifica (7) y si existen dos constantes $z_0 \in (0,1)$ y $d \in (0,s_T)$ con $dH < 1$ tales que $z(s(t)-d,t) > -z_0$, $\forall t \in (0,T)$, entonces

$$(17) \qquad \dot{s}(t) \geq \frac{1}{d}\log(1 - \text{Máx}(Hd, z_0)), \quad 0 < t < T.$$

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $A = \text{Máx}(Hd, z_0) < 1$ y $\Omega_\varepsilon = \{(x,t)/s(t)-d < x < s(t),\ 0 < t < T-\varepsilon\}$. Sobre Ω_ε consideremos la función $w(x,t) = -A(1-e^{-ad})^{-1} \cdot (1-e^{a(x-s(t))})$ con $a = a(\varepsilon) = \operatorname{Sup}_{t\in(0,T-\varepsilon)} -\dot{s}(t)$. La función $w(x,t)$ verifica las siguientes propiedades:

(i) $w_x(x,t),\ w_{xx}(x,t) > 0$ en Ω_ε .

(ii) $w_{xx} - w_t > 0$ en Ω_ε.

(iii) $w(s(t)-d,t) = -A < -z_0 < z(s(t)-d,t)$, $t \in (0,T-\varepsilon)$

(iv) $w(s(t),t) = 0 = z(s(t),t)$, $t \in (0,T-\varepsilon)$.

(v) $w(x,0) < z(x,0)$, $x \in (1-d,1)$.

Las propiedades (i)-(iv) se verifican fácilmente. La propiedad (v) surge de que $w(1-d,0) = -A < -Hd$ y $w_{xx} > 0$. Aplicando el principio del máximo se tiene que $w(x,t) < z(x,t)$ en Ω_ε , de lo cual se deduce que $-\dot{s}(t) = z_x(s(t),t) < w_x(s(t),t) = Aa(1-e^{-ad})^{-1}$. Como el término de la derecha no depende de t, se obtiene $a < Aa(1-e^{-ad})^{-1}$, es decir $1-e^{-ad} < A$, de donde se deduce $-\dot{s}(t) < a < -\frac{\log(1-A)}{d}$, $\forall t \in (0,T-\varepsilon)$. Haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene (17).

<u>Corolario 1</u>. Es condición necesaria para que ocurra el caso (c) que la curva (isoterma) de nivel $z = -1$ se encuentre con la frontera libre $s = s(t)$ en el punto $(s(T_c),T_c)$.

<u>Propiedad 8</u>. [FP 4] Si (T,s,z) es una solución de (4), (II-1) y la función h satisface

(18) la ecuación $h(x) = -1$ tiene a lo sumo una raíz en $[0,1]$

entonces:

(19i) Si $Q < 0$ entonces $z(0,t) < -1$.

(19ii) Si $Q > 0$ entonces no hay puntos en D_T donde $z(x,t) = -1$ o la curva de nivel $z = -1$ está separada por una distancia positiva de la frontera libre $x = s(t)$ para $t \in (0,T]$ con $s(t) > 0$.

Demostración. Consideremos primeramente el caso $h(x) > -1$, lo cual implica $Q > 0$ (más aún, $Q > 0$ por (18)). Por el principio del máximo se tiene $z(x,t) > -1$ en D_T y por lo tanto (19ii) se satisface. En los otros casos posibles, consideremos la curva de nivel $z(x,t) = -1$ que se origina en $t = 0$, la cual es única por (18). Si $z(\hat{x},\hat{t}) = -1$, entonces $z(x,\hat{t}) < -1$ para $x < \hat{x}$ y $z(x,\hat{t}) > -1$ para $x > \hat{x}$. Entonces, de (10i) se puede ver que: Si $Q = 0$ entonces $0 < \hat{x} < s(\hat{t})$; si $Q < 0$, entonces $\hat{x} > 0$; si $Q > 0$, entonces $\hat{x} < s(t)$.

Propiedad 9. Si $U(x,t)$ es la función definida por

$$(20)\qquad \begin{aligned} &U_{xx} = U_t\,, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ &U_x(0,t) = 0, \quad U(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ &U(x,0) = h(x), \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

entonces U verifica las propiedades siguientes:

(21i) $U(x,t) < z(x,t) < 0$ en D_T.

(21ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} U(x,t) = 0$, uniformemente en $x \in [0,1]$.

Demostración. La condición (21i) surge del principio del máximo y (21ii) de [F1].

Propiedad 10. Si (T,s,z) es una solución de (4), (II-1), entonces:

(i) (A) $\Rightarrow$ $Q > 0, \ \lim_{t \to +\infty} s(t) = Q.$

(ii) (B) $\Rightarrow$ $Q = 0$

(iii) $Q < 0$ $\Rightarrow$ (C).

Demostración. La condición (i) se obtiene teniendo en cuenta (21i,ii) y haciendo $t \to +\infty$ en (10i). Para obtener (ii) es suficiente hacer $t \to T_B$. La condición (iii) surge de (i,ii).

Propiedad 11. [FP 4] Si (T,s,z) es una solución de (4), (II-1) y si h verifica las hipótesis (7), (18) entonces se tienen las siguientes equivalencias:

(22i) (B) $\Longleftrightarrow Q = 0.$

(22ii) (A) $\Longleftrightarrow Q > 0.$

(22iii) (C) $\Longleftrightarrow$ $Q < 0.$

Demostración. Basta demostrar que con las hipótesis adicionales (7) y (18) se puede completar la Propiedad 10.
Si $Q = 0$ entonces por (19i) se tiene $z(0,t) < -1$. Debido a (10ii) y (21i, ii) el caso (A) se excluye. Además, (19ii) y la Propiedad 7 implican que $\dot{s}$ está acotada y por lo tanto el caso (C) también debe excluirse, con lo cual debe suceder necesariamente el caso (B).
Para probar (22ii) es suficiente excluir el caso (C), lo cual se cumple por las Propiedades 7 y 8. La condición (22iii) se deduce inmediatamente por (22i,ii)●

A continuación veremos los resultados concernientes al comportamiento de la frontera libre $x = s(t)$ cuando $t \to T$ en cada uno de los tres casos (22) que pueden ocurrir en el problema (4), (II-1) según la:

<u>Propiedad 12.</u> [FP 4] (a) Si (T,s,z) es una solución de (4), (II-1) que satisface el caso (A), entonces:

(23) $$T = +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} s(t) = Q > 0.$$

(b) Si (T_B,s,z) es una solución de (4), (II-1) que satisface el caso (B), entonces:

(24) $$\bar{h} \equiv \operatorname*{Min}_{x \in [0,1]} h(x) < -1$$

(25) $$T_B > \frac{1/2 - M_1}{-\bar{h}}$$

(26) $$\int_0^{T_B} s(t)\,dt = \frac{1}{6} - \frac{M_2}{2}.$$

(c) Si h verifica (18) y si (T_B,s,z) es una solución de (4), (II-1) que satisface el caso (B), entonces:

(27) $$T_B < \frac{1}{2} - M_1$$

(28) $$\varliminf_{t \to T_B} \dot{s}(t)\sqrt{T_B - t} = -\infty$$

(d) (i) Si h verifica (18) y $Q < 0$, y si (T_c,s,z) es una solución de (4) que satisface el caso (C), entonces:

(29) $$\bar{h} < -1 + Q, \quad s_c \equiv \operatorname*{Inf}_{t \in [0,T_c]} s(t) > \frac{Q}{1+\bar{h}}.$$

(ii) Si h verifica (18) y $Q < 0$, entonces toda solución (T_c, s, z) que satisfaga el caso (C) verifica:

$$(30) \qquad T_c < \frac{1}{2} - M_1 - \frac{(1+\bar{h})}{2} s_c^2 \equiv A < -(M_1 + \frac{\bar{h}}{2})$$

(iii) Si h es una función no-decreciente, entonces toda solución (T_c, s, z) que satisfaga el caso (C) verifica:

$$(31) \qquad M_1 \leq \frac{1-Q}{2}\,, \qquad M_2 \leq \frac{1-Q}{3}$$

$$(32) \qquad T_c < (\frac{1}{2} - M_1 - \frac{s_c Q}{2})/(1 - \frac{Q}{s_c}) \equiv B < (\frac{1}{2} - M_1 - Q/2)/(1-Q).$$

Demostración. De (22ii), (11) y la Propiedad (4i) surge (24). Usando el hecho de que $z(0,t) > \bar{h}$ y pasando al límite $t \to T_B$ en (10ii), se obtiene (25). Análogamente, teniendo en cuenta (19i), se deduce la condición (27). La condición (26) se obtiene pasando al límite $t \to T_B$ en (10iii) previa integración por partes en el último término $\int_0^t \tau \dot{s}(\tau) d\tau$. Por las demás condiciones no demostradas aquí, ver [FP4].

Observación 3. Se puede notar que las constantes A y B no son necesariamente positivas, con lo cual es razonable conjeturar que otros casos de no-existencia puedan ocurrir en el problema (4). Además, se tiene $B < A$ [FP4].

A continuación veremos los resultados concernientes a la curvatura de la frontera libre $x = s(t)$. Para ello, en [FJ1, FP5] se realiza un análisis de las curvas de nivel de la función

$$(33) \qquad v(x,t) = \frac{z_{xx}(x,t)}{z_x(x,t)}\,.$$

Sea

$$(34)\qquad h\in C^2[0,1]\ ,\quad h<0\ ,\quad h(1)=0$$

y definamos

$$(35)\qquad \begin{cases} M=\{\,x\in[0,1]\,/\,h'(x)\neq 0\,\} \\ H(x)=\dfrac{h''(x)}{h'(x)}\ ,\quad x\in M\ , \end{cases}$$

entonces se tienen las propiedades siguientes:

Propiedad 13. [FJ1, FP5] Si (T,s,z) es una solución de (4), (II-1) entonces (T,s,v) es una solución del problema siguiente:

$$(36)\qquad \begin{cases} v_{xx}+2\,vv_x-v_t=0\ , & (x,t)\in D_T \\ v(s(t),t)=-\dot{s}(t)\ , & 0<t<T \\ v_x(s(t),t)=\dfrac{\ddot{s}(t)}{\dot{s}(t)}\ , & 0<t<T \\ v(x,0)=H(x)\ , & x\in M. \end{cases}$$

Además, la función v no tiene extremos relativos sobre la curva $x=s(t)$ para $t\in(0,T)$.

Propiedad 14. [FJ1] (i) Si h verifica (34) y las condiciones de compatibilidad

$$(37)\qquad h'(0)=0\ ,\quad h''(1)=(h'(1))^2$$

entonces z_x , z_{xx} , z_t son continuas en $\bar{D}_T$.

(ii) Si h verifica (34), (37) y las condiciones siguientes:

(38) $h' > 0$, $h'' > 0$ en $(0,1]$

entonces se tiene:

(39) $z < 0$, $z_x > 0$, $z_t > 0$ en D_T .

(iii) Si h verifica (34), (37), (38) y la condición

(40) H es una función monótona decreciente en $(0,1)$

y además sucede el caso (A), entonces $\exists\, \tilde{t} \in [0,+\infty)$ tal que

$$
(41) \quad \begin{cases} \dot{s} \text{ es estrictamente decreciente en } [0,\tilde{t}] \\ \dot{s} \text{ es estrictamente creciente en } [\tilde{t},+\infty). \end{cases}
$$

Observación 4. En [FP5] se estudia el comportamiento de la función $v(x,t)$, definida por (33), cerca de los puntos $(x_0,0)$ con $x_0 \in \partial M$, los cuales son llamados puntos singulares.

Propiedad 15. [FP5] Si h verifica (37) y la condición siguiente:

(42) $H > 0$, H es una función no-creciente en M

entonces se tienen los resultados siguientes:

(i) La frontera libre tiene a lo sumo un punto de inflexión.

(ii) Si $H(1) > h'(1)$, entonces sucede el caso (A) con $\ddot{s}(t) > 0$, $\forall\ t > 0$.

(iii) Si $H(1) = h'(1)$, entonces sucede el caso (A) y $\exists\, t_0 > 0$ tal que $\ddot{s}(t) < 0$ para $t < t_0$ $(t_0 > 0)$ y $\ddot{s}(t) > 0$ para $t > t_0$.

Además, si $\exists\ H'(1)$ entonces $t_0 > 0 \Longleftrightarrow H'(1) = 0$.

(iv) Si $H(1) < h'(1)$, entonces la frontera libre tiene un punto de inflexión (como en el caso (iii)) $\Longleftrightarrow Q > 0$.

Observación 5. Otros casos en los cuales la hipótesis (42) no se verifica son analizados en [FP5].

Observación 6. Propiedades de regularidad de la frontera libre son analizados en [F2, RFP1] y en la bibliografía de dichos trabajos. En [VM1] se estudió un problema de tiempo final óptimo y se lo relacionó a un problema de Stefan con agua superenfriada; dicho problema fue también estudiado en [F3, J1] a través de inecuaciones variacionales . Una revisión sobre el problema (4), (II-1), ha sido dada en [P1].

II.2. Caso $h \equiv 0$ y $g > 0$.

Aquí $g(t)$ es una función continua a trazos y acotada en todo intervalo finito $(0,t)$, $t > 0$. A continuación daremos una lista de algunas de las propiedades correspondientes al problema (4), a saber:

Propiedad 16. [FP 1,2,3 - Sh 1,2] El problema (4), (II-2) tiene una única solución para un conveniente $T > 0$. Además, uno de los tres casos (A), (B), (C) , dados por la Propiedad 2, debe ocurrir.

<u>Propiedad 17</u>. [CRT1] Si (T,s,z) es una solución de (4), (II-2) entonces:

(a)

$$(43)\qquad \begin{aligned} & z(x,t)<0, \quad z_x(x,t)>0 \quad \text{en} \quad D_T \\ & \dot{s}(t) = -z_x(s(t),t)<0 \;, \quad 0<t<T. \end{aligned}$$

(b) Si se define

$$(44)\qquad G(t) = \sup_{\tau\in(0,t)} g(\tau)$$

entonces

$$(45)\qquad z(x,t) \geq G(t)\,(x-1) \quad \text{en} \quad D_T \,.$$

(c) Se tienen las siguientes ecuaciones integrales:

$$(46i)\qquad s(t) = 1 - \int_0^t g(\tau)\,d\tau - \int_0^{s(t)} z(x,t)\,dx, \quad t\in(0,T).$$

$$(46ii)\qquad \frac{s^2(t)-1}{2} = \int_0^t z(0,\tau)\,d\tau - \int_0^{s(t)} x\, z(x,t)\,dx \;, \quad t\in(0,T)$$

$$(46iii)\qquad \frac{s^3(t)-1}{3} = 2\int_0^t \tau\,\dot{s}(\tau)\,d\tau + 2\int_0^t \tau\, g(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^{s(t)} (x^2-2t)\,z(x,t)\,dx = 2\iint_{D_t} z(x,\tau)\,dx\,d\tau - \int_0^{s(t)} x^2 z(x,t)\,dx,$$

$$t\in(0,T).$$

<u>Demostración</u>. Las partes (a) y (b) son una consecuencia directa del principio del máximo, y (c) de la identidad de Green (12).

Propiedad 18. [CRT1] Sean $\bar{T} < T$, $\lim\limits_{t \to \bar{T}} s(t) > 0$ y $\int_0^{\bar{T}} g(t)dt < 1$. Sea

$$(47) \qquad \eta(t) = \begin{cases} \text{Máx} \quad \{x \in [0,s(t)] \;/ z(x,t) < -1\} \\ \\ 0 \qquad\qquad \text{si} \quad z(x,t) > -1 \quad \text{con} \quad x \in [0,s(t)]. \end{cases}$$

Entonces, se tiene:

$$(48) \qquad \overline{\lim_{t \to \bar{T}}} \; \eta(t) < \lim_{t \to \bar{T}} \; s(t) \; .$$

Propiedad 19. [FP4, P3, CRT1] Sea (T,s,z) una solución de (4), (II-2) con $s_T = \operatorname*{Inf}\limits_{t \in (0,T)} s(t) > 0$. Si existen dos constantes $z_0 \in (0,1)$ y $d \in (0,s_T)$ tales que $z(s(t)-d,t) > -z_0$, $\forall t \in (0,T)$ entonces:

$$(49) \qquad \dot{s}(t) > \frac{\log(1-z_0)}{d} \quad , \quad 0 < t < T.$$

Demostración. Se realiza una prueba análoga a la de la Propiedad 7.

Respecto de los tres diferentes casos que pueden ocurrir en el problema (4), (II-2), se tiene las siguientes:

Propiedad 20. [CRT1] Si (T_c,s,z) es una solución de (4), (II-2) y sucede el caso (c) en $T = T_c$, entonces:

$$(50) \qquad \int_0^{T_c} g(t)dt > 1.$$

Demostración. La condición $\int_0^{T_c} g(t)dt > 1$ surge inmediatamente de las dos anteriores Propiedades 18 y 19. El signo igual en (50) no ocurre por una aplicación del principio del máximo fuerte.

Propiedad 21. [CRT1] (i) Si (T_B, s, z) es una solución de (4), (II-2) y sucede el caso (B) en $T = T_B$, entonces:

$$(51) \qquad \int_0^{T_B} g(t)dt = 1 .$$

(ii) Si existe $T_0 > 0$ tal que:

$$(52) \qquad \int_0^{T_0} g(t)dt = 1 , \quad g(t) < 1 \quad \text{en} \quad (0,T_0)$$

entonces ocurre el caso (B) en $T = T_0$.

Demostración. (i) Sea $G = \sup_{t\in(0,T_B)} g(t)$. Por (45) se tiene que $|z(x,t)| < G(1-x)$ en $(0,1)\times(0,T_B)$, y pasando al límite $t\to T_B$ en (46i) se obtiene (51).

(ii) La Propiedad 20 nos asegura que el caso (C) no puede ocurrir hasta T_0. Por (45), se tiene que $z(x,t) > x-1$, y haciendo $t \to T_0$ en (46i) se deduce $s(T_0) < \int_0^{s(T_0)} (1-x)dx = s(T_0) - \frac{s^2(T_0)}{2}$, es decir $s(T_0) = 0$, con lo cual sucede el caso (B).

Propiedad 22. [CRT1] En el problema (4),(II-2) se tiene la siguiente equivalencia:

$$(53) \qquad (A) \longleftrightarrow \int_0^t g(\tau)d\tau < 1 , \ \forall\ t > 0.$$

Demostración. $\Leftarrow$) Surge como corolario de las anteriores Propiedades (20) y (21).

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $T_0 > 0$ tal que

$$(54) \qquad \int_0^{T_0} g(t)dt = 1 \ , \quad s(T_0) > 0 \ , \quad \dot{s}(T_0) > -\infty .$$

Entonces, hay dos posibilidades:

(a) $g(t) = 0, \quad \forall\ t > T_0$

(b) $g(t) > 0, \quad t > T_0$ y g no es identicamente nula.

De la condición (46i), se tiene:

$$(55) \qquad s(T_0) + \int_0^{s(T_0)} z(x,T_0)dx = 0.$$

En el caso (a), se puede utilizar la Propiedad 11 y debido a la condición (55) se deduce que ocurrirá el caso (B) en un tiempo $T_B > T_0$, lo cual es una contradicción.

En el caso (b), se define la función

$$(56) \qquad u(x,t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_\xi^{s(t)} [1 + z(y,t)]dy$$

y se puede construir una sucesión decreciente b_n con $b_n > s(T_0)$, $\lim_{n\to\infty} b_n = s(T_0)$, y un triple (T_n, s_n, z_n) solución del problema (4), (II-1) correspondiente a los datos siguientes (el origen del tiempo se lleva a $T_0 = 0$):

$$(57) \qquad \begin{cases} s_n(T_0) = b_n \ , \quad g_n = 0 \ , \\ h_n(x) = \begin{cases} z(x,T_0) & \text{si} \quad 0 < x < s(T_0) \\ 0 & \text{si} \quad s(T_0) < x < b_n \end{cases} \end{cases}$$

Entonces se puede aplicar el Lema de comparación (Propiedad 24) y [FP1] para pasar al límite $n \to +\infty$ y obtener que $s(t) < \bar{s}(t)$ en todo tiempo t para el cual $s(t)$ existe. Además, se demuestra que $\bar{s}(t)$ es la frontera libre de un dado problema (4), (II-1) al cual le ocurre el caso (B), siendo esto una contradicción.

Propiedad 23. Si (T,s,z) es una solución del problema (4), entonces el triple (T,s,u), con u definido por (56), es una solución del siguiente problema:

$$
(58) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 1 \,, & 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T \\ u(s(t),t) = 0 \,, & 0 < t < T \\ u_x(s(t),t) = 0 \,, & 0 < t < T \\ u_x(0,t) = f(t) \,, & 0 < t < T \\ u(x,0) = F(x) \,, & 0 < x < 1 \\ s(0) = 1 & \end{cases}
$$

donde

$$
(59) \quad \begin{cases} f(t) = -1 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau \,, & 0 < t < T \\ F(x) = \int_x^1 d\xi \int_\xi^1 [1 + h(y)]\, dy \,, & 0 < x < 1. \end{cases}
$$

Reciprocamente, si (T,s,u) es una solución de (58), entonces (T,s,z), con $z = u_t$, es una solución de (4) con $g(t) = f'(t)$ y $h(x) = F''(x) - 1$.

Observación 7. (58) es una problema de frontera libre que corresponde al de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivientes [CG1] en el cual u representa la concentración de oxígeno y el término de fuente en la ecuación diferencial tiene en cuenta el consumo de oxígeno en el tejido■

Para el problema (58) vale el siguiente resultado de comparación:

Propiedad 24. [CRT1] Sean (T_i, s_i, z_i) , $i = 1,2$, dos soluciones del problema (4) con datos $s_i(0) = b_i$, $z_i(x,0) = h_i(x)$, $z_{i_x}(0,t) = g_i(t)$, donde g_i verifican la hipótesis general del presente párrafo II-2 y h_i son funciones continuas que satisfacen apropiadas condiciones para la existencia local de solución [FP6]. Si los datos verifican:

$$(60)\quad \begin{cases} b_1 < b_2 , \quad g_2(t) \leq g_1(t), \quad t > 0 \\ h_1(x) \leq h_2(x) , \quad 0 < x < b_1 , \quad \int_x^{b_2} [1 + h_2(y)]\,dy \geq 0 , \quad 0 < x < b_2 \end{cases}$$

$$q_2 \equiv \int_0^{b_2} [1 + h_2(y)]\,dy > 0$$

entonces se tiene:

$$(61)\quad \begin{cases} s_1(t) < s_2(t) , \quad 0 < t < \mathrm{Mín}(T_1, T_2^*) \\ u_1(x,t) < u_2(x,t) , \quad 0 < x < s_1(t), \quad 0 < t < \mathrm{Mín}(T_1, T_2^*) \end{cases}$$

donde

$$(62)\quad T_2^* = \mathrm{Min}\,(T_2 , \mathrm{Sup}\,\{ \bar{t} / \int_0^t g_2(\tau)\,d\tau < q_2 , \; t < \bar{t} \}).$$

Observación 8. Podemos notar que la Propiedad (24) nos asegura solo un comportamiento monótono de las soluciones u_i , en cambio no nos asegura nada sobre la dependencia monótona de las funciones z_i . Tal diferencia de comportamiento está relacionada al hecho que las funciones u_i , y no z_i , aparecen en el modelo físico [CF1 , FP4]∎

En el caso en que la función $g \geq 0$ sea monótona no-decreciente y no idénticamente nula, el caso (A) nunca puede ocurrir debido a (53), pero se puede dar un criterio para encontrar una cota superior para el tiempo máximo de existencia de solución, según:

Propiedad 25. [CRT1] Si g es una función no nula, monótona no-decreciente y (T,s,z) la correspondiente solución de (4), (II-2), entonces todo $t < T$ satisface:

(63) $$2\, g(t) \int_0^t g(\tau)d\tau < 1 + g^2(t).$$

Demostración. Como g es no-decreciente se tiene $z(x,t) \geq g(t)(x-1)$. Entonces, usando (46i) se obtiene:

(64) $$\frac{g(t)}{2}\, s^2(t) + (1 - g(t))s(t) + \int_0^t g(\tau)d\tau - 1 < 0, \quad \forall\, t < T$$

siendo por lo tanto, (63) la condición para que (64) tenga solución real $s(t)$∎

A continuación daremos algunos resultados concernientes a un caso particular en el cual el flujo en $x = 0$ es constante en el tiempo, es decir:

(65) $$h \equiv 0 , \quad g(t) = k > 0 \quad (k = \text{cte}).$$

Como una consecuencia inmediata de las Propiedades vistas anteriormente, se tiene:

Propiedad 26. [CRT1, P3] (i) El problema (4), (65) no tiene solución global, es decir que el caso (A) no ocurre nunca.

(ii) La solución del problema (4), (65) siempre existe para $t < 1/k$.

(iii) Si $k \leq 1$ entonces sucede el caso (B) en $T_B = 1/k$.

(iv) Si (T,s,z) es solución de (4), (65) entonces $-k(1-x) < z(x,t) < 0$ en D_T.

(v) Si $T_{máx}(k)$ es el mayor tiempo para el cual la solución del problema (4), (65) existe para un dado k, entonces se tiene la siguiente estimación:

$$(66) \qquad T_{máx}(k) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k^2} .$$

Propiedad 27. [CRT1] Si (T,s,z) es una solución de (4), (65) entonces se tienen las desigualdades siguientes:

$$(67) \qquad z(x,t) > U_1(x,t) \equiv -\frac{k}{\sqrt{\Pi}} \int_0^t \frac{e^{-x^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \, d\tau$$

$$(68) \qquad z(x,t) > U_2(x,t) \equiv -k \left[1-x-\frac{2}{\Pi} \cos \frac{\Pi x}{2} \, e^{-\frac{\Pi^2 t}{4}} \right]$$

$$(69) \qquad z(x,t) > U_3(x,t) \equiv -k \left[1-x-\frac{8}{\Pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\Pi x}{2} \, e^{\frac{-(2n+1)^2 \pi^2 t}{4}} \right]$$

$$(70) \qquad z(0,t) > -k \, \text{Mín} \left(2\sqrt{\frac{t}{\Pi}} \, , \, 1 - \frac{8}{\Pi^2} e^{-\frac{\Pi^2 t}{4}} \right) =$$

$$= \begin{cases} -2k\sqrt{\dfrac{t}{\Pi}} & \text{si} \quad 0 < t < t_0 \\ -k \left[1 - \dfrac{8}{\Pi^2} e^{-\frac{\Pi^2 t}{4}} \right] & \text{si} \quad t_0 < t \end{cases} \qquad (t_0 \approx 0.213033)$$

Demostración. Las desigualdades (67) - (69) se obtienen aplicando el principio del máximo siendo las funciones $U_i(x,t)$ $(i = 1,2,3)$ definidas como solución del siguiente problema:

$$(71)\quad \begin{cases} U_{1_{xx}} = U_{1_t} , & x>0 , \quad t>0 \\ U_{1_x}(0,t) = k , & U(x,0) = 0. \end{cases}$$

$$(72)\quad \begin{cases} U_{2_{xx}} = U_{2_t} , & 0<x<1 , \quad t>0 \\ U_{2_x}(0,t) = k , & U_2(1,t) = 0 \\ U_2(x,0) = -k(1 - x - \frac{2}{\Pi}\cos\frac{\Pi x}{2}) \leq 0. \end{cases}$$

$$(73)\quad \begin{cases} U_{3_{xx}} = U_{3_t} , & 0<x<1 , \quad t>0 \\ U_{3_x}(0,t) = k , & U_3(1,t) = 0, \quad U_3(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \text{([CJ1, p. 102])}$$

La desigualdad (70) se obtiene de (67) y (69) para $x = 0$.

Propiedad 28. Si en el problema (4), (65) sucede el caso (B), entonces:

$$(74)\quad k \leq k_1 < 2.221297$$

Demostración. Si sucede el caso (B), que necesariamente ocurrirá al instante $T_B = \frac{1}{k}$, de (46ii) se obtiene

$$(75)\quad \frac{1}{2} = - \int_0^{1/k} z(0,t)\,dt.$$

Usando en (75) la desigualdad (70), se obtiene para k una inecuación, de la cual se tiene (74).

Observación 9. De la Propiedad 28 se deduce que si $k > k_1$ entonces se obtiene el caso (C). Además, una mejor estimación de la cota de k para obtener el caso (C) puede ser obtenida mejorando la desigualdad para $z(0,t)$ [CRT1]. En [P3] se obtuvo una primera estimación utilizando en (75) la desigualdad $z(0,t) \geq -2k\sqrt{\frac{t}{\pi}}$. La propiedad hallada es que el caso (C) debe ocurrir si $k > \frac{64}{9\pi} \cong 2.263537$.

Propiedad 29. Si $k < k_2$ entonces el caso (B) debe ocurrir, siendo k_2 la única solución de $I(k) = 1$, donde:

$$(76) \quad I(k) = k\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\, e^{-\frac{\pi^2}{8(1+\frac{1}{k^2})}}\right].$$

Una estimación para k_2 está dada por:

$$(77) \quad k_2 > 1.091465.$$

Demostración. Utilizando el hecho que $z(x,t) \geq z(0,t)$, si se tiene $z(0,t) > -1$, $\forall\, t \in (0, T_{máx}(k))$, entonces el caso (B) debe ocurrir. De (66) y (70), se deduce que

$$(78) \quad z(0,t) \geq -I(k).$$

Como $I(0) = 0$, $I(+\infty) = +\infty$ y $I'(k) > 0$, entonces se tendrá $z(0,t) > -1$, $\forall\, k < k_2$ con $I(k_2) = 1$.

<u>Observación 10</u>. Algunas otras propiedades sobre el caso particular (65) pueden verse en [CRT1, P3].

<u>Observación 11</u>. Para finalizar enunciaremos algunos problemas abiertos que se encuentran en esta línea de trabajo, a saber:

(i) Sea $T_0 > 0$ de manera que $\int_0^{T_0} g(t)dt=1$ en el problema (4), (II-2). Cuál será la condición necesaria y suficiente sobre el dato g, si es que existe, para que suceda el caso (B) ó (C).

(ii) Qué sucede en el problema (4), (65) para los valores de $k \in (k_2, k_1)$? Será $k = 2$ el valor que separe los casos (B) y (C)?

(iii) En el caso (C), la frontera libre $x = s(t)$ será cóncava ($\ddot{s}(t) < 0$, $\forall\, t < T_c$) ? En el caso (B), la frontera libre tendrá un punto de inflexión?

(iv) Los resultados dados en este trabajo podrán ser generalizados para el problema general (4) ?

(v) Las propiedades vistas en este trabajo podrán ser extendidas a otras condiciones de contorno, como ser $z(0,t) = f(t)$ ó $\int_0^{s(t)} z(x,t)dx = E(t)$ [CVDH1] ?

(vi) Las propiedades vistas en este trabajo podrán ser generalizadas al problema de Stefan a dos fases ?

(vii) Para la inecuación variacional correspondiente al problema (4), (II-1) serán válidas las equivalencias (22) obtenidas para la solución clásica ? Idem para el problema (4), (II-2).

<u>Agradecimiento</u> . Parte de este trabajo ha sido realizado mediante un subsidio que la SUBCYT-CONICET (Argentina) otorgó al proyecto "Problemas de fron-

tera libre de la Física-Matemática".

Agradezco además las fructuosas e innumerables discusiones que sobre este tema he tenido con los Profesores E. Comparini, A. Fasano, M. Primicerio y R. Ricci durante mi estadía del primer semestre de 1982 en el Instituto Matemático "U. Dini" dell'Univ. di Firenze (Italia) a través de una beca del CNR (GNFM).

Bibliografía

[CVDH1] J.R. CANNON-J.VAN DER HOEK, The one-phase Stefan problem subject to the specification of energy, J. Math. Anal. Appl. 86(1982), 281-291.

[CJ1] H.S. CARSLAW-J.C.JAEGER, Conduction of heat in solids, Clarendon Press, Oxford (1959).

[CRT1] E. COMPARINI-R. RICCI-D.A. TARZIA, Remarks on a one-dimensional Stefan problem related to the diffusion-consumption model, Istituto Matematico "U. Dini" - Univ. di Firenze, N°1981-82/18. ZAMM, en prensa.

[CG1] J. CRANK-R. S. GUPTA, A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorving tissue, J. Inst. Math. Appl., 10(1972), 19-33.

[FP1] A. FASANO-M.PRIMICERIO, General free-boundary problems for the heat equation, I, J. Math. Anal. Appl., 57(1977), 694-723.

[FP2] A. FASANO-M. PRIMICERIO, General free-boundary problems for the heat equation, II, J. Math. Anal. Appl., 58(1977), 202-231.

[FP3] A. FASANO-M. PRIMICERIO, General free-boundary problems for the heat equation, III, J. Math. Anal. Appl., 59(1977), 1-14.

[FP4] A. FASANO-M. PRIMICERIO, New results on some classical parabolic free--boundary problems, Quart. Appl. Math., 38(1980-81), 439-460.

[FP5] A. FASANO-M. PRIMICERIO, Convexity of the free-boundary in some classical parabolic free boundary problems, Riv. Mat. Univ. Parma, 5(1979), 635-645.

[FP6] A. FASANO-M. PRIMICERIO, A critical case for the solvability of Stefan -like problems, Math. Meth. Appl. Sciences, To appear.

[F1] A. FRIEDMAN, Partial differential equations of parabolic type, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1064).

[F2] A. FRIEDMAN, Analycity of the free boundary for the Stefan problem, Arch. Rat. Mech. Anal., 61(1976), 97-125.

[F3] A. FRIEDMAN, Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary, J. Funct. Anal. 18(1975), 151-176.

[FJ1] A. FRIEDMAN-R. JENSEN, Convexity of the free boundary in the Stefan problem and in the dam problem, Arch. Rat. Mech. Anal., 67(1977), 1-24.

[J1] R. JENSEN, Smoothness of the free boundary in the Stephan problem with supercooled water, Illinois J. Math., 22(1978), 623-629.

[P1] M. PRIMICERIO, Qualitative properties of some one-dimensional parabolic free boundary problems, in Proc. Seminar on Free Boundary Problems, E. Magenes (Ed.), Ist. Naz. di Alta Matematica, Roma (1980), vol.1, 451-460.

[P2] M. PRIMICERIO, Problemi di diffusione a frontiera libera, Boll. Un. Mat. Ital. 18A (1981), 11-68.

[P3] M. PRIMICERIO, The ocurrence of pathologies in some Stefan-like problems, in Numerical Treatment of Free Boundary Value Problems, ISNM Vol. 58 , Birkhäuser Verlag, Basel (1982), 233-244.

[RFP1] L. I.RUBINSTEIN-A. FASANO-M. PRIMICERIO, Remarks on the analyticity of the free boundary for the one-dimensional Stefan problem, Annali

Mat. Pura Appl., 125(1980), 295-311.

[Sh1] B. SHERMAN, A general one-phase Stefan problem, Quart, Appl. Math.,28 (1970), 377-382.

[Sh2] B. SHERMAN, General one-phase Stefan problems and free boundary problems for the heat equation with Cauchy data prescribed on the free-boundary, SIAM J. Appl. Math., 20(1971), 555-570.

[T1] D. A. TARZIA, Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan, Math. Notae, 29 (1981-82), 147-241.

[VM1] P. VAN MOERBEKE , An optimal stopping problem with linear reward, Acta Mathematica, 132(1974), 111-151.

D. A. Tarzia: PROMAR (CONICET-UNR)

Instituto de Matemática "Beppo Levi"

Universidad Nacional de Rosario.