# TRABAJO ESPECIAL
# DE LA
# LICENCIATURA EN FISICA


<u>Presentado en</u>:

Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería

Universidad Nacional de Rosario

<u>Por</u>:

Domingo Alberto TARZIA


<u>Para Obtener el título de</u>:

## LICENCIADO EN FISICA

<u>Sujeto del Trabajo</u>:

Resolución del Caso Estacionario del Problema de Stefan a dos Fases

Diciembre 1977

# INTRODUCCION

Este trabajo consta de tres capítulos. En el primero, presento el problema de Stefan a dos fases. En el segundo resuelvo teoricamente el caso estacionario correspondiente; además presento dos ejemplos en los cuales se puede hallar la solución en forma explícita. En el tercero, presento el caso de evolución del problema de Stefan y un ejemplo en el cual se puede calcular explícitamente la solución.

Para una mejor comprehensión del trabajo es conveniente ver los Apéndices I y II antes del Capítulo II. En el Apéndice II, presento los recientes resultados en la Teoría de las Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales, cuya teoría y métodos utilizo en el Capítulo II para resolver el caso estacionario.

Agradezco al prof. G. Duvaut (*) el haberme propuesto el tema. Agradezco, también, al prof. E. Rofman (**) el haberme iniciado en el estudio de la Teoría de las Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales y por el control en la redacción final del Trabajo.

Domingo A. Tarzia

Domingo A. TARZIA

(*) Departamento de Mecánica Teórica de la Universidad "Pierre et Marie Curie" (Paris VI), Paris - Francia.

(**) Instituto de Matemática "Beppo Levi", Universidad Nacional de Rosario - Argentina. Universidad de Paris IX, Paris - Francia.

# INDICE

## CAPÍTULO I

### Problema de Stefan a dos fases



## CAPÍTULO II

### Resolución del Caso Estacionario del Problema de Stefan a dos Fases



## CAPÍTULO III

### Resolución de un Caso de Evolución del Problema de Stefan a Dos fases.

# APÉNDICE I

## DISTRIBUCIONES Y ESPACIOS DE SOBOLEV



# APÉNDICE II

## TEORÍA DE LAS ECUACIONES E INECUACIONES VARIACIONALES Y DE LA MINIMIZACIÓN DE FUNCIONALES

# CAPITULO I

# PROBLEMA DE STEFAN A 2 FASES

## 1) Leyes de Conservación de la Mecánica de los Medios Continuos:

Son las leyes que dan los principios fundamentales de la Mecánica. Se recordarán las correspondientes a la Conservación de la Masa, de la cantidad de Movimiento y de la energía.
Sea $\Omega = \Omega(t)$, conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^3$, un medio continuo en movimiento. Sean:

$$(1)\quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega & : \text{punto genérico de } \Omega \\ t \geq 0 & : \text{tiempo} \\ \rho = \rho(x,t) & : \text{densidad de Masa} \\ \vec{v} = \vec{v}(x,t) & : \text{velocidad} \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,t)\ i,j=1,2,3 & : \text{Tensor de Tensión} \\ D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\ i,j=1,2,3 & : \text{Tensor de la Velocidad de deformación} \\ e = e(x,t) & : \text{energía Interna por Unidad de masa y de tiempo} \\ w = w(x,t) & : \text{aporte de energía por Unidad de masa y de tiempo} \\ \vec{q} = \vec{q}(x,t) & : \text{Vector transporte de energía por Unidad de tiempo} \\ \vec{n} = \vec{n}(x,t) & : \text{Versor normal exterior a } \Gamma = \partial\Omega \\ \vec{f} = \vec{f}(x,t) & : \text{densidad de las fuerzas exteriores actuantes sobre } \Omega \text{ por Unidad de masa y de tiempo} \end{cases}$$

---

### i) Conservación de la Masa: (*)

Esta dada por:

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_x (\rho \vec{v}) = 0 \\ \text{ó} & \\ (3) & \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\, \vec{\nabla}_x \vec{v} = 0 \end{array}\right\}\quad \underline{\text{Ecuación de Continuidad}}$$

---

(*) Se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(x,t)\, dx = 0 \qquad \forall V(t) \subset \Omega(t)$$

ii) Conservación de la Cantidad de Movimiento: (*)

Esta dada por:

(4) $$\rho \cdot \frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot f_i \qquad i=1,2,3$$ Ecuación del Movimiento

(5) $$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \forall i,j = 1,2,3$$

iii) Conservación de la Energía: (**)

Esta dada por:

(6) $$\rho \cdot \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \cdot D_{ij} + \rho \cdot w - \vec{\nabla}_x \vec{q}$$ Ecuación de la Energía

2) Leyes de Comportamiento:

Las leyes de Comportamiento de un medio Continuo no tienen el carácter universal de las leyes de Conservación enunciadas en 1). Estas leyes caracterizan cada tipo de medio Continuo y son, en general, de tipo experimental. Están dadas por relaciones entre el tensor de tensión $\sigma_{ij}$, el Tensor de la Velocidad de deformación $D_{ij}$, otros tensores de deformación, la Temperatura, el vector flujo de calor $\vec{q}$, etc.

3) Ecuación del Calor:

i) Se suponen:

(**) La Conservación de la Energía se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \cdot \left(e + \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2\right) dx = \int_{V(t)} \rho f_i \cdot v_i \, dx + \int_{\partial V(t)} \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot v_i \, dS + \int_{V(t)} \rho \cdot w \, dx - \int_{\partial V(t)} \vec{q}_x \vec{n} \, dS \qquad \forall V(t) \subset \Omega(t)$$

(*) La Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal y Angular se expresan de la Siguiente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{V(t)} \rho v_i \, dx = \int_{V(t)} \rho f_i \, dx + \int_{\partial V(t)} \sigma_{ij} \, n_j \, dS & \forall V(t) \subset \Omega(t) \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \, \rho v_k \, dx = \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \, \rho f_k \, dx + \int_{\partial V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{k\ell} n_\ell \, dS & \forall V(t) \subset \Omega(t) \end{cases}$$

a) que los fenómenos de deformación del medio Continuo se decoplan y que éste tiene Velocidad despreciable (o Simplemente está en reposo), es decir:

$$(7) \quad \begin{cases} v_i = 0 & \forall i = 1,2,3 \\ D_{ij} = 0 & \forall i,j = 1,2,3 \end{cases}$$

∴ las ecuaciones (2), (4) y (6) se reducen a:

$$(8) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \qquad i=1,2,3$$

$$(10) \qquad \rho \cdot \frac{\partial e}{\partial t} = \rho \cdot w - \vec{\nabla} \times \vec{q}$$

b) que las <u>leyes de Comportamiento</u> del medio Continuo están dadas por:

i) e función solo de la Temperatura $\theta$:

$$(11) \qquad e = f(\theta)$$

ii) $\vec{q}$ función lineal del gradiente de Temperatura:

$$(12) \qquad \vec{q} = -K \cdot \vec{\nabla}\theta \qquad \underline{\underline{\text{Ley de Fourier}}}$$

donde $K=(k_{ij})$ es una matriz definida positiva, llamada <u>Matriz de Difusividad</u>. Además, se supone que, K depende solo de $x$ y no de la Temperatura $\theta$; lo cual es una linealización que resulta ser valable para muchos materiales cuando las variaciones de temperatura no son grandes.

iii) $\sigma_{ij}$ no depende de la temperatura.

ii) Teniendo en cuenta (11) y (12), la ecuación (10) se transforma en:

$$(13) \qquad \rho \cdot \frac{df(\theta)}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho \cdot w + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right)$$

o en forma equivalente en:

$$(14)\quad \begin{cases} C(\theta)\cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}\right) = \rho\cdot w & \underline{\text{Ecuación General del Calor}} \\ C(\theta) = \rho\cdot \dfrac{df}{d\theta}(\theta) & \end{cases}$$

Se pueden efectuar algunas otras simplificaciones, obteniéndose los siguientes:

iii) Casos Particulares:

a) $C(\theta) = C$ (constante $>0$)

$\therefore$ la ecuación (14) se transforma en:

$$(15)\qquad C\cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right) = \rho\cdot w$$

b) $\begin{cases} C(\theta) = C \\ k_{ij} = k\cdot \delta_{ij} \end{cases}$ Hipótesis de Isotropía del material

$k$: Coeficiente de la Conductividad Térmica del material (constante $>0$)

Con estas hipótesis, la ecuación (15) se reduce a:

$$(16)\qquad C\cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} - k\cdot \Delta\theta = \rho\cdot w$$

donde $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representa el operador Laplaciano en $\mathbb{R}^3$.

c) $\begin{cases} C(\theta) = C \\ k_{ij} = k\cdot \delta_{ij} \\ w = 0 \end{cases}$ (No existencia de fuentes de energía Interna en el material)

$\therefore$ la ecuación (16) queda reducida a:

$$(17) \qquad c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \cdot \Delta\theta = 0$$

d) $\begin{cases} \text{Hipótesis dadas en c)} \\ \theta = \theta(x) \qquad \underline{\underline{\text{Caso Estacionario}}} \end{cases}$

$\therefore$ la ecuación (17) se transforma en:

$$(18) \qquad \Delta\theta = 0$$

## 4) Condiciones Límites:

Sobre la frontera $\Gamma = \partial\Omega$ de $\Omega$ pueden haber diversas Condiciones límites:

i) Temperatura dada:

Viene expresada por:

$$(19) \qquad \begin{cases} \theta(x,t)/_{\Gamma} = \theta_0(x,t) \\ x \in \Gamma \end{cases}$$

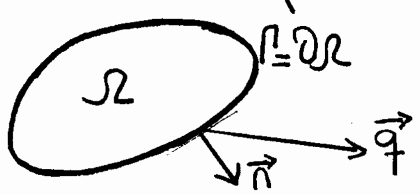
donde $\theta_0$ es una función (dato del problema) definida para $x \in \Gamma$.

ii) No Existencia de Flujo:

Viene expresada por:

$$(20) \qquad \vec{q} \times \vec{n}/_{\Gamma} = 0$$

(la Componente normal del Vector flujo de calor $\vec{q}$ debe ser nula)



o en forma equivalente, si se supone la hipótesis de isotropía del material, por:

$$(21) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial n}\Big/_{\Gamma} = 0$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es el operador derivada normal exterior.

iii) Existen otros casos, que son combinaciones de los dos anteriores:

a) la condición (19) sobre una porción de frontera $\Gamma_1$ y la condición (20) ó (21) sobre la porción de frontera restante $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$.

b) Existencia de un flujo no nulo.

## 5) Problema de STefan a dos fases:

### i) Presentación del Problema:

Consiste en estudiar:

a) la Temperatura $\theta(x,t)$ de un material (por ejemplo: agua), el cual sujeto a determinados condiciones sobre su contorno, cambia de fase (de líquida a sólida ó de sólida a líquida).

b) la existencia de una superficie en el material que separa las dos fases. Sobre dicha superficie, que a priori es una incógnita suplementaria del problema, existen condiciones límites, siendo una de las más importantes la llamada condición de Stefan.

Por a) y b) el problema es considerado dentro de los de frontera libre.

### ii) Formulación Matemática del problema:

a) El material será representado por $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (conjunto abierto y acotado).

Sea: $\qquad Q = \Omega \times (0;+\infty)$

Se supone que: $\theta(x,t)=0$ es la temperatura que separa las dos fases sólida y líquida.

Sean $Q_1$, $Q_2$ y $\mathcal{L}\varphi$ definidos por:

$$(22)\quad \begin{cases} Q_1 = \{(x,t)\in Q \;/\; \theta(x,t)<0\} \\ Q_2 = \{(x,t)\in Q \;/\; \theta(x,t)>0\} \\ \mathcal{L}\varphi = \{(x,t)\in Q \;/\; \theta(x,t)=0\} \\ Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \mathcal{L}\varphi \end{cases}$$

Sean además, $\Omega_1(t_0)$, $\Omega_2(t_0)$ y $\mathcal{L}\varphi(t_0)$ definidos por:

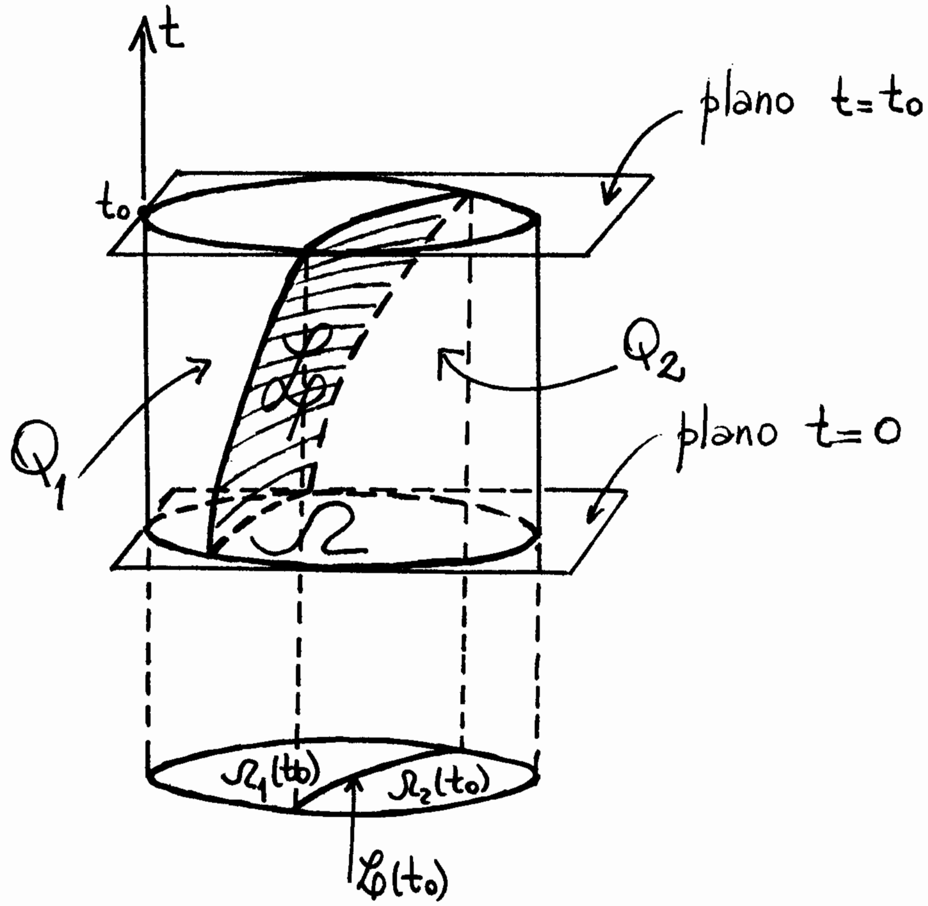
$$(23)\quad \begin{cases} \Omega_1(t_0) : \text{ es la proyección de } Q_1 \cap \text{plano}(t=t_0) \text{ sobre } \Omega \\ \Omega_2(t_0) : \text{ es la proyección de } Q_2 \cap \text{plano}(t=t_0) \text{ sobre } \Omega \\ \mathcal{L}\varphi(t_0) : \text{ es la proyección de } \mathcal{L}\varphi \cap \text{plano}(t=t_0) \text{ sobre } \Omega \\ t_0>0 \end{cases}$$

(Ver figura )

$\mathcal{L}\varphi(t)$ tiene la particularidad, en el instante $t$, de separar en $\Omega$ las dos fases $\Omega_1(t)$ y $\Omega_2(t)$. Es la superficie de la cual se habló en 5) i) b).

Hallar $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$ y $\mathcal{L}\varphi(t)$ $\forall t>0$ es equivalente a hallar $Q_1, Q_2$ y $\mathcal{L}\varphi$, pues:

$$(24)\quad \begin{cases} Q_1 = \bigcup_{t>0} \Omega_1(t) \\ Q_2 = \bigcup_{t>0} \Omega_2(t) \\ \mathcal{L}\varphi = \bigcup_{t>0} \mathcal{L}\varphi(t) \end{cases}$$




b) Sean $k_1, k_2$ y $c_1, c_2$ los coeficientes de conducción térmica y de los calores específicos de la fase sólida y líquida respectivamente, que se suponen constantes y positivos.
La temperatura $\theta(x,t)$ se descompone en:

$$(25) \qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_1(x,t) < 0 & \text{si} \quad (x,t) \in Q_1 \\ 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathcal{C}_\varphi \\ \theta_2(x,t) > 0 & \text{si} \quad (x,t) \in Q_2 \end{cases}$$

donde la función $\theta_i(x,t)$ está definida en $Q_i$ $i=1,2$.
Ahora se está en condiciones de escribir las ecuaciones y condiciones a las cuales $\theta$ (ó $\theta_1$ y $\theta_2$) debe verificar:

i) $\theta_i(x,t)$ verifica en $Q_i$ $(i=1,2)$ la ecuación del calor correspondiente:

$$(26) \qquad \begin{cases} c_i \cdot \dfrac{\partial \theta_i}{\partial t} - k_i \cdot \Delta \theta_i = 0 \qquad \forall (x,t) \in Q_i \\ i=1,2 \end{cases}$$

ii) Las condiciones límites e iniciales dependerán del problema en cuestión.

iii) Las condiciones sobre la frontera libre $\mathcal{L}\!\!\!\varphi$ son:

$$(27)\begin{cases} \theta_i(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t) \in \mathcal{L}\!\!\!\varphi \qquad i=1,2 \\ \underline{\text{Condición de Stefan}} \quad (\text{analizada en } 6)) \end{cases}$$

---

## 6) Condición de Stefan:

### i) En forma Implícita:

Sea un material (representado por $\Omega$) que existe en dos fases, las cuales están caracterizadas por:

$$\begin{cases} \theta_i : \text{ temperatura} \\ k_i : \text{ Coeficiente de Conducción térmica} \\ C_i : \text{ Calores específicos} \\ i=1,2 \end{cases}$$

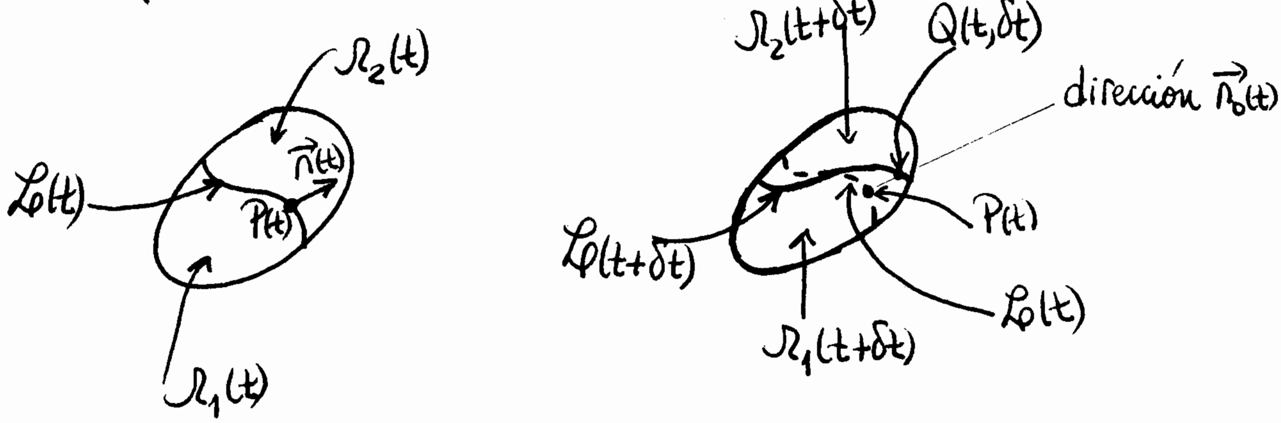
El pasaje de la fase 1 (fase sólida) a la fase 2 (fase líquida) es acompañado de una absorción de calor. Sea L el <u>calor latente de fusion del hielo</u>.

Como se definió en (23):

$$\begin{cases} \Omega_i(t) \ (i=1,2): \text{ es el dominio que contiene el material en la fase i en el instante t.} \\ \mathcal{L}\!\!\!\varphi(t): \text{ es la superficie que separa } \Omega_1(t) \text{ y } \Omega_2(t) \text{ en el instante t, donde ocurre la transición de las dos fases y sobre la cual existen discontinuidades en } k_i \text{ y } C_i \text{ del material.} \end{cases}$$

Sean:

$$\begin{cases} P(t): \text{ un punto de } \mathcal{L}(t) \\ \vec{n}_0(t): \text{ el versor normal exterior a } \mathcal{L}(t) \text{ en } P(t) \text{ (tomado} \\ \qquad \text{de } \Omega_1(t) \text{ a } \Omega_2(t)) \\ Q(t,\delta t) = \text{dirección } \vec{n}_0(t) \cap \mathcal{L}(t+\delta t) \quad \text{con } \delta t > 0 \\ \vec{\delta n}(t,\delta t) = \overrightarrow{P(t)\,Q(t,\delta t)} \end{cases}$$




Sea $\delta n(t,\delta t)$ de manera que:

$$\vec{\delta n}(t,\delta t) = \delta n(t,\delta t)\ \vec{n}_0(t)$$

es decir que estará dado por:

$$\delta n(t,\delta t) = \vec{\delta n}(t,\delta t) \times \vec{n}_0(t)$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} \delta n(t,\delta t) > 0 \iff Q(t,\delta t) \in \Omega_2(t) \\ \delta n(t,\delta t) < 0 \iff Q(t,\delta t) \in \Omega_1(t) \end{cases}$$

Es decir que $\delta n(t,\delta t) > 0$ si en un entorno del punto $P(t)$, en el curso del tiempo $\delta t$, ocurre una transformación de la fase 2 a la fase 1 acompañada de una liberación de calor latente; para $\delta n(t,\delta t) < 0$ ocurre el proceso inverso.
Sea $dS$ un elemento de la superficie $\mathcal{L}(t)$ conteniendo al punto $P(t)$; entonces se puede construir un cilindro que tiene por base $dS$ y por volumen $|\delta n(t,\delta t)| \cdot dS$.
La formación de la fase en dicho volumen produce un crecimiento

de calor igual a:

$$L \cdot ds \cdot \delta n(t,\delta t),$$

que por unidad de tiempo y de superficie, resulta ser:

$$q = L \cdot \frac{\delta n(t,\delta t)}{\delta t} \quad (*)$$

$\therefore$ en $\mathcal{C}_0(t)$ se tiene la condición:

$$\left[\left(-k_2 \cdot \vec{\nabla}\theta_2\right) \times \vec{n}_0(t) - \left(-k_1 \cdot \vec{\nabla}\theta_1\right) \times \vec{n}_0(t)\right] \Big/ \mathcal{C}_0(t) = q = L \cdot \frac{\delta n}{\delta t}$$

o su equivalente:

$$(28) \qquad k_2 \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} - k_1 \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = -L \cdot \frac{\delta n}{\delta t} \qquad \underline{\text{Condicion de Stefan}}$$

ii) <u>En forma Explícita</u>:

Sea:

$$(29) \qquad F(x,y,z,t) = 0$$

la ecuación de la superficie $\mathcal{C}_0(t)$.
Entonces $\vec{n}_0(t)$ está dado por:

$$\vec{n}_0(t) = \frac{\vec{\nabla} F(x,y,z,t)}{\|\vec{\nabla} F(x,y,z,t)\|} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

donde:

$$(30) \begin{cases} \vec{\nabla}: \text{ es el operador gradiente en las variables } x,y,z. \\ \alpha_1 = \dfrac{F_x(x,y,z,t)}{\|\vec{\nabla} F(x,y,z,t)\|} \; ; \quad \alpha_2 = \dfrac{F_y(x,y,z,t)}{\|\vec{\nabla} F(x,y,z,t)\|} \\ \alpha_3 = \dfrac{F_z(x,y,z,t)}{\|\vec{\nabla} F(x,y,z,t)\|} \end{cases}$$

---

(*) $\frac{\delta n}{\delta t}$ representa la velocidad de $\mathcal{C}_0(t)$ en la dirección $\vec{n}$ al instante $t$.

Sea:

$$(31) \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\delta n} = (\delta x, \delta y, \delta z)$$

$\therefore$ se tiene:

$$(32) \qquad \delta n = \overrightarrow{\delta n} \times \vec{n}_0 = \alpha_1 \, \delta x + \alpha_2 \, \delta y + \alpha_3 \, \delta z$$

Además, de (29) se obtiene:

$$(33) \qquad F_x(x,y,z,t) \cdot \delta x + F_y(x,y,z,t) \cdot \delta y + F_z(x,y,z,t) \cdot \delta z + F_t(x,y,z,t) \cdot \delta t = 0$$

Por lo tanto, de (32) y (33) se deduce:

$$(34) \qquad \delta n = - \frac{F_t(x,y,z,t)}{\| \vec{\nabla} F(x,y,z,t) \|} \cdot \delta t$$

con lo cual (28) se transforma en:

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left( k_2 \cdot \vec{\nabla}\theta_2 - k_1 \cdot \vec{\nabla}\theta_1 \right) \times \vec{\nabla} F(x,y,z,t) \right] \Big/_{\mathcal{L}(t)} = L \cdot F_t(x,y,z,t) \\ \underline{\text{Condición de Stefan}} \end{array} \right.$$

---

<u>Observación</u>:

Si $\mathcal{L}(t)$ está definida por:

$$(36) \qquad t = \ell(x,y,z) \qquad \left( F(x,y,z,t) = \ell(x,y,z) - t = 0 \right)$$

entonces (35) se reduce a:

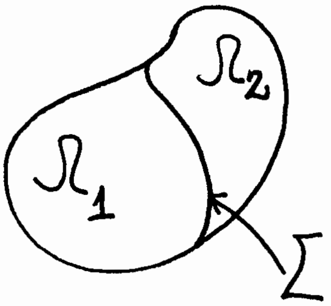
$$(37) \qquad \left[ \left( k_2 \cdot \vec{\nabla}\theta_2 - k_1 \cdot \vec{\nabla}\theta_1 \right) \times \vec{\nabla} \ell \right] \Big/_{\mathcal{L}(t)} = -L$$

# CAPITULO II

## Resolución del Caso Estacionario del Problema de Stefan a dos fases

### 1) Ecuaciones y Condiciones límites: (*)

Se estudiará el campo de Temperaturas $\theta(x)$ para los $x \in \Omega$, donde $\Omega$ es un abierto y acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular. Se supone que $\theta = 0$ es la temperatura del cambio de fase. Se designará por $\Sigma$ la frontera que separa las dos fases y por $\Omega_1$ y $\Omega_2$ las regiones ocupadas por las fases sólida y líquida respectivamente.
Es decir, que se tiene:




$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma$$

Por otra parte:

$$(1) \qquad \theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & \forall x \in \Omega_1 \\ \theta_2(x) > 0 & \forall x \in \Omega_2 \\ 0 & \forall x \in \Sigma \end{cases}$$

En $\Omega_i$ $(i=1,2)$ la ecuación del calor viene dada por:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta \theta_i = 0 & \forall x \in \Omega_i \\ i = 1,2 \end{cases}$$

Sobre la frontera libre $\Sigma$ se tienen las siguientes condiciones:

---

(*) Surgen como consecuencia de lo dicho en I-5) y I-6)

$$(3)\quad \begin{cases} \theta_1\big|_{\Sigma} = \theta_2\big|_{\Sigma} = 0 \\ \left(k_1 \cdot \dfrac{\partial \theta_1}{\partial n} - k_2 \cdot \dfrac{\partial \theta_2}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

donde:

$$\begin{cases} \vec{n} \text{ es un vector normal a } \Sigma \\ k_i > 0 \ (i=1,2) \text{ es la conductividad calorífica en } \Omega_i \end{cases}$$

Las condiciones límites impuestas son: temperatura dada sobre una porción de frontera $\Gamma_1$ y no existencia de flujo de calor en la restante porción de frontera $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$. En resumen:

$$(4)\quad \begin{cases} \theta(x) = g_0(x) & \forall x \in \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial n}(x) = 0 & \forall x \in \Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1 \end{cases}$$

donde $g_0$ es una dada función sobre $\Gamma_1$.
Por lo tanto, se deben hallar las funciones $\theta_i$ definidas en $\Omega_i$ $(i=1,2)$

$$\begin{cases} \theta_1(x) < 0 & \forall x \in \Omega_1 \\ \theta_2(x) > 0 & \forall x \in \Omega_2 \end{cases}$$

siendo $\Sigma$ la frontera libre que los separa, verificando las siguientes condiciones:

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta\theta_1 = 0 & \forall x \in \Omega_1 \\ \Delta\theta_2 = 0 & \forall x \in \Omega_2 \\ \theta_1 = \theta_2 = 0 & \forall x \in \Sigma \\ k_1 \cdot \dfrac{\partial \theta_1}{\partial n} - k_2 \cdot \dfrac{\partial \theta_2}{\partial n} = 0 & \forall x \in \Sigma \\ \theta = g_0 & \forall x \in \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \forall x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

problema: $(P_0)$

2) <u>Cambio de función incógnita</u>:

Sea $T_i$ la extensión de $\theta_i$ $(i=1,2)$ a $\Omega$ por cero, es decir:

$$(6) \qquad T_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x) & \forall x \in \Omega_i \\ 0 & \forall x \notin \Omega_i \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

Lo cual implica que $T_1$ y $T_2$ pueden considerarse como:

$$\begin{cases} T_1 = -\theta^- \\ T_2 = \theta^+ \end{cases}$$

donde $\theta^+$ y $\theta^-$ son las partes positiva y negativa de la función $\theta$ respectivamente. (*)

Sea $u$ la nueva función incógnita definida por:

$$(7) \begin{cases} u(x) = k_1 \cdot T_1(x) + k_2 \cdot T_2(x) \quad \forall x \in \Omega \\ \text{ó por su equivalente:} \\ u(x) = k_2 \cdot \theta^+(x) - k_1 \cdot \theta^-(x) \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

---

3) <u>Cálculo en el sentido de las distribuciones</u>:

Se transformarán las ecuaciones y condiciones dadas por (5) de manera

---

(*) La parte positiva $\theta^+$ y la parte negativa $\theta^-$ de la función $\theta$ están definidas de la siguiente manera:

$$\theta^+(x) = \begin{cases} \theta(x) & \text{si } \theta(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \theta(x) \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad \theta^-(x) = \begin{cases} -\theta(x) & \text{si } \theta(x) < 0 \\ 0 & \text{si } \theta(x) \geq 0 \end{cases}$$

Tienen las siguientes propriedades:

$$\begin{cases} \text{i)} \ \theta^+ \geq 0 ; \quad \theta^- \geq 0 \\ \text{ii)} \ \theta = \theta^+ - \theta^- \\ \text{iii)} \ |\theta| = \theta^+ + \theta^- \end{cases}$$

de escribirlos en término de las distribuciones en $\Omega$, es decir en $\mathcal{D}'(\Omega)$; donde:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \,/\, \text{Sop}\,\varphi = \text{compacto} \subset \Omega \} \\ \mathcal{D}'(\Omega) \text{ es el espacio de las distribuciones sobre } \Omega \\ \langle\, ,\, \rangle \text{ es la dualidad entre } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ y } \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

i) Ecuación verificada por $u$:


De acuerdo a las figuras precedentes, las fronteras de los conjuntos $\Omega_1$ y $\Omega_2$ vienen expresadas por:

$$(8)\quad \begin{cases} \partial(\Omega_1) = \partial_1\Omega \cup \Sigma \\ \partial(\Omega_2) = \partial_2\Omega \cup (-\Sigma) \end{cases}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces:

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi/_{\partial_1\Omega} = \varphi/_{\partial_2\Omega} = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big/_{\partial_1\Omega} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big/_{\partial_2\Omega} = 0 \end{cases}$$

Utilizando 6), 8) y 9) con la fórmula de Green (Apéndice 1), se obtiene:

**Lema 1**:

$$(10)\quad \begin{cases} i) \quad \langle \Delta T_1 ; \varphi \rangle = -\displaystyle\int_\Sigma \frac{\partial\theta_1}{\partial n} \cdot \varphi \, dS & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ ii) \quad \langle \Delta T_2 ; \varphi \rangle = \displaystyle\int_\Sigma \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \cdot \varphi \, dS & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$$

Demostración:

i) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \Delta T_1 ; \varphi \rangle = \langle T_1 ; \Delta\varphi \rangle = \int_{\Omega} T_1(x)\cdot \Delta\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega_1} \theta_1(x)\cdot\Delta\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{\Omega_1} \underbrace{\Delta\theta_1(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\cdot\varphi(x)\,dx + \int_{\partial(\Omega_1)} \left[\theta_1(x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x) - \frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}\cdot\varphi(x)\right] dS =$$

$$= \int_{\partial_1\Omega} \left[\theta_1(x)\cdot\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right] dS + \int_{\Sigma}\left[\underbrace{\theta_1(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x) - \frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}(x)\cdot\varphi(x)\right] dS =$$

$$= -\int_{\Sigma} \frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}(x)\cdot\varphi(x)\,dS$$

---

ii) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \Delta T_2 ; \varphi \rangle = \langle T_2 ; \Delta\varphi \rangle = \int_{\Omega} T_2(x)\cdot\Delta\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega_2}\theta_2(x)\cdot\Delta\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{\Omega_2} \underbrace{\Delta\theta_2(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\cdot\varphi(x)\,dx + \int_{\partial(\Omega_2)}\left[\theta_2(x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x) - \frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}(x)\cdot\varphi(x)\right] dS =$$

$$= \int_{\partial_2\Omega}\left[\theta_2(x)\cdot\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}(x)\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right] dS + \int_{-\Sigma}\left[\underbrace{\theta_2(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x) - \frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}(x)\cdot\varphi(x)\right] dS =$$

$$= \int_{\Sigma}\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}(x)\cdot\varphi(x)\,dS$$

---

Del lema 1, se obtiene para u el:

Lema 2:

(11) $\quad \Delta u = 0 \;$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$

Demostración:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \Delta u ; \varphi \rangle = \langle k_1 \Delta T_1 + k_2 \Delta T_2 ; \varphi \rangle = k_1 \cdot \langle \Delta T_1 ; \varphi \rangle + k_2 \cdot \langle \Delta T_2 ; \varphi \rangle =$$

$$= \int\int_{\Sigma} \underbrace{\left[ -k_1 \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta}(x) + k_2 \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta}(x) \right]}_{0} \cdot \varphi(x) \, dS = 0$$

Es decir que:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

ii) Condiciones Límites para $u$:

a) La condición $\theta(x) = g_0(x) \quad \forall x \in \Gamma_1$ se transforma en:

$$u(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \Gamma_1$$

donde $f_0$ viene definida por:

$$f_0(x) = k_2 \cdot g_0^+(x) - k_1 \cdot g_0^-(x) \quad \forall x \in \Gamma_1$$

b) La condición $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2$ se transforma en:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2$$

Como conclusión de a) y b), la nueva función incógnita $u$ es solución del siguiente problema:

$$\text{(12)} \quad \underline{\text{problema (P)}} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \forall x \in \Omega \\ u(x) = f_0(x) & \forall x \in \Gamma_1 \quad \left( f_0(x) = k_2 \cdot g_0^+(x) - k_1 \cdot g_0^-(x) \right) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0 & \forall x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

En el próximo parrafo se hallará la ecuación variacional de la cual $u$ será solución. Luego se demostrará su existencia y unicidad.

Observación:

Del conocimiento de la función $u(x)$, surge el conocimiento de la función $\theta(x)$ de la siguiente forma:

Como $u(x) = k_2 \cdot \theta^+(x) - k_1 \cdot \theta^-(x) \quad \forall x \in \Omega$

entonces sus partes positiva y negativa vienen dadas por:

$$\begin{cases} u^+(x) = k_2 \cdot \theta^+(x) \\ u^-(x) = k_1 \cdot \theta^-(x) \end{cases}$$

es decir que $\theta^+$ y $\theta^-$ vienen expresadas por:

$$(13) \quad \begin{cases} \theta^+(x) = \dfrac{1}{k_2} \cdot u^+(x) \\ \theta^-(x) = \dfrac{1}{k_1} \cdot u^-(x) \end{cases}$$

De esta manera, además de conocer la función $\theta(x)$ de (13), se puede determinar la frontera libre $\Sigma$ que separa $\Omega_1$ y $\Omega_2$ en $\Omega$, de ecuación $u(x)=0$.

---

## 4) Ecuación Variacional. Existencia y Unicidad. Teorema Recíproco.

Sean:

$$\begin{cases} V = H^1(\Omega) \\ K = \{ v \in V \,/\, v/_{\Gamma_1} = f_0 \} \\ V_0 = \{ v \in V \,/\, v/_{\Gamma_1} = 0 \} \\ a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, a(v;w) = \displaystyle\int_\Omega \vec{\nabla} v(x) \times \vec{\nabla} w(x)\, dx \end{cases}$$

Entonces, se deduce el:

Lema 3:

Si $u$ es solución del problema (P) dado por (12), entonces $u$ es solución del problema (P') dado por (14).

$$(14) \quad \text{problema } (P') \quad \begin{cases} a(u; v-u) = 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

<u>Demostración</u>:

Si se multiplica la ecuación $\Delta u = 0$ en $\Omega$ por $v-u$, con $v \in K$; se integra sobre $\Omega$ y luego se aplica la fórmula de Green, entonces se obtiene:

$$0 = \int_\Omega \Delta u(x) \cdot [v(x) - u(x)]\, dx = -\int_\Omega \vec{\nabla} u(x) \times \vec{\nabla}(v-u)(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) \cdot [v(x) - u(x)]\, dS =$$

$$= a(u; v-u) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) \cdot \underbrace{[v(x) - u(x)]}_{\overset{\|}{0}}\, dS + \int_{\Gamma_2} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)}_{\overset{\|}{0}} \cdot [v(x) - u(x)]\, dS =$$

$$= a(u; v-u)$$

Es decir que:

$$\begin{cases} a(u; v-u) = 0 & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

---

<u>Lema 4</u>:

La forma bilineal $a$ es simétrica, $V_0$-elíptica y continua sobre $V$.

<u>Demostración</u>:

i) La bilinealidad y la simetría de $a$ son evidentes.

ii) $$|a(v;w)| = \left| \int_\Omega \vec{\nabla} v(x) \times \vec{\nabla} w(x)\, dx \right| \leq \int_\Omega \|\vec{\nabla} v(x)\| \cdot \|\vec{\nabla} w(x)\|\, dx \leq \|\vec{\nabla} v\|_{0,\Omega} \cdot \|\vec{\nabla} w\|_{0,\Omega} \leq$$

$$\leq \|v\|_{1,\Omega} \cdot \|w\|_{1,\Omega}$$

de lo cual surge la continuidad de $a$ sobre $V \times V$.

iii) $$a(v;v) = 0 \iff \int_\Omega \|\vec{\nabla} v(x)\|^2\, dx = 0 \iff v = \text{cte en } \Omega$$

pero del hecho que $v \in V_0$ ($v/_{\Gamma_1} = 0$) entonces se tiene:

$$\begin{cases} a(v;v) = 0 \\ v \in V_0 \end{cases} \iff v = 0$$

Por lo tanto, $\sqrt{a(v;v)}$ es una norma sobre $V_0$ equivalente a la norma inducida por $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ sobre $V_0$.

$\therefore$ $\exists$ una constante $\alpha > 0$ /

$$a(v;v) \geq \alpha \cdot \|v\|^2_{1,\Omega} \quad \forall v \in V_0$$

es decir, que $a$ es $V_0$-elíptica.

---

<u>Teorema 1</u>: Si $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ entonces el problema $(P')$, dado por (14), tiene una solución única $u$.

<u>Demostración</u>:

Del hecho que:

$$f_0 \in H^{1/2}(\Gamma_1) \quad (*)$$

$$\begin{cases} \exists\, F_0 \in H^1(\Omega) / & F_0/_{\Gamma_1} = f_0 \\ \exists \text{ una constante } C_1 > 0 / & \|F_0\|_{1,\Omega} \leq C_1 \cdot \|f_0\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \end{cases}$$

Por otra parte:

$$u \in K \iff u - F_0 \in V_0$$

Por lo tanto:

$$(P') \begin{cases} a(u; v-u) = 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \iff \begin{cases} a(u; v) = 0 \quad \forall v \in V_0 \\ u \in K \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a(u_0 + F_0; v) = 0 \quad \forall v \in V_0 \\ u_0 \in V_0 \end{cases} \iff$$

$$(15) \quad \underline{\text{problema } (P'')} \quad \begin{cases} a(u_0; v) = L(v) \quad \forall v \in V_0 \\ u_0 \in V_0 \end{cases}$$

donde:

---

(*) Ver Teorema de Traza para $H^1(\Omega)$, apéndice I.

$L: V \longrightarrow \mathbb{R}$ /

$$L(v) = -\, a(F_0; v)$$

L es una forma lineal y continua sobre V, pues:
la linealidad de L surge de la bilinealidad de $a$ y la continuidad de L surge de:

$$|L(v)| = |a(F_0; v)| \leq \|F_0\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \leq \left(C_1 \cdot \|f_0\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\right) \cdot \|v\|_{1,\Omega}$$

Por lo tanto, el problema (P'') dado por (15) tiene una única solución $u_0 \in V_0$, y de esta manera el problema (P') tiene una única solución $u = u_0 + F_0 \in K$.

---

Teorema 2: (Teorema Recíproco)
Si $u$ es solución del problema (P') entonces verifica:

$$(16)\ \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } L^2(\Omega) \\ u/_{\Gamma_1} = f_0 & \text{en } L^2(\Gamma_1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}/_{\Gamma_2} = 0 & \text{en } L^2(\Gamma_2) \end{cases}$$

Demostración:
Por hipótesis $u$ es solución de:

$$(P')\ \begin{cases} a(u; v-u) = 0 & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

Es decir que:

$$\begin{cases} a(u; v) = 0 & \forall v \in V_0 \\ u \in K \end{cases}$$

Sea $\varphi \in D(\Omega) \subset V_0$, $\therefore$ $a(u;\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in D(\Omega)$.
Aplicando la fórmula de Green se obtiene:

$$0 = a(u;\varphi) = \int_\Omega \vec{\nabla} u(x) \times \vec{\nabla} \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \Delta u(x) \cdot \varphi(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) \cdot \underbrace{\varphi(x)}_{=0}\, dS =$$

$$= -\int_\Omega \Delta u(x) \cdot \varphi(x)\, dx = -\langle \Delta u ; \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

de lo cual surge que:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Por otra parte $\Delta u \in L^2(\Omega)$, pues $0 \in L^2(\Omega)$.

Del hecho que $\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u = 0 \in L^2(\Omega) \end{cases}$

se puede aplicar la fórmula de Green generalizada (*), mediante la cual se puede definir $\frac{\partial u}{\partial n} \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)'$ y se tiene la siguiente fórmula:

$$\begin{cases} -\int_\Omega \Delta u(x) \cdot w(x)\, dx = a(u;w) - \left\langle \frac{\partial u}{\partial n} ; \gamma_0 w \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \\ \forall w \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

que en este caso se reduce a:

$$a(u;w) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial n} ; \gamma_0 w \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}$$

$\therefore$ se tiene:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n} ; \gamma_0 w \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0 \qquad \forall w \in V_0$$

es decir que:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot \gamma_0 w(x)\, dS = 0 \quad \forall w \in V_0$$

o equivalentemente:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot \lambda(x)\, dS = 0 \quad \forall \lambda \in H^{1/2}(\Gamma_2)$$

$\therefore$ $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\left(H^{1/2}(\Gamma_2)\right)'$ y como $0 \in L^2(\Gamma_2)$ entonces se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } L^2(\Gamma_2)$$

---

(*) Ver 6) viii) c) del Apéndice I.

Resumiendo, $u$ es solución de:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } L^2(\Omega) \\ u/_{\Gamma_1} = f_0 & \text{en } L^2(\Gamma_1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en } L^2(\Gamma_2) \end{cases}$$

---

Observación:
Al mismo resultado se llegaría si se hubiera supuesto que
$u \in H^2(\Omega)$,
lo cual resulta ser una hipótesis innecesaria al tenerse en este caso que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ y al poder aplicarse la fórmula de Green generalizada.

---

Lema 5: (Caso Particular)
En el caso en que $\Omega$ sea convexo y que $\Gamma_2 = \phi$ (vacío) entonces se pueden definir $\theta_1, \theta_2$ y $\Sigma$ verificando las condiciones (5).
Demostración:
La solución $u$ está dada por:

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u/_{\Gamma} = f_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

Por un resultado de regularidad (*), se tiene que:
$u \in H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$
Sea $\Omega_2$ el conjunto definido por

$$\Omega_2 = \{ x \in \Omega \,/\, u(x) > 0 \}$$

Del hecho que $u$ es una función continua sobre $\Omega$, $\Omega_2$ resulta ser

---

(*) Ver 6) ix) c) del Apéndice I.
Más aún, se tiene $u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ para $p$ grande

un conjunto abierto de $\Omega$.

Sea $\Sigma$ definida por:

$$(18) \qquad \Sigma = \left\{ x \in \partial\Omega_2 \,/\, x \notin \partial\Omega \right\}$$

Además, por la observación dada en 3) ii), $\theta^+$ y $\theta^-$ están dados por:

$$\begin{cases} \theta^+ = \dfrac{1}{k_2} \cdot u^+ \\ \theta^- = \dfrac{1}{k_1} \cdot u^- \end{cases}$$

de lo cual surge que:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta^+/_{\Omega_2} = \dfrac{1}{k_2} \cdot u^+/_{\Omega_2} = \dfrac{1}{k_2} \cdot u/_{\Omega_2} \\ \theta_1 = -\theta^-/_{\Omega_1} = \dfrac{-1}{k_1} \cdot u^-/_{\Omega_1} = \dfrac{1}{k_1} \cdot u/_{\Omega_1} \end{cases}$$

donde $\Omega_1$ está dado por:

$$\Omega_1 = \Omega - (\Omega_2 \cup \Sigma)$$

De las 6 condiciones dadas por (5), 5 de ellas se verifican en forma inmediata. La restante se verifica usando el hecho que $u \in C^1(\bar{\Omega})$, como sigue:

$$k_1 \cdot \frac{\partial\theta_1}{\partial n}\Big/_{\Sigma} - k_2 \cdot \frac{\partial\theta_2}{\partial n}\Big/_{\Sigma} = \frac{\partial(u/_{\Omega_1})}{\partial n}\Big/_{\Sigma} - \frac{\partial(u/_{\Omega_2})}{\partial n}\Big/_{\Sigma} = 0$$

<u>Observación</u>:

A continuación se verán varios ejemplos que caen dentro del caso particular dado por el lema 6 y en los cuales se podrán hallar explícitamente las respectivas soluciones; siempre se tendrá que:

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \\ \theta \notin H^2(\Omega) \end{cases}$$

## 5) Algunos Ejemplos:

i)

$$(19)\quad \begin{cases} \Gamma_2 = \phi \\ \Omega = (0;a) \\ g_0(x) = \begin{cases} b & \text{si } x=0 \\ -c & \text{si } x=a \end{cases} \\ \text{con } a>0,\ b>0,\ c>0 \end{cases}$$

Entonces:

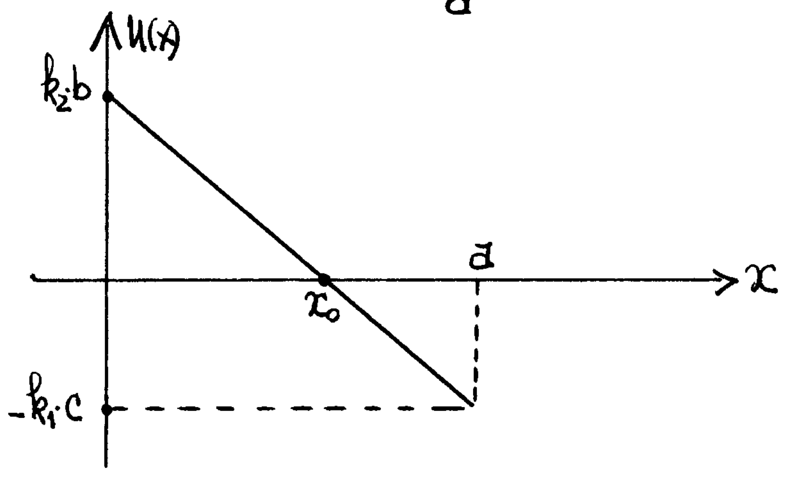
$$\begin{cases} \Gamma_1 = \{0;a\} \\ f_0(x) = \begin{cases} k_2 \cdot b & \text{si } x=0 \\ -k_1 \cdot c & \text{si } x=a \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto, el problema a resolver consiste en encontrar $u$ solución de:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = 0 & \forall x \in (0;a) \\ u(0) = k_2 \cdot b \\ u(a) = -k_1 \cdot c \end{cases}$$

Se obtiene que:

$$(21)\qquad u(x) = -\frac{k_1 \cdot c + k_2 \cdot b}{a} \cdot x + k_2 \cdot b$$



Ahora se puede calcular $\Sigma$ de acuerdo a (18), obteniéndose:

$$(22) \qquad \begin{cases} \Omega_2 = (0; x_0) \\ \Sigma = \{x \in \partial\Omega_2 \,/\, x \notin \partial\Omega\} = \{x_0\} \end{cases}$$

donde $x_0$ viene definido por:

$$u(x_0) = 0$$

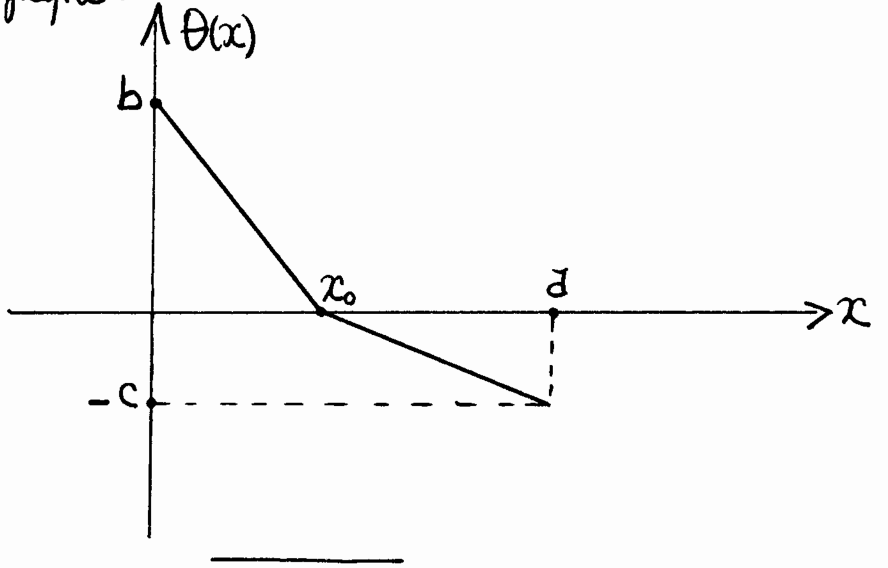
es decir por:

$$(23) \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{e_0}{1+e_0} \cdot a \\ e_0 = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{k_2}{k_1} \end{cases}$$

Y de acuerdo a (13) se puede conocer $\theta$, obteniéndose:

$$(24) \qquad \theta(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{x_0} \cdot (x_0 - x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ -\dfrac{c}{a-x_0} \cdot (x - x_0) & \text{si} \quad x_0 \leq x < a \end{cases}$$

siendo su gráfica:




Observaciones:

a) La función $\theta$ es continua, pero no con derivada continua, pues:

$$\theta \in C^1(\Omega) \iff k_1 = k_2$$

b) Si las temperaturas impuestas en los extremos del intervalo $\Omega$ son iguales en valor absoluto, es decir $b=c$, entonces de acuerdo a (23) se encuentra que $e_0$ es independiente de la temperatura impuesta y por lo tanto $x_0$ también lo será.

---

c) Si a la hipótesis de b) se agrega que $k_1=k_2$, entonces se encuentra que:

$$\begin{cases} e_0=1 \\ x_0=\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

---

d) Teniendo en cuenta (23), se pueden calcular los siguientes límites extremos:

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \lim\limits_{b\to+\infty} x_0 = a \\[2ex] \text{ii)} \quad \lim\limits_{c\to+\infty} x_0 = 0 \end{cases}$$

Las observaciones c) y d) no son nada más que el resultado matemático de una posible experimentación física, evidente por las hipótesis hechas.

---

e) Mediante un simple cálculo se puede verificar que la función $\theta$, definida en (24), es solución también de (5).

---

ii)

$$(25) \begin{cases} \Gamma_2=\phi \\[1ex] \Omega=\{(r;w)\ /\ a'<r<a\} \\[1ex] g_0(r;w)=\begin{cases} b & \text{si} \quad r=a \\ -c & \text{si} \quad r=a' \end{cases} \\[2ex] \text{con} \quad a>a'>0\ ,\ b>0\ ,\ c>0 \end{cases}$$

donde $(r;w)$ simbolizan las coordenadas polares en el plano $x$-$y$.
En este segundo ejemplo, se obtiene:

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \left\{ (r;\omega) \;/\; r = a' \text{ ó } r = a \right\} \\ f_0(r;\omega) = \begin{cases} k_2 \cdot b & si \quad r = a \\ -k_1 \cdot c & si \quad r = a' \end{cases} \qquad \forall (r;\omega) \in \Gamma_1 \end{cases}$$

Por lo tanto, debe hallarse $u = u(r;\omega)$ solución de:

$$(26) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \forall (r;\omega) \in \Omega \\ u(a;\omega) = k_2 b & \forall \omega \\ u(a';\omega) = -k_1 c & \forall \omega \end{cases}$$

De acuerdo a las condiciones límites impuestas es previsible hallar $u$ como función solo de la variable $r$, es decir:

$$u = u(r)$$

Para dicho caso se encuentra:

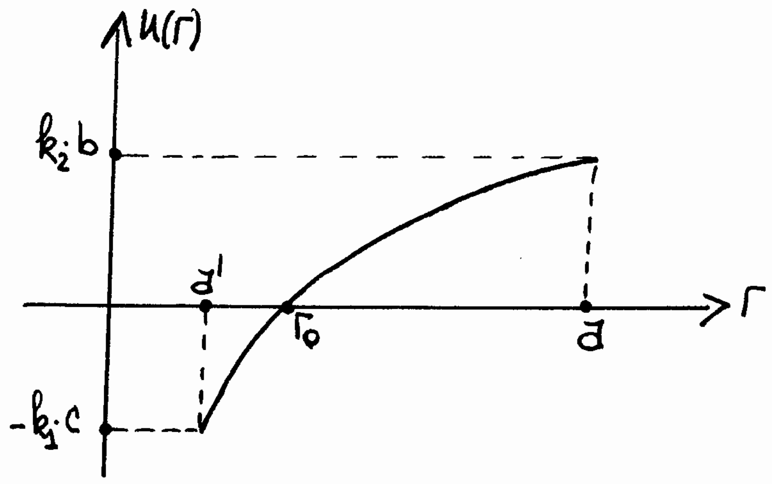
$$(27) \qquad \begin{cases} r \cdot \dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} = 0 & \forall r \,/\, a' < r < a \\ u(a) = k_2 \cdot b \\ u(a') = -k_1 \cdot c \end{cases}$$

La solución general de la ecuación diferencial viene dada por:

$$u(r) = h + m \cdot \log r$$

donde $h$ y $m$ son constantes que se determinarán de las dos condiciones de contorno dadas en (27); se obtiene que:

$$(28) \qquad \begin{cases} h = -\dfrac{k_1 \cdot c \cdot \log a + k_2 \cdot b \cdot \log a'}{\log \frac{a}{a'}} \\[2ex] m = \dfrac{k_1 \cdot c + k_2 \cdot b}{\log \frac{a}{a'}} \end{cases}$$




De acuerdo a la teoría general, se obtiene:

$$(29)\quad \begin{cases} \Omega_2 = \{(r;\omega) / \ r_0 < r < a\} \\ \Sigma = \{(r;\omega) / \ (r;\omega) \in \partial\Omega_2 \ y \ (r;\omega) \notin \partial\Omega\} = \{(r;\omega) / \ r = r_0\} \end{cases}$$

donde $r_0$ está definido por:

$$u(r_0) = 0$$

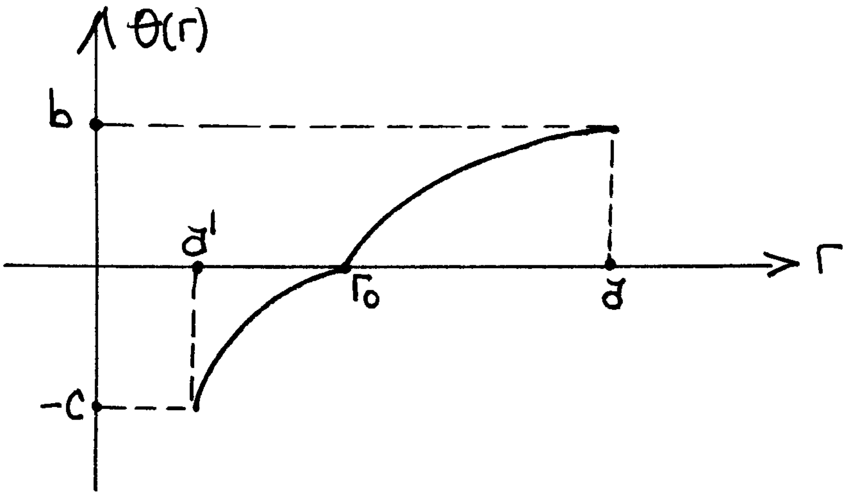
es decir, por:

$$(30)\quad \begin{cases} r_0 = a^{\frac{1}{\eta_0}} \cdot a'^{\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}} \\ \eta_0 = 1 + e_0 \\ e_0 = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{k_2}{k_1} \end{cases}$$

De acuerdo a (13), la función $\theta$ resulta dada por:

$$(31)\quad \theta(r) = \begin{cases} \dfrac{h + m \cdot \log r}{k_1} & \text{si} \quad a' \leq r \leq r_0 \\ \dfrac{h + m \cdot \log r}{k_2} & \text{si} \quad r_0 \leq r \leq a \end{cases}$$

siendo su gráfica:




Para este problema se obtienen observaciones análogas al problema anterior

---

<u>Observaciones</u>:

a) $\theta$ es una función continua, y

$$\theta \in C^1(\Omega) \Longleftrightarrow k_1 = k_2$$

---

b) Si $b=c$ entonces $e_0, \eta_0, r_0$ son independientes de la temperatura $b$ impuesta.

---

c) Si además de $b=c$ se agrega $k_1 = k_2$, entonces se obtiene que:

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ \eta_0 = 2 \\ r_0 = \sqrt{a \cdot a'} \end{cases}$$

---

d) Se obtienen los siguientes límites:

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{b \to +\infty} r_0 = a' \\ ii) \quad \lim\limits_{c \to +\infty} r_0 = a \end{cases}$$

---

e) Mediante un simple cálculo se puede verificar que la función $\theta$, definida en (31), es solución de (5).

# CAPITULO III

## RESOLUCIÓN DE UN CASO DE EVOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

### 1) Presentación del problema:

Se estudiará el campo de Temperaturas no estacionaria $\theta(x;t)$ para

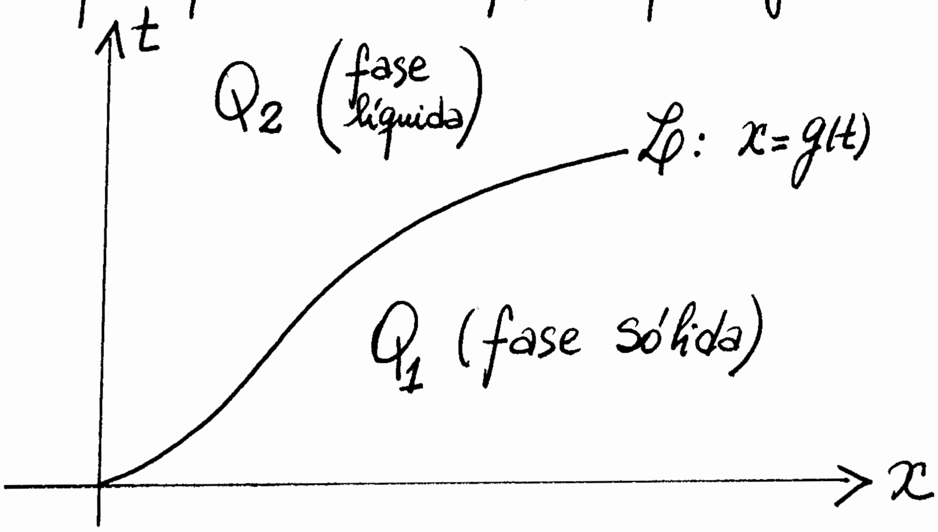
$$\begin{cases} x \in \Omega = \{ x \in \mathbb{R} / x > 0 \} \\ t > 0 \end{cases}$$

Se supone que los coeficientes $k_1$ y $k_2$ de las conductividades caloríficas y los coeficientes $c_1$ y $c_2$ de los calores específicos son constantes y positivos.

Además, se considerará que $\theta(x;t) = 0$ es la temperatura del cambio de fase y que:

$$\mathcal{L}: \quad x = g(t)$$

es la frontera que separa las dos fases líquida y sólida.




Sea:

$$Q = \Omega \times (0; +\infty) = \{ (x;t) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0 \text{ y } t > 0 \}$$

En $Q$, $\mathcal{L}$ separa las dos fases:

$$\begin{cases} Q_2: & \text{fase líquida} \\ Q_1: & \text{fase sólida} \end{cases}$$

las cuales están dadas por:

$$\begin{cases} Q_2 = \{(x;t) \in Q \,/\, 0 < x < g(t)\} \\ Q_1 = \{(x;t) \in Q \,/\, g(t) < x\} \\ \mathcal{L}\varphi = \{(x;t) \in Q \,/\, x = g(t)\} = \{(x;t) \in Q \,/\, \theta(x;t) = 0\} \\ Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \mathcal{L}\varphi \end{cases}$$

La temperatura $\theta$ está definida por:

$$(1) \qquad \theta(x;t) = \begin{cases} \theta_1(x;t) < 0 & \forall (x;t) \in Q_1 \\ \theta_2(x;t) > 0 & \forall (x;t) \in Q_2 \\ 0 & \forall (x;t) \in \mathcal{L}\varphi \end{cases}$$

El problema a resolver consiste a encontrar una solución de:

(2)

$$\begin{cases} k_1 \cdot \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - c_1 \cdot \dfrac{\partial \theta_1}{\partial t} = 0 & \forall (x;t) \in Q_1 \\ k_2 \cdot \dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} - c_2 \cdot \dfrac{\partial \theta_2}{\partial t} = 0 & \forall (x;t) \in Q_2 \end{cases}$$

Sujeto a las condiciones:

i) <u>Iniciales</u>: $\begin{cases} \theta_2(0;t) = b & \forall t > 0 \\ \theta_1(x;0) = -c & \forall x > 0 \end{cases}$ con $b>0$, $c>0$

ii) <u>sobre $\mathcal{L}\varphi$</u>: $\begin{cases} \theta_2(g(t);t) = \theta_1(g(t);t) = 0 & \forall t > 0 \\ k_2 \cdot \dfrac{\partial \theta_2}{\partial x}(g(t);t) - k_1 \cdot \dfrac{\partial \theta_1}{\partial x}(g(t);t) = -L \cdot \dfrac{dg(t)}{dt} \end{cases}$

donde $L > 0$ representa el calor Latente de Fusión del Hielo.

## 2) Propriedades Auxiliares:

**Lema 1:** Sea $$f(\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{\eta} e^{-\xi^2}\,d\xi \qquad (3)$$

Entonces:
$$\varphi(x;t)=f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

satisface la ecuación:
$$a^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x;t)-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x;t)=0$$

**Demostración:**
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x;t)=f'\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\cdot\dfrac{1}{2a\sqrt{t}}\\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x;t)=f''\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\cdot\dfrac{1}{4a^2t}\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x;t)=f'\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\cdot\dfrac{-x}{4at\sqrt{t}}\end{cases}$$

De la definición de $f$ se obtiene:
$$\begin{cases}f'(\eta)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\eta^2}\\[2ex] f''(\eta)=\dfrac{-4}{\sqrt{\pi}}\cdot\eta\cdot e^{-\eta^2}\end{cases}$$

de lo cual surge:
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x;t)=\dfrac{-x}{2a^3t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x;t)=\dfrac{-x}{2at\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\end{cases}$$

es decir que, $\varphi$ verifica:
$$a^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x;t)-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x;t)=0$$

Observación:

La función $f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\xi^2} d\xi$ no es nada más que la función error.

Por otra parte, los valores límites de $f$ son:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(+\infty) = 1 \end{cases}$$

---

Sean

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{c_1}} \\ a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{c_2}} \end{cases}$$

Entonces una solución de (2) viene dada de la forma siguiente:

$$(5) \quad \begin{cases} \theta_1(x;t) = \alpha_1 + \beta_1 \cdot f\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\ \theta_2(x;t) = \alpha_2 + \beta_2 \cdot f\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ g(t) = 2 \cdot \mu \cdot \sqrt{t} \quad , \text{ con } \mu > 0 \end{cases}$$

donde las cinco constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \mu$ se deberán hallar de las cinco condiciones que existen sobre $\theta_1$ y $\theta_2$ dadas por 2) i) y ii). El método a utilizar consistirá en dejar $\mu$ como variable y encontrar las otras cuatro constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ en función de $\mu$; luego se determinará $\mu$ como solución de una ecuación trascendente, la cual tendrá única solución.

---

Teorema 2:

Las cuatro constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ vienen dadas, en función de $\mu$, por:

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_1(\gamma) = c \cdot \dfrac{f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right)}{1 - f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right)} \\[2ex] \beta_1(\gamma) = -c \cdot \dfrac{1}{1 - f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right)} \\[2ex] \alpha_2(\gamma) = b \\[2ex] \beta_2(\gamma) = \dfrac{-b}{f\left(\frac{\gamma}{a_2}\right)} \end{cases}$$

<u>Demostración</u>:

Se hallarán dichas relaciones usando las cuatros primeras condiciones de (2):

$$\begin{cases} b = \theta_2(0;t) = \alpha_2 \\ -c = \theta_1(x;0) = \alpha_1 + \beta_1 \\ 0 = \theta_2(g(t);t) = \alpha_2 + \beta_2 \cdot f\left(\frac{\gamma}{a_2}\right) \\[1ex] 0 = \theta_1(g(t);t) = \alpha_1 + \beta_1 \cdot f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right) \end{cases}$$

De la primera y tercera condición se obtienen:

$$\begin{cases} \alpha_2(\gamma) = b \\[1ex] \beta_2(\gamma) = \dfrac{-b}{f\left(\frac{\gamma}{a_2}\right)} \end{cases}$$

Las dos condiciones restantes están dadas por:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = -c \\[1ex] \alpha_1 + \beta_1 \cdot f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right) = 0 \end{cases}$$

de las cuales se obtienen:

$$\begin{cases} \alpha_1(\gamma) = c\,\dfrac{f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right)}{1 - f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right)} \\[2ex] \beta_1(\gamma) = \dfrac{-c}{1 - f\left(\frac{\gamma}{a_1}\right)} \end{cases}$$

**Lema 2:**

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x}(g(t);t) = \frac{\beta_i(\gamma)}{a_i} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma^2}{a_i^2}}}{\sqrt{\pi t}} \qquad \forall i=1;2$$

**Demostración:**

De:

$$\theta_i(x;t) = \alpha_i(\gamma) + \beta_i(\gamma) \cdot f\left(\frac{x}{2a_i\sqrt{t}}\right) \qquad i=1,2$$

se obtiene:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x}(x;t) = \beta_i(\gamma) \cdot f'\left(\frac{x}{2a_i\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{2a_i\sqrt{t}} = \frac{\beta_i(\gamma)}{a_i\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_i^2 t}}$$

de lo cual surge que:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x}(g(t);t) = \frac{\beta_i(\gamma)}{a_i} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma^2}{a_i^2}}}{\sqrt{\pi t}} \qquad i=1;2$$

---

3) Resolución del problema:

**Teorema 2:** La condición necesaria y suficiente para que $\theta_1(x;t)$, $\theta_2(x;t)$ y $g(t)$ definidos en (5) y (6) sean solución de (2) es que $\gamma$ sea solución de la ecuación:

$$(7) \qquad \gamma = F(\gamma)$$

donde:

$$(8) \qquad \begin{cases} F(\gamma) = h_1 \cdot \beta_1(\gamma) \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{a_1^2}} - h_2 \cdot \beta_2(\gamma) \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{a_2^2}} \\ h_1 = \dfrac{k_1}{a_1 \cdot L \cdot \sqrt{\pi}} \\ h_2 = \dfrac{k_2}{a_2 \cdot L \cdot \sqrt{\pi}} \end{cases}$$

**Demostración**:

Utilizando el lema 2 la condición:

$$k_2 \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(g(t);t) - k_1 \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(g(t);t) = -L \cdot \frac{dg}{dt}(t)$$

se transforma en:

$$k_2 \cdot \frac{\beta_2(\gamma)}{a_2} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma^2}{a_2^2}}}{\sqrt{\pi t}} - k_1 \cdot \frac{\beta_1(\gamma)}{a_1} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma^2}{a_1^2}}}{\sqrt{\pi t}} = -L \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{t}}$$

lo cual es equivalente a:

$$\gamma = \frac{k_1}{L \cdot a_1 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \beta_1(\gamma) \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{a_1^2}} - \frac{k_2}{L \cdot a_2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \beta_2(\gamma) \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{a_2^2}}$$

es decir a:

$$\gamma = F(\gamma)$$

---

Antes de demostrar que la ecuación:

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma = F(\gamma) \\ \gamma > 0 \end{cases}$$

tiene única solución se verán algunas propriedades.

**Lema 3**:

Sean las funciones:

$$\begin{cases} G(x) = H(x) - 2x \\ H(x) = \dfrac{f'(x)}{1-f(x)} \end{cases}$$

definidas para $x \geq 0$, donde $f$ está definida en (3).

Entonces:

i) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2} \\ f''(x) = -2x \cdot f'(x) \end{cases}$ ii) $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(+\infty)=1 \\ f'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\ f'(+\infty)=0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} H(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \;;\; H(+\infty) = +\infty \;;\; H(x) > 0 \quad \forall x \geq 0 \\ G(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \;;\; G(+\infty) = 0 \end{cases}$

iv) G y H son dos funciones derivables, siendo:
$$\begin{cases} H'(x) = G(x) \cdot H(x) \\ G'(x) = H'(x) - 2 \end{cases}$$

v) $G(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$

Demostración:

i) y ii) se demuestran en forma facil.

iii) Aplicando la regla de l'Hopital se tiene:

$$H(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1-f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{-f'(x)} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

$$G(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \left[ H(x) - 2x \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x) - 2x(1-f(x))}{1-f(x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{f''(x)} - 2\cdot(1-f(x)) + \cancel{2x\cdot f'(x)}}{-f'(x)} = 2 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{H(x)} = 0$$

iv) $$H'(x) = \left( \frac{f'(x)}{1-f(x)} \right)' = \frac{f''(x)\cdot(1-f(x)) + f'(x) \cdot f'(x)}{(1-f(x))^2} =$$

$$= \frac{(f'(x))^2 - 2x \cdot f'(x) \cdot (1-f(x))}{(1-f(x))^2} = f'(x) \cdot \frac{f'(x) - 2x\,(1-f(x))}{(1-f_0(x))^2} =$$

$$= f'(x)\cdot\left[\frac{H(x)}{1-f(x)} - \frac{2x}{1-f(x)}\right] = \frac{f'(x)}{1-f(x)}\cdot\left[H(x)-2x\right] = H(x)\cdot G(x)$$

v) Supongase que:

$$\exists x_0>0 \,/\, G(x_0)=0 \quad (= H(x_0)-2x_0)$$

lo cual implica que:

$$\begin{cases} H(x_0)=2x_0 \\ H'(x_0)=G(x_0)\cdot H(x_0)=0 \\ \qquad y \\ G(x_0)=0 \\ G'(x_0)=H'(x_0)-2=-2 \end{cases}$$

Debido a que $G$ es una función derivable y que $G(+\infty)=0$:

$$\exists x_1>0 \,/ \begin{cases} x_0<x_1 \\ G'(x_1)=0 \\ G(x_1)<0 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$H'(x_1)=\underbrace{G(x_1)}_{<0}\cdot\underbrace{H(x_1)}_{>0}<0$$

de lo cual surge:

$$0=G'(x_1)=H'(x_1)-2<-2$$

que resulta ser un absurdo.
Es decir que:

$$G(x)>0 \quad \forall x\geq 0$$

---

**Lema 4:** Sea $\mathcal{F}_i(\gamma)=\beta_i(\gamma)\cdot e^{-\frac{\gamma^2}{a_i^2}} \quad i=1,2 \qquad (11)$

Entonces:

i) $\dfrac{d\beta_1}{d\gamma}(\gamma)=H\left(\dfrac{\gamma}{a_1}\right)\cdot\dfrac{\beta_1(\gamma)}{a_1}$

ii) $\dfrac{dF_1}{d\mu}(\mu) = G\left(\frac{\mu}{a_1}\right) \cdot e^{-\frac{\mu^2}{a_1^2}} \cdot \dfrac{\beta_1(\mu)}{a_1} < 0 \quad \forall \mu > 0$

iii) $\begin{cases} F_1(0) = -C \\ F_1(+\infty) = -\infty \end{cases}$

iv) $\dfrac{d\beta_2}{d\mu}(\mu) = \dfrac{f'\left(\frac{\mu}{a_2}\right)}{f\left(\frac{\mu}{a_2}\right)} \cdot \dfrac{\beta_2(\mu)}{a_2}$

v) $\dfrac{dF_2}{d\mu}(\mu) = -\left[ \dfrac{f'\left(\frac{\mu}{a_2}\right)}{f\left(\frac{\mu}{a_2}\right)} + 2 \cdot \dfrac{\mu}{a_2} \right] \cdot e^{-\frac{\mu^2}{a_2^2}} \cdot \dfrac{\beta_2(\mu)}{a_2} > 0 \quad \forall \mu > 0$

vi) $\begin{cases} F_2(0) = -\infty \\ F_2(+\infty) = 0 \end{cases}$

Demostración:

i) De: $\beta_1(\mu) = \dfrac{-C}{1 - f\left(\frac{\mu}{a_1}\right)}$

se obtiene:

$$\frac{d\beta_1}{d\mu}(\mu) = -C \cdot \frac{\frac{1}{a_1} \cdot f'\left(\frac{\mu}{a_1}\right)}{\left[1 - f\left(\frac{\mu}{a_1}\right)\right]^2} = \frac{-C}{1 - f\left(\frac{\mu}{a_1}\right)} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \frac{f'\left(\frac{\mu}{a_1}\right)}{1 - f\left(\frac{\mu}{a_1}\right)} = \frac{\beta_1(\mu)}{a_1} \cdot H\left(\frac{\mu}{a_1}\right)$$

ii) $$\frac{dF_1}{d\mu}(\mu) = e^{-\frac{\mu^2}{a_1^2}} \cdot \frac{d\beta_1}{d\mu}(\mu) + \beta_1(\mu) \cdot \frac{-2\mu}{a_1^2} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{a_1^2}} = e^{-\frac{\mu^2}{a_1^2}} \cdot \frac{\beta_1(\mu)}{a_1} \cdot \left[ H\left(\frac{\mu}{a_1}\right) - \frac{2\mu}{a_1} \right] =$$
$$= e^{-\frac{\mu^2}{a_1^2}} \cdot \underbrace{G\left(\frac{\mu}{a_1}\right)}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{\beta_1(\mu)}{a_1}}_{<0} < 0 \quad \forall \mu > 0.$$

iii) $\beta_1(0) = -C \implies F_1(0) = -C$

Además, aplicando la regla de l'Hopital se obtiene:

$$F_1(+\infty) = \lim_{\mu \to +\infty} \frac{-C}{1 - f\left(\frac{\mu}{a_1}\right)} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{a_1^2}} = -C \cdot \lim_{\mu \to +\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{a_1^2}}}{1 - f\left(\frac{\mu}{a_1}\right)} =$$

$$= -c \cdot \lim_{\rho \to +\infty} \frac{-\frac{2\rho}{a_1^2} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{a_1^2}}}{-\frac{1}{a_1} \cdot f'\left(\frac{\rho}{a_1}\right)} = -c \cdot \lim_{\rho \to +\infty} \rho \frac{\sqrt{\pi}}{a_1} = -\infty$$

iv) De: $\beta_2(\rho) = \dfrac{-b}{f\left(\frac{\rho}{a_2}\right)}$

se obtiene:

$$\frac{d\beta_2}{d\rho}(\rho) = -b \cdot \frac{-\frac{1}{a_2} \cdot f'\left(\frac{\rho}{a_2}\right)}{\left[f\left(\frac{\rho}{a_2}\right)\right]^2} = -\frac{f'\left(\frac{\rho}{a_2}\right)}{f\left(\frac{\rho}{a_2}\right)} \cdot \frac{\beta_2(\rho)}{a_2}$$

v) $$\frac{dF_2}{d\rho}(\rho) = e^{-\frac{\rho^2}{a_2^2}} \cdot \frac{d\beta_2}{d\rho}(\rho) + \beta_2(\rho) \cdot \frac{-2\rho}{a_2^2} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{a_2^2}} =$$

$$= -\underbrace{\frac{\beta_2(\rho)}{a_2}}_{<0} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{a_2^2}} \cdot \underbrace{\left[\frac{f'\left(\frac{\rho}{a_2}\right)}{f\left(\frac{\rho}{a_2}\right)} + \frac{2\rho}{a_2}\right]}_{>0} > 0 \quad \forall \rho > 0$$

vi) $\beta_2(0) = -\infty \Rightarrow F_2(0) = -\infty$

$\beta_2(+\infty) = -b \Rightarrow F_2(+\infty) = 0$

---

Teorema 3:

La función $F$, definida en (8), tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \text{i) } F \text{ es una función derivable, con } \frac{dF}{d\rho}(\rho) < 0 \quad \forall \rho > 0 \\ \text{ii) } F(0) = +\infty \\ \text{iii) } F(+\infty) = -\infty \end{cases}$$

Por lo tanto la ecuación:

$$\begin{cases} F(\rho) = \rho \\ \rho > 0 \end{cases}$$

tiene única solución.

**Demostración:**

i) Teniendo en cuenta (11), $F(\mu)$ está dada por:

$$F(\mu) = h_1 \cdot F_1(\mu) - h_2 \cdot F_2(\mu)$$

lo cual implica que:

$$\frac{dF}{d\mu}(\mu) = h_1 \cdot \underbrace{\frac{dF_1}{d\mu}(\mu)}_{<0} - h_2 \cdot \underbrace{\frac{dF_2}{d\mu}(\mu)}_{>0} < 0 \qquad \forall \mu > 0$$

ii, iii) Por el resultado iii) y vi) del Lema 4, se deduce que:

$$\begin{cases} F(0) = +\infty \\ F(+\infty) = -\infty \end{cases}$$

---

**Observación:** El caso estacionario de este problema coincide con el ejemplo dado en II-5-i) si se toma $a = +\infty$, pues en dicho caso se tendría:

$$x_0 = +\infty = \lim_{t \to +\infty} g(t)$$

# APÉNDICE I

## DISTRIBUCIONES Y ESPACIOS DE SOBOLEV

Sea $\Omega$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$; en las aplicaciones es suficiente tomar $n \leq 3$.
Se notará con:

$$\Gamma = \partial\Omega$$

la frontera de $\Omega$.

1) Definiciones:

i) Sea $\varphi$ una función definida sobre $\Omega$; se define por Soporte de $\varphi$ al menor conjunto cerrado fuera del cual $\varphi$ es nulo, es decir:

$$\operatorname{Sop}\varphi = \overline{\{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \neq 0\}}$$

donde $\bar{A}$ indica la clausura del conjunto A.

ii) Sea $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice; se notará:

$$\begin{cases} a) & |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\ b) & \partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \end{cases}$$

donde $x = (x_1; \ldots; x_n)$ representa un punto genérico de $\mathbb{R}^n$.

iii) Se designa por $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables sobre $\Omega$ y a soporte compacto contenido en $\Omega$, es decir:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \,/\, \operatorname{Sop}\varphi = \text{compacto} \subset \Omega \}$$

Una notación igualmente usada para designar a $\mathcal{D}(\Omega)$ es $C_0^\infty(\Omega)$.

Ejemplo de una función perteneciente a $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|x\| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & \text{si} \quad \|x\| < 1 \end{cases}$$

donde $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ representa la norma euclideana en $\mathbb{R}^n$.

---

iv) En $\mathcal{D}(\Omega)$ se define la siguiente convergencia:

Sean $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\forall n$ ; entonces:

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ en } \mathcal{D}(\Omega) \iff \begin{cases} a) \ \exists K = \text{Compacto} \subset \Omega \,/\, \text{Sop}\,\varphi_n \subset K \ \forall n \\ b) \ \partial^\alpha \varphi_n \longrightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ uniformemente en } K \end{cases}$$

---

## 2) El espacio de las Distribuciones:

i) Se define $\mathcal{D}'(\Omega)$, el espacio de las Distribuciones sobre $\Omega$, como el espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir el espacio de las formas lineales y continuas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$(*). Simbolicamente:

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \begin{cases} a) \ \underline{\text{Linealidad}}: \\ \quad \langle T; \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \rangle = \lambda_1 \cdot \langle T; \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \cdot \langle T; \varphi_2 \rangle \\ \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ ; \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \\ b) \ \underline{\text{Continuidad}}: \\ \quad \varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ en } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \langle T; \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T; \varphi \rangle \text{ en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

donde:

$\langle T; \varphi \rangle = T(\varphi) \in \mathbb{R}$ representa la dualidad entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$.

---

ii) En $\mathcal{D}'(\Omega)$ se define la siguiente convergencia:

(*) Ver 1) del Apéndice II.

Sean $T, T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall n$, entonces:

$$T_n \longrightarrow T \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega) \iff \langle T_n;\varphi\rangle \longrightarrow \langle T;\varphi\rangle \text{ en } \mathbb{R} \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

---

iii) <u>Métodos prácticos para determinar una distribución</u>:
La determinación práctica de la existencia de una distribución está dada por el siguiente:

<u>Lema 1</u>:
Sea $T$ un funcional lineal definido sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces:

$$T\in\mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall K = \text{compacto} \subset \Omega \quad \exists\, C, N \text{ (constantes)} /$$

$$|\langle T;\varphi\rangle| \leq C \cdot \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

$$\forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega) / \operatorname{Sop}\varphi \subset K$$

En este caso, se dice que la distribución $T$ es de <u>orden finito</u> si $N$ es independiente del compacto $K$; por otra parte, cuando el orden es finito, al menor $N$ que verifica la desigualdad anterior se lo llama el <u>orden de la distribución $T$</u>.

---

3) <u>El Espacio $L^p(\Omega)$, $p\geq 1$</u>:

i) Se definen:

a) $1\leq p<+\infty$:
$$L^p(\Omega) = \left\{ \text{clases de las funciones medibles } f / \int_\Omega |f(x)|^p\,dx < +\infty \right\}$$

b) $p=+\infty$:
$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \text{clases de las funciones medibles } f / \operatorname{Sup\,Es} f < +\infty \right\}$$

donde:

$$\begin{cases} i) & dx = dx_1 \cdots dx_n \text{ representa la medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n \\ ii) & \text{Sup Es } f \text{ indica el supremo esencial de } f. \end{cases}$$

ii) Propriedades:

a) $\forall p \geq 1$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\begin{cases} i) & 1 \leq p < +\infty : \quad \|f\|_{p,\Omega} = \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ ii) & p = +\infty : \quad \|f\|_{\infty,\Omega} = \text{Sup Es } f \end{cases}$$

b) $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ $\forall p / 1 \leq p < +\infty$, es decir:

$$\forall v \in L^p(\Omega) \ (1 \leq p < +\infty) \quad \exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega) / \lim_{n \to \infty} \|v - \varphi_n\|_{p,\Omega} = 0$$

c) $\forall p / 1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ tiene un espacio dual dado por:

$$\begin{cases} p = 1 : & \left(L^1(\Omega)\right)' = L^\infty(\Omega) \\ 1 < p < +\infty : & \left(L^p(\Omega)\right)' = L^q(\Omega) \\ & \text{donde } q \text{ está dado por: } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$$

d) $\forall p / 1 < p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ es un espacio reflexivo (*), pues:

$$\left(L^p(\Omega)\right)'' = L^p(\Omega)$$

e) Para el caso particular de $p = 2$, $L^2(\Omega)$ resulta ser un espacio de Hilbert con el producto escalar:

$$(u; v) = \int_\Omega u(x) \cdot v(x) \, dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

4) Ejemplos:

(*) Ver definición en 2) del Apéndice II.

i) Sea $x_0 \in \Omega$; se define $\delta_{x_0}$ por:

$$\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \Big/ \quad \langle \delta_{x_0} ; \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

Se verifica que:
$$\begin{cases} a) \ \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega) \ \ \forall x_0 \in \Omega \ \ (\text{siendo de orden } 0) \\ b) \ \delta_{x_0} \notin L^2(\Omega) \ \ \forall x_0 \in \Omega \end{cases}$$

$\delta_{x_0}$ recibe el nombre de <u>Distribución delta de Dirac</u>.

---

ii) Sea $L^1_{loc}(\Omega)$ el espacio de las funciones localmente sumables en $\Omega$, es decir:

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f \Big/ \int_K |f(x)|\, dx < +\infty \ \ \forall K = \text{compacto} \subset \Omega \right\}$$

Entonces, se tiene que:

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \qquad (*)$$

donde la inyección continua está definida por:

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) \Big/ \quad \langle T_f ; \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

---

iii) De manera análoga al ejemplo ii), se tiene: $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

donde la inyección continua está definida por:

$$f \in L^2(\Omega) \longrightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) \Big/ \quad \langle T_f ; \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

---

(*) $A \hookrightarrow B \iff \begin{cases} i) \ A \subset B \\ ii) \ \text{La función inyectiva identidad} : A \longrightarrow B \text{ es continua.} \end{cases}$

## 5) Derivación de las Distribuciones:

i) Si $T \in D'(\Omega)$, entonces se puede definir una nueva distribución:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} \qquad i=1;2;\dots;n$$

de la siguiente forma:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i} ; \varphi \right\rangle = - \left\langle T ; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

**Observación:**

Se debe notar que si $f$ es una función diferenciable en $\Omega$, entonces su derivada en el sentido clásico $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones $T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$, pues:

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i} ; \varphi \right\rangle = - \left\langle T_f ; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_\Omega f(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \varphi(x)\, dx =$$

$$= \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} ; \varphi \right\rangle \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

de lo cual surge que:

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \qquad \forall i=1;\dots;n$$

ii) De una manera más general, si $\alpha$ representa un multi-índice $\alpha=(\alpha_1;\dots;\alpha_n)$, se puede definir una nueva distribución:

$$\partial^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

de la siguiente forma:

$$\langle \partial^\alpha T ; \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle T ; \partial^\alpha \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

**Observaciones:**

I) De esta manera toda distribución $T \in D'(\Omega)$ es infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones.

b) Como caso particular se tiene:

$$< \Delta T ; \varphi > = < T ; \Delta \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donde:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{es el operador Laplaciano.}$$

iii) Ejemplos:

a) Sea la función de Heaviside $H$ definida en $\mathbb{R}$ por:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta$$

donde $\delta = \delta_0$ es la delta de Dirac en el origen.

Demostración:

$$< \frac{d}{dx} T_H ; \varphi > = - < T_H ; \frac{d\varphi}{dx} > = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x)\, dx = - \int_{0}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}(x) . dx =$$

$$= \varphi(0) = < \delta ; \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

b) Sea $f$ una función definida en $\mathbb{R}$ que admite una derivada $\frac{df}{dx}$ continua y acotada en $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Sea $s = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ el salto de $f$ en el punto $x_0$. Entonces:

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{\frac{df}{dx}} + s \cdot \delta_{x_0}$$

Demostración:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$< \frac{d}{dx} T_f ; \varphi > = - < T_f ; \frac{d\varphi}{dx} > = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x)\, dx = - \int_{-\infty}^{x_0^-} f(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x)\, dx -$$

$$- \int_{x_0^+}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x_0^-} \frac{df}{dx}(x) \cdot \varphi(x)\, dx - f(x_0^-) \cdot \varphi(x_0) + \int_{x_0^+}^{+\infty} \frac{df}{dx}(x) \cdot \varphi(x) dx +$$

$$+ f(x_0^+) \cdot \varphi(x_0) = < T_{\frac{df}{dx}} ; \varphi > + s \cdot < \delta_{x_0} ; \varphi > = < T_{\frac{df}{dx}} + s \cdot \delta_{x_0} ; \varphi >$$

# 6) Espacios de Sobolev - Diversas Propriedades

i) Se llama Espacio de Sobolev de orden $m$ sobre $L^p(\Omega)$ al conjunto definido por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) \;/\; D^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m \right\}$$

donde: $\begin{cases} m \text{ es un entero} \geq 0 \\ p \geq 1 \end{cases}$

$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|^p_{p,\Omega} \right)^{1/p} \qquad \forall v \in W^{m,p}(\Omega)$$

Además,

$$|v|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha v\|^p_{p,\Omega} \right)^{1/p} \qquad \forall v \in W^{m,p}(\Omega)$$

es una semi-norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

$\forall p / \; 1 \leq p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ tiene un espacio dual que puede identificarse a:

$$\left( W^{m,p}(\Omega) \right)' = W^{m,q}(\Omega)$$

donde $q$ verifica:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y $\forall p / \; 1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo.

Casos particulares:

a) $m = 0 \Rightarrow \quad W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

b) $p = 2 \Rightarrow \quad H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar:

$$(u;v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left( D^\alpha u ; D^\alpha v \right)$$

donde:

$(\cdots;\cdots)$ indica el producto escalar en $L^2(\Omega)$.

Para $m=0,1,2$ se tienen:

$$\begin{cases} H^0(\Omega) = L^2(\Omega) \\ H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,/\, \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i=1,\dots;n \right\} \\ H^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,/\, \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \,,\, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \forall i,j=1;\dots;n \right\} \end{cases}$$

---

ii)

a) Se define $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq 0$ (no entero) de la siguiente manera:

$$H^s(\mathbb{R}^n_x) = \left\{ v = v(x) \,/\, \left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi) \right\}$$

donde $\hat{v}$ es la transformada de Fourier de $v$ definida por:

$$\hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x \times \xi)} \cdot v(x)\, dx$$

siendo $x \times \xi$ el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Para $s$ entero $\geq 0$, esta definición de $H^s(\mathbb{R}^n)$ coincide con la dada en 1).

b) Para la definición de $H^s(\Gamma)$ ($s$ no entero), donde $\Gamma$ representa la frontera de $\Omega$, remitirse a la bibliografía.

---

iii)

a) Sea $W_0^{m,p}(\Omega)$ la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\,W^{m,p}(\Omega)}$$

Sea $W^{-m,p}(\Omega)$ el espacio dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, es decir:

$$\left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)' = W^{-m,p}(\Omega)$$

Entonces, se tienen las siguientes inclusiones:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) \subset W_0^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \\ W^{-m,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

donde, además, cada inclusión es densa.

b) Para el caso particular de $p=2$:

i) $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$

ii) $H^{-m}(\Omega) = \left(H_0^m(\Omega)\right)'$

iii) $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

donde cada inclusión es densa.

iv)

a) <u>**Lema 2**</u>:

$$v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

donde:

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

(función prolongamiento de $v$ por 0 en $\mathbb{R}^n - \Omega$.)

b) Si $\Omega$ es un conjunto acotado, entonces:

$$H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$$

<u>Contra-ejemplo</u>: Sea $v(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$, entonces:

$$\begin{cases} v \in H^1(\Omega) \\ \tilde{v} \notin H^1_0(\Omega) \text{ (utilizando el Lema 2)} \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\Omega$ es un conjunto acotado $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $H^1(\Omega)$; por definición, $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H^1_0(\Omega)$.
En cambio, si $\Omega = \mathbb{R}^n$ se tiene el siguiente:

<u>Lema 3</u>:

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$, es decir:

$$H^1_0(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$$

---

c) <u>Lema 4</u>: (<u>Desigualdad de Poincaré</u>)
Si $\Omega$ es un conjunto acotado (basta pedir que sea acotado en una sola dirección), entonces:

$$\exists\ C_1 = C_1(\Omega) > 0 \text{ (constante que depende solo de } \Omega) /$$

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq C_1 \cdot |v|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

<u>Lema 5</u>:
Si $\Omega$ es un conjunto acotado (basta pedir que sea acotado en una sola dirección), entonces:
la semi-norma $|v|_{1,\Omega}$ es una norma en $H^1_0(\Omega)$ equivalente a la norma $\|v\|_{1,\Omega}$, es decir:

$$\exists\ C_2 = C_2(\Omega) > 0 \text{ (constante que depende solo de } \Omega) /$$

$$|v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_2 \cdot |v|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

---

v)

a) Dada una función $v \in H^1(\Omega)$, se quiere calcular su valor en la frontera: $v/_\Gamma$. Esto no es evidente pues, para $n \geq 2$ las funciones de $H^1(\Omega)$ no son, en general, continuas como lo muestra el siguiente:

Contra-ejemplo:

Sean:
$$\begin{cases} \Omega = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 < \frac{1}{4} \right\} \\ v(x;y) = (\log r)^k \\ \text{donde } r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ representa el radio polar} \end{cases}$$

Se puede verificar que:

i) $v \in H^1(\Omega)$ $\forall k < \frac{1}{2}$

ii) $v$ tiene una singularidad en el origen $\forall k > 0$, con lo cual $\forall k \,/\, 0 < k < \frac{1}{2}$ se tiene que:
$$\begin{cases} v \in H^1(\Omega) \\ v \notin C^0(\Omega) \end{cases}$$

---

b) Teorema de traza para $H^1(\Omega)$

Lema 6:

si $\Gamma = \partial\Omega$ es regular (*), entonces $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ (**).

---

Observación:

Se notará con $ds$ la medida superficial sobre $\Gamma$ inducida por la medida de Lebesgue $dx$, y se designará con:
$$L^2(\Gamma) = \left\{ v \text{ definidas en } \Gamma \,/\, \int_\Gamma |v(x)|^2 \, ds < +\infty \right\}$$

En $L^2(\Gamma)$ está definida la norma:
$$\|v\|_\Gamma = \left( \int_\Gamma |v(x)|^2 \, ds \right)^{1/2} \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

---

(*) Basta pedir que $\Omega$ sea un conjunto acotado y que $\Gamma$ sea de clase $C^1$ (ó de clase $C^1$ a trozos). Para condiciones más débiles sobre $\Gamma$ remitirse a la bibliografía. A continuación se supondrá que $\Gamma$ cumple con estas condiciones.

(**) $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \left\{ v/_{\Omega} \,/\, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \right\}$

**Teorema 1:**
La aplicación:

$$\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow \varphi/_{\Gamma} \in C^0(\Gamma)$$

se prolonga, por continuidad, en una aplicación de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$, es decir que:

$$\exists \ c>0 \text{(constante)} / \quad \|\varphi\|_{\Gamma} \leq c \cdot \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

**Teorema 2:** (de Traza para $H^1(\Omega)$)

i) La aplicación traza de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ en $L^2(\Gamma)$ se prolonga en una aplicación lineal y continua:

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma) \;/\; \gamma_0(v) = v/_{\Gamma} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Además, $\gamma_0$ no es una función sobre, siendo su imagen $H^{1/2}(\Gamma)$, es decir:

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma) \underset{\neq}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma)$$

ii) Existe un relevamiento lineal y continuo $\gamma_0^{-1}$ de $H^{1/2}(\Gamma)$ en $H^1(\Omega)$, es decir:

$$\forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \exists \begin{cases} v \in H^1(\Omega) \\ c>0 \text{ (constante)} \end{cases} / \quad \|v\|_{1,\Omega} \leq c \cdot \|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

iii) El núcleo de la aplicación $\gamma_0$ está dado por $H_0^1(\Omega)$, es decir:

$$\operatorname{Ker} \gamma_0 = \{ v \in H^1(\Omega) / \gamma_0 v = 0 \} = H_0^1(\Omega)$$

**Observación:**
De acuerdo al teorema precedente se le puede dar a $H_0^1(\Omega)$ una interpretación sencilla como el conjunto de las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan en el borde $\Gamma$, es decir:

$$H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) / \quad v/_{\Gamma} = 0 \}$$

vi) **Fórmula de Green:**

Lema 7:
$\forall u, v \in H^1(\Omega)$ se tiene la fórmula siguiente:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_\Gamma u(x) \cdot v(x) \cdot n_i\, dS$$

donde: $n = (n_1; \dots; n_n)$ representa el versor normal exterior a $\Gamma$.

---

vii) Propriedad de Rellich:

Teorema 3:
La injección continua canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$:

$$v \in H^1(\Omega) \longrightarrow v \in L^2(\Omega)$$

es compacta, es decir que todo conjunto acotado en $H^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$. Es decir:

$$\forall (u_n)_n \ / \ \|u_n\|_{1,\Omega} \leq c \text{ (constante) } \forall n$$

$\exists$ una sub-sucesión $(u_{n'})_{n'}$ de $(u_n)_n$ que converge debilmente en $L^2(\Omega)$ (*).

---

viii) Propriedades del espacio $H^2(\Omega)$:

a) Se considera que $\Omega$ es acotado con su frontera $\Gamma$ regular ($C^1$ ó $C^1$ a trozos). Utilizando los resultados vistos para $H^1(\Omega)$ se define:

la traza $\gamma_0(v) = v/_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ de una función $v \in H^2(\Omega)$.

Por otra parte, como $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ $\forall i = 1; \dots; n$ entonces se pueden definir también las trazas $\gamma_0\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_i}/_\Gamma$ $\forall i = 1; \dots; n$,

con lo cual la derivada normal de $v$:

$$\gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial n}/_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}/_\Gamma \cdot n_i \in L^2(\Gamma)$$

tiene un sentido.

---

(*) Ver 1) del Apéndice II.

**Lema 8:**
La aplicación:
$$v \in H^2(\Omega) \longrightarrow \vec{\gamma}(v) = (\gamma_0 v ; \gamma_1 v) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$$
es lineal y continua.
$\vec{\gamma}$ no es una función sobre, y su imagen viene dada por:
$$\vec{\gamma}(H^2(\Omega)) = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$$

---

b) Fórmula de Green:

**Lema 9:**
Se tienen las siguientes fórmulas:

i)
$$-\int_\Omega \Delta u(x) \cdot v(x)\, dx = \int_\Omega \vec{\nabla} u(x) \times \vec{\nabla} v(x)\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot v(x)\, dS \qquad \forall u \in H^2(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega)$$

ii)
$$\int_\Omega \left[u(x) \cdot \Delta v(x) - v(x) \cdot \Delta u(x)\right] dx = \int_\Gamma \left[u(x) \cdot \frac{\partial v}{\partial n}(x) - v(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right] dS \quad \forall u, v \in H^2(\Omega)$$

donde:

a) $\vec{\nabla} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} ; \dots ; \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$ : Vector gradiente de $v$

b) $\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$ : Laplaciano de $v$

c) $\frac{\partial v}{\partial n} = \vec{\nabla} v \times \vec{n}$ : derivada normal de $v$

d) $\vec{n} = (n_1 ; \dots ; n_n)$ : Versor normal exterior a $\Gamma$.

---

c) Fórmula de Green Generalizada:

**Teorema 4:** (*)
Si la función $u$ verifica: $\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u \in L^2(\Omega) \end{cases}$
entonces se puede definir $\frac{\partial u}{\partial n}$ como un elemento de:
$$H^{-1/2}(\Gamma) = \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)'$$

---

(*) Este teorema será utilizado en la demostración del Teorema II-2).

teniéndose la siguiente fórmula de Green generalizada:

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\cdot v(x)\,dx = \int_\Omega \vec{\nabla} u(x)\times\vec{\nabla} v(x)\,dx - \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}; \gamma_0 v\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} \quad (*)$$

$$\forall v\in H^1(\Omega)$$

---

ix) Algunas propriedades de $H^m(\Omega)$:

a) Teorema 6: (Teorema de traza)

La aplicación:

$$v\in H^m(\Omega) \longrightarrow \vec{\gamma}(v) = (\gamma_0(v); \gamma_1(v); \dots; \gamma_{m-1}(v)) \in (L^2(\Omega))^m$$

es lineal y continua, donde:

$$\gamma_i(v)(x) = \frac{\partial^i v}{\partial n^i}(x) \quad (x\in\Gamma)$$

representa la derivada de orden i de $v$ en la dirección de $\vec{n}$.

b) Relación de inclusión entre $H^m(\Omega)$ y $C^k(\Omega)$:

Teorema 7:

Si $k$ es un entero $\geq 0$, entonces:

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}) \quad \forall\, m > k+\frac{n}{2}$$

donde $n$ es la dimensión del espacio.

---

De este teorema, se pueden obtener algunos corolarios, útiles en la práctica:

Corolarios:

i) $m > \frac{n}{2} \Rightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$

ii) $n=1 \Rightarrow \begin{cases} H^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \\ H^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega}) \end{cases}$

iii) $n=2,3 \Rightarrow H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$

c) Resultado de regularidad: (Brezis-Stampacchia)

Si $\Omega$ es además un conjunto convexo (**), entonces la única solución del problema de Dirichlet: $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u/_\Gamma = f\in H^{1/2}(\Gamma) \end{cases}$ verifica: $u\in H^2(\Omega)$

---

(*) Para hacer una referencia a la fórmula clásica generalmente se utiliza la notación:

$$\langle \lambda; \mu\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \int_\Gamma \lambda(x)\cdot\mu(x)\,dS$$

(**) Ver 3) del Apéndice II.

# APÉNDICE II

## TEORÍA DE LAS ECUACIONES E INECUACIONES VARIACIONALES Y DE LA MINIMIZACIÓN DE FUNCIONALES

### 1) Topologías sobre un espacio de Banach:

i) Sea $V$ un espacio de Banach. (*)
Se llama espacio dual de $V$, y se notará por $V'$, al conjunto de las formas lineales y continuas sobre $V$, es decir:

$$V' = \{ f : V \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ es lineal y continua sobre } V \}$$

$V'$ es un espacio de Banach con la norma definida por:

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|_V} \quad \forall f \in V'$$

ii) Se llama Topología fuerte de $V$ a la inducida por:

$$v_n \longrightarrow v \text{ en } V \text{ fuerte} \iff \lim_{n \to +\infty} \|v_n - v\|_V = 0$$

iii) Se llama Topología débil de $V$ a la inducida por:

$$v_n \longrightarrow v \text{ en } V \text{ débil} \iff \lim_{n \to +\infty} \langle f ; v_n \rangle = \langle f ; v \rangle \quad \forall f \in V'$$

iv) Si existe un espacio de Banach $B$ / $V = B'$, entonces:
se llama Topología débil estrella de $V$ a la inducida por:

$$v_n \longrightarrow v \text{ en } V \text{ débil } * \iff \lim_{n \to \infty} \langle v_n ; x \rangle = \langle v ; x \rangle \quad \forall x \in B.$$

(*) Siempre se considerará que el espacio vectorial es sobre el cuerpo de los números reales.

v) **Observaciones:**

a) $v_n \to v$ en $V$ fuerte $\Rightarrow$ $v_n \rightharpoonup v$ en $V$ débil.
b) $v_n \to v$ en $V$ fuerte $\Rightarrow$ $v_n \longrightarrow v$ en $V$ débil $*$.

---

## 2) Espacio de Banach reflexivo:

i) **Lema 1:**
Todo espacio de Banach $V$ se puede identificar a un sub-espacio de $V''$ mediante la injección continua $I$ definida por:

$$I: V \longrightarrow V'' \Big/ \quad I(v)(f) = \langle f; v \rangle \quad \forall f \in V', \forall v \in V$$

Además, $I$ es una isometría, es decir:

$$\|I(v)\|_{V''} = \|v\|_V$$

---

ii) Se dice que el espacio de Banach $V$ es reflexivo $\Leftrightarrow$

$$I(V) = V''$$

---

iii) **Observaciones:**

a) Si $V$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces las topologías débil y débil $*$ coinciden.
b) Todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach reflexivo.
c) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo $\forall p \,/\, 1 \leq p < +\infty$.

---

iv) **Lema 2:**

a) Sea $V$ un espacio de Banach.
Sean $f_n \in V' \ \forall n \,/\, \|f_n\| \leq C \ (\text{cte}) \ \forall n$, entonces:

$$\exists f \in V' \,/\, f_n \longrightarrow f \text{ en } V \text{ débil} *$$

---

b) Sea $V$ un espacio de Banach reflexivo.
Sean $x_n \in V \ \forall n \,/\, \|x_n\| \leq C \ (\text{cte}) \ \forall n$, entonces:

$$\exists x \in V \,/\, x_n \rightharpoonup x \text{ en } V \text{ débil}.$$

v) Se dice que: $J: V \longrightarrow \mathbb{R}$ es <u>semi-continua inferiormente</u> (s.c.i.) para la topología débil de $V$ en $x_0 \in V \iff$

$$\forall x_n \longrightarrow x_0 \text{ en } V \text{ débil entonces } J(x_0) \leq \varliminf_{n\to\infty} J(x_n)$$

---

## 3) Conjunto convexo y función convexa:

Sea $V$ un espacio vectorial y $K \subset V$ un subconjunto de $V$.

i) Sean $x, y \in V$. Se define el <u>segmento que une $x$ con $y$</u> como el conjunto:

$$[x; y] = \left\{ z \in V \,/\, \exists t \in [0;1] \text{ de manera que } z = tx + (1-t)y \right\}$$

---

ii) $K$ es un <u>conjunto convexo</u> $\iff [x;y] \subset K \quad \forall x, y \in K$

---

iii) $J: K \longrightarrow \mathbb{R}$ es una <u>función convexa</u> $\iff$

$$J(tx + (1-t)y) \leq t \cdot J(x) + (1-t) \cdot J(y) \qquad \forall t \in [0;1], \forall x, y \in K$$

---

iv) $J: K \longrightarrow \mathbb{R}$ es una <u>función estrictamente convexa</u> $\iff$

$$J(tx + (1-t) \cdot y) < t \cdot J(x) + (1-t) \cdot J(y) \qquad \forall t \in (0;1),\ \forall x, y \in K \,/\, x \neq y$$

---

v) <u>Lema 3:</u>
Si $K$ es un conjunto convexo de un espacio de Hilbert $V$, entonces:
$K$ es cerrado en $V$ fuerte $\iff$ $K$ es cerrado en $V$ débil

---

## 4) Diferenciabilidad según Gateaux

i) Sean $V$ un espacio de Banach y $K \subset V$ un subconjunto de $V$.

Se dice que:

$J: K \to \mathbb{R}$ es <u>diferenciable según Gateaux</u> (se notará G-diferenciable) en $x_0 \in K \iff$

$$\exists\, J'(x_0) \in V' \,/\, \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{J(x_0+tv)-J(x_0)}{t} = \langle J'(x_0); v \rangle_{V'\times V} \quad \forall v \in V$$

---

ii) <u>Lema 4</u>:

Sean $\begin{cases} K \subset V \text{ un conjunto convexo} \\ J: K \to \mathbb{R} \text{ G-diferenciable} \end{cases}$, entonces:

$$J \text{ es una función convexa} \iff J(v) - J(u) \geq \langle J'(u); v-u \rangle \quad \forall u,v \in K$$

<u>Demostración</u>:

$\Rightarrow$) $\forall t \in (0;1)$, $\forall v \in K$

$$J(u+t(v-u)) = J(tv+(1-t)u) \leq t\cdot J(v) + (1-t)\cdot J(u) = J(u) + t\cdot(J(v)-J(u))$$

es decir que:

$$\frac{J(u+t(v-u)) - J(u)}{t} \leq J(v) - J(u)$$

$\therefore$ pasando al límite cuando $t \to 0$, se tiene:

$$\langle J'(u); v-u \rangle \leq J(v) - J(u)$$

$\Leftarrow$) Utilizando 2 veces la hipótesis se tiene que:

$$\forall u,v \in K, \quad \forall t \in [0;1]$$

a) $J(u) - J(u+t(v-u)) \geq \langle J'(u+t(v-u)); -t(v-u) \rangle = -t\cdot\langle J'(u+t(v-u)); v-u \rangle$

b) $J(v) - J(u+t(v-u)) \geq \langle J'(u+t(v-u)); (1-t)(v-u) \rangle = (1-t)\cdot\langle J'(u+t(v-u)); v-u \rangle$

Si se multiplica a) por $(1-t)$ y b) por $t$, y luego se suman, se obtiene:

$$(1-t)\cdot J(u) + t\cdot J(v) - J(u+t(v-u)) \geq 0 \quad \forall t \in [0;1];\ \forall u,v \in K$$

es decir:

$$J(tv+(1-t)u) \leq t\cdot J(v) + (1-t)\cdot J(u) \quad \forall t \in [0;1];\ \forall u,v \in K$$

de lo cual, por definición surge que J es convexa.

---

Observaciones:
Con las mismas hipótesis del lema anterior se puede demostrar, en forma análoga, que:

$$J \text{ es una función estrictamente convexa} \iff$$
$$J(v) - J(u) > \langle J'(u); v-u \rangle \quad \forall u, v \in K$$

---

5) Minimización de funcionales:

i) Lema 5:

Sean $\begin{cases} V \text{ un espacio de Banach reflexivo} \\ \phi \neq K \subset V \text{ un conjunto convexo y cerrado} \\ J: K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ una función s.c.i. en } V \text{ débil} \end{cases}$

Entonces, con la hipótesis:

H1) $K$ es un conjunto acotado

ó

H2) $\lim\limits_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty$

$$\exists u \in K \,/\, \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K$$

Demostración:

Sea $m = \operatorname{Inf}\limits_{v \in K} J(v) < +\infty$

Sea $v_n \in K \ \forall n \,/\, \quad \lim\limits_{n \to \infty} J(v_n) = m$

Utilizando H1) ó H2) $\quad \exists c < +\infty \,/\, \quad \|v_n\| \leq c \quad \forall n$

es decir que $\exists u \in V \,/\, \ v_n \longrightarrow u$ en $V$ débil

Como $K$ es un conjunto cerrado, $u \in K$.

$\therefore$ usando la s.c.i. en $V$ débil de $J$, se tiene:

$$m = \lim_{n \to \infty} J(v_n) = \underline{\lim}_{n \to \infty} J(v_n) \geq J(u) \geq m \quad , \text{es decir: } m = J(u)$$

**Observaciones:**

a) Si a las hipótesis del lema precedente se les agrega que la función J es convexa, entonces el conjunto definido por:

$$K_0 = \{ u \in K \,/\, J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in K} J(v) \}$$

resulta ser un conjunto convexo y cerrado.

---

b) Si a las hipótesis del lema precedente se les agrega que la función J es estrictamente convexa, entonces el conjunto $K_0$ (definido en a)) se reduce a un solo elemento, o en forma equivalente que $\exists$ un único elemento de K que produce el mínimo de J.

---

ii) **Teorema 1:**

Si a las hipótesis del Lema 5 se les agrega que J es una función convexa y G-diferenciable en K, entonces:

$$P_1)\ \begin{cases} J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \iff P_2)\ \begin{cases} \langle J'(u); v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

**Demostración:**

$\Rightarrow)$ $\forall v \in K$, $\forall t \in (0;1)$

$$J(u) \leq J(tv + (1-t)\cdot u) = J(u + t(v-u)) \implies$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{J(u+t(v-u)) - J(u)}{t} \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

es decir que: $\quad \langle J'(u); v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$

$\Leftarrow)$ Utilizando el Lema 4, se tiene:

$$J(v) - J(u) \geq \langle J'(u); v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K, \text{ es decir que:}$$

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K$$

6) <u>V- elipticidad</u>:

Sean:
$$\begin{cases} V \text{ un espacio de Banach} \\ a: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ una forma bilineal} \end{cases}$$

i) Se dice que **a es continua** $\Longleftrightarrow$

$$\exists M > 0 \,/\, \quad |a(u;v)| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

ii) Se dice que **a es Semi-definida positiva** (s.d.p.) $\Longleftrightarrow$

$$a(v;v) \geqslant 0 \quad \forall v \in V$$

iii) Se dice que **a es V-elíptica** $\Longleftrightarrow$

$$\exists \alpha > 0 \,/\, \quad a(v;v) \geqslant \alpha \cdot \|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

iv) <u>Lema 6</u>:

Sean:
$$\begin{cases} a: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ una forma bilineal continua} \\ f: V \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \quad f(v) = a(v;v) \end{cases}$$

Entonces:

a) Si a es s.d.p. entonces f es una función convexa y s.c.i. en V débil.

b) Si a es V-elíptica entonces f es una función estrictamente convexa y s.c.i. en V débil.

<u>Demostración</u>:

i) Sea $v_n \longrightarrow v$ en V débil, entonces:

$$f(v_n) - f(v) = a(v_n;v_n) - a(v;v) = a(v_n - v; v_n - v) + a(v_n - v; v) +$$

$$+ a(v; v_n - v) \geqslant a(v_n - v; v) + a(v; v_n - v)$$

Aplicando $\lim\limits_{n \to \infty}$, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} f(v_n) - f(v) \geq 0 \ ,$$

de lo cual surge que $f$ es s.c.i en $V$ débil.

ii)

$\forall t \in (0;1)$, $\forall u, v \in V / u \neq v$

$$t \cdot f(u) + (1-t)\cdot f(v) - f(tu+(1-t)\cdot v) = t\cdot a(u;u) + (1-t)\cdot a(v;v) -$$

$$- a(tu+(1-t)\cdot v; tu+(1-t)\cdot v) = t\cdot(1-t)\cdot a(u-v;u-v)$$

Por lo tanto, según el caso en que $a$ sea s.d.p. ó $V$-elíptica se obtiene que $f$ es una función convexa ó estrictamente convexa respectivamente.

De i) y ii) se tienen a) y b).

---

__Observación:__

Sean:

$$\begin{cases} a: V\times V \longrightarrow \mathbb{R} & \text{una forma bilineal, continua y } V\text{-elíptica} \\ L: V \longrightarrow \mathbb{R} & \text{una forma lineal y continua} \end{cases}$$

Entonces:

la función $J$ definida por:

$$J: V \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ J(v) = \frac{1}{2}\cdot a(v;v) - L(v)$$

resulta ser una función estrictamente convexa, s.c.i. en $V$ débil y G-diferenciable, siendo:

$$\langle J'(u); v\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left[a(u;v) + a(v;u)\right] - L(v)$$

__Demostración:__

Las dos primeras propiedades de $J$ surgen como corolario del lema anterior. Solo falta ver que es G-diferenciable.

Para ello:

$$\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a(u+tv;u+tv) - L(u+tv) - \frac{1}{2}\cdot a(u;u) + L(u)}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot a(v;v) + \frac{1}{2}\cdot\left[a(u;v)+a(v;u)\right] - L(v)$$

de lo cual, se deduce:

$$\langle J'(u);v\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left[a(u;v)+a(v;u)\right] - L(v)$$

<u>Corolario</u>:
Si además, $a$ es una forma simétrica, entonces:

$$\langle J'(u);v\rangle = a(u;v) - L(v)$$

7) <u>Inecuaciones Variacionales</u>:
Sean:

$$\begin{cases} V \text{ un espacio de Hilbert} \\ a: V\times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ una forma bilineal, continua y } V\text{-elíptica} \\ L: V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ una forma lineal y continua} \\ \phi \neq K \subset V \text{ un conjunto convexo y cerrado} \end{cases}$$

i) Se llama <u>Inecuación Variacional</u> al problema siguiente:

$$(P)\quad \begin{cases} a(u;v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v\in K \\ u\in K \end{cases}$$

ii) <u>El problema de minimización</u> correspondiente al funcional $J: K \longrightarrow \mathbb{R}$, está definido por:

$$M)\quad \begin{cases} J(u) \leq J(v) \quad \forall v\in K \\ u\in K \end{cases}$$

iii) Teorema 2:

Sea:

$$J(v) = \frac{1}{2}\cdot a(v;v) - L(v)$$

Si la forma $a$ es Simétrica, entonces:

$$P) \Leftrightarrow M)$$

Demostración:

$\Rightarrow)$ Sea $u$ solución de $P)$.

$$J(v)-J(u) = \frac{1}{2}\cdot a(v;v) - L(v) - \frac{1}{2}\cdot a(u;u) + L(u) =$$

$$= \Big[\underbrace{a(u;v-u) - L(v-u)}_{\geq 0}\Big] + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{a(v-u;v-u)}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall v\in K$$

es decir:

$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K$, con lo cual $u$ es solución de $M)$.

$\Leftarrow)$ Sea $u$ solución de $M)$, entonces

$$\langle J'(u); v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v\in K$$

y por lo tanto:

$$a(u;v-u) - L(v-u) \geq 0 \quad \forall v\in K ,$$

con lo cual $u$ es solución de $P)$.

---

iv) Teorema 3:

Bajo las hipótesis dadas en $\mathcal{I})$, el problema $M)$ tiene única solución.

Demostración:

Por el Lema 6, $J$ es una función estrictamente convexa y s.c.i. en $V$ débil.

Solo falta verificar la hipótesis $H2)$:

$$J(v) = \frac{1}{2}\cdot a(v;v) - L(v) \geq \frac{1}{2}\cdot \alpha \cdot \|v\|^2 - \|L\|_{V'}\cdot\|v\| =$$

$$= \|v\| \cdot \left( \frac{\alpha}{2}\cdot\|v\| - \|L\|_{V'}\right)$$

de lo cual se deduce que:

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} J(v) = +\infty$$

Por lo tanto, por el Lema 5, existe una única solución de M).

---

v) Teorema 4:

Bajo las hipótesis dadas en 7), el problema P) tiene una única solución. (*)

---

Observación:

En los teoremas 3 y 4 no se pide que la forma $a$ sea simétrica. Además, por el teorema 2, si $a$ es simétrica los dos problemas P) y M) son equivalentes.

---

8) El problema P) en función de K

i) K: Cono de Vértice $u_0$:

$$P) \Longleftrightarrow \begin{cases} a(u; v-u_0) - L(v-u_0) \geq 0 & \forall v\in K \\ a(u; u-u_0) - L(u-u_0) = 0 \\ u\in K \end{cases}$$

ii) K: Cono de Vértice $u_0 = 0$:

$$P) \Longleftrightarrow \begin{cases} a(u;v) - L(v) \geq 0 & \forall v\in K \\ a(u;u) - L(u) = 0 \\ u\in K \end{cases}$$

---

(**) K es un cono de Vértice $u_0$ $\Leftrightarrow$ $\forall v\in K$, la semirecta de extremo $u_0$ y que pasa por $v$ está contenida en K, es decir:

$$\forall v\in K,\ \forall \lambda\geq 0 \qquad u_0 + \lambda(v-u_0)\in K$$

(*) Ver la bibliografía correspondiente

iii) K: Variedad lineal:

$$\mathcal{P}) \iff \begin{cases} a(u;v-u) - L(v-u) = 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

iv) K: Sub-espacio Vectorial de V:

$$\mathcal{P}) \iff \begin{cases} a(u;v) - L(v) = 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

v) K=V:

$$\mathcal{P}) \iff \begin{cases} a(u;v) = L(v) \quad \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

Observación:
Para iii), iv) y v) se obtiene una Ecuación Variacional.

# BIBLIOGRAFÍA


1) ADAMS: "Sobolev Spaces", Academic Press 1975.

2) BAIOCCHI: "Movimiento de un fluido en medios porosos", Cuaderno Nº8 del Instituto de Matemática Beppo Levi, Rosario 1975.

3) CÉA: "Optimisation theorie et algorithmes", Dunod 1971.

4) D'AMBROSIO - MEDEIROS - ROFMAN: "Métodos teóricos y numéricos de la Física Matemática", Cuaderno Nº6 del Instituto de Matemática Beppo Levi, Rosario 1974.

5) DUVAUT: "Stefan problem for two-phases varying", Cuaderno Nº51 de la Universidad Federal de Río de Janeiro 1975.

6) DUVAUT: "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche de l'IRIA Nº185, 1976.

7) DUVAUT: "Théorie générale des milieux continus", Curso de 3er ciclo de Mecánica Teórica, 1er cuatrimestre 1976/77, Universidad de Paris VI.

8) DUVAUT: "Initiation aux méthodes variationnelles en Mécanique", Curso de 3er ciclo de Mecánica Teórica, 2do cuatrimestre 1976/77, Universidad de Paris VI.

9) DUVAUT-LIONS: "Les Inéquations en Mécanique et en Physique", Dunod 1972.

10) EKELAND-TEMAN: "Analyse Convexe et problèmes Variationnelles", Dunod-Gauthier Villars 1973.

11) FUNG: "Foundation of solid mechanics", Prentice Hall 1965.

12) FUNG: "A first Course in Continuum Mechanics", Prentice Hall

13) GERMAIN: "Cours de Mécanique des milieux continus", Mason 1973.

14) LIONS-MAGENES: "Problèmes aux limites non homogènes et applications", Volumen N°1, Dunod 1968.

15) MOSCO: "Transformada de Fourier y Distribuciones", Cuaderno N°3 del Instituto de Matemática Beppo Levi, Rosario 1972.

16) NECAS: "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Mason 1967.

17) STAMPACCHIA: "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales", Cuaderno N°1 del Instituto de Matemática Beppo Levi, Rosario 1971.