MEMOIRE

(Document de Synthèse)

présentée à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS VI

pour obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

par

Domingo Alberto TARZIA

"PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE DU TYPE ELLIPTIQUE ET PARABOLIQUE. LE PROBLEME DE STEFAN"

Date de la Présentation : Septembre 1989.

Date de la Soutenance : 22 Novembre 1991.

KEY WORDS (MOTS CLEFS):

Stefan problem, similarity variable, Lamé-Clapeyron solution, Neumann solution , phase-change problem, elliptic free boundary problems, parabolic free boundary problems, exact solutions, waiting time, porous medium equation, absorption problems, noncatalytic gas-solid reaction problems, shrinking core model, asymptotic expansions, inverse problems, unknown thermal coefficients, quasi-steady-state method, heat balance integral method, obstacle problem, variational inequalities, numerical analysis, finite element methods, error bounds, optimization problems.

1991 AMS Subject Classification:

Primary : 35R35, 80A22;

Secondary : 35B40, 35C05, 35J05, 35J20, 35J85, 35K05, 35K60, 35R30, 45D05, 49J20, 65N15, 65N30, 80A23.

RESUME:

On étudie quelques problèmes à frontière libre du type elliptique (cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases, problème de l'obstacle) et du type parabolique (problème de Stefan à une phase, problème de Stefan à deux phases, reaction non-catalitique gaz-solide, équation de la chaleur et des milieux poreux avec absorption). On donne des résultats théoriques, numériques et des applications.

ABSTRACT:

We study some elliptic (steady-state two-phase Stefan problem, obstacle problem) and parabolic (one-phase Stefan problem, two-phase Stefan problem, noncatalytic gas-solid reactions, the heat and porous medium equation with absorption) free boundary problems. We give some theoretical and numerical results and possible applications.

3
NOMENCLATURE

On ne cite que les variables physiques principaux:

k : conductivité thermique ,

c : chaleur specifique ,

h : chaleur latente de fusion ,

s : position du changement de phase ,

q : flux de chaleur ,

ρ : densité de masse ,

t : temps ,

x : variable d'espace ,

θ : température ,

b : température au bord ,

q_0 : coefficient qui caractérise le flux de chaleur au bord $x=0$,

Q_0 : coefficient qui caractérise la pente de la température au bord $x=0$,

σ : coefficient qui caractérise la frontière mobile ou libre $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$,

$\alpha = a^2 = \frac{k}{\rho\, c}$: coefficient de diffusion,

Ω : domaine borné de $\mathbf{R}^n$,

$\xi = \frac{\sigma}{a}$: coefficient adimensionnel,

Ste : numéro de Stefan ,

Ψ : obstacle .

Sous-indices : $i=1$: phase solide ; $i=2$: phase liquide .

Note : Les notations qui ne changent pas peuvent se trouver dans des différents chapitres. On va utiliser la notation (N - n) pour faire référence à la formule (n) du chapitre N.

TABLE DES MATIERES

III.3. PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE DU TYPE PARABOLIQUE.

III.3.1. PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR.

CHAPITRE 7 : UNE GENERALISATION DE LA SOLUTION EXACTE DE LAME-CLAPEYRON POUR LE PROBLEME DE STEFAN A UNE PHASE.

CHAPITRE 8 : SUR LE PROBLEME DE STEFAN A UNE PHASE POUR UN LIQUIDE SOUS-GELE.

CHAPITRE 9 : SUR LA SOLUTION DE NEUMANN POUR LE PROBLEME DE STEFAN A DEUX PHASES.

CHAPITRE 10 : SUR L'EXISTENCE D'UN TEMPS D'ATTENTE POUR LE PROBLEME DE STEFAN A DEUX PHASES.

CHAPITRE 11 : DETERMINATTION DES COEFFICIENTS THERMIQUES D'UN MATERIAL SEMI-INFINIE A TRAVERS D'UN CHANGEMENT DE PHASE.

III.3.2. PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE POUR L'EQUATION DE LA DIFFUSION.

CHAPITRE 12 : SUR LE MODELE DE WEN-LANGMUIR POUR LE PROBLEME DE REACTION NON-CATALITIQUE GAS-SOLIDE.

III.3.3. PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE POUR L'EQUATION DES MILIEUX POREUX.

CHAPITRE 13 : SUR LE COMPORTEMENT ASYMTOTIQUE DE TYPE EXPONENTIELLE POUR L'EQUATION DES MILIEUX POREUX AVEC ABSORPTION.

I.

ETUDES DE 3ème CYCLE

EFFECTUES

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

(Années 1976–79).

I.1. COURS EFFECTUES ET APPROUVES.

1) R. GLOWINSKI, "Méthodes itératives pour les problèmes variationnels, applications".

2) P. H. CIARLET, "Application de la méthode des éléments finis aux problèmes d'élasticité".

3) G. DUVAUT, "Théorie générale des milieux continus".

4) P.A. RAVIART, "Approximation des problèmes d'évolution".

5) G. PETIAU, "Equations aux dérivées partielles, équations différentielles et fonctions spéciales de la Physique-Mathématique".

I.2. DIPLOMES OBTENUS.

1) "Diplôme d'Etudes Approfondis d'Analyse Numérique", June 1977.
Avec une Mémoire "Résolution d'une équation du type Stokes", sous la direction du Prof. R. GLOWINSKI.

2) "Doctorat de 3ème Cycle", 8 Mars 1979.
Avec une thèse "Sur le problème de Stefan à deux phases", sous la direction du Prof. G. DUVAUT.

I.3. PUBLICATIONS EFFECTUES.

1) D.A. TARZIA, "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27 (1979–1980), 145–156.

2) D.A. TARZIA, "Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27 (1979–1980), 157–165.

3) D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", C. R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941–944.

4) D.A. TARZIA, "Etude de l'inéquation variationnelle proposée par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases, I", Boll. Un. Mat. Italiana, 1B (1982), 865–883.

5) D.A. TARZIA, "Etude de l'inéquation variationnelle proposée par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases, II", Boll. Un. Mat. Italiana, 2B (1983), 589–603.

II.

TRAVAUX PRESENTEES POUR LA MEMOIRE

(DOCUMENT DE SYNTHESE DE L'HABILITATION)

II.1. PUBLICATIONS ET TRAVAUX INEDITES.

1) D.A. TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28 (1980–1981), 73–89.

2) D.A. TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t)= 2\,\sigma\,\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math., 39 (1981–1982), 491–497.

3) D.A. TARZIA, "Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)", Adv. Appl. Math., 3 (1982), 74–82.

4) D.A. TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981–1982), 147–241.

5) G.G. GARGUICHEVICH – M.B. STAMPELLA – D.A. TARZIA,"On the obstacle problem", Math. Notae, 30 (1983), 67–79.

6) D.A. TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151–1158.

7) E. COMPARINI – R. RICCI – D.A. TARZIA, "Remarks on a one dimensional Stefan problem related to the diffusion-consumption model", Z. Angew. Math. Mech., 64 (1984), 543–550.

8) M.B. STAMPELLA – D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes desconocidos en el problema de Stefan a dos fases", I Latin American Workshop on Applied Mathematics, Santiago de Chile (Chile), December 14–16, 1981, SIGMA (Rev. Mat. Apl.), 8 (1982), 83–98. "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", Int. J. Eng. Science, 27 (1989), 1407–1419.

9) D.A. TARZIA, "Una nueva variante para el cálculo simultáneo de algunos coeficientes térmicos de un material semi-infinito a través de un problema de cambio de fase con una sobre-condición en el borde fijo", I Latin American Congress on Heat and Mass Transfer, La Plata (Argentina), October 31 to November 4, 1982, Vol. 1, 128–137. "A new variant for the simultaneous calculation of some thermal coefficients of a semi-infinite material through a phase-change problem with an over-condition on the fixed face", Latin. Amer. J. Heat Mass Transfer, 8 (1984), 227–235.

10) A.B. BANCORA – D.A. TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free boundary", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 9 (1985), 215–222.

11) E. COMPARINI – D.A. TARZIA, "A Stefan problem for the heat equation subject to an integral condition", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 73 (1985), 119–136.

12) G.G. GARGUICHEVICH – M.C. SANZIEL – D.A. TARZIA, "Comparison of approximate methods for the determination of thermal coefficients through a phase-change problems", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 12 (1985), 451–464.

13) D.A. TARZIA, "Una desigualdad para el flujo de calor constante a fin de obtener un problema estacionario de Stefan a dos fases", Mecánica Computacional, Vol.2, MECOM '85, S.R. Idelsohn (Ed.), EUDEBA – AMCA, Santa Fe (1985), 359–370. "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Engineering Analysis, 5(1988), 177–181.

14) D.A. TARZIA, "An analysis of a bibliography on moving and free boundary problems for the heat equation. Some results for the one dimensional Stefan problem using the Lamé-Clapeyron and Neumann solutions", in Free Boundary Problems: Applications and Theory, Vol. III, A. Bossavit–A. Damlamian–M. Frémond (Eds.), Research Notes in Mathematics No. 120, , Pitman, London (1985), 84–102.

15) C.O. STOICO – D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos en materiales semi-infinitos a través de un proceso con cambio de fase ", II Latin American Congress on Heat and Mass Transfer, San Pablo (Brazil), 12–15 May 1986, Vol. 2, 348–356.

16) D.A. TARZIA, "Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades mushy zone model", Int. Comm. Heat. Mass Transfer, 14 (1987), 219–228.

17) D.A. TARZIA – L.T. VILLA, "Mathematical considerations on the heat transfer with phase change with negligible latent heat", Latin American Applied Research, 21 (1991), 1–6.

18) R. RICCI – D.A. TARZIA, "Asymptotic behavior of the solutions of a class of diffusion-reaction equations", in Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. II, K.H. Hoffmann–J. Sprekels (Eds.), Research Notes in Mathematics No. 186, Pitman, London (1990), 719–721.

19) D.A. TARZIA, "On the heat flux in materials with or without phase change", in Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. II, K.H. Hoffmann–J. Sprekels (Eds.), Research Notes in Mathematics No. 186, Pitman, London (1990), 703–709.

20) D.A. TARZIA – L.T. VILLA, "On the free boundary problem in the Wen-Langmuir shrinking core model for noncatalytic gas-solid reactions", Meccanica, 24(1989), 86–92.

21) D. TABACMAN – D.A. TARZIA, "Sufficient and/or necessary conditions for the heat

transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", J. Differential Equations, 77(1989), 16−37.

22) R.L.V. GONZALEZ − D.A. TARZIA, "Optimization of heat flux in a domain with temperature constraints", J. Optimization Theory Applications, 65 (1990), 245−256.

23) R. RICCI − D.A. TARZIA, "Asymptotic behavior of the solution of the dead-core problems", Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl., 13(1989), 405−411.

24) J.E. BOUILLET − M. SHILLOR − D.A. TARZIA, "Critical outflow for a steady-state Stefan problem", Applicable Analysis, 32 (1989), 31−51.

25) D.A. TARZIA, "Sobre un modelo de zona pastosa a dos fases con solución exacta", III Latin American Congress on Heat and Mass Transfer, Guanajuato (México), July 4−7, 1988, 497−504. "Neumann-like solution for the two-phase Stefan problem with a simple mushy zone model", Mat. Aplic. Comp., 9 (1990), 201−211.

26) D.A. TARZIA, "Sobre una nueva variante para el cálculo simultáneo de algunos coeficientes térmicos desconocidos de un material semi-infinito", III Latin American Congress on Heat and Mass Transfer, Guanajuato (México), July 4−7, 1988, 505−518.

27) D.A. TARZIA, "Mixed elliptic problems with solutions of non-constant sign", Rev. Unión Matemática Argentina, 34 (1988), 31−55.

28) D.A. TARZIA − C.V. TURNER, "A note on the existence of a waiting time for a two-phase Stefan problem", Quarterly Applied Math. (1991), To appear.

29) D.A. TARZIA, "A variant of the heat balance integral method and a new proof of the exponentially fast asymptotic behavior of the solutions in heat conduction problems with absorption", Int. J. Engineering Science, 28 (1990), 1253−1259.

30) J.C. ARDERIUS − M. LARA − D.A. TARZIA, "Determinación experimental-numérica de coeficientes térmicos a través de problemas tipo Stefan a una fase", Mecánica Computacional, Vol.8, MECOM'88, L.A. Godoy − F. Flores − C.A. Prato (Eds.), AMCA, Santa Fe (1989), 66−86.

31) G.G. GARGUICHEVICH − D.A. TARZIA, "Sobre un problema de conducción del calor estacionario con una fuente de energía. Condiciones necesarias y suficientes para que se presenten dos fases", Mecánica Computacional, Vol.8, MECOM'88, L.A. Godoy − F. Flores − C.A. Prato (Eds.), AMCA, Santa Fe (1989), 87 − 100.

32) M.C. SANZIEL − D.A. TARZIA, "Cálculo numérico de problemas elípticos mixtos con presencia de cambio de fase mediante el software científico Modulef", Mecánica Computacional, Vol.8,

MECOM'88, L.A. Godoy – F. Flores – C.A. Prato (Eds.), AMCA, Santa Fe (1989), 117 –125.

33) D.A. TARZIA – L.T. VILLA, "Un problema inverso para el modelo de Wen en difusión-reacción sólido-gas", Mecánica Computacional, Vol.8 , MECOM'88, L.A. Godoy – F. Flores – C.A. Prato (Eds.), AMCA, Santa Fe (1989),126 –130.

34) J.L. MENALDI – D.A. TARZIA, "Generalized Lamé-Clapeyron solution for a one-phase source Stefan problem".

35) D.A. TARZIA, "Análisis numérico de un problema elíptico mixto con cambio de fase", Mecánica Computacional, Vol. 9, ENIEF'89, A. Cardona (Ed.), AMCA, Santa Fe (1990), 517–533.

36) R.L.V. GONZALEZ – D.A. TARZIA, "On some thermic flux optimization problems in a domain with Fourier boundary condition and state restrictions", Math. Notae, 34 (1990), 21–32.

II.2. AUTRES PUBLICATIONS.

A) LIVRES :

1) D.A. TARZIA, "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI–CONICET, No. 5, Buenos Aires (1981), (206 pages).

2) D.A. TARZIA (Ed.), "Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 11 (178 pages), 12 (196 pages), Rosario (1984).

3) D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computacao Científica, Vol. 5, Minicourse at X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Gramado (R.S.)–Brazil, Sept. 21–25, 1987, (137 pages).

4) D.A. TARZIA (Ed.), "II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 13 (60 pages), 14 (172 pages), Rosario (1987).

5) D.A. TARZIA, "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem", Progetto Nazionale M.P.I. "Equazioni di evoluzione e applicazioni fisico-matematiche", Firenze (1988) (with 2528 titles),(103 pages).

6) D.A. TARZIA (Ed.), "III Seminario sobre problemas de frontera libre y sus aplicaciones", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 17 (152 pages), 18 (92 pages), Rosario (1989).

B) AUTRES TRAVAUX (DE REVISION):

1) D.A. TARZIA, "Sobre el problema de Stefan unidimensional", Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia, Univ. de Santiago de Chile, Santiago (CHILE), Lecture of December 9, 1981, 31 pages.

2) D.A. TARZIA, "Sobre el problema de Stefan unidimensional a una fase correspondiente a un líquido super-enfriado", in Encuentro 1982 de Ecuaciones Diferenciales, J.E. Bouillet (Ed.), Trabajos de Matemática No. 53, IAM (CONICET), Buenos Aires (1983), 71–100.

3) D.A. TARZIA, "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 11, Rosario (1984), 5–32.

4) D.A. TARZIA, "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 11, Rosario (1984), 33–61.

5) D.A. TARZIA, "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 12, Rosario (1984), 5–36.

6) D.A. TARZIA, "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 12, Rosario (1984), 37–86.

7) D.A. TARZIA, "El problema de Stefan y sus aplicaciones", I Reuniaõ Regional de Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Porto Alegre (Brazil), 17–18 May 1984; Reuniones e Conferencias da SBMAC, Vol. 3.

8) D.A. TARZIA, "El problema de Stefan a través de la teoría de las ecuaciones variacionales", Mecánica Computacional, Vol. 5, ENIEF '86, L.A. Godoy (Ed.), AMCA, Santa Fe (1986), 218–240.

9) D.A. TARZIA, "Approximate, numerical and theoretical methods to solve Stefan-like problems", Mecánica Computacional, Vol. 5, MECOM '85, L.A. Godoy (Ed.), AMCA, Santa Fe (1986), 241–265.

10) D.A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan a dos fases", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 14, Rosario (1987), 45–75.

11) D.A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", CUADERNOS del

Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 14, Rosario (1987) 77–99.

12) D.A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 17, Rosario (1989), 133–151.

13) D.A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No.17, Rosario (1989), 73–86.

14) G.G. GARGUICHEVICH – D.A. TARZIA, "Sobre un problema de Stefan a dos fases con fuente de energía interna", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 17, Rosario (1989), 29–44.

15) D.A. TARZIA, "La teoría de las inecuaciones variacionales aplicada a problemas elípticos con o sin cambio de fase", Mecánica Computacional, Vol. 9, ENIEF'89, A. Cardona (Ed.), AMCA, Santa Fe (1990), 535–548.

16) D.A. TARZIA, "Mixed elliptic and parabolic free boundary problems related to the two-phase Stefan problem", Istituto Analisi Numerica, Pub. No. 728, Pavia (1989).

III.

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

REALISES PENDANT LA PERIODE 1980–89.

III.1.

BIBLIOGRAPHIE
SUR DES PROBLEMES A
FRONTIERE LIBRE

CHAPITRE 1 : ANALYSE BIBLIOGRAFIQUE SUR DES PROBLEMES A FRONTIERE MOBILE ET LIBRE POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR. LE PROBLEME DE STEFAN [4, 14, A5].

Dans [4] (année 1981) on a présenté une première bibliographie sur des problèmes à frontière mobile et libre pour l'équation de la chaleur et de la diffusion avec 773 références, dont 664 sont classées en trois catégories principaux (théoriques, numériques et expérimentaux). En plus, chaque catégorie contiennent plusieurs sections d'accord au plan suivant:

I.	Problèmes à frontière mobile pour l'équation de la chaleur.
I.1.	Le cas unidimensionnel.
I.2.	Le cas multidimensionnel.
I.3.	Applications physiques.
I.4.	Application aux problèmes à frontière libre.
II.	Problèmes à frontière libre pour l'équation de la chaleur.
II.1.	Problèmes a frontière libre du type Stefan.
II.1.1.	Le cas unidimensionnel.
II.1.1.1.	Le problème à une phase (Méthodes théoriques, numériques et applications).
II.1.1.2.	Le problème à deux phases (Méthodes théoriques, numériques et applications).
II.1.2.	Le cas multidimensionnel
II.1.2.1.	Le problème à une phase (Méthodes théoriques, numériques et applications).
II.1.2.2.	Le problème à deux phases (Méthodes théoriques, numériques et applications).
II.1.3.	Autres généralités.
II.1.3.1.	Problèmes à frontière libre avec l'état gazeuse.
II.1.3.2.	Travaux expérimentaux.
II.1.3.3.	L'interphase solide-liquide.
II.1.3.4.	Autres applications.
II.2.	Problèmes à frontière libre non du type Stefan.
II.2.1.	Diffusion-consommation de l'oxygène dans les tissus vivants.
II.2.2.	Flux de deux fluides immiscibles dans un milieu poreux.
II.2.3.	Mouvement d'un fluide compressible à travers un milieu poreux.
II.2.4.	L'impact d'une barre viscoplastique sur un obstacle rigide.
II.2.5.	Reactions chimiques entre deux substances.
II.2.6.	Autres problèmes à frontiére libre pour l'équation de la chaleur.
II.2.6.1.	Du type implicite.
II.2.6.2.	Du type explicite.

Dans [A5] (année 1988) on a présenté une bibliographie d'une longue collection de travaux sur des problèmes à frontière mobile et libre pour l'équation de la chaleur-diffusion et en particulier sur le problème de Stefan. Elle contienne 2528 références qui ont apparus sur 263 revues scientifiques, 66 livres, 29 colloques (qui ont chacunes au moins 3 travaux sur le sujet), 24 collections et 24 rapport techniques différents.

On a fait des différentes classifications selon la periode, type ou espèce, langues, revues scientifiques (de mathématiques et de physique-génie), collections, rapports techniques et éditeurs (des livres et colloques) des publications.

Les 2528 références on été classifiées par:

1) Livres exclusivement sur le sujet (avec 8 références).

2) Thèses sur le sujet (avec 17 références).

3) Livres qui ont des chapitres ou sections sur le sujet (avec 60 références).

4) Compilateurs des colloques exclusivement sur le sujet (avec 11 références).

5) Articles publiés dans des colloques exclusivement sur le sujet (avec 192 références).

6) Compilateurs des colloques (non exclusivement sur le sujet) qui ont au moins trois articles sur le sujet (avec 18 références).

7) Articles publiés dans des colloques non exclusivement sur le sujet mais qui ont au moins trois articles sur le sujet (avec 108 références).

8) Articles sur le sujet publiés dans des colloques qui n'ont pas été considérés avant (avec 170 références).

9) Articles sur le sujet publiés dans des revues scientifiques ou plusieurs collections (avec 1821 références).

10) Articles sur le sujet à apparaître dans des revues scientifiques (avec 12 références).

11) Rapports techniques sur le sujet (avec 111 références).

On peut citer les livres et travaux de revision sur le sujet suivants:

(i)Livres: [BaCa, Ca, CaJa, Cr1, Cr2, Di, ElOc, Fa, Fr1, Fr2, KiSt, LSU, Li1, Li2, Lu, Me, Ro, Ru, Tay, We].

(ii)Colloques: [ACH, BDF, FaPr5, HoSp, Ma2, NiPa, OcHo, WSB].

(iii)Travaux de revision: [Ar, Ba, Br, Da, Dan, Du, Fre, HoNi, Ma1, Ma3, Pr1, Sa].

III.2.

PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE DU TYPE ELLIPTIQUE

III.2.1.

SUR LE CAS STATIONNAIRE DU PROBLEME DE STEFAN A DEUX PHASES

CHAPITRE 2: UNE CONDITION SUFFISANT POUR LE FLUX DE CHALEUR POUR OBTENIR UNE SOLUTION DE SIGNE NON-CONSTANTE POUR UN PROBLEME ELLIPTIQUE MIXTE [1, 13, 19, 24, 27, 31, A3].

On étudie le champ de température stationnaire $\theta = \theta(x)$ définie pour $x \in \Omega$ (ouvert, connexe et borné de $\mathbf{R}^n$ avec frontière $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ assez regulière avec $|\Gamma_1| > 0$ et $|\Gamma_2| > 0$). On va considérer que la température du changement de phase du système Ω est représentée par $\theta = 0$ (zéro degré centigrade) qui est physiquement le cas eau-glace (cette hypothèse n'est pas une restriction à l'étude du problème). On considère une température b sur Γ_1 et un flux de chaleur q sur Γ_2.

L'ensemble Ω peut s'écrire comme

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L} \ . \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ x \in \Omega \ / \ \theta(x) < 0 \right\} , \\ \Omega_2 &= \left\{ x \in \Omega \ / \ \theta(x) > 0 \right\} , \\ \mathcal{L} &= \left\{ x \in \Omega \ / \ \theta(x) = 0 \right\} , \end{aligned} \tag{2}$$

sont respectivement la phase solide, la phase liquide et la frontière libre qui les sépare.

La température θ peut s'exprimer dans Ω par

$$\theta(x) = \begin{matrix} \theta_1(x) < 0 \ , & x \in \Omega_1 \ , \\ 0 \ \ , & x \in \mathcal{L} \ , \\ \theta_2(x) > 0 \ , & x \in \Omega_2 \ , \end{matrix} \tag{3}$$

et satisfait les conditions suivantes:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&\Delta\theta_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \ (i = 1, 2) \quad , \\
&\theta_1 = \theta_2 = 0 \ , \ \ k_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \qquad \text{sur } \mathcal{L} \quad , \\
&\theta_2 \mid_{\Gamma_1} = b \ , \\
&- k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = q \qquad \text{si} \quad \theta \mid_{\Gamma_2} > 0 \quad , \\
&- k_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = q \qquad \text{si} \quad \theta \mid_{\Gamma_2} < 0 \quad ,
\end{aligned}
$$

où $k_i > 0$ est la conductivité calorique dans Ω_i (i=1,2). Si l'on introduit le changement de fonction inconnue

$$
(5)\qquad u = k_2\, \theta^+ - k_1\, \theta^- \quad \left(\theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^- \right) \qquad \text{dans } \Omega \quad ,
$$

on obtient un problème elliptique avec conditions mixtes au bord

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\Delta u = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \ , \\
&u \mid_{\Gamma_1} = B \quad , \\
&- \frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = q \quad ,
\end{aligned}
$$

et sa formulation variationnelle est donnée par

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&a(u,v-u) = L(v-u) \quad , \qquad \forall\, v \in K \quad , \\
&u \in K \quad ,
\end{aligned}
$$

où

$$V = H^1(\Omega) \quad , \quad B = k_2\, b^+ - k_1\, b^- \text{ sur } \Gamma_1 \ ,$$

$$(8) \qquad K = \left\{ v \in V \,/\, v\,|_{\Gamma_1} = B \right\} ,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla u \;\, dx \ , \quad L(v) = L_q(v) = -\int_{\Gamma_2} q\, v \;\, d\gamma \ .$$

Par ailleurs, le problème (7) est équivalent au problème de minimum suivant

$$(9) \qquad \begin{cases} J(u) \le J(v) \quad , \qquad \forall\, v \in K \ , \\ u \in K \ , \end{cases}$$

où

$$(10) \qquad J(v) = J_q(v) = \tfrac{1}{2}\, a(v,v) - L(v) = \tfrac{1}{2}\, a(v,v) + \int_{\Gamma_2} q\, v\, d\gamma \ .$$

Pour le cas particulier

$$(11) \qquad q = \text{Const.} > 0 \ , \ b = \text{Const.} > 0 \ \ (B = k_2\, b > 0)$$

on définit la fonction réele $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$(12) \qquad f(q) = J_q(u_q) = \tfrac{1}{2}\, a(u_q,u_q) + q \int_{\Gamma_2} u_q \;\, d\gamma \ ,$$

où $u = u_q$ est la solution de l'équation variationnelle (7).

<u>Théorème</u> <u>1</u>. (i) La fonction f est différentiable. En plus, f' est une fonction continue, estrictement décroissante et elle est donnée par la expression suivante

$$(13) \qquad f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma \ .$$

(ii) Il existe une constante géométrique $C = C(\Omega,\Gamma_1,\Gamma_2) > 0$ telle que

$$a(u_q,u_q) = C\,q^2 \;,\; \forall\, q > 0 \;,$$

(14)

$$f(q) = -\frac{C}{2}q^2 + B \mid \Gamma_2 \mid q \;,\; \forall\, q > 0 \,.$$

(ii) Si

(15) $q > q_0\,(B)$

alors (6) ou (7) représente le cas stationnaire d'un problème de Stefan à deux phases (c'est à dire, u_q est une fonction de signe non-constant dans Ω), où $q_0 = q_0(B)$ est donné par

(16) $$q_0(B) = \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{C} \;,\; \forall\, B > 0 \,.$$

(iv) Si, par symmétrie, la fonction u_q est constante sur Γ_2, alors la condition suffisante (donnée par (15)) est aussi nécessaire.

On introduit le flux de chaleur critique $q_c > 0$ qui characterise le cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases, c'est à dire

$$q > q_c \;\Leftrightarrow\; \exists \text{ 2 phases,}$$

(17)

$$q \leq q_c \;\Leftrightarrow\; \exists \text{ 1 phase (la phase liquide).}$$

<u>Remarque</u> <u>1</u> : Dans [24], on donne plusieurs estimations et propriétés pour le flux critique q_c . Dans [1], on présente trois exemples où la solution stationnaire et le calcul de q_c sont explicités. En plus, ils vérifient la hypothèse (iv) du Théorème 1. Dans [13], on calcul q_0 (q_c) en utilisant le software scientifique MODULEF (Module d'Eléments Finis) [Ber, Ge]. Dans [32], on généralise le cas constante $q > 0$ et $B > 0$ en considérant un apport d'énergie constante dans Ω.

CHAPITRE 3: ANALYSE NUMERIQUE D'UN PROBLEME ELLIPTIQUE MIXTE AVEC SOLUTION DISCRETE DE SIGNE NON-CONSTANTE [35].

On fait l'analyse numérique du problème (II-7) sous les hypothèses (I-1) et avec la condition (II-15) pour que le problème continue soit à deux phases, c'est-à-dire la solution u_q de l'équation variationnelle (II-7) est de signe non-constante dans Ω.

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domaine polygonal convexe. On suppose que $u_q \in H^2(\Omega)$. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulier de Ω, où $h>0$ est la longueur du plus grand côté des triangles $T \in \mathcal{T}_h$ et on approche l'espace

(1) $$V_0 = \left\{ v \in V \,/\, v\,|_{\Gamma_1} \right\} ,$$

par

(2) $$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \,/\, v_h\,|_T \in P_1(T) ,\ \forall T \in \tau_h ,\ v_h\,|_{\Gamma_1} = 0 \right\} ,$$

où P_1 est l'espace des polynômes de dégré ≤ 1. On considère

(3) $$K_h = V_h + B \ .$$

On a $V_h \subset V$, ce qui permet d'approcher le problème continue (II-7) par le problème discret en dimension finie suivant:

(4) $$a(u_h,v_h) = L(v_h) ,\ \ \forall v_h \in V_h \ ,\ u_h \in K_h \ .$$

Pour chaque $q > 0$, soit $u_h = u_h(q)$ la solution de l'équation variationnelle (4). Donc, pour chaque $h > 0$ on peut définir la fonction réelle $f_h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ par

(5) $$f_h(q) = J_q(u_h(q)) = \frac{1}{2}\, a(u_h(q),u_h(q)) + q \int_{\Gamma_2} u_h(q)\, d\gamma \ ,\ q > 0 \ .$$

<u>Théorème 1</u>: (i) La fonction f_h est différentiable et sa dérivée est donnée par

(6) $$f_h'(q) = \int_{\Gamma_2} u_h(q)\, d\gamma \ ,\ \ \forall\, q ,\ h > 0 \ .$$

(ii) Il existe une constante géométrique $C_h = C_h(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) > 0$ telle que

$$a(u_h(q), u_h(q)) = C_h q^2 , \quad q, h > 0 , \tag{7}$$
$$f_h(q) = q B | \Gamma_2 | - \tfrac{1}{2} C_h q^2 , \quad q, h > 0 .$$

(iii) Si

$$q > q_{0_h}(B) , \tag{8}$$

alors (4) représente le cas stationnaire discret d'un problème de Stefan à deux phases (c'est-à-dire, $u_h(q)$ est une fonction de signe non- constante dans Ω) où $q_{oh} = q_{oh}(B)$ est donné par

$$q_{0_h}(B) = \frac{B | \Gamma_2 |}{C_h} > 0 , \quad \forall B > 0 . \tag{9}$$

(iv) Par ailleurs, on a

$$C_h < C , \quad q_0(B) < q_{0h}(B) , \quad \forall B, h > 0 . \tag{10}$$

(v) Si $h, B > 0$, alors on a les estimations suivantes:

$$0 < C - C_h \leq C_0^2 \; | u_3 |^2_{2,\Omega} \; h^2 , \tag{11}$$
$$0 < q_{0_h}(B) - q_0(B) \leq \frac{C_0^2 \; | u_3 |^2_{2,\Omega}}{C} \; q_{0_h}(B) \; h^2 ,$$

où u_3 est la solution de l'équation variationnelle ($u_q = B - qu_3$) dans Ω

$$a(u_3, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma , \quad \forall v \in V_0 , \tag{12}$$
$$u_3 \in V_0 ,$$

et $C_0 > 0$ est une constante caractérisée par la propriété d'interpolation [Ci]

$$|| v - \Pi_h(v) ||_{1,\Omega} \leq C_0 \, | v |_{2,\Omega} \, h , \quad \forall v \in H^2(\Omega) , \tag{13}$$

avec Π_h l'opérateur d'interpolation $\Pi_h : V_0 \cap H^2(\Omega) \rightarrow V_h$ correspondante.

(vi) Si h, B > 0 et l'on choisit un paramètre $\epsilon_0 \in (0,1)$, alors on a les estimations suivantes:

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
&q_0(B) < q_{0_h}(B) \leq \frac{q_0(B)}{\epsilon_0}\,, \quad \forall\, h \leq h_0\,(\,\epsilon_0),\\
&0 < q_{0_h}(B) - q_0(B) \leq \frac{C_0^2 \mid u_3 \mid^2_{2,\Omega}}{C\,\epsilon_0} \quad q_0(B)\ \ h^2\,,\ \forall\, h \leq h_0\,(\,\epsilon_0),
\end{aligned}
$$

où

$$
(15) \qquad h_0\,(\,\epsilon_0) = \frac{[C(1-\epsilon_0)]^{\ 1/2}}{C_0 \mid u_3 \mid_{2,\Omega}} > 0\,, \quad \forall\, \epsilon_0 \in (0,1)\,.
$$

(vii) Si B > 0, alors on a la limite suivante

$$
(16) \qquad \lim_{h \to 0^+} \ q_{0_h}(B) = q_0(B)\,.
$$

CHAPITRE 4: QUELQUES PROBLEMES D'OPTIMISATION DE FLUX DE CHALEURS DANS DES DOMAINES AVEC DES CONTRAINTES SUR LA TEMPERATURE [19, 22].

On va étudier deux problèmes d'optimisation qui sont reliés au problème (II-6) ou (II-7).

Pour le cas général $b = b(x) > 0$ sur Γ_1 (i.e. $B = B(x) > 0$ sur Γ_1) et $q = q(x)$ sur Γ_1 , on peut considerer le problème d'optimisation suivant : Trouver $q \in Q^+$ de manière qu'il produit le maximum flux de chaleur totale sur Γ_2 avec la condition de ne pas avoir un changement de phase dans Ω, c'est à dire:

(1) $$\operatorname*{Max}_{q \in Q^+} F(q)$$

où

(2)
$$F : Q \to \mathbb{R} \quad / \quad F(q) = \int_{\Gamma_2} q \, d\gamma \, ,$$
$$Q = H^{1/2}(\Gamma_2) \ , \ S = \{ v \in K \ / \ \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \}$$
$$S^+ = \left\{ v \in S \ / \ v \geq 0 \text{ dans } \Omega \right\} \, ,$$
$$Q^+ = T^{-1}(S^+) = \left\{ q \in Q \ / \ u_q \geq 0 \ \text{ dans } \Omega \right\} \, .$$

avec $T : Q \ \to \ S$ la fonction définie par

(3) $$T(q) = u$$

où u_q est l'unique solution de l'équation variationnelle (II-7). On suppose que le domaine Ω et les données B sur Γ_1 (e.g. $B \in H^{3/2}(\Gamma_1)$ et q sur Γ_2 (e.g. $q \in Q$) sont réguliers de manière d'avoir la propriété de régularité $u_q \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (pour $n \leq 3$, $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ [Fr3, Gr, MS, Ne]. Cette condition est vérifiée pour le cas des données constantes pour les trois exemples mentionnés auparavant [1,A3].

Donc, pour n'importe pas quel flux de chaleur $q \in Q^+$ il n'existira pas un changement de phase dans Ω.

<u>Théorème 1</u>: (i) L'ensemble Q^+ est convexe et l'opérateur F est linéaire (donc convexe).
(ii) Il existe une unique solution $\bar{q} \in Q^+$ telle que

(4) $$F(\bar{q}) = \operatorname*{Max}_{q \in Q^+} F(q) \ .$$

En plus, l'élément $\bar{q}$ est défini par

$$\bar{q} = -\frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} \tag{5}$$

où ω est donnée par

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0 \ \text{ dans } \Omega \ , \\ \omega|_{\Gamma_1} = B \ \ , \omega|_{\Gamma_2} = 0 \ . \end{cases} \tag{6}$$

Remarque 1: On utilise la théorie des multiplicateurs de Lagrange [Ben, EkTe]. Par ailleurs, l'espace Q peut être remplacé par $L^2(\Omega)$ [22].

Pour le cas général $b = b(x) > 0$ sur Γ_1 et $q = q(x) > 0$ sur Γ_2 , on peut considerer le deuxiéme problème d'optimisation: Trouver la borne supérieure maximum du flux de chaleur q sur Γ_2 avec la condition de ne pas avoir un changement de phase dans Ω, c'est à dire:

$$\text{Trouver } q_M^0 > 0 \ / \ u_q \geq 0 \text{ dans } \Omega \ , \ \forall q = q(x) \leq q_M^0 \text{ sur } \Gamma_2 \ . \tag{7}$$

Théorème 2: (i) Si $q = \text{Const.} > 0$, alors on a

$$q_M^0 = \operatorname*{Inf}_{x \in \Gamma_2} \frac{u_1(x)}{u_3(x)} \ , \tag{8}$$

où u_3 est donné par (III-12) et u_1 est la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \text{ dans } \Omega \ , \\ u_1 /_{\Gamma_1} = B \ , \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \ . \end{cases} \tag{9}$$

(ii) Si $q = q(x) > 0$ sur Γ_2 satisfait la condition

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \Gamma_2} q(x) \leq q_M^0 \ , \tag{10}$$

où q_M^0 est donné par (8), alors on a $u_q \geq 0$ dans Ω.

(iii) Pour le cas constant, on obtient $q_M^0 = q_c$.

Remarque 2 : Un autre problème d'optimisation a été étudié dans [22].

CHAPITRE 5: DES CONDITIONS NECESSAIRES ET/OU SUFFISANT POUR LE FLUX DE CHALEUR ET LE COEFFICIENT DE TRANSFERENCE POUR OBTENIR UNE SOLUTION DE SIGNE NON-CONSTANTE [19, 21, 32, 36, A3].

Si l'on considère un coefficient de transference de la chaleur $\alpha > 0$ sur la partie de frontière Γ_1, on peut remplacé le problème (II-6) par le suivant

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega , \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \alpha (u - B) , \ B = k_2 b > 0 , \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q \quad , \end{cases}$$

ce qui a la formulation variationnelle suivante :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} a_\alpha(u,v) = L_{\alpha q B}(v) , \ \forall \ v \in V , \\ u \in V , \end{cases}$$

où

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \displaystyle\int_{\Gamma_1} u \, v \, d\gamma \ , \\ L_{\alpha q B}(v) = L_q(v) + \alpha \displaystyle\int_{\Gamma_1} B \, v \, d\gamma \, . \end{cases}$$

La solution de l'équation variationnelle (2) est caractérisée par le problème de minimum

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} G(u) \leq G(v) \quad , \quad \forall \ v \in V \quad , \\ u \in V \quad , \end{cases}$$

où

$$\text{(5)} \qquad G(v) = G_{\alpha q B}(v) = \frac{1}{2} a_\alpha(v,v) - L_{\alpha q B}(v) = J_q(v) + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_1} v^2 \, d\gamma \, - \\ - \alpha \int_{\Gamma_1} B v \, d\gamma \, .$$

Pour le cas particulier

(6) $\quad q = \text{Const.} > 0 \ , \ b = \text{Const.} > 0 \ (B = k_2\, b > 0) \ , \ \alpha > 0$

on introduit la fonction $g : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$, définie par

(7)
$$g(\alpha,q,B) = G_{\alpha qB}(u_{\alpha qB}) = -\tfrac{1}{2}\, a_\alpha(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\, L_{\alpha qB}(u_{\alpha qB}) = \frac{q}{2}\int_{\Gamma_2} u_{\alpha qB}\, d\gamma - \frac{\alpha\, B}{2}\int_{\Gamma_1} u_{\alpha qB}\, d\gamma \le 0 \, .$$

<u>Théorème</u> <u>1</u>. (i) La fonction g a des dérivées partielles et elles sont données par

(8)
$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha,q,B) = \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{2}\, u^2_{\alpha qB} - B\, u_{\alpha qB} \right) d\gamma \ ,$$

(9)
$$\frac{\partial g}{\partial q}(\alpha,q,B) = \int_{\Gamma_2} u_{\alpha qB}\, d\gamma \ ,$$

(10)
$$\frac{\partial g}{\partial B}(\alpha,q,B) = -\, \alpha \int_{\Gamma_1} u_{\alpha qB}\, d\gamma \ .$$

(ii) Il existe une fonction $A = A(\alpha) > 0$, définie par $\alpha > 0$, de manière que

(11)
$$g(\alpha,q,B) = -\frac{A(\alpha)}{2}\, q^2 + B\, q\, |\,\Gamma_2\,| - \frac{B^2\, \alpha}{2}\ |\,\Gamma_1\,| \ .$$

En plus, la fonction $A = A(\alpha)$ est décroissante et vérifie les propriétés suivantes:

$$A(\alpha) > \frac{|\,\Gamma_2\,|^2}{|\,\Gamma_1\,|}\, \frac{1}{\alpha} \quad (\text{ donc } A(0^+) = +\infty\,)$$

(12)
$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = C \ , \ \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha\, A'(\alpha) = 0 \ ,$$
$$(\, \alpha\, A(\alpha)\,)' = \frac{1}{q^2}\, a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) \ ,$$

où $C > 0$ est la constante définie dans (II-4). En plus, on a

(13)
$$\int_{\Gamma_2} U_\alpha\, d\gamma = A(\alpha) \ , \ \forall \alpha > 0 \, ,$$

où $U_\alpha > 0$ dans Ω est la solution de l'équation variationnelle

$$(14)\qquad \begin{cases} a_\alpha(U_\alpha,v) = \int_{\Gamma_2} v\, d\gamma \;,\quad \forall v \in V \;, \\ U_\alpha \in V \;. \end{cases}$$

<u>Théorème 2</u>: (i) Si $q > q_0(B)$ alors (1) ou (2) représente le cas stationnaire d'un problème de Stefan à deux phases (c'est à dire, $u_{\alpha qB}$ est une fonction de signe non-constant dans Ω) pour tout $\alpha > \alpha_0(q,B)$, où

$$(15)\qquad \alpha_0(q,B) = \frac{q \mid \Gamma_2 \mid}{B \mid \Gamma_1 \mid} > 0 \;,\; q > 0 \;,\; B > 0 \;.$$

(ii) Le problème (1) ou (2) représente le cas stationnaire d'un problème de Stefan à deux phases si et seulement si le flux de chaleur q satisfait les inégalités suivantes:

$$(16)\qquad q_1(\alpha,B) < q < q_2(\alpha,B) \;,\; \alpha > 0 \;,\; B > 0 \;,$$

où $q_1 = q_1(\alpha,B)$ et $q_2 = q_2(\alpha,B)$ sont donnés par

$$(17)\qquad q_1(\alpha,B) = \underset{\Gamma_2}{\mathrm{Min}} \left(\frac{B}{U_\alpha}\right) \;,\; q_2(\alpha,B) = \underset{\Gamma_1}{\mathrm{Max}} \left(\frac{B}{U_\alpha}\right) \;,\; \alpha > 0 \;,\; B > 0 \;.$$

(iii) L'ensemble $S^{(2)}(B)$ n'est pas vide pour tout $B > 0$, où

$$(18)\qquad S^{(2)}(B) = \left\{(\alpha,q) \in (\mathbf{R}^+)^2 \,/\, q_m(\alpha,B) < q < q_M(\alpha,B) \;,\; \alpha > 0 \right\},\; B > 0 \;,$$

avec $q_m = q_m(\alpha,B)$ et $q_M = q_M(\alpha,B)$ deux fonctions réelles, définies par:

$$(19)\qquad q_m(\alpha,B) = \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{A(\alpha)} \;,\; q_M(\alpha,B) = \frac{B\, \alpha \mid \Gamma_1 \mid}{\mid \Gamma_2 \mid} \;,\; \alpha > 0 \;,\; B > 0 \;.$$

En plus, on a les propriétés suivantes:

$$(20)\qquad \begin{cases} q_m(0^+,B) = q_M(0^+,B) = 0 \;,\; \forall\, B > 0 \;, \\ q_m(\alpha,B) < q_M(\alpha,B) \;,\; \forall\, \alpha > 0 \;,\; \forall\, B > 0 \;, \\ \lim_{\alpha \to +\infty} q_m(\alpha,B) = q_0(B) \;,\; \forall\, B > 0 \;, \\ q_m \text{ est une fonction croissante de la variable } \alpha \;, \end{cases}$$

et les estimations

(21) $\quad q_1(\alpha,B) \le q_m(\alpha,B) < q_M(\alpha,B) \le q_2(\alpha,B) \quad , \quad \forall\ \alpha,\ B > 0\ .$

Par ailleurs, on a les équivalences suivantes:

$$(22) \qquad \begin{aligned} q_1(\alpha,B) = q_m(\alpha,B) \ &\Leftrightarrow\ U_\alpha \mid_{\Gamma_2} = \text{const.}\ \left(= \frac{A(\alpha)}{|\Gamma_2|} \right), \\ q_2(\alpha,B) = q_M(\alpha,B) \ &\Leftrightarrow\ U_\alpha \mid_{\Gamma_1} = \text{const.}\ \left(= \frac{|\Gamma_2|}{\alpha\,|\Gamma_1|} \right), \end{aligned}$$

et

$$(23) \qquad \begin{aligned} \int_{\Gamma_1} u_{\alpha q B}\, d\gamma > 0 \ &\Leftrightarrow\ q < q_M(\alpha,B) \ , \\ \int_{\Gamma_2} u_{\alpha q B}\, d\gamma < 0 \ &\Leftrightarrow\ q > q_m(\alpha,B) \ . \end{aligned}$$

(iv) Si $(\alpha,q) \in S^{(2)}(B)$, alors (1) ou (2) représente le cas stationnaire d'un problème de Stefan à deux phases.

__Théorème 3__: Si on a le cas particulier pour lequel la fonction $u_{\alpha qB}$ vérifie la condition

(24) $\quad \frac{1}{q^2}\, a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) = \text{Const.}\ (= \text{Const}(\alpha,q,B)\ )\ ,\ \forall \alpha,\ q,\ B > 0\ ,$

alors la fonction $A = A(\alpha)$ est donnée explicitement par la formule suivante:

(25) $\quad A(\alpha) = C + \frac{1}{\alpha}\, \frac{|\Gamma_2|^2}{|\Gamma_1|} \quad , \quad \alpha > 0\ .$

__Remarque 1__: Les trois exemples, donnés dans [1, A3], vérifient la condition (24) et donc, on a la description complète de l'ensemble $S^{(2)}(B)$, pour tout $B > 0$.

__Remarque 2__ : Un autre problème d'optimisation a été étudié dans [36].

__Remarque 3__ : Dans [32], on calcul q_m et q_M en utilisant le software scientifique MODULEF.

III.2.2.

SUR LE PROBLEME DE L'OBSTACLE

CHAPITRE 6: UN PROBLEME INVERSE DE L'OBSTACLE UNIDIMENSIONNEL AVEC UNE ZONE DE CONTACTE CONNEXE [5].

On considère l'ensemble $\Omega=(-R, R)$ avec $R>0$, et la fonction paire $\Psi : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$. Soit

$$(1) \qquad A = \left\{ \phi \in C^2[0,R) \cap C^0[0,R] \;/\; \phi(R) < 0 \;,\; \phi'(0) = 0 \;,\; \phi(0) > 0 \right\} .$$

Dans la suite, on posera $\Psi \in A$ en considerant l'extension paire à $\bar{\Omega}$.

Le problème de l'obstacle est donné par [BaCa, Ki, LeSt]: Trouver une fonction paire $u \in C^1(\bar{\Omega})$ telle que'elle satisfait les conditions suivantes:

$$(2) \qquad \begin{aligned} & u'' \leq 0 \text{ dans } [0,R) \;, \\ & u''(u-\Psi) = 0 \text{ dans } [0,R) \;, \\ & u \geq \Psi \text{ dans } [0,R) \;, \\ & u(R) = 0 \;, \\ & u' = \Psi' \text{ sur } \partial\Omega^* \;, \end{aligned}$$

où Ω^* est l'ensemble de coincidence, défini par

$$(3) \qquad \Omega^* = \left\{ x \in \Omega \;/\; u(x) = \Psi(x) \right\} .$$

Si u est une solution de (2) avec un ensemble de coincidence connexe, alors elle est donnée par

$$(4) \qquad u(x) = \begin{cases} \Psi(x) & \text{si} \quad x \in [0,\xi] \;, \\ \Psi'(\xi)\,(x-R) & \text{si} \quad x \in [\xi,R) \;, \end{cases}$$

où l'élément $\xi \in (0,R)$ doit satisfaire l'équation

$$(5) \qquad g(x) = 0 \;,\; 0 < x < R \;,$$

où la fonction $g=g(x)$ est définie par:

$$(6) \qquad g(x) = \Psi(x) + \Psi'(x)\,(R-x) \;.$$

<u>Remarque 1</u>: La condition précédente n'est pas suffisant pour que Ω^* soit connexe, car on a le contre-exemple suivant:

$$\Psi(x) = 4\pi - x + \text{sen } x \ , \ R = 4\pi + 1 > 0 \ ,$$

(7)

$$\Omega^* = [0,\tfrac{\pi}{2}] \cup \left\{\tfrac{5\pi}{2}\right\} \ .$$

<u>Théorème 1</u>: (i) Soit $\Psi \in A$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

(a) La solution de (2) est donnée par (4).

(b) L'obstacle Ψ satisfait

$$\Psi''(x) \leq 0 \ , \ \forall \ x \in [0,\eta] \ ,$$

(8)

$$\Psi'(x) \geq \Psi'(\eta) \ , \ \forall \ x \in N \ ,$$

où

$$N = N_g = \left\{x \in (0,R) \ / \ g(x) = 0\right\} \ ,$$

(9)

$$\eta = \text{Min } Ng \ .$$

(ii) Soit $\Psi \in A$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(a) L'ensemble Ω^* est connexe.

(b) Il existe $\epsilon \geq 0$ tel que

$$\Psi''(x) \leq 0 \ , \ \ x \in [0,\eta] \ ,$$

$$\Psi'(x) = \Psi'(\eta) \ , \ \ x \in [\eta, \eta+\epsilon] \ , \tag{10}$$

$$\Psi'(x) > \Psi'(\eta) \ , \ \ x \in N \cap (\eta+\epsilon,R) \ .$$

(iii) L'opérateur $T : G \to A$, défini par:

$$T(g) = \Psi \tag{11}$$

avec

$$G = \left\{g \in C^1[0,R) \ / \ g(0) > 0 \quad \text{et } \exists \lim_{x \to R^-} (R-x) \int_0^x \frac{g(t)}{(R-t)^2}\, dt\right\} \tag{12}$$

$$\Psi(x) = \frac{g(0)}{R}(R-x) + (R-x)\int_0^x \frac{g(t)}{(R-t)^2}\, dt \ , \tag{13}$$

est une application bijective.

(iv) On obtient

(14)
$$G_1 = \tilde{G}_1 \;,$$
$$T(G_1) = \Big\{ \Psi \in A \;/\; \text{la solution de (2) satisfait (4)} \Big\}$$

avec

(15)
$$G_1 = \Big\{ g \in G \;/\; g' \le 0 \text{ dans } [0,\xi] \;\text{ et }$$
$$\int_\xi^\eta \frac{g(t)}{(R-t)^2}\,dt \le 0 \;,\; \forall\, \eta \in N_g \;,\; \xi = \text{Min } Ng \Big\} \;.$$

(16)
$$\tilde{G}_1 = \Big\{ g \in G \;/\; g' \le 0 \text{ dans } [0,\xi] \;\text{ et } \int_\xi^x \frac{g(t)}{(R-t)^2}\,dt \le 0 \;,\; \forall\, x \in [\xi,R] \;,$$
$$\xi = \text{Min } Ng \Big\} \;.$$

(v) On obtient

(17)
$$G_2 = \tilde{G}_2 \;,\; T(G_2) = \Big\{ \Psi \in A \;/\; \Omega^* \text{ est connexe} \Big\} \;,$$

avec

(18)
$$\tilde{G}_2 = \Big\{ g \in G \;/\; g' \le 0 \text{ dans } [0,\xi] \;,\; g' = 0 \text{ dans } [\xi,\, \xi+\epsilon] \;,$$
$$\int_\xi^x \frac{g(t)}{(R-t)^2}\,dt < 0 \;, \forall\, x \in (\xi+\epsilon,R) \text{ avec } \xi = \text{Min } N_g \text{ et } \epsilon \ge 0 \Big\} \;,$$

(19)
$$G_2 = \Big\{ g \in G \;/\; g' \le 0 \text{ dans } [0,\xi] \;,\; g' = 0 \text{ dans } [\xi,\, \xi+\epsilon] \;,$$
$$\int_\xi^\eta \frac{g(t)}{(R-t)^2}\,dt < 0 \;, \forall \eta \in N_g \cap (\xi+\epsilon,R) \text{ avec } \xi = \text{Min } N_g \text{ et } \epsilon \ge 0 \Big\} \;.$$

__Remarque 2__: On a $\tilde{G} \subset G$, ou

$$(20) \qquad \tilde{G} = \left\{ g \in C^1[0,R] \cap C^0[0,R] \;/\; g(0) > 0 \text{ et } g(R) < 0 \right\}.$$

Par ailleurs, la fonction g définie par

$$(21) \qquad g(x) = \mathrm{Cos}\left(\frac{1}{R-x}\right) - C \;\;,\;\; R > \frac{2}{\pi} \;\;, 0 < C < \mathrm{Cos}(1/R) \;,$$

vérifie que $g \in G$ et $g \notin \tilde{G}$. En plus, on a

$$(22) \qquad T(\tilde{G}) = \left\{ \Psi \in A \;/\; \lim_{x \to R-} \Psi'(x)\,(R-x) = 0 \right\}.$$

__Remarque 3__: On peut aussi étudier le problème avec symmetrie radial dans $\mathbf{R}^2$. Dans ce cas on a

$$(23) \qquad g(r) = \Psi(r) + r\,\Psi'(r) \log \frac{R}{r} \;\;,\;\; 0 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < R \;,$$

et

$$(24) \qquad \Psi(r) = \log\left(\frac{R}{r}\right) \int_0^r \frac{g(t)}{t \log^2\left(\frac{R}{t}\right)}\, dt \;.$$

__Remarque 4__: On peut obtenir des exemples avec un ensemble de coincidence donné en fixant d'abord la fonction g et en obtenant l'obstacle Ψ par la résolution du problème inverse correspondant, c'est-à-dire la formule (13) ou (24) pour le cas unidimensionnel ou radial respectivement.

III.3.

PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE
DU TYPE PARABOLIQUE

III.3.1.

PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR

CHAPITRE 7: UNE GENERALISATION DE LA SOLUTION EXACTE DE LAME-CLAPEYRON POUR LE PROBLEME DE STEFAN A UNE PHASE [34].

La solution de Lamé-Clapeyron [LaCl] est celle qui correspond à la solution du problème de Stefan à une phase pour un matériau semi-infini avec des coefficients thermiques constants. Le problème consiste à trouver la interphase solide-liquide (la frontière libre) $x = s(t) > 0$, définie pour $t > 0$ avec $s(0) = 0$, et la température de la phase liquide $\theta = \theta(x,t) > 0$, définie pour $0 < x < s(t)$, $t>0$, tel que elles satisfont les conditions suivantes:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\rho c\, \theta_t - k\, \theta_{xx} = 0 \;,\; 0 < x < s(t) \;,\; t > 0 \;, \\ &\theta(0,t) = B > 0 \;,\; t > 0 \;, \\ &\theta(s(t),t) = 0 \;,\; t > 0 \;, \\ &k\, \theta_x(s(t),t) = -\rho h\, \dot{s}(t) \;,\; t > 0 \;, \\ &s(0) = 0 \;, \end{aligned}$$

où $k > 0$, $\rho > 0$ et $c > 0$ sont la conductivité calorique, la densité de masse et la chaleur spécifique par unité de masse de la phase liquide, et $h > 0$ la chaleur latente de fusion par unité de masse.

Si l'on introduit, pour convenience, les notations suivantes

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\alpha = \frac{k}{\rho\, c} > 0 : \text{diffusion calorique } (a = \sqrt{\alpha} > 0) \;, \\ &\text{Ste} = \frac{B\, c}{h} > 0 : \text{numéro de Stefan} \;, \end{aligned}$$

alors la solution du problème (1) est donnée par

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\theta_0(x,t) = B \left(1 - \frac{1}{\operatorname{erf}(\xi_0)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) \;, \\ &s_0(t) = 2a\, \xi_0 \sqrt{t} \;, \end{aligned}$$

où $\xi_0 > 0$ est l'unique solution de l'équation:

$$\text{(4)} \qquad F_0(x) = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}} \;,\quad x > 0$$

avec les notations:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2)\, du \text{ (fonction d'erreur)} \;, \\ &F_0(x) = x \exp(x^2) \operatorname{erf}(x) \;. \end{aligned}$$

On considère maintenant une généralisation du problème (1) avec une source de chaleur particulière, c'està-dire:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\rho c\, \theta_t - k\, \theta_{xx} = \frac{\rho h}{t}\, \beta\!\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ &\theta(0,t) = B > 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \\ &\theta(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \\ &k\, \theta_x(s(t),t) = -\, \rho h\, \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ &s(0) = 0 \ . \end{aligned}$$

Théorème 1: (i) Une solution explicite du problème (6), comme fonction de β, est donnée par

$$(7)\qquad \theta(x,t) = B \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{Ste}\, \xi \exp(\xi^2)\, \mathrm{erf}(\eta) + \frac{4}{Ste} \int_0^{\eta} \left(\int_r^{\xi} \beta(y) \exp(y^2)\, dy \right) \exp(-r^2)\, dr \right\} ,$$

$$s(t) = 2\, a\, \xi \sqrt{t} \quad , \quad \eta = \frac{x}{2\, a \sqrt{t}} \in (0,\xi) \quad ,$$

où l'élément $\xi > 0$ est une solution de l'équation

$$(8)\qquad F(x,\beta) = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad x > 0$$

avec

$$(9)\qquad F(x,\beta) = F_0(x) - 2 \int_0^x \exp(r^2)\, \mathrm{erf}(r)\, \beta(r)\, dr \ .$$

(ii) Soit β une fonction réelle continue sur $\mathbf{R}_0^+$.

(a) Si β vérifie l'inégalité

$$(10)\qquad \beta(x) < \psi_0(x) - \epsilon \quad , \quad \forall\, x \geq 0 \ \text{ pour quelque } \epsilon > 0 \quad ,$$

où

$$(11)\qquad \psi_0(x) = \frac{1}{2} + x^2 + \frac{x}{\sqrt{\pi}}\, G(x) \quad , \quad G(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\mathrm{erf}(x)} \quad ,$$

alors il existe une unique $\xi = \xi(Ste) > 0$ qui est la solution de l'équation (8) pour chaque $Ste > 0$.

(b) Si β vérifie l'inégalité $\beta \leq \psi_C$ dans $\mathbf{R}^+$ pour quelque constante $C < 0$, alors on obtient la même conclusion de la partie (a), où

$$(12) \qquad \psi_C(x) = \psi_0(x) + C\,G(x) \;\;,\;\; x > 0 \;\;,\;\; C \in \mathbf{R} \;.$$

(c) Si β vérifie l'inégalité $\beta \leq \phi_c$ dans $\mathbf{R}^+$ pour quelque constante $C > 0$, alors on obtient au moins une solution $\xi = \xi(\mathrm{Ste}) > 2C\sqrt{\pi}$ de l'équation (8) pour tout Ste > 0, où

$$(13) \qquad \phi_C(x) = \tfrac{1}{2} + x^2 + C\,G(x) = \psi_C(x) - \frac{x\,G(x)}{\sqrt{\pi}} \;\;,\;\; x > 0 \;\;,\;\; C \in \mathbf{R} \;.$$

En plus, si $\beta = \phi_C$ alors l'élément ξ est unique.
(d) Si $\beta \leq 0$ dans $\mathbf{R}_0^+$ alors on a une unique solution ξ de l'équation (8).

Théorème 2: Il existe une solution unique $\xi = \xi(\mathrm{Ste}) > 0$ de l'équation (8) pour tout Ste > 0 et pour une fonction réelle continue β sur $\mathbf{R}^+$ si et seulement si il existe une fonction réelle continue Z sur $\mathbf{R}_0^+$ laquelle vérifie les conditions suivantes:

$$(14) \qquad \begin{aligned} & Z(x) > 0 \;\;,\;\; \forall\, x \in (\nu, +\infty) \;\;, \\ & \int_0^{+\infty} Z(t)\,dt = +\infty \;\;, \end{aligned}$$

où $\nu = \nu_Z \geq 0$ est défini par

$$(15) \qquad \nu = \mathrm{Inf}\left\{ x \geq 0 \;/\; \int_0^x Z(t)\,dt > 0 \right\}.$$

En plus, on a la relation

$$(16) \qquad \beta(x) = \psi_0(x) - Z(x)\,G(x) \;\;,\;\; x > 0 \;\;,$$

et on obtient que

$$(17) \qquad \xi > \nu \,.$$

Remarque 1: On obtient dans [34] des propriétés de monotonie pour la frontière libre et la température, et l'étude pour le cas

$$(18) \qquad 0 < \mathrm{Ste} \ll 1 \;\;,\;\; \beta(x) \approx \beta(0) < 1$$

qui est relié à la solution cuasi-stationnaire du problème (6).

CHAPITRE 8: SUR LE PROBLEME DE STEFAN A UNE PHASE POUR UN LIQUIDE SOUS-GELE [7, 11, B2].

Dans [7], on étudie le problème de Stefan à une phase correspondant au cas d'un liquide surefroidi ("supercooled liquid") suivant: Trouver le triplet (T,s,z) tel que:

(i) $T > 0$;

(ii) $s=s(t)$ est une fonction continue positive dans $[0,T)$, et en plus $s \in C^1(0,T)$;

(iii) $z=z(x,t)$ est une fonction continue et bornée dans $0 \leq x \leq s(t)$, $0 \leq t < T$;

$z_x = z_x(x,t)$ est une fonction bornée dans le même domaine et continue, suf sur un numéro fini des points sur la frontière parabolique; z_{xx} et z_t sont continues dans $0 < x < s(t)$, $0 < t < T$;

(iv) les conditions suivantes sont satisfait:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
& z_{xx} - z_t = 0 \ , \qquad \text{dans} \quad D_T = \Big\{(x,t) \ / \ 0 < x < s(t) \ , 0 < t < T\Big\} \ , \\
& s(0) = 1 \ , \\
& z(x,0) = 0 \ , \ 0 < x < 1 \ , \\
& z_x(0,t) = g(t) \ , \ 0 < t < T \ , \\
& z(s(t),t) = 0 \ , \ 0 < t < T \ , \\
& z_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) \ , \ 0 < t < T \ ,
\end{aligned}
$$

où $g=g(t)\geq 0$ est une fonction continue par morceaux dans $(0,+\infty)$ et bornée dans tout intervalle finie $(0,t)$, $t>0$.

__Remarque 1:__ Le problème (1) est relié au problème de la diffusion-consommation de l'oxygène dans les tissus vivants [CrGu] à travers le changement de fonction inconnue suivante:

$$
(2) \qquad u(x,t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_\xi^{s(t)} [1+ z(y,t)] \, dy \ .
$$

Par [FaPr3] l'un des trois cas suivants peut avoir lieu;

(A) Il existe une solution pour tout $T > 0$;

(B) Il existe un temps $T_B > 0$ tel que $\lim_{t \to T_B^-} s(t) = 0$;

(C) Il existe un temps $T_c > 0$ tel que

$$
\operatorname*{Inf}_{t\in(0,T_c)} s(t) > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to T_c} \operatorname{Inf} \dot{s}(t) = -\infty \ .
$$

<u>Théorème 1</u>: (i) On a les estimations suivantes:

$$G(t)\,(x-1) \le z(x,t) \le 0 \quad \text{dans } D_T \ ,$$

(3) $$\dot{s}(t) \le 0 \ , \quad 0 < t < T \ ,$$

$$z_x(x,t) \ge 0 \quad \text{dans } D_T \ ,$$

où

$$G(t) = \sup_{0 < \tau < t} g(\tau) \ .$$

(ii) On a les expressions suivantes ($0<t<T$):

(4) $$s(t) = 1 - \int_0^t g(\tau)\, d\tau - \int_0^{s(t)} z(x,t)\, dx \ ,$$

(5) $$\frac{s^2(t) - 1}{2} = \int_0^t z(0,\tau)\, d\tau - \int_0^{s(t)} x\, z(x,t)\, dx \ ,$$

(6) $$\frac{s^3(t) - 1}{3} = 2 \int_0^1 d\tau \int_0^{s(\tau)} z(x,\tau)\, dx - \int_0^{s(t)} x^2\, z(x,t)\, dx \ .$$

(iii) Si l'on a le cas (C) alors

(7) $$\int_0^{T_C} g(t)\, dt > 1 \ .$$

(iv) Si l'on a le cas (B) alors

(8) $$\int_0^{T_B} g(t)\, dt = 1 \ .$$

(v) S'il existe $T_0 > 0$ tel que

(9) $$\int_0^{T_0} g(t)\, dt = 1 \qquad \text{et} \qquad g \le 1 \text{ dans } (0,T_0) \ ,$$

alors on a le cas (B).

(vi) La condition nécessaire et suffisante pour avoir le cas (A) c'est qu'on ait

(10) $$\int_0^t g(\tau)\, d\tau < 1 \ , \quad \forall\, t > 0 \ .$$

Remarque 2: Dans [7] on étudie le cas $g(t) = \text{Const.} > 0$ et on complète les estimations pour avoir soit le cas (B) ou le cas (C) [Pr2]. On donne aussi des estimations sur la frontière libre.

Dans [11] on étudie un problème de Stefan à une phase pour l'équation de la chaleur avec une condition intégral du type [Ca1, CaVa1, CaVa2] (la fonction E a un signe quelconque):

$$\int_0^{s(t)} z(x,t)\,dx = E(t) \ , \tag{11}$$

c'est-à-dire, on remplace le problème (1) par le suivant:

$$\begin{aligned} & z_{xx} - z_t = 0 \quad \text{dans } D_T \ , \\ & s(0) = b \ , \ b > 0 \ , \\ & z(x,0) = \phi(x) \ , \ 0 < x < b \ , \\ & z_x(s(t),t) = 0 \ , \ 0 < t < T \ , \\ & z_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) \ , \ 0 < t < T \ , \\ & \int_0^{s(t)} z(x,t)\,dx = E(t) \ , \ 0 < t < T \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Théorème 2: Sous les hypothèses

$$\begin{aligned} & \phi \in C^1[0,b] \ , \ \phi(b) = 0 \ , \\ & E \in C^1[0,T] \ , \ E(0) = \int_0^b \phi(x)\,dx \end{aligned} \tag{13}$$

on a les propriétés suivantes:

(i) Le flux de chaleur sur le bord fixe $x=0$ est donné par

$$z_x(0,t) = -\dot{E}(t) - \dot{s}(t) \ , \ 0 < t < T \ . \tag{14}$$

(ii) z et s est la solution du problème (12) si et seulement si la fonction

$$v(t) = z_x(s(t),t) \tag{15}$$

et la solution de l'équation intégrale

$$v = \mathcal{T}(v) \tag{16}$$

et s est donnée par

$$s(t) = b - \int_0^t v(\tau)\, d\tau \tag{17}$$

où l'opérateur $\mathcal{T}$ est défini par l'expression suivante:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(v)(t) = {} & 2\int_0^t N_x(s(t),t\,;\,s(\tau),\tau)\, v(\tau)\, d\tau - 2\int_0^t N_x(s(t),t\,;\,0,\tau)\, v(\tau)\, d\tau - \\ & - 2\, E(0)\, N_x(s(t),t\,;\,0,0) - 2\int_0^t N_{x\tau}(s(t),t\,;\,0,\tau)\, E(\tau)\, d\tau + \\ & + 2\int_0^b G(s(t),t\,;\,\xi,0)\, \phi'(\xi)\, d\xi \ ,\end{aligned} \tag{18}$$

avec G et N les fonctions de Green et de Neumann pour l'équation de la chaleur respectivement :

$$\begin{aligned} G(x,t\,;\,\xi,\tau) &= K(x,t\,;\,\xi,\tau) - K(-x,t\,;\,\xi,\tau) \ , \\ N(x,t\,;\,\xi,\tau) &= K(x,t\,;\,\xi,\tau) + K(-x,t\,;\,\xi,\tau) \ , \end{aligned} \tag{19}$$

et K est la solution fondamentale, donnée par:

$$K(x,t\,;\,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) \ , \quad t > \tau \ . \tag{20}$$

(iii) L'équation intégrale (18) a une seule solution pour $t \in [0,T]$ avec un instant $T > 0$ choisi suffisantement petit.

(iv) La fonction $\dot{s}$ est continue pour $t = 0$. En plus, on a

$$\dot{s}(0) = \phi'(b) \ . \tag{21}$$

<u>Remarque</u> <u>3</u> : On utilise la méthode de l'équation intégrale [Fr1, Ru, Sh1]. On démontre que l'opérateur $\mathcal{T}$ est une contraction sur l'espace de Banach

$$X_{T,M} = \left\{ v \in C[0,T] \;/\; \|v\| = \max_{0\le t\le T} |v(t)| \le M \right\} \tag{22}$$

avec $M > 0$ et $T > 0$ choisi convénientement.

<u>Remarque</u> <u>4</u>: On étudie aussi dans [11] des propriétés de la dépendence continue de la solution par rapport aux données et le comportement asymptotique de la frontière libre.

CHAPITRE 9: SUR LA SOLUTION DE NEUMANN POUR LE PROBLEME DE STEFAN A DEUX PHASES [2, 10, 14, 25].

La solution de Neumann pour le problème de Stefan à deux phases pour un matériau semi-infini est la solution du problème suivant: Trouver les fonctions $x=s(t)>0$ (frontière libre), définie pour $t>0$ avec $s(0)=0$, et la température

$$(1) \qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t) > 0 & \text{si} \quad 0 < x < s(t) \;,\; t > 0 \;, \\ 0 & \text{si} \quad x = s(t) \;,\; t > 0 \;, \\ \theta_1(x,t) < 0 & \text{si} \quad x > s(t) \;,\; t > 0 \;, \end{cases}$$

définie pour $x>0$ et $t>0$, de manière que elles satisfont les conditions suivantes:

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho c_2\, \theta_{2_t} - k_2\, \theta_{2_{xx}} = 0 \quad , \quad 0 < x < s(t) \,,\; t > 0 \;, \\ \text{(ii)} & \rho c_1\, \theta_{1t} - k_1\, \theta_{1xx} = 0 \quad , \quad x > s(t) \,,\; t > 0 \;, \\ \text{(iii)} & s(0) = 0 \quad , \\ \text{(iv)} & \theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0 \;, \quad t > 0 \;, \\ \text{(v)} & k_1\, \theta_{1_x}(s(t),t) - k_2\, \theta_{2_x}(s(t),t) = \rho\, h\, \dot{s}(t) \;, \quad t > 0 \;, \\ \text{(vi)} & \theta_1(x,0) = \theta_1(+\infty,t) = -\,C < 0 \;,\; x > 0 \;,\; t > 0 \;, \\ \text{(vii)} & \theta_2(0,t) = B > 0 \quad , \quad t > 0 \;. \end{array}$$

Elle est donnée par [Br, CaJa, Ru, We]

$$\theta_1(x,t) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \;,\; a_1^{\,2} = \alpha_1 = \frac{k_1}{\rho c_1} \;,$$

$$(3) \qquad \theta_2(x,t) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \;,\; a_2^{\,2} = \alpha_2 = \frac{k_2}{\rho c_2} \;,$$

$$s(t) = 2\,\sigma\,\sqrt{t}$$

où $\alpha_1 = \alpha_1(\sigma)$, $\alpha_2 = \alpha_2(\sigma)$, $\beta_1 = \beta_1(\sigma)$, $\beta_2 = \beta_2(\sigma)$ et $\sigma>0$ est l'unique solution d'une certaine équation.

On considère comme problème (2bis) celui donné par les conditions (2i)-(2vi) et (2viibis) où

(2viibis) $\quad k_2\, \theta_{2x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}\ ,\ t > 0$

avec $q_0 > 0$ [2].

Théorème 1: (i) Il existe une solution du type Neumann pour le problème (2bis) si et seulement si q_0 vérifie l'inégalité suivante

$$(4) \qquad q_0 > \frac{C\, k_1}{\sqrt{\pi}\, a_1}\ .$$

(ii) Si $q_0 \leq C\, k_1/\sqrt{\pi}\, a_1$, alors le problème (2bis) est un problème de conduction de la chaleur pour la phase solide initiale. Si $q_0 = C\, k_1/\sqrt{\pi}\, a_1$, alors le problème (2bis) est la limite lorsque $h \to +\infty$ dans le problème (2).

(iii) Le coefficient σ de la solution de Neumann (3) satisfait l'inégalité

$$(5) \qquad \mathrm{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2} \right) < \frac{B}{C} \sqrt{\frac{k_2\, c_2}{k_1\, c_1}}\ .$$

(iv) Avec la condition (4), les problèmes (2) et (2bis) sont équivalents.

Remarque 1: La condition (2viibis) va se tenir compte au problème de la détermination des coefficients thermiques (chapitre 11).

Remarque 2: Le théoreme précédent a été généralisé au cas $\rho_1 \neq \rho_2$ (densité de masse différente) dans [10].

Remarque 3: A propos d'un modèle pour un matériau avec chaleur latente de fusion négligeable [Gu] on étudie le comportement de (3) lorsque $h \to 0^+$[17]. Pour une phase, l'étude avait été faite dans [Sh2].

Remarque 4: Dans [25], on généralise la solution de Neumann p[our le problème de Stefan à deux phases avec un simple modèle de zone pâteux [SWA1] à deux paramètres qui a deux frontières libres. On obtient aussi une inégalité qui généralise à (4), en fonction des coefficients thermiques du matériau, des deux paramètres du modèle et des températures initiale et au bord fixe constantes.

CHAPITRE 10: SUR L'EXISTENCE D'UN TEMPS D'ATTENTE POUR LE PROBLEME DE STEFAN A DEUX PHASES [28].

On considère le problème de conduction de la chaleur suivant:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&\text{i)} \quad \rho\, c\, \theta_t - k\, \theta_{xx} = 0, \;\; 0 < x < x_o, \quad t > 0, \\
&\text{ii)} \quad \theta(x,0) = \theta_o(x) > 0, \; 0 \le x \le x_o, \\
&\text{iii)} \quad k\, \theta_x(0,t) = q(t), \quad t > 0\,, \\
&\text{iv)} \quad \theta(x_o,t) = b(t), \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

On considère, comme toujours, que la température du changement de phase est 0^0C et l'on remplace la condition (1iv) par $\theta(+\infty,t) = \theta_0(+\infty) > 0$, $t > 0$ pour le cas où $x_0 = +\infty$. On suppose aussi que les données satisfont les hypothèses pour avoir l'existence et l'unicité de la solution du problème (1).

Motivé par ce qui se passe pour l'équation des milieux poreux, on considère les possibilités suivantes:

(a) le problème de conduction de la chaleur (1) est bien défini pour tout $t > 0$ (temps d'attente $t^* = +\infty$);

(b) il existe un temps $t^* < +\infty$ tel que une autre phase (c'est-à-dire, la phase solide) paraît pour $t \ge t^*$ (temps d'attente $0 \le t^* < +\infty$) et donc on aura une problème de Stefan à deux phases pour $t \ge t^*$. En plus, on aura une frontière libre $x = s(t)$ qui sépare les phases liquide et solide avec $s(t^*) = 0$.

On va séparer les cas avec temps d'attente $t^* = 0$ (c'est-à-dire, il existe un changement de phase instantané) et avec $0 < t^* \le +\infty$. On va trouver des rélations entre les données q,b,θ_0 pour avoir ces deux cas.

<u>Théorème 1</u>: (i) Si les données $q = q(t)$, $\theta_0 = \theta_0(x)$ et $b = b(t)$ vérifient les conditions suivantes:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
&\text{i)} \quad 0 < q(t) \le q_o, \;\; 0 < t \le t_o \quad \text{avec } t_o > 0, \\
&\text{ii)} \quad \theta_o'(x) \ge 0 \;\text{ et }\; \beta_1 \ge \theta_o(x) \ge \beta_o > 0, \;\; 0 \le x \le x_o \quad \text{avec } \beta_o \le \beta_1, \\
&\text{iii)} \quad b(t) \ge \beta_1 \quad \text{et} \quad \dot{b}(t) \ge 0, \;\; t > 0\,,
\end{aligned}
$$

alors le problème (1) a un temps d'attente $t^* > 0$ qui vérifie l'inégalité (cas (b)):

$$
(3) \qquad t^* \ge \operatorname{Min}(t_o, t_o^*), \quad t_o^* = \pi\, k\, \rho\, c\, \beta_o^2 \,/\, 4\, q_o^2 \;.
$$

En plus, sous les hypothèses (2ii, iii), une condition nécessaire pour avoir un changement de phase instantané (cas (a)) c'est qu'on ait

$$(4)\qquad q(0^+) = +\infty.$$

(ii) Si les données vérifient

$$(5)\qquad \begin{aligned} & x_o = +\infty\,, \qquad \theta_o(x) \geq \beta_o > 0\,, \forall\, x \geq 0\,,\\ & q(t) \leq q_o(t) = \frac{\beta_o\, k}{a\sqrt{\pi\, t}} \qquad ,\forall\, t > 0 \quad \left(a^2 = \alpha = \frac{k}{\rho\, c}\right) \end{aligned}$$

alors on a le cas (a).

(iii) Si les données vérifient

$$(6)\qquad \begin{aligned} & x_o = +\infty\;; \qquad 0 \leq \theta_o(x) \leq \beta_1 \quad \text{pour}\ \ x \geq 0\,,\\ & q(t) \geq \frac{q_o}{t^\beta}\,,\ 0 < t < 1\,,\ \text{avec}\ \ q_o > 0 \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2} < \beta < 1\,, \end{aligned}$$

alors on a le cas (b) avec $t^*=0$.

(iv) Si les données vérifient

$$(7)\qquad \begin{aligned} & q(t) = q > 0\ ,\ b(t) = b > 0\ ,\ \forall\, t > 0\ ,\\ & \theta_0 \geq 0\ ,\ \theta_0' \geq 0\ ,\ \theta_0'' \leq 0\ \text{dans}\ [0,x_0)\ \text{et}\ \theta_0(x_0) = b\ , \end{aligned}$$

et le flux de chaleur constante q vérifie l'inégalité

$$(8)\qquad q > \frac{b\, k}{x_o\left(1 - \exp\left(-\dfrac{\alpha\, \pi^2\, t_1}{4\, x_0^2}\right)\right)} \qquad ,\ \alpha = \frac{k}{\rho\, c}\,,$$

avec un temps $t_1 > 0$, alors on a la phase solide pour $t \geq t_1$.

<u>Remarque 1</u>: Pour tout $(t,q) \in Q$, où

$$(9)\qquad Q = \left\{ (t,q)\ /\ q > f(t) = \frac{b\, k}{x_o\left[\,1 - \exp(-\dfrac{\alpha\, \pi^2\, t}{4\, x_0^2})\,\right]}\ ,\ t > 0 \right\}$$

on a un problème à deux phases.

CHAPITRE 11: DETERMINATION DES COEFFICIENTS THERMIQUES D'UN MATERIAL SEMI-INFINIE A TRAVERS UN CHANGEMENT DE PHASE [3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 26, 30].

Dans ce chapitre on fait une application des solutions de Lamé-Clapeyron et de Neumann à la détermination de coefficients thermiques à travers un processus de changement de phase d'un matériau semi-infini avec une sur-condition [Ca] sur le bord fixe x=0 du type [3]

$$(1) \qquad k_2\, \theta_{2x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} \qquad , t > 0 \ , \ (q_0 > 0) \ ,$$

ou du type [9]

$$(2) \qquad \theta_{2x}(0,t) = -\frac{Q_0}{\sqrt{t}} \qquad , t > 0 \ , \ (Q_0 > 0) \ .$$

Les conditions (1) et (2) représentent respectivement le flux de chaleur et la pente de la température sur le bord fixe x=0.

Les coefficients q_0 et Q_0 doivent être déterminés expérimentalement. Les conditions (1) et (2) ne sont pas les mêmes quand le coefficient k_2 est inconnu. Par ailleurs, la condition (2) est mieux adaptée à l'expérimentation [30].

Avec cette méthode, on peut obtenir formules pour la détermination d'un ou deux coefficients thermiques inconnus. La méthode peut aussi être appliquée avec un problème de Stefan à une phase [3, 6, 9, 12, 14, 16, 30] ou à deux phases [8, 15, 26].

A titre d'exemple, on va seulement présenter les propriétes suivantes:

<u>Théorème</u> <u>1:</u>. Soient k_1, k_2, c_1, c_2, ρ, $h > 0$ les coefficients thermiques du matériau de changement de phase, $-C < 0$ la température initiale, $B > 0$ la température du bord fixe $x = 0$ et $q_0 > 0$ le coefficient qui caractérise le flux de chaleur au bord $x = 0$.

(i) la condition nécessaire et suffisante pour la détermination des coefficents σ et k_1 c'est que les coefficients k_2, c_1, c_2, ρ, h, B, C, $q_0 > 0$ vérifient la condition suivante:

$$(3) \qquad \frac{B\, k_2}{q_0\, a_2 \sqrt{\pi}} < \operatorname{erf}(x_1) \ , \ a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho\, c_2}}$$

où $x_1 > 0$ est le unique zéro positif de la fonction réelle

$$(4) \qquad T_1(x) = \frac{q_0}{\rho\,(h + C\, c_1)} \exp(-x^2) - a_2\, x \ , \ x > 0 \ .$$

En plus, dans ce cas, on a:

$$(5) \qquad k_1 = \rho\, c_1\, a_2{}^2 \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^2 \quad , \quad \sigma = a_1\, \xi_1 \quad ,$$

où

$$(6) \qquad \xi_2 = \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{B\, k_2}{q_0\, a_2\, \sqrt{\pi}} \right)$$

et $\xi_1 > 0$ est la solution de l'équation:

$$(7) \qquad T_2(x) = \beta \quad , \quad x > 0$$

avec

$$(8) \qquad T_2(x) = \sqrt{\pi}\; x \exp(x^2)\, (1 - \operatorname{erf}(x)) \quad , \quad x > 0$$

$$(9) \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{h}{C\, c_1\, a_2\, \xi_2} \left(\frac{q_0}{\rho h} \exp(-\xi_2{}^2) - a_2\, \xi_2 \right) .$$

(ii) La condition nécessaire et suffisante pour la détermination des coefficients k_2 et c_2 c'est que les coefficients k_1, c_1, ρ, h, B, C, σ, $q_0 > 0$ vérifient la condition

$$(10) \qquad \frac{\rho\, h\, \sigma}{q_0} + \frac{C\, k_1}{q_0\, a_1\, \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\sigma^2/a^2{}_1)}{1 - \operatorname{erf}(\frac{\sigma}{a_1})} < 1 \quad , \quad a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho c_1}} \; .$$

En plus, dans ce cas, on a:

$$(11) \qquad k_2 = \frac{\sigma\, q_0\, \sqrt{\pi}}{B} \frac{\operatorname{erf}(\xi_2)}{\xi_2} \quad , \quad c_2 = \frac{q_0\, \sqrt{\pi}}{\rho\, \sigma\, B}\; \xi_2 \operatorname{erf}(\xi_2) \quad ,$$

où $\xi_2 > 0$ est donné par l'expression suivante

$$(12) \qquad \xi_2 = T_3 \left(\left(\frac{\rho\, h\, \sigma}{q_0} + \frac{C\, k_1}{q_0\, a_1\, \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\sigma^2/a^2{}_1)}{1 - \operatorname{erf}(\frac{\sigma}{a_1})} \right)^{-1} \right)$$

avec

$$(13) \qquad T_3(x) = \sqrt{\log x} \quad , \quad x > 1 \; .$$

(iii) La condition nécessaire et suffisante pour la détermination des coefficients k_1 et k_2 c'est que les coefficients c_1, c_2, ρ, h, B, C, σ, $q_0 > 0$ vérifient la condition

(14) $$\frac{q_0}{\rho\ \sigma\ (C\ c_1 + h)} > 1 \ , \qquad T_4\Big(T_3\big(\frac{q_0}{\rho\ \sigma\ (C\ c_1 + h)}\big)\Big) > \frac{\rho\ c_2\ B\ \sigma}{q_0\ \sqrt{\pi}}$$

où

(15) $$T_4(x) = x\ \mathrm{erf}(x) \ , \ x > 0 \ .$$

En plus, dans ce cas, on a:

(16) $$k_1 = \frac{\rho\ c_1\ \sigma^2}{{\xi_1}^2} \ , \ k_2 = \frac{\rho\ c_2\ \sigma^2}{{\xi_2}^2}$$

où $\xi_2 > 0$ est la solution de l'équation

(17) $$T_4(x) = \frac{\rho\ B\ \sigma\ c_2}{q_0\ \sqrt{\pi}} \ , \ x > 0 \ ,$$

et $\xi_1 > 0$ est la solution de l'équation

(18) $$\frac{x\ \exp(-x^2)}{1 - \mathrm{erf}(x)} = \frac{\rho\ h\ \sigma^2\ \sqrt{\pi}}{C\ k_1}\left(\frac{q_0}{\rho\ h\ \sigma}\exp(-{\xi^2}_2) - 1\right) \ , \ x > 0 \ .$$

III.3.2.

PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE POUR L'EQUATION DE LA DIFFUSION

CHAPITRE 12: SUR LE MODELE DE WEN-LANGMUIR POUR LE PROBLEME DE REACTION NON-CATALITIQUE GAS-SOLIDE [20, 33].

On analyse un modèle mathématique correspondant à un processus isothermique de réaction-diffusion d'un gas A avec un solid S [FrBi, Le, SES]. On considère que le solid a une démi-épaisseur R à travers la direction de diffusion du gaz et qu'il est attaqué depuis la surface ($x = R$) avec une réaction rapide et irreversible d'ordre $\nu > 0$ respect du gas A et d'ordre zéro respect du solide S. A cause de la réaction chimique une zone inerte est formée dans le solide laquelle est perméable au gaz et donc le processus aura une frontière libre (la surface de la réaction) [Wen, ViQu]. Après une changement de variables, le problème est donné par

$$
(1)\qquad
\begin{array}{ll}
\text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{dans } D_T \ , \\
\text{ii)} & u(0, t) = v_0 \ , \quad 0 < t \leq T \ , \\
\text{iii)} & u_x(s(t), t) = -\, u^{\nu}(s(t), t) \ , \quad 0 < t \leq T \ , \\
\text{iv)} & u_x(s(t), t) = -\, \dot{s}(t) \ , \quad 0 < t \leq T \ , \\
\text{v)} & s(0) = b > 0 \ , \\
\text{vi)} & u(x, 0) = \Psi(x) \ , \quad 0 \leq x \leq b \ ,
\end{array}
$$

où

$$
(2)\qquad D_T = \{ (x, t) \ / \ 0 < x < s(t) \ , 0 < t < T \} \ .
$$

On peut considérer des conditions plus générales sur la frontière libre $x=s(t)$ du type

$$
(3)\qquad
\begin{array}{ll}
\text{i)} & u_x(s(t), t) = g(u(s(t), t)) \ , \quad 0 < t \leq T \ , \\
\text{ii)} & \dot{s}(t) = f(u(s(t), t)) \ , \quad 0 < t \leq T \ ,
\end{array}
$$

où les fonctions f et g satisfont les conditions suivantes:

$$
(4)\qquad
\begin{array}{ll}
\text{i)} & f > 0 \ , \ f' > 0 \ \text{dans } \mathbf{R}^+ \text{ et } f(0) = 0 \ , \\
\text{ii)} & g < 0 \ , \ g' < 0 \ \text{dans } \mathbf{R}^+ \text{ et } g(0) = 0 \ .
\end{array}
$$

Les conditions sur la frontière libre dans (1) ont (conditions de Wen):

$$
g(x) = -\, x^{\nu} \quad (= -\, f(x)\,) \quad (x \geq 0 \ , \nu > 0)
$$

Un autre choix est donné par (conditions de Langmuir) [Do]:

(5) $$g(x) = -\frac{a\,x^n}{b + c\,x^n} \quad (= -f(x)) \ , \ a, b, c = \text{const.} > 0 \ , n > 0$$

On étudie d'abord un problème auxiliaire qui est un problème à frontière mobile, et on généralise le résultat de [FaPr1, FaPr2] en changeant la condition non linéaire sur le bord fixe $x=0$ par celle donnée par (3i).

<u>Théorème 1</u>: (i) Si l'on a les hypothèses suivantes

(6) $$\exists\, L > 0 \ / \ | s(t) - s(\tau) | \leq L \, | t - \tau | \ , \quad \forall t, \tau \in [0,T] \ ,$$
$$0 < a_0 \leq s(t) \leq A_0 \ , \quad \forall t \in [0,T] \ ,$$

(7) $$\Psi \in C^0([0,b]) \ , \quad \Psi(0) = v_0 \ , \ \Psi > 0 \ \text{dans} \ [0,b] \ ,$$
$$\Psi' \in C^0([b-\epsilon, b]) \quad \text{pour un} \ \epsilon > 0 \ , \text{avec} \ \Psi'(b) \leq 0 \ ,$$
$$v_0 \geq \max_{x \in [0,b]} \Psi(x)$$

(8) $g = g(v)$ est une fonction décroissante dans $\mathbf{R}^+$, Lipschitz dans $[\ \frac{v_0}{2}\ , v_0\ ]$ et qui vérifie $g(0) = 0$,

alors il existe une solution unique du problème à frontière mobile (1i, ii), (3i) et

(9) $$u(x,0) = \Psi(x) \ , \ 0 \leq x \leq b = s(0) \ .$$

(ii) Le résultat précédent est aussi valable pour $b=0$ et $s \in C^0([0,T]) \cap C^1([0,T])$ avec $s(0) = 0$ et $s(t) \geq k_1 t$ $(K_1 > 0)$ dans $[0,T]$.
(iii) Si en plus, les fonctions f et g vérifient (4) et sont Lipschitziennes dans $[\frac{v_0}{2}, v_0]$ alors le problème à frontière libre (1) avec $b=0$ a une solution unique pour $T > 0$, choisi convenientement petit.

<u>Remarque 1</u>: On utilise un point fixe pour l'opérateur de contraction

(10) $$F_2 : B \to B \ / \ F_2(r)(t) = \int_0^t f(v(r(\tau),\tau))\, d\tau \ , \quad t \in [0,T] \quad ,$$

où $v = v(x,t)$ est la solution au problème avec frontière mobile $r=r(t)$ et B est un convénable espace de Banach.

III.3.3.

PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE
POUR L'EQUATION DES MILIEUX POREUX

CHAPITRE 13 : SUR LE COMPORTEMENT ASYMTOTIQUE DE TYPE EXPONENTIELLE POUR L'EQUATION DES MILIEUX POREUX AVEC ABSORPTION [18, 23, 29].

Dans ce chapitre on étudie le comportement des solutions pour une équation des milieux poreux assez générale avec absorption.

On va d'abord commencer avec le problème

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\text{(i)} \quad u_t - u_{xx} + \lambda^2 u^p{}_+ = 0 \ , \ x > 0 \ , \ t > 0 \ , \\ &\text{(ii)} \quad u(0,t) = 1 \ , \ t > 0 \ , \\ &\text{iii)} \quad u(x,0) = U_0(x) \geq 0 \ , \ x > 0 \ , \end{aligned}$$

où $U_0 = U_0(x)$ est la condition initiale, et $p > 0$ et $\lambda > 0$ sont deux paramètres.

Si $0 < p < 1$, l'équation (1i) a une solution stationnaire [Di, St] qui satisfait la condition (1ii) et a un support compact dans $[0,+\infty)$, et en plus elle est donnée par

$$(2)\qquad u_\infty(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{I}\, x\right)_+^{\frac{2}{1-p}} \ , \ I = I(p) = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p} \ .$$

Au cas $0 < p < 1$ et $U_0 \leq u_\infty$, la solution $u = u(x,t)$ de (1) satisfait la propriété de monotonie suivante [Be]

$$(3)\qquad 0 < u(x,t) < u_\infty(x,t) \ , \ 0 < x < \frac{I}{\lambda} \, , \, t > 0 \, ,$$

c'est-à-dire que la fonction $u(t)=u(\ .\ ,t)$ a un support compact dans la variable x pour tout $t > 0$ et $s = s(t)$, définie par

$$(4)\qquad s(t) = \operatorname{Sup} \{ \ x > 0 \ / \ u(x,t) > 0 \ \} \ , \ t > 0 \ ,$$

est la frontière libre qui a une vitesse finie pour $t > 0$.

On considère le problème suivant

$$
(5)\qquad
\begin{array}{ll}
\text{i)} & C_t - C_{xx} + \lambda^2 C_+{}^p = 0 \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \ , \\
\text{ii)} & C(0,t) = 1 \ , \ t > 0 \ , \\
\text{iii)} & s(0) = 0 \ , \\
\text{iv)} & C(s(t),t) = 0 \ , \ t > 0 \ , \\
\text{v)} & C_x(s(t),t) = 0 \ , \ t > 0 \ .
\end{array}
$$

qui est lié au problème (1).

<u>Théorème 1</u>: (i) Si l'on applique la méthode du balance intégrale [Go] (inconnues C_B et s_B) avec $p \in (0,1)$, $\lambda > 0$ et

(6) $$C(x,t) = \left(1 - \frac{x}{s(t)}\right)_+^{\alpha}$$

où $\alpha > 1$ est un paramètre à choisir pour avoir la propriété limite

(7) $$\lim_{t \to \infty} s(t) = I(p)/\lambda \ ,$$

alors on obtient que

(8) $$\alpha = \alpha(p) = \frac{2}{1-p} > 2 \ ,$$

(9) $$s_B(t) = \frac{I}{\lambda} \left[1 - \exp\left(- \frac{2\, \lambda^2\, (3-p)\, t}{1+p}\right) \right]^{1/2} \ , \ t \geq 0 \ .$$

(ii) Soient les fonctions suivantes:

(10) $$u_1(x,t) = \left[1 - \frac{x}{s_1(t)} \right]_+^{\frac{2}{1-p}} \ , \ x \geq 0 \ , \ t > 0 \ ,$$

(11) $$s_1(t) = \frac{I}{\lambda} \left[1 - \exp\left(- \frac{2\lambda t}{I}\right) \right] \ , \ t \geq 0 \ .$$

Soient $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ et $0 \leq U_0 \leq u_\infty$ dans $\mathbf{R}^+$. Si $u = u(x,t)$ est la solution de (1) et $s = s(t)$ est définie par (4), alors on a les propriétés de comparaison suivantes:

(12) $$u_1(x,t) \leq u(x,t) \leq u_\infty(x) \ , \ 0 \leq x \leq \frac{I}{\lambda} \ , \ t > 0 \ ,$$

(13) $$s_1(t) \leq s(t) \leq \frac{I}{\lambda} \ , \ t \geq 0 \ ,$$

et les estimations suivantes:

(14) $\quad 0 < \frac{I}{\lambda} - s(t) \leq \frac{I}{\lambda} - s_1(t) \leq \frac{I}{\lambda} \exp(-\frac{2\lambda t}{I}) \;,\; t \geq 0 \;,$

(15) $\quad 0 \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x) - u^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x) - u_1^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq \dfrac{\exp(-\frac{2\lambda t}{I})}{1-\exp(-\frac{2\lambda t}{I})} \;,$

$x \in [0, \frac{I}{\lambda}] \;,\; t > 0 \;.$

(iii) Pour $\lambda = 1$, $0 < p < 1$ et $0 \leq U_0 \leq u_\infty$ dans $\mathbf{R}^+$, on a les estimations suivantes:

(16) $\quad s_1(t) < s_B(t) \quad,\; t > 0 \;,$

(17) $\quad u_1(x,t) \leq C_B(x,t) \quad,\; 0 \leq x \leq I \;,\; t > 0 \;.$

__Remarque 1__: Le Théorème précédent nous donne un comportement asymptotique du type exponentiel.

On va considérer maintenant le problème suivant (avec l'équation des milieux poreux):

$$(18)\qquad \begin{aligned} &u_t - (u^m)_{xx} + u^p = 0, && x > 0,\; t > 0 \;,\\ &u(0,t) = 1, && t > 0 \;,\\ &u(x,0) = U_0(x) \geq 0, && x > 0 \;,\end{aligned}$$

qui a, pour $0 < p < m$, une solution stationnaire

(19) $$u^*(x) = \left[1 - \frac{x}{L}\right]_+^{\frac{2}{m-p}} ,$$

(20) $$L = L(m,p) = \frac{\sqrt{2\,m\,(m+p)}}{m-p} \;.$$

__Théorème 2__: (i) Si $0 < p < m$ et $m + p \leq 2$, alors les fonctions

(21) $$\overline{u}(x,t) = \left[1 - \frac{x}{\overline{s}(t)}\right]_+^{\frac{2}{m-p}} ,$$

(22) $$\underline{u}(x,t) = \left[1 - \frac{x}{\underline{s}(t)}\right]_+^{\frac{2}{m-p}} ,$$

sont une sur-solution et une sous-solution de l'équation différentielle (18) quand les fonctions $\overline{s}(t)$ et $\underline{s}(t)$ sont définies par

(23) $\quad \overline{s}(t) = r(t)$ si $L_0 > L$ et $\underline{s}(t) = r(t)$ si $0 \leq L_0 < L$,

où

(24) $\quad r(t) = \sqrt{L^2 + (L_0{}^2 - L^2)\exp[-\beta(m-p)t]}$,

avec β une constante qui est donnée par

$$\beta = \frac{(1+\gamma)^{(1+\gamma)}}{\gamma^{\gamma}}, \quad \text{avec } \gamma = \frac{2-(m+p)}{m-p} \text{ si } \gamma > 0 ,$$

(25)

$$\beta = 1 \text{ si } \gamma = 0 .$$

(ii) Si $0 < p < m$, $m + p \leq 2$ et il existe une constante $A > 0$ telle que la donnée initiale satisfait la condition

(26) $\quad 0 \leq U_0(x) \leq \left[1 - \frac{x}{A}\right]_+^{\frac{2}{m-p}}$,

alors la solution de (18) converge d'une manière exponentielle à la solution stationnaire $u^* = u^*(x)$.

<u>Remarque</u> 2: (i) La solution du problème (coeur mort [St]):

$$u_t - u_{xx} + u^p = 0, \ 0 < x < A, \ t > 0, \ (A > 2L),$$

(27) $\quad u(0,t) = u(A,t) = 1$, $t > 0$,

$$u(x,0) = 1 , \ 0 < x < A,$$

converge exponentiellement à la solution stationnaire.

(ii) On peut aussi considérer le comportement asymptotique pour le problème assez général

$$u_t - (\phi(u))_{xx} + f(u) = 0, \quad x > 0, t > 0 .$$

(28) $\quad \phi(u(0,t)) = 1, \quad t > 0$,

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x > 0 ,$$

où les fonctions ϕ et f satisfont les hypothèses:

$$\phi \in C^0(\mathbf{R}) \cap C^2(\mathbf{R}\setminus\{0\}),\ \ \phi(0) \geq 0,\ \ \phi'(s) > 0 \text{ pour } s > 0\ ,$$

(29)

$$f \in C^0(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R}\setminus\{0\}),\ \ f(0) = 0,\ \ f'(s) > 0 \text{ pour } s > 0\ .$$

et les conditions

$$\int_{0^+}^{v} \frac{d\xi}{\sqrt{G(\xi)}} < +\infty,\ \ v > 0, \tag{30}$$

avec

$$G(\xi) = \int_0^{\xi} f(\phi^{-1}(s))\, ds \tag{31}$$

et

$$\frac{d}{du} F(u) \geq c(\phi, f) = \text{Const.} > 0 \text{ pour } u \in (0,1) \tag{32}$$

avec

$$F(u) = \left(\int_{0^+}^{u} f(s)\ \phi'(s)\ ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

REFERENCES

(i) Les articles dont D.A. Tarzia est l'auteur ou coauteur ne sont pas cités ici; pour cela voir les publications mentionnées aux sections I et II.

(ii) On ne fait que mention des articles qui sont estrictement nécessaire pour une comprension du présent texte ce qui est un résumé assez abrégé des articles originaux où on peut trouver des références intéressantes pour des propriétés complementaires qui n'ont pas été mentionnées ici.

[ACH] J. ALBRECHT – L. COLLATZ – K.H. HOFFMANN (Eds.), "Numerical treatment of free boundary value problems", ISNM $N^0$58, Birkhaeuser Verlag, Basel (1982).

[Ar] D.G. ARONSON, "The porous medium equation", in Nonlinear Diffusion Problems, A. Fasano – M. Primicerio (Eds.), Lecture Notes in Math. N. 1224, Springer Verlag, Berlin (1986), 1–46.

[BaCa] C. BAIOCCHI – A. CAPELO, "Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariazionali, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, N 4, 7, Pitagora Editrice, Boyna (1978).

[Ba] S.G. BANKOFF, "Heat conduction of diffusion with change of phase", Advances in Chem. Eng., 5(1964), 75–150.

[Ben] A. BENSOUSSAN , "Teoría moderna de control óptimo ", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 7, Rosario (1974).

[Ber] M. BERNADOU – P.L. GEORGE – A. HASSIM – P. JOLY – P. LAUG – A. PERRONNET – E. SALTEL – D. STEER – G. VANDERBORCK – M. VIDRASCU, "MODULEF : Une bibliothèque modulaire d'éléments finis", INRIA, Roquencourt (1985).

[Be] M. BERTSCH, "A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term", Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl., 7(1983), 117–127.

[BDF] A. BOSSAVIT – A. DAMLAMIAN – M. FREMOND (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Vol. III, IV, Research Notes in Math. $N^0$120, 121, Pitman, London (1985).

[Br] M. BRILLOUIN, "Sur quelques problèmes non résolus de physique mathématique classique : propagation de la fusion", Annales de l'Inst. H. Poincaré, 1(1930/31), 285–308.

[Ca1] J.R. CANNON, "The solution of the heat equation subject to the specification of energy", Quart. Appl. Math., 21(1963), 155—160.

[Ca2] J.R. CANNON, "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).

[CaVa1] J.R. CANNON — J. VAN DER HOEK, "The existence of and a continuous dependence result for the solution of the heat equation subject to the specification of energy", Bollettino Un. Matematica Italiana, Suppl. Fisica-Matem., 1(1981), 253—282.

[CaVa2] J.R. CANNON — J. VAN DER HOEK, "The one-phase Stefan problem subject to the specification of energy", J. Math. Anal. Appl., 86(1982), 281—291.

[CaJa] H.S. CARSLAW — J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).

[Ci] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).

[CoRi] E. COMPARINI — R. RICCI, "On the swelling of a glassy polymer in contact with a well-stirred solvent", Math. Meth. Appl. Sci., 7(1985), 238—250.

[Cr1] J. CRANK, "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).

[Cr2] J. CRANK, "Free and moving boundary problems", Clarendon Press, Oxford (1984).

[CrGu] J. CRANK — R.S. GUPTA, "A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue", J. Inst. Math. Appl., 10(1972), 19—33.

[Da] A. DAMLAMIAN, "Résolution de certaines inéquations variationnelles stationnaries et d'évolution", Thèse d'Etat, Univ. Paris VI, Paris (1976).

[Dan] I.I. DANILYUK, "On the Stefan problem", Russian Math. Surveys, 40(1985), 157—223.

[Di] J.I. DIAZ, "Nonlinear partial differential equations and free boundaries", Vol. I : Elliptic equations, Research Notes in Math. No. 106, Pitman, London (1985).

[Do] D.D. DO, "On the validity of th shrinking core model in noncatalytic gas solid reaction", Chem. Eng. Sci., 37(1982), 1477—1481.

[Du] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N^0 185, LABORIA — IRIA, Rocquencourt (1976).

[EkTe] I. EKELAND — R. TEMAM, "Analyse convexe et problèmes variationnelles", Dunod - Gauthier Villars, Paris (1973).

[ElOc] C.M. ELLIOTT – J.R. OCKENDON, "Weak and variational methods for moving boundary problems", Research Notes in Math., No. 59, Pitman, London (1982).

[Fa] A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No. 13, Rosario (1987).

[FMP] A. FASANO – G.H. MEYER – M. PRIMICERIO, "On a problem in the polymer industry : Theoretical and numerical investigation of swelling", SIAM J. Math. Anal., 17(1986), 945–960.

[FaPr1] A. FASANO – M. PRIMICERIO, "Esistenza e unicità delle soluzione per una classe di problemi di diffusione con condizioni al contorno non lineari", Bollettino Un. Matematica Italiana, 3(1970), 660–667.

[FaPr2] A. FASANO – M. PRIMICERIO, "Su un problema unidimensionale di diffusione in un mezzo a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineari", Annali Mat. Pura Appl., 93(1972), 333–357.

[FaPr3] A. FASANO – M. PRIMICERIO, "General free-boundary problems for the heat equation", J. Math. Anal. Appl., Part I: 57(1977), 694–723; Part II: 58(1977), 202–231.

[FaPr4] A. FASANO – M. PRIMICERIO, "New results on some classical parabolic free boundary problems", Quart. Appl. Math., 38(1980), 439–460.

[FaPr5] A. FASANO – M. PRIMICERIO (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Vol. I, II, Research Notes in Math. N^{0}78, 79, Pitman, London (1983).

[Fre] M. FREMOND, "Diffusion problems with free boundaries", in Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, ICTP, Trieste (1976).

[Fr1] A. FRIEDMAN, "Free boundary problems for parabolic equations, I: Melting of solids", J. Math. Mech., 8(1959), 499–517.

[Fr2] A. FRIEDMAN, "Partial differential equations of aparabolic type", Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1964).

[Fr3] A. FRIEDMAN, "Variational principles and free boundary problems", J. Wiley, New York (1982).

[FrBi] G.F. FROMENT – K.B. BISCHOFF, "Chemical reactor analysis and design", J. Wiley, New York (1979).

[Ge] P.L. GEORGE, "Una introducción al sofware científico MODULEF", CUADERNOS del

Instituto de Matemática "Beppo Levi", N^0 15, Rosario (1988).)

[Go] T.R. GOODMAN, "The heat balance integral and its application to problems involving a change of phase", Trans. of the ASME, 80(1958), 335–342.

[Gr] P. GRISVARD, "Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain", in Numerical Solution of Partial Differential Equations III, SYNSPADE 1975, B. Hubbard (Ed.). Academic Press, New York (1976), 207–274.

[Gu] J.A. GUZMAN, "Application of the heat transfer solution for the case of one-dimensional solidification with negligible latent heat", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 6(1982), 41–51.

[HoNi] K.H. HOFFMANN – M. NIEZGODKA, "Control of parabolic systems involving free boundaries", Research Notes in Math. N^{0}79, Pitman, London (1983), 431–462.

[HoSp] K.H. HOFFMANN – J. SPREKELS (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Research Notes in Mathematics No. 185, 186, Pitman, London (1990).

[Ki] D. KINDERLEHRER, "The coincidence set of solutions of certain variational inequalities", Arch. Rat. Mech. Anal., 40 (1971), 231–250.

[KiSt] D. KINDERLEHRER – G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[LSU] O.A. LADYZENSKAJA – V.A. SOLONNIKOV – N.N. URAL'CEVA, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", Amer. Math. Soc., Providence (1968).

[La] H.G. LANDAU, "Heat conduction in a melting solid", Quart. Appl. Math., 8(1950), 81–94.

[LaCl] G. LAME – B.P. CLAPEYRON, "Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", Annales Chimie Physique, 47(1831), 250–256.

[Le] O. LEVENSPIEL, "Chemical reaction engineering", J. Wiley, New York (1962).

[LeSt] H. LEWY – G. STAMPACCHIA, "On the regularity of the solution of a variational inequality", Comm. Pure Appl. Math., 22(1969), 153–188.

[Li1] J.L. LIONS, "Problèmes aux limites dans les équations aux derivées partielles", Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal (1962).

[Li2] J.L. LIONS, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod-Gauthier Villars, Paris (1969).

[Lu] V.J. LUNARDINI, "Heat transfer in cold climates", Van Nostrand, New York (1981).

[Ma1] E. MAGENES, "Topics in parabolic equations : some typical free boundary problems", in Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations, H.G. Garnier (Ed.), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht (1976), 239–312.

[Ma2] E. MAGENES (Ed.), "Free boundary problems", Vol. I, II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (1980).

[Ma3] E. MAGENES, "Problemi di Stefan bifase in piu variabili spaziali", Le Matematiche, 36(1981), 65–108.

[Me] A.M. MEIRMANOV, "Stefan problem", (in Russian), Nauka, Novosibirsk (1986).

[MS] M.K.V. MURTHY – G. STAMPACCHIA, "A variational inequality with mixed boundary conditions", Israel J. Math., 13(1972), 188–224.

[Ne] J. NECAS, "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson, Paris (1967).

[NiPa] M. NIEZGODKA – I. PAWLOW (Eds.), "Recent advances in free boundary problems", Vol. 14, $N^0 1-3$, 1–307, Control and Cybernetics, Warsaw (1985).

[OcHo] J.R. OCKENDON – W.R. HODGKINS (Eds.), "Moving boundary problems in heat flow and diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).

[Pr1] M. PRIMICERIO, "Problemi di diffusione a frontiera libera", Bollettino Un. Matematica Italiana, 18A(1981), 11–68.

[Pr2] M. PRIMICERIO, "The occurence of pathologies in some Stefan-like problems", in Numerical treatment of Free Boundary Value Problems, ISNM No. 58, Birkhaeuser Verlag, Basel (1982), 233–244.

[PW] M. H. PROTTER – H. F. WEINBERGER, "Maximum principles in differential equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).

[Ro] J.F. RODRIGUES, "Obstacle problems in mathematical physics", North-Holland Mathematics Studies N_0 134, North-Holland, Amsterdam (1987).

[Ru] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971).

[Sa] C. SAGUEZ, "Contrôle optimal de systèmes à frontière libre", Thèse d'Etat, Univ. de Compiègne (1980).

[Sh1] B. SHERMAN, "A free boundary problem for the heat equation with prescribed flux at both fixed face and melting interface", Quart. Appl. Math., 25(1967), 53–63.

[Sh2] B. SHERMAN, "Limiting behavior in some Stefan problems as the latent heat goes to zero", SIAM J. Appl. Math., 20(1971), 319–327.

[SWA1] A.D. SOLOMON – D.G. WILSON – V. ALEXIADES, "A mushy zone model with an exact solution", Letters Heat Mass Transfer, 9(1982), 319–324.

[SWA2] A.D. SOLOMON – D.G. WILSON – V. ALEXIADES, "Explicit solutions to change problems", Quart. Appl. Math., 41(1983), 237–243

[St] I. STAKGOLD, "Reaction-diffusion problems in chemical engineering", in Nonlinear diffusion problems, A. Fasano – M. Primicerio (Eds.), Lecture Notes in Math. No. 1224, Springer Verlag, Berlin (1986), 119–152.

[St1] J. STEFAN, "Ueber einige Probleme der Theorie der Waermelaiting", Zitzungsberichte Kaisenlichen Akademie der Wissenschaften, Math. Classe, 98(1889), 473–484.

[St2] J. STEFAN, "Ueber dir Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere", Zitzungsberichte Kaisenlichen Akademie der Wissenschaften, Math. Classe, 98(1889), 965–983. Annalen der Physik und Chemie, 42(1891), 269–286.

[SES] J. SZEKELY – J.W. EVANS – H.Y. SOHN, "Gas-solid reactions", Academic Press, New York (1976).

[Tay] A.B. TAYLER, "Mathematical models in applied mechanics", Clarendon Press, Oxford (1963).

[ViQu] L.T. VILLA – O. QUIROGA, "Dependence upon the parameters of the moving interface in the shrinking core model for non-catalytic heterogeneous gas-solid reactions", To appear.

[We] H. WEBER, "Die partiellen Differential - gleinchungen der Mathematischen Physik, nach Riemanns Vorlesungen", t. II, Braunwschweig (1901), 118–122.

[Wen] C.Y. WEN, "Noncatalytic heterogeneous solid fluid reaction models", Industrial Eng. Chem., 60 No. 9(1968),33–54.

[WSB] D.G. WILSON – A.D. SOLOMON – P.T. BOGGS (Eds.), "Moving boundary problems", Academic Press, New York (1978).

Departamento de Matemática ,
FCE, Universidad Austral ,
Moreno 1056 ,
(2000) ROSARIO, ARGENTINA .

et

PROMAR (CONICET–UNR) ,
Instituto de Matemática "Beppo Levi" ,
Avenida Pellegrini 250 ,
(2000) ROSARIO, ARGENTINA .

En l'occasion de ce Mémoire, je voudrais associer dans ma reconnaissance tous ceux qui l'ont rendu possible.

Je voudrais d'abord remercier M.M. Roland Glowinski et Georges Duvaut avec qui je me suis initié à la recherche scientifique pendant mes études du D.E.A. et du Doctorat de 3ème Cycle, aux Laboratoires d'Analyse Numérique et de Mécanique Théorique respectivement, de l'Université de Paris VI (Paris, France).

Je voudrais ensuite remercier tout particulièrement M.M. Antonio Fasano et Mario Primicerio du Dipartimento di Matematica "U. Dini" de l'Università degli Studi di Firenze (Florence, Italie) pour l'appui constant que j'ai eu au long des dix dernières années.

Je voudrais aussi remercier tous les collègues avec qui j'ai écrit une partie de mes travaux, à savoir : Argentine (Jorge C. Arderius, Alicia B. Báncora, Julio E. Bouillet, Graciela G. Garguichevich, Roberto L.V. Gonzalez, Miguel A. Lara, Ma. Cristina Sanziel, Mirta B. Stampella, César O. Stoico, Eduardo D. Tabacman, Cristina V. Turner, Luis T. Villa), Italie (Elena Comparini, Riccardo Ricci) et USA (Meier Shillor, José Luis Menaldi) et aussi, sans les nommer, tous ceux avec qui j'ai pu discuter de divers sujets scientifiques et humains, en apprenant toujours quelque chose.

Pendant ces dernières années j'ai pu trouver l'appui de nombreuses institutions, et parmi celles-ci, je voudrais tout particulièrement citer: Argentine (CONICET; PROMAR (CONICET—UNR)-Instituto de Matemática "B. Levi"; Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-Universidad Nacional de Rosario; Departamento de Matemática—Facultad de Ciencias Empresariales-Universidad Austral—Rosario), France (INRIA) et Italie (G.N.F.M.—CNR; Dipartimento di Matematica "U. Dini"—Università di Firenze).

Je remercie enfin MM. les Rapporteurs et membres du Jury (M.G. Bayada, Ph. Bénilan, A. Bossavit, A. Damlamian, G. Duvaut, M. Frémond, D. Hilhorst, J. Mossino, O. Pironneau, M. Primicerio, P.A. Raviart) de bien vouloir y participer.

Merci à tous !!!

Je souhaite dédier ce mémoire à mes parents, à mes enfants María Silvina et Pablo Alberto, et tout particulièrement à ma femme Norma qui, avec une grande patience, m'a beaucoup aidé à continuer mes recherches, et à surmonter les moments de difficulté.