Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 8,4, 385–393(1992)

ANALISIS NUMERICO DE UNA ECUACION DE TIPO STOKES

DOMINGO A. TARZIA

Departamento de Matemática,
FCE, Universidad Austral,
Moreno 1056, (2000) Rosario, Argentina.

RESUMEN

Se considera un problema de tipo Stokes con funciones incógnitas $u = (u_1, u_2, u_3)$ y p, definidas en Ω, de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} -\nu\Delta u + \nabla p + w \wedge u = f \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ \text{div}\,(u) = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad u|_\Gamma = 0, \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado y convexo con frontera Γ regular, $\nu > 0$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ son funciones que están definidas en Ω.

Se describe un algoritmo iterativo $u_n, p_n (n \in \mathbb{N})$ que converge a la solución u, p a través de la formulación variacional de (P) correspondiente a la función incógnita u. Se obtiene además la formulación variacional mixta.

SUMMARY

We consider Stokes–like problem with unknown functions $u = (u_1, u_2, u_3)$ and p, defined in Ω, such that they satisfy the following conditions:

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} -\nu\Delta u + \nabla p + w \wedge u = f \qquad \text{in} \quad \Omega, \\ \text{div}\,(u) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u_{|\Gamma} = 0, \end{array} \right.$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded and convex domain with a regular boundary Γ, $\nu > 0$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ and $w = (w_1, w_2, w_3)$ are functions defined in Ω.

We describe an iterative algorithm $u_n, p_n (n \in \mathbb{N})$ that it is convergent to the solutions u, p through the variational formulation corresponding to the unknown function u. We also obtain the mixed variational formulation.

Recibido: Noviembre 1991

 ISSN 0213–1315

INTRODUCCION

Se considera un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ acotado y convexo con frontera Γ regular. Dadas las funciones $f = (f_1, f_2, f_3) \in V_1 = H^3$ con $H = L^2(\Omega)$ y $w = (w_1, w_2, w_3) \in W^3$ con $W = L^\infty(\Omega)$ y la constante positiva $\nu > 0$ se quiere hallar las funciones $u = (u_1, u_2, u_3)$ y p, definidas en Ω, de manera que satisfagan las condiciones de tipo Stokes, es decir[9]:

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} -\nu\Delta u + \nabla p + w \wedge u = f \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ \text{div } (u) = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \qquad u_{|\Gamma} = 0, \end{array} \right.$$

donde $\wedge$ representa el producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$ y div es el operador divergencia.

Si $w = 0$, (P) es el problema clásico de Stokes que describe el movimiento de un fluido incompresible viscoso en el dominio Ω y sometido a una densidad de fuerzas exteriores f bajo la hipótesis de que dicho movimiento es lento. En este caso, u es la velocidad del fluido, p es la presión y ν es la viscosidad.

En el presente trabajo se obtienen los siguientes resultados:

(i) Existencia y unicidad de la formulación variacional del problema (P), correspondiente a la función incógnita u. Obtención de la presión p, a partir de dicha formulación variacional.

(ii) Descripción de un algoritmo iterativo $u_n, p_n (n \in \mathbb{N})$ que converge fuertemente a la solución u, p.

(iii) Obtención de la formulación variacional mixta del problema (P).

FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA (P)

Se consideran los siguientes espacios funcionales y notaciones:

$$\left| \begin{array}{l} H^1(\Omega) = \left\{ v \in H / v_{x_i} = \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H, \quad \forall \ i = 1,2,3 \right\}, \\ H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) / v_{|\Gamma} = 0 \right\}, \qquad H = L^2(\Omega), \\ (u,v) = (u,v)_H = \displaystyle\int_\Omega u\, v\, dx, \qquad |v| = |v|_H = (v,v)_H^{1/2}, \\ |v|_1 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^3 |v_{x_i}|^2 \right)^{1/2}, \qquad \|v\|_1 = (|v|^2 + |v|_1^2)^{1/2}, \\ V_1 = H^3, \quad V_2 = (H^1(\Omega))^3, \quad V = (H_0^1(\Omega))^3. \end{array} \right. \tag{1}$$

Sobre el espacio $H_0^1(\Omega), | \bullet |_1$ y $\| \bullet \|_1$ son dos normas equivalentes, es decir existe una constante positiva $C = C(\Omega) > 0$ de manera que (desigualdad de Poincaré):

$$|v|_1 \leq \|v\|_1 \leq C|v|_1, \ \forall \ v \ \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Los espacios V_1 and V_2 son espacios de Hilbert con los productos escalares y normas siguientes:

$$\left| \begin{array}{l} (\vec{u},\vec{u})_{V_1} = \sum_{i=1}^{3}(u_i,v_i)_H \quad , \quad |\vec{v}|_{V_1} = (\vec{v},\vec{v})_{V_1}^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{3}|v_i|^2\right)^{1/2} , \\ (\vec{u},\vec{v})_{V_2} = \sum_{i=1}^{3}(u_i,v_i)_{H^1(\Omega)} \quad , \quad \|\vec{v}\|_1 = \|\vec{v}\|_{V_2} = (\vec{v},\vec{v})_{V_2} = \left(\sum_{i=1}^{3}\|v_i\|_1^2\right)^{1/2} \end{array} \right. \tag{3}$$

donde $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ *y* $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Sobre el espacio V_2 se tiene la siguiente semi-norma:

$$|\vec{v}|_1 = \left(\sum_{i=1}^{3}|v_i|_1^2\right)^{1/2} \quad , \quad \vec{v} = (v_1,v_2,v_3), \tag{4}$$

que sobre V resulta ser equivalente a $\|\bullet\|_{V_2}$, es decir:

$$\exists\ c > 0 \ / \ |\vec{v}|_1 \leq \|\vec{v}\|_1 = \left(|\vec{v}|_1^2 + |\vec{v}|_{V_1}^2\right)^{1/2} \leq c\ |\vec{v}|_1 \quad , \quad \forall \vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \in V. \tag{5}$$

NOTA.- Por conveniencia en la notación se evitará colocar la flecha para los vectores, excepto en los casos en que pueda haber confusión.

A continuación se hallará la ecuación variacional, correspondiente a la función incógnita u.

TEOREMA 1.- Si u, p es la solución del problema (P) entonces u es solución de la siguiente ecuación variacional:

$$a(u,v) = L(v) \quad , \quad \forall\ v\ \in\ K \quad , \quad u\ \in\ K \tag{6}$$

donde

$$\left| \begin{array}{l} K = \{v \in V/\text{div}\ (v) = 0 \quad en \quad \Omega\} \quad \text{convexo cerrado de } V, \\ a(u,v) = a_1(u,v) + a_2(u,v) \quad , \quad L(v) = \int_\Omega f \bullet v\ dx, \\ a_1(u,v) = \nu \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i \bullet \nabla v_i dx \quad , \quad a_2(u,v) = \int_\Omega w \bullet (u \wedge v)\ dx. \end{array} \right. \tag{7}$$

Demostración.- Si se multiplica escalarmente la ecuación diferencial de (P) por el vector $v \in K$, se integra en el dominio Ω, se utilizan los siguientes resultados:

$$\int_\Omega \nabla p \bullet v\ dx = -\int_\Omega p\ \text{div}\ (v) dx = 0 \quad , \quad \forall\ v \in K, \tag{8}$$

$$\int_\Omega \Delta u \bullet v\ dx = -\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i \bullet \nabla v_i dx = -\frac{1}{\nu} a_1(u,v) \quad , \quad \forall\ v \in\ K, \tag{9}$$

se deduce la ecuación variacional (6).

Observación 1.- L es una forma lineal sobre V, a_1 es una forma bilineal y simétrica sobre $V \times V$, a_2 es una forma bilineal y antisimétrica sobre $V \times V$ y $a = a_1 + a_2$ es una bilineal pero no simétrica sobre $V \times V$.

TEOREMA 2.- Si $f \in V_1$ y $w \in W^3$, entonces la ecuación variacional (6) tiene una única solución $u \in K$.

Demostración .- Si $f \in V_1$ entonces la forma lineal L es continua sobre V; si $w \in W^3$ entonces a_1 y a_2 son dos formas bilineales continuas sobre $V \times V$ y además la forma bilineal a es V-elíptica o coercitiva sobre V, es decir

$$a(\vec{v},\vec{v}) \geq \frac{\nu}{c^2}\|\vec{v}\|_1^2 \quad , \quad \forall \vec{v} \in V, \tag{10}$$

donde $c > 0$ es la constante que aparece en la desigualdad (5). Por ende, la existencia y unicidad de solución de la ecuación variacional (6) se deduce por aplicación del Teorema de Lions-Stampacchia[5,7,8,10].

Observación 2.- En lo concerniente a la regularidad de la solución u se supondrá que se tiene el siguiente resultado de regularidad[2,3,11]:

$$f \in V_1 \rightarrow u \in K \bigcap (H^2(\Omega))^3. \tag{11}$$

A continuación se va obtener la presión p apartir de la ecuación variacional (6). Sea el funcional lineal y continuo $S : V \rightarrow R$ definido de la siguiente manera:

$$S(v) = a(u,v) - L(v) \quad , \quad \forall v \in V, \tag{12}$$

donde L y a están definidos en (7) y $u \in K$ es la única solución de (6). Por otra parte, S tiene la propiedad siguiente:

$$S(v) = 0 \quad , \quad \forall v \in K \subset V, \tag{13}$$

y además puede escribirse como

$$S(v) = (g,v)_{V_1} \quad , \quad \forall v \in V, \tag{14}$$

donde $g = -\nu\nabla u + w \wedge u - f$.

Teniendo en cuenta la descomposición del espacio V_1 [11,6] se deduce que existe $p \in H^1(\Omega)$ (único excepto constante aditiva) de manera que se tenga:

$$S(v) = \int_\Omega p \text{ div } (v)dx \quad , \quad \forall v \in V \text{ con } g = -\nabla p, \tag{15}$$

obteniéndose de esta manera la propiedad siguiente:

LEMA 3.- La presión p puede obtenerse a través de la solución u de la ecuación variacional (6) y es única excepto una constante aditiva.

UN ALGORITMO DE APROXIMACION DE LA DUPLA (u,p)

La descripción de lo que sigue es válida cuando la dimensión del espacio $\mathbb{R}^N$ es N =2,3.

Algoritmo: Se define una aproximación $u_n, p_n (n \in \mathbb{N})$ de la dupla u, p de la siguiente manera:

(i) se da $po \in H^1(\Omega)$;

(ii) Si se conoce $p_n \in H^1(\Omega)(n \geq 0)$ se calculan:

(a) u_n como la única solución del problema

$$-\nu\Delta u_n + w \wedge u_n = f - \nabla p_n \quad \text{en } \Omega, \quad u_n/\Gamma = 0; \tag{16}$$

(b) p_{n+1} se define, en función de p_n y de u_n de la siguiente manera:

$$p_{n+1} = p_n \; - \; \rho \text{ div } (u_n) \text{ en } \Omega, \tag{17}$$

donde $\rho \in \mathbb{R}$ es un adecuado parámetro a ser elegido adecuadamente.

Observación 3.- Dado p_n, la existencia y unicidad de la solución u_n del problema (16) surge en forma análoga a la realizada para la ecuación variacional (6) del problema (P).

TEOREMA 4.- Si el parámetro $\rho \in \mathbb{R}^+$ es elegido suficientemente pequeño para que satisfaga la desigualdad

$$0 < \rho < \frac{2\nu}{N} \qquad (N = 2,3) \tag{18}$$

entonces u_n, p_n convergen fuertemente hacia la solución u, p del problema (P) en $(H^1(\Omega))^N$ y $(L^2(\Omega))^N$ respectivamente. La convergencia de p_n hacia p es excepto una constante aditiva.

Demostración.- Sean $v_n = u_n - u$ y $q_n = p_n - p$. Restando las ecuaciones diferenciales satisfechas por u, p y u_n, p_n, y teniendo en cuenta que div $(u) = 0$ en Ω, se obtiene

$$\left| \begin{array}{l} (i) \; -\nu\Delta v_n + w \wedge v_n + \nabla q_n = 0 \text{ en } \Omega, \\ (ii) \; q_{n+1} = q_n - \rho \text{ div } (v_n) \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \tag{19}$$

De (19 ii) se deduce

$$|q_n|^2 - |q_{n+1}|^2 = 2\; \rho(q_n \;, \text{ div } (v_n)) - \rho^2 |\text{div } (v_n)|^2. \tag{20}$$

Por otro lado, se tiene

$$(q_n, \text{div } (v_n))_H = \int_\Omega q_n \text{ div } (v_n) \, dx = -\int_\Omega \nabla \; q_n \bullet v_n \, dx = -(\nabla \; q_n, v_n)_{V_1}. \tag{21}$$

Si se multiplica escalarmente por v_n la ecuación (19i), se tiene en cuenta que $(w \wedge v_n) \bullet v_n = 0$, se integra en Ω, entonces se deduce

$$(\nabla q_n, v_n)_{V_1} = -\nu |v_n|_1^2. \tag{22}$$

Utilizando (21) y (22) en (20), y la desigualdad

$$|\mathrm{div}\ (v)| \leq \sqrt{N}|v|_{V_1} \quad , \quad \forall\ v\ \in (H_0^1(\Omega))^N, \tag{23}$$

siendo N la dimensión del espacio $\mathbb{R}^N(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$, se obtiene

$$|q_n|^2 \ - \ |q_{n+1}^2| = \rho(2\nu|v_n|_1^2 - \rho|\mathrm{div}\ (v_n)|^2) \geq \rho(2\nu - \rho N)|v_n|_{V_1} \geq 0, \tag{24}$$

al verificar ρ la desigualdad (18). Por lo tanto, la sucesión $(|q_n|^2)$ es decreciente y acotada inferiormente por 0, con lo cual existe su límite cuando $n \to \infty$. Entonces, se deduce

$$\lim_{n\to\infty} [|q_n|^2 - |q_{n+1}|^2] = 0, \tag{25}$$

y por ende, de (24) surge que

$$\lim_{n\to\infty} |v_n|_{V_1} = 0 \tag{26}$$

con lo cual $u_n \to u$ en $(H_0^1(\Omega))^N$ fuerte cuando $n \to \infty$. Teniendo en cuenta el resultado de regularidad (11) se deduce además que $\Delta u_n \to \Delta u$ y $w \wedge u_n \to w \wedge u$ en $(L^2(\Omega))^N$ fuerte cuando $n \to \infty$.

Teniendo en cuenta (19i) se obtiene que $\nabla p_n \to \nabla p$ en $(L^2(\Omega))^N$ fuerte cuando $n \to \infty$.

EL CASO PARTICULAR $N = 2$

Para el caso particular en que la dimensión del espacio es $N = 2$, se tienen que

$$\left| \begin{array}{l} u = (u_1, u_2, 0) \quad , \quad w = (0, 0, w) \quad , \quad f = (f_1, f_2, 0) \\ u_i = u_i(x,y) \quad , \quad f_i = f_i(x,y) \quad \forall i = 1,2\ ,\ w = w(x,y)\ ,\ p = p(x,y). \end{array} \right. \tag{27}$$

La condición div $(u) = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ implica la existencia de una función escalar ψ de manera que $u = \mathrm{rotor}\ (0,0,\psi) = \nabla \wedge (0,0,\psi)$, es decir

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_y \quad , \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_x. \tag{28}$$

Por otro lado, si se designa con $n = (n_1\ ,\ n_2)$ y $\tau = (\tau_1\ ,\ \tau_2)$ los versores normal y tangente a $\Gamma(\tau_1 = -n_2, \tau_2 = n_1)$ y utilizando el hecho $u|_\Gamma = 0$, se deduce

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \psi_x n_1 + \psi_y n_2 = -u_2\tau_2 - u_1\tau_1 = -u \bullet \tau = 0 \text{ sobre } \Gamma, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \psi_x \tau_1 + \psi y \tau_2 = u_2 n_2 + u_1 n_1 = u \bullet n = 0 \text{ sobre } \Gamma, \tag{30}$$

es decir

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad , \quad \psi = 0 \text{ en } \Gamma \tag{31}$$

debido a que la nueva función incógnita ψ estará determinada salvo una constante al ser ψ, por (30), constante sobre Γ.

Si se calcula el rotor de la ecuación diferencial del problema (P) se deduce para ψ la ecuación de cuarto orden siguiente:

$$\nu \triangle^2 \psi + \frac{\partial(w,\psi)}{\partial(x,y)} = F \text{ en } \Omega, \tag{32}$$

donde

$$F = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial(w,\psi)}{\partial(x,y)} = w_x \psi_y - w_y \psi_x. \tag{33}$$

LEMA 5.- Si $N = 2$, entonces el problema (P) se reduce en encontrar la función escalar $\psi = \psi(x,y)$ solución del problema (32),(31).

Observación 4.- Si w es constante en Ω, entonces la función ψ satisface el problema bi-armónico siguiente

$$\triangle^2 \psi = \frac{1}{\nu} F \text{ en } \Omega,$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma, \tag{34}$$

sobre el cual se puede consultar [3 y 4].

FORMULACION VARIACIONAL MIXTA DEL PROBLEMA (P)

Sean la siguiente aplicación:

$$b : V \times H \to \mathbb{R} / b(v,\mu) = \int_\Omega \text{div } (v) \mu \, dx, \tag{35}$$

y el siguiente problema variacional mixto[2]: Hallar $(u,\lambda) \in V \times H$ de manera que se satisfagan las dos condiciones siguientes:

$$\left| \begin{array}{l} a(u,v) + b(v,\lambda) = L(v) , \forall v \in V, \\ b(u,\mu) = 0 , \forall \mu \in H, \end{array} \right. \tag{36}$$

donde a y L están definidos en (7).

Entonces se tiene el siguiente resultado que relaciona el problema variacional (6) con el problema mixto (36).

TEOREMA 6.- (i) Se tiene la siguiente equivalencia:

$$v \in K \Leftrightarrow b(v,\mu) = 0 \ , \ \forall \mu \in H.$$

(ii) Si $(u,\lambda) \in V \times H$ es solución de (36), entonces u es solución de (6).

(iii) Si $u \in K$ es solución de (6), entonces u puede ser considerado como la primera componente de una dupla (u,λ) que es solución de (36).

(iv) Se tiene la siguiente equivalencia:

u, p es solución de $(P) \Leftrightarrow (u,-p)$ es solución de (36).

Demostración.- (i) Surge por definición del producto escalar en el espacio de Hilbert H.

(ii) e (iii) son corolarios de (i).

(iv) La equivalencia surge teniendo en cuenta la igualdad

$$\int_\Omega \nabla p \bullet v \ dx = -\int_\Omega p \ \mathrm{div}\ (v)\ dx + \int_\Gamma p \ v \bullet n \ d\gamma =$$

$$= -\int_\Omega \mathrm{div}\ (v)\ p \ dx = -b(v,p) \ , \ \forall \ v \ \in \ V, \tag{37}$$

con lo cual, se tiene la relación

$$\lambda = -p \tag{38}$$

entre las incógnitas λ de (36) y p de (P).

Observación 5.- La forma bilineal b es continua sobre $V \times H$, obteniéndose

$$|b(v,\mu)| \leq |\mathrm{div}\ (v)| \ . \ |\mu| \leq \sqrt{3}|v|_{V_1} \ |\mu| \ , \ \forall \ v \ \in \ V \ , \ \forall \ \mu \ \in \ H. \tag{39}$$

LEMA 7.- (i) La forma bilineal y continua b satisface la condición de Brezzi, es decir $\exists b_o > 0$ de manera que

$$\sup_{v \in V,\, v \neq 0} \frac{|b(v,\mu)|}{|v|_{V_1}} \geq b_o|\mu| \ , \ \forall \ \mu \ \in \ H. \tag{40}$$

(ii) el problema variacional mixto (36) tiene una única solución $(u,\lambda) \in V \times H$ [1,2].

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido realizado a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Análisis Numérico de Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales" del CONICET, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

1. F. Brezzi, "On the Existence Uniqueness and Applications of Saddle Point Problems Arisig from Lagrangian Multipliers", *RAIRO Analyse Numérique,* R-2, pp. 177-199, (1974).
2. P.G. Ciarlet, *"The Finite Element Method for Elliptic Problems",* North-Holand, Amsterdam, (1978).
3. R. Glowinski, *"Numerical Methods for Nonlinear Varational Problems",* Springer Verlag, Berlin, (1984).
4. R. Glowinski y O. Pironneau, "Sur la Résolution par une Méthode Quasi Directe et par Diverses Methodes Iteratives, d'une Approximation par Elements Finis Mixtes de Probléme de Dirichlet Pour L'Opérateur Biharmonique", Rapport No. 76010, Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI, Paris, (1976).
5. D. Kinderlehrer y G. Stampacchia, *"An Introduction to Variational Inequalities and their Applications",* Academic Press, New York, (1980).
6. O.A. Ladyzenskaja, *"The Mathematical Theory of Viscous Incompresible Flow",* Gordon and Beach, New York (1963).
7. J.L. Lions, *"Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires",* Dunod-Gauthier Villars, Paris, (1969).
8. G. Stampacchia, *"Formes Bilinéaires Coercitives sur les Ensembles Convexes",* C. R. Acad. Sc. Paris, 258A, pp. 4413-4416, (1964).
9. D.A. Tarzia, *"Résolution d'une Equation du Type Stokes",* Memoire DEA d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI, (1977).
10. D.A. Tarzia, "Introducción a las Inecuaciones Variacionales Elípticas y sus Aplicaciones a Problemas de Frontera Libre", *Centro Latinoamericano de Matemática e Informática,* CLAMI-CONICET, Vol. **5**, Buenos Aires, (1981).
11. R. Teman, *"Navier-Stokes Equations",* North-Holland, Amsterdam, (1977).