

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS VI

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

par

Domingo Alberto TARZIA

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Mention : **Mécanique Théorique des Solides**

SUR LE PROBLÈME DE STEFAN À DEUX PHASES

Soutenue le 8 mars 1979 devant la Commission composée de :

MM.	J. P. GUIRAUD	Président
	E. ABSI	Examineurs
	G. DUVAUT	
	E. ROFMAN	

A l'occasion de cette thèse, je crois que le bon moment est venu pour me souvenir de tous ceux sans lesquels elle n'aurait pas été possible.

D'abord, je voudrais remercier M. E. Rofman qui a su rassembler à Rosario (Argentine) des jeunes mathématiciens pour travailler dans le domaine des Mathématiques Appliquées. Ses efforts conduirent à établir une coopération Franco-Argentine par l'intermédiaire de l'Ambassade de France et en particulier entre l'I.R.I.A. et l'Institut de Mathématique "Beppo Levi". Cette coopération nous a permis de recevoir entre d'autres M.M. P. Fourre, A. Bensoussan, R. Glowinski à Rosario, dont les cours ont été essentiels pour mon orientation ainsi que la visite de M. C. Baiocchi en 1974.

Le Service Culturel et de Coopération Scientifique et Technique (de l'Ambassade de France en Argentine) m'a

octroyé une bourse d'études pour l'année universitaire 76/77 à l'Université Paris VI. C'est là que je me suis initié à la recherche sous la direction de M. G. Duvaut au Laboratoire de Mécanique Théorique ce qui me permet aujourd'hui de présenter ce travail et je lui en suis très reconnaissant.

Pendant ces deux dernières années le LABORIA (I.R.I.A.) et le C.E.B.T.P. m'ont permis de faire des stages chez eux et cet appui m'a été très profitable.

Je remercie également M. J.P. Guiraud de me faire l'honneur de présider ce Jury ainsi que M.M. E. Absi, G. Duvaut et E. Rofman de bien vouloir y participer.

Ma reconnaissance va aussi à Mlle F. Léné, qui a bien voulu lire mon travail et m'aider à en améliorer la rédaction.

Merci à tous!!

Je souhaite dédier cette thèse à mes parents
et tout particulièrement à ma femme Norma qui m'a
beaucoup aidé à surmonter les moments de difficulté.

TABLE DES MATIERES

	<u>page:</u>
<u>Introduction.</u>	In-1
<u>Chapitre 0</u> : LE PROBLEME PHYSIQUE :	
0-1: Présentation du problème physique.	0-1
0-2: Mise en équation du problème.	0-4
<u>Chapitre I</u> : CAS NON-STATIONNAIRE :	
I-0: Orientation.	I-1
I-1: Présentation du problème non-stationnaire.	
Cas d'évolution n°1.	I-3
I-2: Calcul au sens des distributions dans Ω .	I-5
I-3: Changement de fonction inconnue.	I-11
I-4: Inéquation variationnelle.	I-15
I-5: Propriétés auxiliaires.	I-18
I-6: Problème auxiliaire.	I-25
I-7: Existence et unicité de la fonction u . Propriétés.	I-33

I-8: Cas d'évolution n°2.

I-51

Chapitre II: ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA
SOLUTION EN FONCTION DE LA CHALEUR
LATENTE DE FUSION :

II-0: Orientation. II-1

II-1: Présentation physique-mathématique. Inéquation
variationnelle. Rappel. II-3

II-2: Comportement avec la chaleur latente de fusion. II-6

II-3: Comportement de la solution u_2 lorsque L
tend vers zéro. Equation variationnelle. II-10

II-4: Interprétation physique de la solution w . Propriétés. II-20

II-5: Autres propriétés lorsque la chaleur latente de
fusion tend vers zéro. II-27

Chapitre III: CAS STATIONNAIRE :

III-0: Orientation. III-1

III-1: Présentation du problème physique. III-3

- III-2: Calcul au sens des distributions dans \mathcal{R} .
Changement de fonction inconnue. III-7
- III-3: Equation variationnelle. Théorème d'existence
et d'unicité pour u_∞ . III-12
- III-4: Cas particulier. Exemples. III-15
- III-5: Une famille de problèmes qui convergent vers
le cas stationnaire. III-23

Chapitre IV: COMPORTEMENT DES SOLUTIONS
LORSQUE LE TEMPS TEND VERS
L'INFINI :

- IV-0: Orientation. IV-1
- IV-1: Rappel des différentes solutions. IV-3
- IV-2: Comportement à l'infini de la température θ^* . IV-9
- IV-3: Comportement à l'infini de la température θ_2 . IV-13
- IV-4: Autres propriétés des températures θ_2 et θ^*
lorsque le temps tend vers l'infini. IV-17

IV-5: Comportement à l'infini de la température θ_{Ld} .	IV-22
IV-6: Comportement à l'infini de la température θ_2 .	IV-25

<u>Résumé:</u>	R-1
----------------	-----

Appendices:

Appendice 1.	A-1
Appendice 2.	A-3
Appendice 3.	A-6
Appendice 4.	A-8
Appendice 5.	A-10

<u>Bibliographie:</u>	B-1
-----------------------	-----

INTRODUCTION

Jusqu'à présent la quantité de travaux réalisés sur le problème de Stefan (à une ou deux phases) est assez vaste et peut-être "impressionnante", surtout pour le cas unidimensionnel (voir bibliographie). (*)

Après l'idée de Baiocchi [2;3], suivie par Duvaut [48;49;50] et par d'autres auteurs, on a commencé à appliquer la théorie des équations et des inéquations variationnelles aux problèmes de frontière libre.

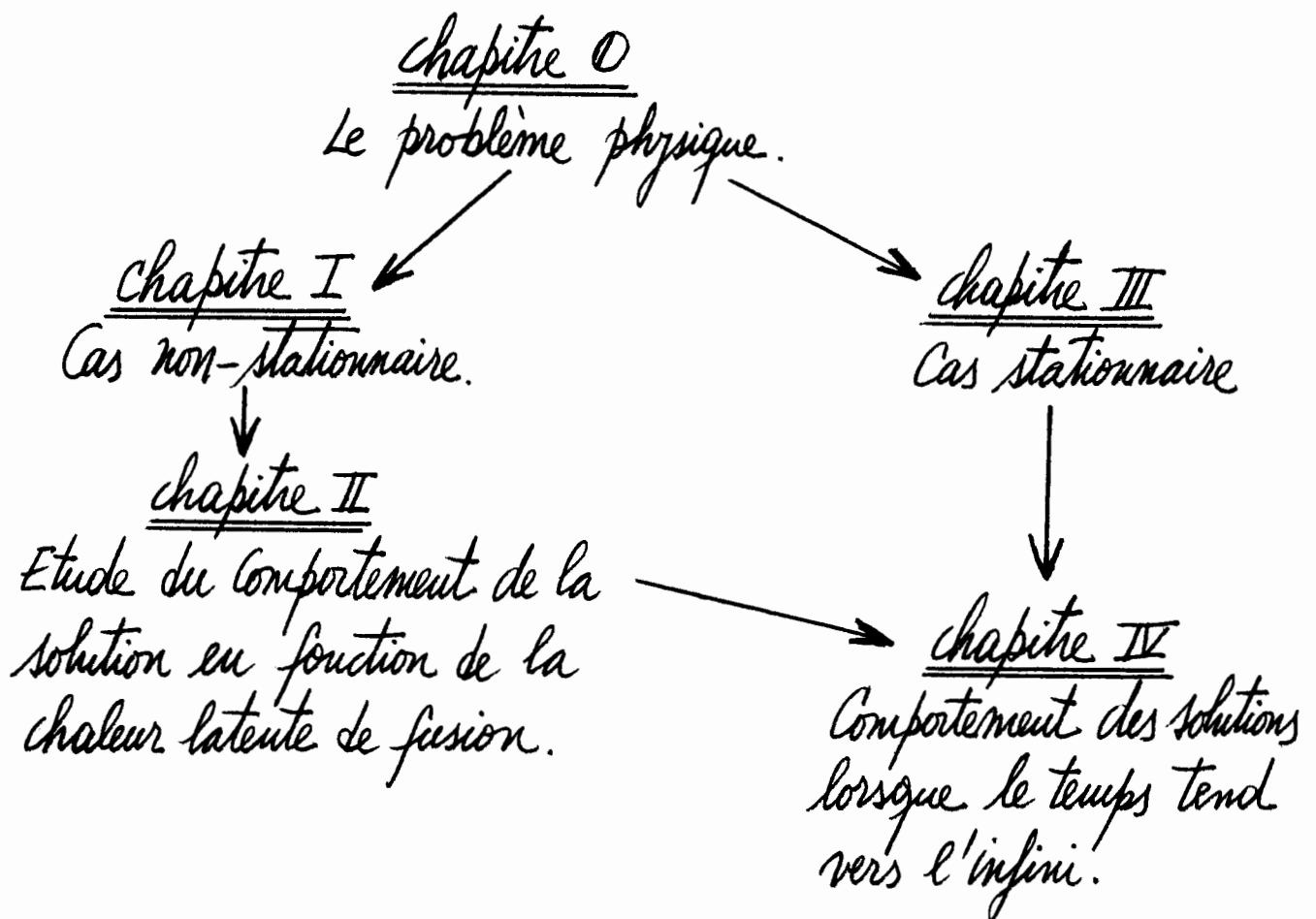
Ce travail suit donc cette ligne de recherche, appliquée aux cas stationnaire et d'évolution du problème de Stefan à deux phases. On étudie aussi le comportement de la solution lorsque la chaleur latente de fusion tend vers zéro et lorsque le temps tend vers l'infini.

(*) Dans la bibliographie (qui ne prétend pas être complète), on ne cite pas les travaux qui ont été faits sur la résolution numérique du problème de Stefan.

Au début de chaque chapitre (I à IV), il y a une orientation où sont indiqués les thèmes traités.

A la fin de ce travail, on a fait un résumé avec un tableau où l'on indique toutes les limites effectuées. Il est vivement recommandé au lecteur de le voir au fur et à mesure qu'il avance dans la lecture du présent travail.

En plus, l'indépendance entre les différents chapitres est donnée par :



Pour avoir une idée des applications possibles du problème de Stefan (à une ou deux phases), on rappellera ici quelques paragraphes extraits de Datzoff [44]:

"Le problème de Stefan a pour objet l'étude du champ des températures dans un espace occupé par deux phases d'un corps, habituellement une phase liquide et une phase solide, par exemple l'eau et la glace. Les fonctions représentant les températures des domaines occupés par les deux phases différentes satisfont aux équations correspondantes de la chaleur, tandis que la surface de séparation des phases, qui reste à température constante, est inconnue; elle est liée à une relation que l'on appelle condition calorimétrique.

Le problème de Stefan appartient à une catégorie de problèmes conduisant à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles ou intégrales avec des

conditions aux limites dont certaines sont variables et doivent être déterminées dans chaque cas.

Des problèmes hydrodynamiques sont de ce type. Par exemple la formation des jets ou des gouttes: la surface de la goutte ou du jet, qui est inconnue, doit obéir à la condition d'être soumise à la pression extérieure, qui est une donnée. De même, si un corps rigide ayant une certaine forme, par exemple une aile d'avion, est en mouvement dans un fluide, il se forme, derrière le corps, des domaines séparés par des surfaces qui ne sont pas a priori connues et sur lesquelles la vitesse du fluide subit une discontinuité donnée.

Il semble que le champ d'application de tels problèmes soit assez vaste en physique. Il n'existe pourtant pas, en mathématiques, de méthodes générales pour les aborder, tandis que l'on a des méthodes plus ou moins développées pour les problèmes à frontières immobiles

connues que l'on peut en principe aborder.

Les différents cas de congélation de l'eau ou de fusion de la glace, ainsi que la congélation des sols humides, constituent des applications immédiates et typiques du problème de Stefan. Ces phénomènes sont d'une importance particulière dans le Nord, et plus spécialement dans les régions du grand froid, où le sol est éternellement gelé jusqu'à une grande profondeur, pour des raisons géologiques incomplètement élucidées. Les surfaces limitant les domaines gelés sont variables et leur détermination pose une suite de problèmes théoriques et pratiques.

A l'échelle planétaire, le problème de Stefan est lié au phénomène de solidification de la Terre, c'est-à-dire au mouvement de la croûte terrestre vers son centre.

Le problème de la croissance d'un cristal à partir de sa phase liquide ou de sa vapeur appartient aussi

au type des problèmes à frontière mobile et inconnue. Mais, puisque le problème de Stefan est macroscopique par sa nature, il n'est pas applicable, au moins sous sa forme actuelle, à la formation des cristaux où règnent aussi des lois à échelle moléculaire demandant un autre appareil mathématique. Les mêmes considérations s'appliquent à l'étude des variations des bulles de vapeur formées dans la phase liquide de la même substance.

Le problème de Stefan est en principe applicable dans le cas de la fusion des métaux, quoiqu'il y ait, là encore, d'autres facteurs qui compliquent le phénomène, en premier lieu le fait que les métaux usuels ne présentent pas des phases "pures".

Dernièrement, la technique actuelle des fusées a attiré l'intérêt sur le problème de Stefan. En effet, au cours de leur rentrée dans l'atmosphère terrestre,

la surface frontale des corps s'échauffe et fond.
Dans ce cas, la loi de déplacement de la limite
de la couche fondue en fonction du temps a
évidemment une importance pratique."

CHAPITRE 0

LE PROBLEME
PHYSIQUE

0-1: PRESENTATION DU PROBLEME PHYSIQUE:

Par problème de Stefan on fait allusion aux problèmes de conduction de la chaleur dans un milieu matériel \mathcal{R} qui ont lieu lorsque l'on a une variation dans le temps de l'état physique de la matière qui constitue \mathcal{R} . Ces variations se produisent avec émission ou absorption de la chaleur latente aux points de \mathcal{R} où l'on atteint la température critique à laquelle le corps \mathcal{R} peut changer d'état.

Considérons le cas d'un système matériel \mathcal{R} qui, à partir d'un certain moment qu'on peut supposer être l'instant initial ($t=0$) se trouve à une certaine température laquelle peut:

a) être inférieure à la température critique dans tous les points de \mathcal{R} (donc, on n'a que la phase solide).

Exemple: de l'eau à -10°C .

b) être supérieure à la température critique dans tous les points de \mathcal{R} (et donc on n'aura que la phase liquide):

Exemple: de l'eau à 10°C .

c) prendre des valeurs inférieures et supérieures à la température critique : dans ce cas, on aura une coexistence de la phase solide et de la phase liquide.

Exemple : un mélange d'eau et de glace.

Ensuite pour $t > 0$, le corps est soumis à une variation de l'état thermique superficiel qui produira une variation de l'état physique du système.

C'est-à-dire que, au moins pour le cas c), à partir de l'instant initial le système \mathcal{R} sera constitué de deux parties différentes : la phase liquide et la phase solide.

Le problème consistera donc à déterminer pour chaque $t > 0$:

i) La surface inconnue $L(t)$ ($L(0)$ est une donnée du problème) qui sépare les deux phases solide et liquide. Les points de $L(t)$ se trouveront nécessairement à la température critique.

ii) La température $\theta_j(x;t)$ des points $x \in \mathcal{R}$ qui sont

dans la phase solide.

iii) La température $\theta_2(x;t)$ des points $x \in \mathcal{R}$ qui sont dans la phase liquide.

L'intérêt et la difficulté du problème de Stefan à deux phases tiennent essentiellement à l'incertitude liée à l'existence du front de changement de phase qui est représenté par la surface $\mathcal{L}(t)$, inconnue supplémentaire du problème. ■

Remarque 0-1:

On va considérer que la température critique (ou température du changement de phase) du système \mathcal{R} est représentée par:

$$\theta = 0 \quad (\text{zéro degré centigrade}). \blacksquare$$

0-2: MISE EN EQUATION DU PROBLEME:

On étudie le champ de température $\theta(x;t)$ pour :

$$(0-1) \begin{cases} \text{(i) } \Omega \in \mathbb{R}^3 : \text{ouvert, connexe et borné de } \mathbb{R}^3, \text{ avec frontière} \\ \Gamma = \partial\Omega \text{ assez régulière.} \\ \text{(ii) } t \in (0; T), \quad T > 0 \text{ donné.} \end{cases}$$

On suppose que $\theta(x;t) = 0$ est la température du changement de phase entre la phase solide ($\theta(x;t) < 0$) et la phase liquide ($\theta(x;t) > 0$).

A chaque instant t l'ensemble Ω est divisé en deux régions occupées par :

$$(0-2) \begin{cases} \text{(i) } \Omega_1(t) : \text{la phase solide} \\ \text{(ii) } \Omega_2(t) : \text{la phase liquide} \end{cases}$$

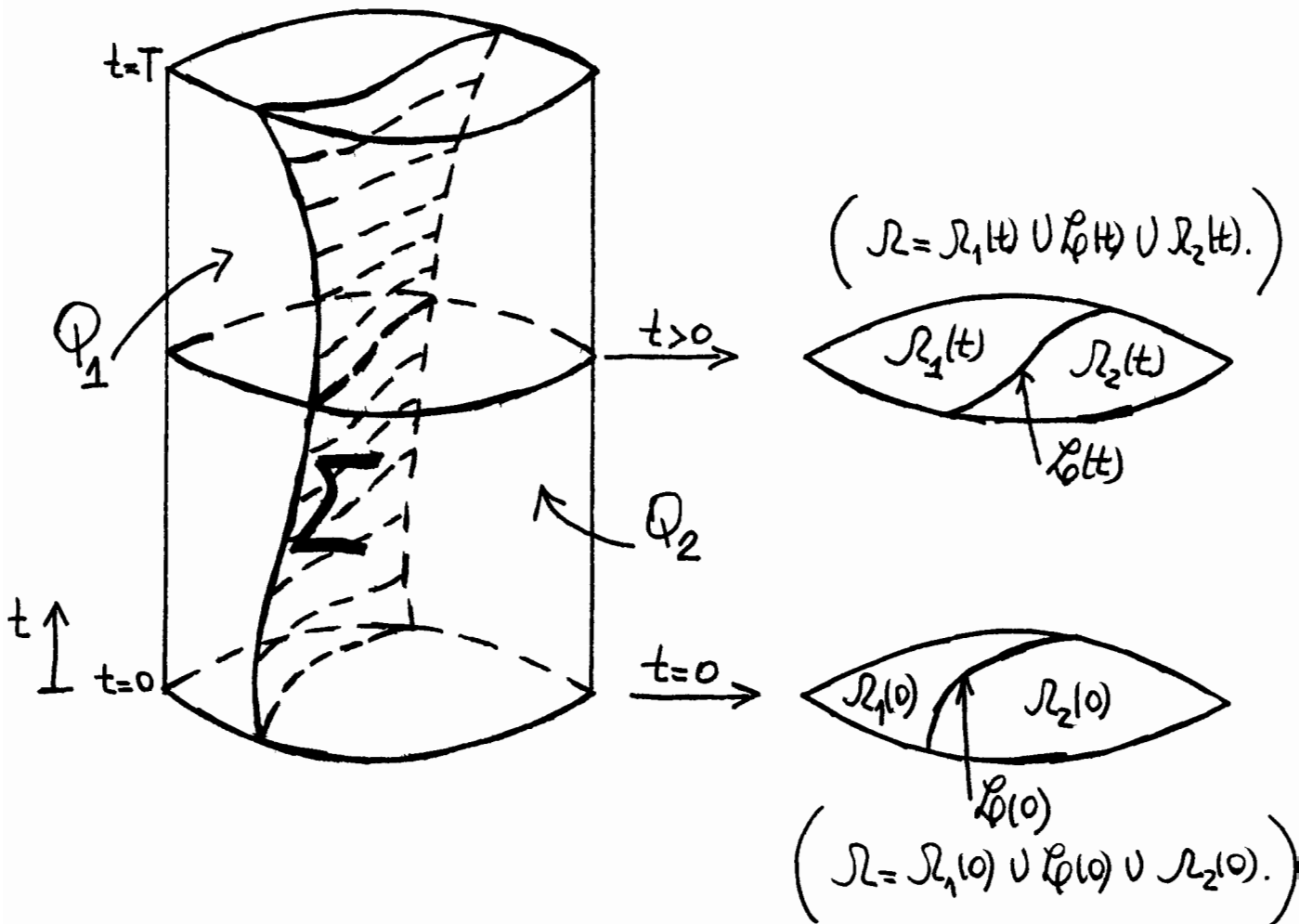
On désigne par $L(t)$ la frontière libre qui les sépare.

En plus, on introduit :

$$(0-3) \begin{cases} i) Q_i = \bigcup_{0 < t < T} \Omega_i(t) \times \{t\}, \quad i=1,2. \\ ii) \Sigma = \bigcup_{0 < t < T} \mathcal{L}(t) \times \{t\}. \\ iii) Q = \Omega \times (0;T) = Q_1 \cup Q_2 \cup \Sigma. \end{cases}$$

où :

$$(0-4) \begin{cases} i=1 : \text{représente la phase solide.} \\ i=2 : \text{représente la phase liquide.} \end{cases}$$



La température θ peut s'exprimer dans Ω par:

$$(0-5) \quad \theta(x;t) = \begin{cases} \theta_1(x;t) < 0 & \text{dans } Q_1. \\ 0 & \text{sur } \Sigma. \\ \theta_2(x;t) > 0 & \text{dans } Q_2. \end{cases}$$

L'équation de la chaleur dans Q_i ($i=1,2$) s'écrit:

$$(0-6) \quad \begin{cases} \rho_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - k_i \Delta \theta_i = 0 \\ i=1,2 \end{cases}$$

où:

$$(0-7) \quad \begin{cases} i) k_i : \text{est la conductivité calorifique dans } Q_i. \\ ii) \rho_i : \text{est la chaleur spécifique dans } Q_i. \end{cases}$$

On suppose que les k_i et les ρ_i ($i=1,2$) sont des constantes positives.

Sur la frontière libre $\Gamma(t)$, on a:

$$(0-8) \quad \begin{cases} i) \frac{\theta_1(x;t)}{\rho_1(t)} = \frac{\theta_2(x;t)}{\rho_2(t)} = 0 \\ ii) (k_1 \vec{\nabla} \theta_1 \cdot \vec{n} - k_2 \vec{\nabla} \theta_2 \cdot \vec{n}) / \rho_1(t) = L \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (1)$$

où:

$$(0-9) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \vec{n}: \text{ est un vecteur normal à } \Gamma(t). \\ \text{ii) } \vec{V}: \text{ est la vitesse de propagation de } \Gamma(t) \text{ dans } \mathbb{R}^3. \\ \text{iii) } L > 0: \text{ est la chaleur latente de fusion.} \end{array} \right.$$

(On suppose également que L est une constante positive).

Les conditions aux limites sont telles que sur une partie Γ_1 de la frontière de Ω , avec $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, on se donne la température et sur la partie de frontière restante Γ_2 on se donne le flux de la chaleur. C'est-à-dire :

$$(0-10) \quad \theta(x;t)|_{\Gamma_1} = b(x)$$

$$(0-11) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } -k_1 \frac{\partial \theta_1(x;t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \tilde{h}(x;t) \text{ si } \theta(x;t)|_{\Gamma_2} < 0. \\ \text{ii) } -k_2 \frac{\partial \theta_2(x;t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \tilde{h}(x;t) \text{ si } \theta(x;t)|_{\Gamma_2} > 0. \end{array} \right.$$

où :

(1) Cette condition est appelée condition de Stefan qui se déduit du principe de conservation de l'énergie.

$$(0-12) \begin{cases} i) \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 : \text{est la frontière de } \Omega. \\ ii) \Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1, \text{ avec mes } \Gamma_1 > 0. \end{cases}$$

$$(0-13) \begin{cases} i) b : \text{est une fonction donnée sur } \Gamma_1. \\ ii) \tilde{h} : \text{est une fonction donnée sur } \Gamma_2 \times [0; T]. \end{cases}$$

La condition initiale est donnée par :

$$(0-14) \quad \theta(x; 0) = \theta_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad \blacksquare$$

Remarque 0-2 :

Pour que le problème soit toujours à deux phases il faut que la fonction b prenne des valeurs négatives et positives pour que la frontière libre $\Gamma(t)$ qui sépare les phases solide et liquide puisse exister et se former. \blacksquare

Remarque 0-3 :

Il existe une condition de compatibilité donnée par :

$$(0-15) \quad \theta_0 / \Gamma_1 = b$$

Selon (0-15) et la Remarque 0-2, on est donc dans le cas c) de la présentation faite dans le paragraphe 0-1.

Remarque 0-4:

Si l'équation de Σ est:

$$(0-16) \quad \Sigma: \quad S(x;t) = 0$$

alors son vecteur normal est donné par:

$$(0-17) \quad \vec{n}(x;t) = \left(\vec{n}_x(x;t); n_t(x;t) \right)$$

où:

$$(0-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \vec{n}_x(x;t) = \frac{\vec{\nabla}_x S(x;t)}{\sqrt{\|\vec{\nabla}_x S(x;t)\|^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial t}(x;t)\right)^2}} \\ \text{ii) } n_t(x;t) = \frac{\frac{\partial S}{\partial t}(x;t)}{\sqrt{\|\vec{\nabla}_x S(x;t)\|^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial t}(x;t)\right)^2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{est un vecteur} \\ \text{normal à } \Sigma(t). \end{array} \quad (2)$$

(2) On pose:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{\nabla}_x S(x;t) = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}(x;t); \frac{\partial S}{\partial x_2}(x;t); \frac{\partial S}{\partial x_3}(x;t) \right) \\ \|\vec{\nabla}_x S(x;t)\|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}(x;t)\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}(x;t)\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}(x;t)\right)^2 \end{array} \right.$$

En plus, si l'équation de $L(t)$ est :

$$(0-19) \quad L(t) : \quad S(x(t); t) = 0 \quad (0 < t < T)$$

alors, on a :

$$(0-20) \quad \vec{\nabla}_x S(x; t) \cdot \vec{V}(x; t) + \frac{\partial S(x; t)}{\partial t} = 0 \quad \forall (x; t) \in \Sigma.$$

de sorte que :

$$(0-21) \quad \vec{V}(x; t) \cdot \vec{n}_x(x; t) + \eta_t(x; t) = 0 \quad \forall (x; t) \in \Sigma. \quad \blacksquare$$

Remarque 0-5 :

Cette dernière relation (0-21) sera utilisée dans le Lemme I-5 lorsqu'on transformera le problème au sens des distributions dans Q . \blacksquare

CHAPITRE I

CAS NON
STATIONNAIRE

I-0: ORIENTATION:

Dans I-1, on présente le problème non-stationnaire où on introduit un apport d'énergie q par unité de temps, pour étudier un problème un peu plus général que celui présenté dans le Chapitre 0.

Puis, dans I-2, on établit quelques lemmes préliminaires pour transformer les équations et les écrire au sens des distributions dans Q suivant Duvaut [49].

Dans I-3, on fait un changement de fonction inconnue inspiré par Baiocchi [2; 3], et en particulier par Duvaut [49]; on obtient les équations aux dérivées partielles satisfaites par cette nouvelle fonction.

Ensuite, dans I-4, on obtient l'inéquation variationnelle que doit vérifier la nouvelle fonction inconnue, inéquation variationnelle dont la particularité est qu'elle contient un terme non différentiable.

Dans I-5, on démontre des propriétés auxiliaires qui seront utilisées par la suite.

Pour démontrer l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle on a créé, dans I-6, une famille de problèmes auxiliaires dépendant d'un paramètre $\alpha > 0$. Pour chaque $\alpha > 0$, on démontre l'existence et l'unicité de la solution u_α .

Puis, dans I-7, on démontre que lorsque α tend vers l'infini, u_α tend vers une solution de l'inéquation variationnelle originale. Ensuite, on vérifie que u est unique. On donne aussi une deuxième démonstration de l'existence de u .

Et pour terminer le chapitre, dans I-8, on étudie quelques propriétés de la solution u dans le cas où on fait une restriction au cas général. ■

I-1: PRESENTATION DU PROBLEME NON-STATIONNAIRE.CAS D'EVOLUTION N°1:

On étudie le champ de température :

$$(1-1) \quad \theta(x;t) = \begin{cases} \theta_1(x;t) < 0 & \text{dans } Q_1. \\ 0 & \text{sur } \Sigma. \\ \theta_2(x;t) > 0 & \text{dans } Q_2. \end{cases}$$

définie $\forall (x;t) \in Q$ et qui satisfait les conditions suivantes:

$$(1-2) \quad \begin{cases} \rho_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - k_i \Delta \theta_i = q & \text{dans } Q_i. \\ i=1,2 \end{cases}$$

$$(1-3) \quad \begin{cases} i) \theta_1 = \theta_2 = 0 \\ ii) k_1 \vec{\nabla} \theta_1 \cdot \vec{n} - k_2 \vec{\nabla} \theta_2 \cdot \vec{n} = L \vec{V} \cdot \vec{n} \end{cases} \text{ sur } \Sigma. \quad (1)$$

$$(1-4) \quad \theta|_{\Gamma_1} = b$$

$$(1-5) \quad \begin{cases} i) -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \tilde{h} & \text{si } \theta|_{\Gamma_2} < 0. \\ ii) -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \tilde{h} & \text{si } \theta|_{\Gamma_2} > 0. \end{cases}$$

$$(1-6) \quad \theta(0) = \theta_0 \text{ dans } \mathcal{R}$$

où :

$$(1-7) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } g = g(x, t) : \text{représente un apport d'énergie par} \\ \text{unité de temps.} \\ \text{ii) } \left. \begin{array}{l} Q_1, Q_2, Q, \Sigma \\ k_i, \rho_i, L, \vec{V} \\ b, \tilde{h} \end{array} \right\} \text{ sont définis comme dans} \\ \text{le chapitre 0.} \end{array} \right.$$

(1) On peut prendre pour \vec{n} le vecteur \vec{n}_x donné par (0-18i).

I-2: CALCUL AU SENS DES DISTRIBUTIONS DANS Q :

On va transformer les équations précédentes de manière à les écrire en terme des distributions dans Q .

Pour cela, on introduit :

$$(1-8) \quad T_i(x;t) = \begin{cases} \theta_i(x;t) & \text{si } (x;t) \in Q_i. \\ 0 & \text{si } (x;t) \in (Q - Q_i). \end{cases}$$

$i=1,2$

$$(1-9) \quad \mathcal{D}(Q) = \left\{ \varphi: Q \rightarrow \mathbb{R} / \begin{array}{l} \varphi \text{ est indéfiniment différentiable} \\ \text{et à support compact dans } Q. \end{array} \right\}$$

On a aussi que :

$$(1-10) \quad \begin{cases} \text{i) } T_2 = \theta^+ & \text{dans } Q \\ \text{ii) } T_1 = -\theta^- & \text{dans } Q \end{cases} \quad (2)$$

On désigne par :

$$(1-11) \quad \begin{cases} \text{i) } \mathcal{D}'(Q) : \text{l'ensemble des distributions sur } Q. \\ \text{ii) } \langle ; \rangle : \text{la dualité entre } \mathcal{D}'(Q) \text{ et } \mathcal{D}(Q). \end{cases}$$

On sait déjà que :

$$(1-12) \quad Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \Sigma$$

où on peut exprimer les Q_i ($i=1,2$) par:

$$(1-13) \begin{cases} \text{i) } Q_1 = \{ (x;t) \in Q / T_1(x;t) < 0 \} \\ \text{ii) } Q_2 = \{ (x;t) \in Q / T_2(x;t) > 0 \} \end{cases}$$

En plus, on a:

$$(1-14) \begin{cases} \text{i) } \partial Q_1 = \partial Q \cup \Sigma \\ \text{ii) } \partial Q_2 = \partial Q \cup (-\Sigma) \end{cases} \quad (3)$$

où :

$$(1-15) \begin{cases} \text{i) } \partial_1 Q = \partial Q \cap \bar{Q}_1 \\ \text{ii) } \partial_2 Q = \partial Q \cap \bar{Q}_2. \end{cases}$$

Alors, on a les lemmes suivants:

Lemme I-1:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$, on a:

$$(1-16) \begin{cases} \text{i) } \langle T_2; \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle = - \int_{Q_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \varphi \, dx \, dt \\ \text{ii) } \langle T_1; \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle = - \int_{Q_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \varphi \, dx \, dt \end{cases}$$

(2) On désigne par f^+ et f^- la partie positive et la partie négative de la fonction f , définies par:

$$\begin{cases} \text{i) } f^+ = \max(0; f) \\ \text{ii) } f^- = \max(0; -f) \end{cases} \quad \text{et qui vérifient} \quad \begin{cases} \text{i) } f^+ \geq 0, f^- \leq 0. \\ \text{ii) } f = f^+ - f^-. \\ \text{iii) } |f| = f^+ + f^-. \end{cases}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 i) \langle T_2; \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle &= \int_Q T_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx dt = \int_{Q_2} \theta_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx dt = \\
 &= - \int_{Q_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \Psi dx dt + \int_{\partial Q_2} \theta_2 \Psi \vec{n}_t d\sigma.
 \end{aligned}$$

mais:

$$\int_{Q_2} \theta_2 \Psi \vec{n}_t d\sigma = - \int_{\sum_{\vec{n}_t = \vec{0}}} \theta_2 \Psi \vec{n}_t d\sigma + \int_{\partial_2 Q} \theta_2 \Psi \vec{n}_t d\sigma = 0.$$

donc, on a:

$$\langle T_2; \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle = - \int_{Q_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \Psi dx dt.$$

ii) On le démontre d'une façon similaire. ■

Lemme I2:

$\forall \Psi \in D(Q)$, on a:

$$(1-17) \begin{cases} i) \langle T_2; \Delta \Psi \rangle = \int_{Q_2} \Delta \theta_2 \Psi dx dt + \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \theta_2 \cdot \vec{n}_x \Psi d\sigma & (4) \\ ii) \langle T_1; \Delta \Psi \rangle = \int_{Q_1} \Delta \theta_1 \Psi dx dt - \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \theta_1 \cdot \vec{n}_x \Psi d\sigma \end{cases}$$

(3) On prend dans ∂Q_2 l'expression $(-\Sigma)$, car on tient déjà compte que sur Σ on utilise toujours, pour le vecteur normal la direction de Q_1 vers Q_2 . ■

(4) On pose: $\Delta \Psi = \Delta_x \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2}$. ■

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 i) \langle T_2; \Delta\psi \rangle &= \int_Q T_2 \Delta\psi \, dx \, dt = \int_{Q_2} \theta_2 \Delta\psi \, dx \, dt = \\
 &= \int_{Q_2} \Delta\theta_2 \psi \, dx \, dt + \int_{\partial Q_2} \theta_2 \vec{\nabla}_x \psi \cdot \vec{n}_x \, d\sigma - \int_{\partial Q_2} \vec{\nabla}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \psi \, d\sigma \quad (1-18)
 \end{aligned}$$

mais :

$$a) \int_{Q_2} \theta_2 \vec{\nabla}_x \psi \cdot \vec{n}_x \, d\sigma = \int_{\partial_2 Q} \theta_2 \underbrace{\vec{\nabla}_x \psi \cdot \vec{n}_x}_0 \, d\sigma - \int_{\sum} \underbrace{\theta_2}_0 \vec{\nabla}_x \psi \cdot \vec{n}_x \, d\sigma = 0$$

$$\begin{aligned}
 b) \int_{\partial Q_2} \vec{\nabla}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \psi \, d\sigma &= \int_{\partial_2 Q} \vec{\nabla}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \underbrace{\psi}_0 \, d\sigma - \int_{\sum} \vec{\nabla}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \psi \, d\sigma = \\
 &= - \int_{\sum} \vec{\nabla}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \psi \, d\sigma.
 \end{aligned}$$

En utilisant a) et b) dans (1-18), on en déduit (1-17i).

ii) On le démontre d'une façon similaire. ■

Lemme I-3:

$\forall \psi \in D(Q)$, on a :

$$(1-19) \begin{cases} i) \langle \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - k_2 \Delta T_2; \psi \rangle = \int_{Q_2} g \psi \, dx \, dt - \int_{\sum} k_2 \vec{\nabla}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \psi \, d\sigma \\ ii) \langle \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - k_1 \Delta T_1; \psi \rangle = \int_{Q_1} g \psi \, dx \, dt + \int_{\sum} k_1 \vec{\nabla}_x \theta_1 \cdot \vec{n}_x \psi \, d\sigma \end{cases}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \langle \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - k_2 \Delta T_2; \Psi \rangle &= \rho_2 \langle \frac{\partial T_2}{\partial t}; \Psi \rangle - k_2 \langle \Delta T_2; \Psi \rangle = \\
 &= -\rho_2 \langle T_2; \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle - k_2 \langle T_2; \Delta \Psi \rangle = \int_{Q_2} (\rho_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - k_2 \Delta \theta_2) \Psi \, dx \, dt - \\
 &- k_2 \int_{\Sigma} \vec{\nu}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \Psi \, d\sigma = \int_{Q_2} g \Psi \, dx \, dt - k_2 \int_{\Sigma} \vec{\nu}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \Psi \, d\sigma.
 \end{aligned}$$

ii) On le démontre d'une façon similaire. ■

Lemme I-4:

Si χ_2 est la fonction caractéristique de l'ensemble Q_2 (5), alors on a:

$$(1-20) \quad \langle \frac{\partial \chi_2}{\partial t}; \Psi \rangle = \int_{\Sigma} \Psi \eta_t \, d\sigma \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(Q).$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 \langle \frac{\partial \chi_2}{\partial t}; \Psi \rangle &= - \langle \chi_2; \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle = - \int_Q \chi_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} \, dx \, dt = - \int_{Q_2} 1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \, dx \, dt = \\
 &= \int_{Q_2} \underbrace{0}_{\text{!}} \cdot \Psi \, dx \, dt - \int_{\partial Q_2} \Psi \eta_t \, d\sigma = - \int_{\partial Q_2} \underbrace{\Psi}_{\text{!}} \eta_t \, d\sigma + \int_{\Sigma} \Psi \eta_t \, d\sigma = \int_{\Sigma} \Psi \eta_t \, d\sigma. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

(5) χ_2 est définie par:

$$\chi_2(x; t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x; t) \in Q_2 \\ 0 & \text{si } (x; t) \notin Q_2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Lemme I-5:

On a:

$$(1-21) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 T_1 + \rho_2 T_2) - \Delta (k_1 T_1 + k_2 T_2) = g - L \frac{\partial \psi_2}{\partial t}$$

dans $D'(\Omega)$.

Démonstration:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 T_1 + \rho_2 T_2) - \Delta (k_1 T_1 + k_2 T_2); \varphi \rangle &= \langle \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - k_1 \Delta T_1; \varphi \rangle + \\ &+ \langle \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - k_2 \Delta T_2; \varphi \rangle = \int_{Q_1} g \varphi \, dx \, dt + \int_{\Sigma} k_1 \vec{\nu}_x \theta_1 \cdot \vec{n}_x \varphi \, d\sigma + \\ &+ \int_{Q_2} g \varphi \, dx \, dt - \int_{\Sigma} k_2 \vec{\nu}_x \theta_2 \cdot \vec{n}_x \varphi \, d\sigma = \int_{Q} g \varphi \, dx \, dt + \int_{\Sigma} \underbrace{L \vec{\nu}_x \cdot \vec{n}_x}_{=-\eta_2} \varphi \, d\sigma = \\ &= \int_{Q} g \varphi \, dx \, dt - L \int_{\Sigma} \eta_2 \varphi \, d\sigma = \langle g - L \frac{\partial \psi_2}{\partial t}; \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \end{aligned}$$

d'où (1-21). ■

Remarque I-1:

Toutes les informations du problème sont maintenant données par:

$$(1-22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 T_1 + \rho_2 T_2) - \Delta (k_1 T_1 + k_2 T_2) = g - L \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \text{ dans } D(\Omega). \\ \text{ii) } \left\{ \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \tilde{h} \quad \text{si } \theta \Big|_{\Gamma_2} < 0 \\ -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \tilde{h} \quad \text{si } \theta \Big|_{\Gamma_2} > 0 \end{array} \right. \\ \text{iii) } \theta \Big|_{\Gamma_1} = b \\ \text{iv) } \theta(0) = \theta_0 \end{array} \right.$$

I-3: CHANGEMENT DE FONCTION INCONNUE:

On introduit la nouvelle fonction inconnue $u(x;t)$ définie par:

$$(1-23) \quad u(x;t) = \int_0^t [k_2 T_2(x;z) + k_1 T_1(x;z)] dz.$$

En tenant compte de (1-10), on a aussi pour u l'expression suivante:

$$(1-24) \quad u(x;t) = \int_0^t [k_2 \theta^+(x;z) - k_1 \theta^-(x;z)] dz.$$

Remarque I-2:

Il est clair qu'une fois qu'on a pu connaître $u(x;t)$ on pourra aussi connaître $\theta(x;t)$ par les relations suivantes:

$$(1-25) \quad \begin{cases} \text{i) } \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+ = k_2 \theta^+ = k_2 T_2 & \text{dans } Q. \\ \text{ii) } \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^- = k_1 \theta^- = -k_1 T_1 & \text{dans } Q. \end{cases}$$

qui nous donnent:

$$(1-26) \quad \theta(x;t) = \frac{1}{k_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+(x;t) - \frac{1}{k_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^-(x;t) \quad \forall (x;t) \in Q.$$

Théorème I-1:

La nouvelle fonction inconnue u satisfait les conditions suivantes:

$$(A-27) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \beta(u') - \Delta u = G - L \chi_2 \text{ dans } D'(Q). \\ \text{ii) } \left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_1} = B \\ -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h \end{array} \right. \\ \text{iii) } u(0) = 0 \end{array} \right.$$

où:

$$(A-28) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \beta(v) = \frac{k_2}{k_2} v^+ - \frac{k_1}{k_1} v^- \\ \text{ii) } g_0(x) = k_2 \theta_0^+(x) - k_1 \theta_0^-(x) + L \chi_2(x; 0) \text{ dans } R. \\ \text{iii) } G(x; t) = g_0(x) + \int_0^t g_0(x; \tau) d\tau \text{ dans } Q. \\ \text{iv) } \chi_2(x; 0) = H(\theta_0(x)) \text{ dans } R. \quad (6) \\ \text{v) } h(x; t) = \int_0^t h(x; \tau) d\tau \text{ sur } \Gamma_2 \times (0; T). \\ \text{vi) } b_0(x) = k_2 b^+(x) - k_1 b^-(x) \text{ sur } \Gamma_1. \\ \text{vii) } B(x; t) = t b_0(x) \text{ sur } \Gamma_1 \times (0; T). \end{array} \right.$$

(6) On définit $H(z)$ par:
$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{fonction de} \\ \text{Heaviside} \end{array} \right).$$

Démonstration:

i) si on intègre (1-22i) par rapport à la variable t , on obtient :

$$\begin{aligned} & [\rho_1 T_1(x;t) + \rho_2 T_2(x;t)] - [\rho_1 T_1(x;0) + \rho_2 T_2(x;0)] - \Delta u(x;t) = \\ & = \int_0^t g(x;z) dz - L \psi_2(x;t) + L \psi_2(x;0), \end{aligned}$$

et en tenant compte de (1-22), (1-25) et (1-28), on en déduit (1-27i).

iii) si dans (1-24) on prend $t=0$, on obtient pour u la condition initiale (1-27ii).

ii) La condition sur Γ_1 est immédiate.

$\forall x \in \Gamma_2$, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(x;t) &= \int_0^t \left[k_2 \frac{\partial \theta^+}{\partial n}(x;z) - k_1 \frac{\partial \theta^-}{\partial n}(x;z) \right] dz \stackrel{(7)}{=} \\ &= \int_0^t \left[-\tilde{h}(x;z) H(\theta(x;z)) - \tilde{h}(x;z) H(-\theta(x;z)) \right] dz = - \int_0^t \tilde{h}(x;z) dz = \\ &= -h(x;t), \end{aligned}$$

d'où (1-27ii). ▮

(7) On a:

$$\begin{cases} i) \frac{\partial \theta^+}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} H(\theta) \\ ii) \frac{\partial \theta^-}{\partial n} = - \frac{\partial \theta}{\partial n} H(-\theta). \quad \blacksquare \end{cases}$$

On est maintenant en mesure d'obtenir une formulation variationnelle de notre problème (1-27).

A cause de la présence de $\chi_2(x;t)$ dans (1-27i), on va d'abord obtenir une inéquation variationnelle avec un terme non différentiable, puis démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

I-4: INEQUATION VARIATIONNELLE:

On introduit les notations suivantes:

$$(1-29) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } V = H^1(\Omega) \\ \text{ii) } H = L^2(\Omega) \\ \text{iii) } K = \{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = b_0 \} \\ \text{iv) } V_0 = \{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = 0 \} \\ \text{v) } V' (V'_0) \text{ est l'espace dual de } V (V_0) \text{ lorsqu'on} \\ \text{identifie } H \text{ à son dual.} \\ \text{vi) } \langle \cdot, \cdot \rangle : \text{ dualité entre } V' \text{ et } V \text{ (aussi entre} \\ V'_0 \text{ et } V_0). \end{array} \right.$$

$$(1-30) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } (u; v) = \int_{\Omega} u v \, dx : \text{ produit scalaire dans } H. \\ \text{ii) } a(u; v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx \\ \text{iii) } \|v\|_H = \sqrt{(v; v)} : \text{ norme dans } H. \\ \text{iv) } \|v\|_V = \sqrt{a(v; v) + \|v\|_H^2} : \text{ norme dans } V. \\ \text{v) } f(v) = \int_{\Omega} v^+ \, dx \\ \text{vi) } \langle f(H); v \rangle = \langle G(H); v \rangle - \int_{\Gamma_2} h(H) v \, d\gamma \end{array} \right.$$

Alors, on a:

Lemme I-6:

Si u est une solution régulière de (1-27), alors u est solution de l'inéquation variationnelle:

$$(1-31) \begin{cases} (\beta(u'(t)); v - u'(t)) + \mathcal{J}(u(t); v - u'(t)) + Lf(v) - Lf(u'(t)) \geq \langle f(t); v - u'(t) \rangle \\ u'(t) \in K \\ u(t) \in V, u(0) = 0. \end{cases} \quad \forall v \in K, \text{ p.p. dans } [0; T].$$

Démonstration:

Si on prend $v \in K$ et si on multiplie l'équation (1-27i) par $(v - u'(t))$ et puis on intègre sur Ω , on obtient:

$$(1-32) \quad (\beta(u'(t)); v - u'(t)) - (\Delta u(t); v - u'(t)) = \langle G(t); v - u'(t) \rangle - L(\chi_2(t); v - u'(t))$$

Par ailleurs, on a:

$$\begin{aligned} i) \quad & -(\Delta u(t); v - u'(t)) = \mathcal{J}(u(t); v - u'(t)) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(t)}{\partial n} (v - u'(t)) d\gamma = \\ & = \mathcal{J}(u(t); v - u'(t)) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u(t)}{\partial n} \underbrace{(v - u'(t))}_{=0} d\gamma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u(t)}{\partial n} (v - u'(t)) d\gamma = \\ & = \mathcal{J}(u(t); v - u'(t)) + \int_{\Gamma_2} h(t) (v - u'(t)) d\gamma \quad (1-33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad & f(v) - f(u'(t)) - (\chi_2(t); v - u'(t)) = \int_{\Omega} v^+ dx - \int_{\Omega} (u'(t))^+ dx - \\
& - \int_{\Omega} \chi_2(t) (v - u'(t)) dx = \int_{\Omega} v^+ dx - \int_{\Omega_2(t)} u'(t) dx - \int_{\Omega_2(t)} (v - u'(t)) dx = \\
& = \int_{\Omega} v^+ dx - \int_{\Omega_2(t)} v dx = \int_{\Omega_1(t)} v^+ dx + \int_{\Omega_2(t)} v^- dx \geq 0 \quad (1-34)
\end{aligned}$$

Alors, en utilisant (1-33) et (1-34) dans (1-32), on en déduit (1-31). ▮

Remarque I-3:

On a aussi :

$$(1-35) \quad \frac{u(t)}{t} \in K \quad \text{p.p. dans } [0; T]. \quad \blacksquare$$

Remarque I-4:

Du fait que :

$$(1-36) \quad u'(t) = k_2 \theta^+(t) - k_1 \theta^-(t) \in K$$

la condition de compatibilité donnée par (0-15) peut être remplacée par l'hypothèse suivante :

$$(1-37) \quad k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^- \in K. \quad \blacksquare$$

I-5: PROPRIETES AUXILIAIRES:Lemme I-7:

L'opérateur:

$$\beta: H \rightarrow H /$$

$$(1-38) \quad \beta(v) = \alpha_2 v^+ - \alpha_1 v^-$$

avec:

$$(1-39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \alpha_2 = \frac{c_2}{k_2} > 0 \\ \text{ii) } \alpha_1 = \frac{c_1}{k_1} > 0 \end{array} \right.$$

vérifie les propriétés suivantes:

i) β est fortement monotone, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que:

$$(1-40) \quad (\beta(v) - \beta(u); v - u) \geq c_0 \|v - u\|_H^2 \quad \forall u, v \in H.$$

ii) β est lipschitzien, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M_0 > 0$ telle que:

$$(1-41) \quad \|\beta(v) - \beta(w)\|_H \leq M_0 \|v - w\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

iii) β est un isomorphisme topologique.

Démonstration:

i) On a:

$$A) \|v\|_H^2 = (v^+ v^-; v^+ v^-) = \|v^+\|_H^2 + \|v^-\|_H^2 \quad \forall v \in H. \quad (1-42)$$

$$\begin{aligned} B) \|v-u\|_H^2 &= \|v\|_H^2 + \|u\|_H^2 - 2(v; u) = \\ &= \|v^+\|_H^2 + \|v^-\|_H^2 + \|u^+\|_H^2 + \|u^-\|_H^2 + 2(u^+; v^-) + 2(u^-; v^+) - 2(u^+; v^+) - 2(u^-; v^-) = \\ &= \|v^+ u^+\|_H^2 + \|v^- u^-\|_H^2 + 2(u^+; v^-) + 2(u^-; v^+). \end{aligned} \quad (1-43)$$

$$\begin{aligned} C) \quad (1-44) \quad (\beta(v) - \beta(u); v-u) &= (\alpha_2 (v^+ - u^+) - \alpha_1 (v^- - u^-); (v^+ - u^+) - (v^- - u^-)) = \\ &= \alpha_2 \left[\|v^+ - u^+\|_H^2 + (u^+; v^-) + (v^+; u^-) \right] + \alpha_1 \left[\|v^- - u^-\|_H^2 + (v^-; u^+) + (u^-; v^+) \right] \end{aligned}$$

On prend:

$$C_0 = \min(\alpha_1; \alpha_2) \quad (1-45)$$

Alors, il y a deux possibilités:

$$\begin{cases} C1) & C_0 = \alpha_2 \\ C2) & C_0 = \alpha_1 \end{cases}$$

C1) Si $C_0 = \alpha_2$, alors on a:

$$(\beta(v) - \beta(u); v-u) = C_0 \|v-u\|_H^2 + A_2 \quad (1-46)$$

avec:

$$A_2 = (\alpha_1 - C_0) \left[\|v^- - u^-\|_H^2 + (v^-; u^+) + (u^-; v^+) \right] \geq 0 \quad (1-47)$$

d'où (1-40).

c2) Si $c_0 = \alpha_1$, alors on a:

$$(\beta(v) - \beta(u); v - u) = c_0 \|v - u\|_H^2 + A_1 \quad (1-48)$$

avec:

$$A_1 = (\alpha_2 - c_0) \left[\|v^+ - u^+\|_H^2 + (u^+; v^-) + (v^+; u^-) \right] \geq 0 \quad (1-49)$$

d'où (1-40).

ii)

$$\begin{aligned} \|\beta(v) - \beta(u)\|_H^2 &= (\alpha_2 (v^+ - u^+) - \alpha_1 (v^- - u^-); \alpha_2 (v^+ - u^+) - \alpha_1 (v^- - u^-)) = \\ (1-50) \quad &= \alpha_2^2 \|v^+ - u^+\|_H^2 + \alpha_1^2 \|v^- - u^-\|_H^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 [(u^+; v^-) + (u^-; v^+)] \end{aligned}$$

soit:

$$M_0 = \max(\alpha_1; \alpha_2) \quad (1-51)$$

Alors, de (1-43), (1-50) et (1-51), il en résulte:

$$\|\beta(v) - \beta(u)\|_H^2 \leq M_0^2 \|v - u\|_H^2 \quad \forall u, v \in H.$$

d'où (1-41).

iii)

A) β est injective: (1-52)

Si $\beta(u) = \beta(v)$, alors:

$$0 \leq c_0 \|v - u\|_H^2 \leq (\beta(v) - \beta(u); v - u) = 0$$

d'où $v = u$.

B) β est surjective: (1-53)

$$\forall v \in H \quad \exists u = \frac{1}{\alpha_2} v^+ - \frac{1}{\alpha_1} v^- \in H \quad /$$

$$\beta(u) = v$$

C) β est bi-continue: (1-54)

On peut généraliser (1-41) par:

$$(1-55) \quad c_0 \|v - u\|_H \leq \|\beta(v) - \beta(u)\|_H \leq M_0 \|v - u\|_H \quad \forall u, v \in H$$

De (1-55), on en déduit (1-54). ▮

Lemme I-8:

L'opérateur:

$$\Psi: H \rightarrow \mathbb{R} \quad /$$

$$(1-56) \quad \Psi(v) = \frac{\alpha_2}{2} \|v^+\|_H^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|v^-\|_H^2 \quad \forall v \in H$$

vérifie les propriétés suivantes:

i) Ψ est différentiable selon Gâteaux, et sa différentielle vaut:

$$(1-57) \quad \langle \Psi'(u); v \rangle = (\beta(u); v) \quad \forall u, v \in H.$$

ii) Ψ est strictement convexe.

iii) (1-58) $\frac{c_0}{2} \|v\|_H^2 \leq \Psi(v) \leq \frac{M_0}{2} \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$

Démonstration :

i)

A) La fonction réelle :

$$Y(x) = \frac{\alpha_2}{2} (x^+)^2 + \frac{\alpha_1}{2} (x^-)^2 = \begin{cases} \frac{\alpha_2}{2} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\alpha_1}{2} x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est strictement convexe et dérivable, ayant une dérivée égale à :

$$Y'(x) = \beta(x) = \alpha_2 x^+ - \alpha_1 x^-$$

B) Utilisant la partie A), on a :

$$\forall u, v \in H, \quad \forall x \in \Omega, \quad \lambda \in (0; 1]$$

$$\beta(u(x)) v(x) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0^+ \\ 0 < \lambda \leq 1}} \frac{\frac{\alpha_2}{2} [(u+\lambda v)^+(x)]^2 + \frac{\alpha_1}{2} [(u+\lambda v)^-(x)]^2 - \left[\frac{\alpha_2}{2} u^+(x)^2 + \frac{\alpha_1}{2} u^-(x)^2 \right]}{\lambda}$$

$$= \inf_{0 < \lambda \leq 1} \frac{\frac{\alpha_2}{2} [(u+\lambda v)^+(x)]^2 + \frac{\alpha_1}{2} [(u+\lambda v)^-(x)]^2 - \left[\frac{\alpha_2}{2} (u^+(x))^2 + \frac{\alpha_1}{2} (u^-(x))^2 \right]}{\lambda} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_2}{2} [(u+v)^+(x)]^2 + \frac{\alpha_1}{2} [(u+v)^-(x)]^2 - \left[\frac{\alpha_2}{2} (u^+(x))^2 + \frac{\alpha_1}{2} (u^-(x))^2 \right] \in L^1(\Omega).$$

Alors, si on utilise le Théorème de Lebesgue, on en déduit :

$$(\beta(u); v) = \int_{\Omega} \beta(u(x)) v(x) dx =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0^+ \\ 0 < \lambda \leq 1}} \frac{\int_{\Omega} \left\{ \frac{\alpha_2}{2} [(u+\lambda v)^+(x)]^2 + \frac{\alpha_1}{2} [(u+\lambda v)^-(x)]^2 \right\} dx - \int_{\Omega} \left[\frac{\alpha_2}{2} (u^+(x))^2 + \frac{\alpha_1}{2} (u^-(x))^2 \right] dx}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0^+ \\ 0 < \lambda \leq 1}} \frac{\left[\frac{\alpha_2}{2} \| (u+\lambda v)^+ \|_{\#}^2 + \frac{\alpha_1}{2} \| (u+\lambda v)^- \|_{\#}^2 \right] - \left[\frac{\alpha_2}{2} \| u^+ \|_{\#}^2 + \frac{\alpha_1}{2} \| u^- \|_{\#}^2 \right]}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0^+ \\ 0 < \lambda \leq 1}} \frac{\Psi(u+\lambda v) - \Psi(u)}{\lambda} = \langle \Psi'(u); v \rangle$$

d'où (1-57).

ii) Du fait que Ψ est différentiable selon Gâteaux et que sa différentielle β est fortement monotone, on en déduit que Ψ est strictement convexe. (8)

iii) On démontre aisément les estimations (1-58). \blacksquare

Lemme I-9:

On a:

(8) Voir Appendice 1. \blacksquare

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } f(v) \leq \sqrt{\text{mes } \mathcal{R}} \|v\|_{\mathcal{H}} \\ \text{ii) } f(v-u) \geq f(v) - f(u) \end{array} \right\} \quad (1-59)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{iii) L'opérateur:} \\ \qquad \qquad \qquad \mathcal{F} = \Psi + L f \quad (1-60) \\ \text{est s.c.i. dans } \mathcal{V} \text{ faible et strictement convexe.} \end{array} \right\}$$

Démonstration :

Immédiate. **|**

I-6: PROBLEME AUXILIAIRE:

Remplaçons la condition (1-4) par:

$$(1-4\text{bis}) \begin{cases} \text{i) } -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} / \Gamma_1 = \alpha (k_1 \theta_1 - b_0) & \text{si } \theta / \Gamma_1 < 0 \\ \text{ii) } -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} / \Gamma_2 = \alpha (k_2 \theta_2 - b_0) & \text{si } \theta / \Gamma_1 > 0 \end{cases}$$

où: α est un paramètre positif.

Pour chaque $\alpha > 0$, considérons θ_α solution des équations (1-2), (1-3), (1-4bis), (1-5) et (1-6).

Alors u_α , défini par:

$$(1-61) \quad u_\alpha(x, t) = \int_0^t [k_2 \theta_\alpha^+(x, \tau) - k_1 \theta_\alpha^-(x, \tau)] d\tau$$

est solution du problème suivant: (19)

$$(1-62) \begin{cases} \text{i) } \beta(u_\alpha) - \Delta u_\alpha = G - L \chi_{2\alpha} & \text{dans } D'(Q). \\ \text{ii) } -\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} / \Gamma_1 = \alpha (u_\alpha - B) \\ \text{iii) } -\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} / \Gamma_2 = h \\ \text{iv) } u_\alpha(0) = 0 \end{cases}$$

La seule condition qui change par rapport à (1-27), c'est celle sur Γ_1 :

$\forall x \in \Gamma_1$, on a:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_\alpha(t)}{\partial n} &= -\int_0^t \left[k_2 \frac{\partial \theta_\alpha^+(z)}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_\alpha^-(z)}{\partial n} \right] dz = \\ &= \int_0^t \left[-k_2 \frac{\partial \theta_\alpha^+(z)}{\partial n} H(\theta_\alpha^+(z)) - k_1 \frac{\partial \theta_\alpha^-(z)}{\partial n} H(-\theta_\alpha^-(z)) \right] dz = \\ &= \alpha \int_0^t \left[(k_2 \theta_\alpha^+(z) - b_0) H(\theta_\alpha^+(z)) + (k_1 \theta_\alpha^-(z) - b_0) H(-\theta_\alpha^-(z)) \right] dz = \\ &= \alpha \int_0^t \left[(k_2 \theta_\alpha^+(z) - k_1 \theta_\alpha^-(z)) - b_0 \right] dz = \alpha (u_\alpha(t) - B(t)) \end{aligned}$$

d'où (1-62ii).

Lemme I-10:

Le problème (1-62) a, pour chaque $\alpha > 0$, la formulation variationnelle:

$$(1-63) \left\{ \begin{aligned} &\beta(u'_\alpha(t); v - u'_\alpha(t)) + \mathcal{J}(u_\alpha(t); v - u'_\alpha(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} u_\alpha(t) (v - u'_\alpha(t)) dy + \\ &+ L f(v) - L f(u'_\alpha(t)) \geq \langle f(t); v - u'_\alpha(t) \rangle + \alpha \int_{\Gamma_1} B(t) (v - u'_\alpha(t)) dy \\ &u'_\alpha(t) \in V \quad \forall v \in V, \text{ p.p. dans } [0; T] \\ &u_\alpha(t) \in V, u_\alpha(0) = 0 \end{aligned} \right.$$

(1) On utilise la même méthode que dans le Théorème I-1.

Démonstration:

On le démontre d'une façon similaire à celle utilisée dans le lemme I-6. ▮

Soient:

$$(1-64) \quad \begin{cases} \text{i)} & \mathcal{J}_\alpha(u; v) = \mathcal{J}(u; v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv \, d\mu \\ \text{ii)} & \langle f_\alpha(t); v \rangle = \langle f(t); v \rangle + \alpha \int_{\Gamma_1} B(t) v \, d\mu \end{cases}$$

Alors, (1-63) peut se mettre sous la forme équivalente:

$$(1-65) \quad \begin{cases} (\beta(u'_\alpha(t)); v - u'_\alpha(t)) + \mathcal{J}_\alpha(u_\alpha(t); v - u'_\alpha(t)) + L f(v) - L f(u'_\alpha(t)) \geq \\ \geq \langle f_\alpha(t); v - u'_\alpha(t) \rangle \quad \forall v \in V, \text{ p.p. dans } [0; T]. \\ u'_\alpha(t) \in V \\ u_\alpha(t) \in V, \quad u_\alpha(0) = 0 \end{cases}$$

Remarque I-5:

i) Il existe $\lambda_1 > 0$ ⁽¹⁰⁾ /

$$(1-66) \quad \mathcal{J}_1(v; v) = \mathcal{J}(v; v) + \int_{\Gamma_1} v^2 \, d\mu \geq \lambda_1 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

(10) Voir Appendice 2. ▮

ii) $\sqrt{\alpha_2(v;v)}$ est une norme équivalente à celle de V ,
pour chaque $\alpha > 0$.

En plus, on a :

$$(1-67) \begin{cases} \text{i) } \alpha_2(v;v) \geq \lambda_2 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \\ \text{ii) } \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \min(1; \alpha). \end{cases}$$

Avant de démontrer que le problème (1-65) a une solution
et une seule, on démontrera un lemme préliminaire.

Lemme I-11:

Il existe un seul élément $u_1 \in V$ /

$$(1-68) \begin{cases} (\beta(u_1; v-u_1) + L f(v) - L f(u_1)) \geq \langle f_\alpha^{(10)}; v-u_1 \rangle \quad \forall v \in V \\ u_1 \in V \end{cases}$$

En plus, u_1 ne dépend pas de $\alpha > 0$.

Démonstration:

De (1-28), (1-30) et (1-64), il en résulte :

$$(1-69) \quad f_\alpha^{(10)} = g_0 \quad \forall \alpha > 0$$

qui ne dépend pas de $\alpha > 0$.

Alors, on a les équivalences suivantes:

$$(1-70) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u_1); v-u_1) + L f(v) - L f(u_1) \geq (g_0; v-u_1) \quad \forall v \in V \\ u_1 \in V \end{array} \right. \stackrel{(11)}{\iff}$$

$$(1-71) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(v) - \varphi(u_1) \geq (g_0; v-u_1) \quad \forall v \in V \\ u_1 \in V \end{array} \right. \iff$$

$$(1-72) \left\{ \begin{array}{l} J(u_1) \leq J(v) \quad \forall v \in V \\ u_1 \in V \end{array} \right.$$

où:

$$J(v) = \varphi(v) - (g_0; v) \quad (1-73)$$

Après les Lemmes I-8 et I-9, J vérifie les propriétés classiques ⁽¹²⁾ pour qu'il existe un seul élément $u_1 \in V$ qui vérifie (1-72). ■

Lemme I-12:

L'élément u_1 , défini par (1-68), est donné par:

$$(1-74) \quad u_1 = k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^- \in K$$

(11) On a utilisé (1-57) et (1-60). ■

(12) Voir Appendice 1. ■

Démonstration:

On a l'équivalence suivante:

u_1 est solution de (1-68) et (1-69) \Leftrightarrow

$$(1-75) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u_1) - g_{00}; v - u_1) \geq L [f(u_1) - f(v) + (\chi_2(0); v - u_1)] \quad \forall v \in V \\ u_1 \in V \end{array} \right.$$

où:

$$(1-76) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } g_{00} = \rho_2 \theta_0^+ - \rho_1 \theta_0^- \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii) } g_0 = g_{00} + L \chi_2(0) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

L'élément $k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^-$ est solution de (1-75), car on a:

$$\begin{aligned} \text{i) } \beta(k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^-) &= \frac{\rho_2}{k_2} (k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^-)^+ - \frac{\rho_1}{k_1} (k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^-)^- \\ &= \frac{\rho_2}{k_2} (k_2 \theta_0^+) - \frac{\rho_1}{k_1} (k_1 \theta_0^-) = \rho_2 \theta_0^+ - \rho_1 \theta_0^- = g_{00}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^-) - f(v) + (\chi_2(0); v - (k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^-)) &= \\ &= f(k_2 \theta_0^+) - f(v) + (H(\theta_0); v) - (H(\theta_0); k_2 \theta_0^+) = \\ &= \int_{\Omega} [H(\theta_0) v - v^+] dx = - \int_{\Omega} [(1 - H(\theta_0)) v^+ + H(\theta_0) v^-] dx \leq 0 \end{aligned}$$

$\forall v \in V.$

donc, de l'unicité de l'élément u_1 , il en résulte (1-74).

En plus, on a :

$$(1-77) \quad u_1 / \Gamma_1 = b_0 \quad (\text{ou } u_1 \in K).$$

Lemme I-13 :

Soit $f_\alpha \in L^2(0, T; V')$ avec $f'_\alpha \in L^2(0, T; V')$ et $f''_\alpha \in L^1(0, T; V')$, et $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ alors, pour chaque $\alpha > 0$, il existe une fonction $u_\alpha \in C([0, T]; V)$ qui vérifie (1-65), et en plus $u'_\alpha \in L^\infty(0, T; V)$ avec $u'_\alpha(0) = u_1 \quad \forall \alpha > 0$.

Démonstration :

On a l'équivalence suivante :

$$(1-65) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u'_\alpha(t)); v - u'_\alpha(t)) + \mathcal{J}_\alpha(u_\alpha(t); v - u'_\alpha(t)) + Lf(v) - Lf(u'_\alpha(t)) \geq \\ \geq \langle f_\alpha(t); v - u'_\alpha(t) \rangle \quad \forall v \in V, \text{ p.p. dans } [0, T] \\ u'_\alpha(t) \in V \\ u_\alpha(t) \in V, u_\alpha(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (1-78) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_\alpha(u_\alpha(t); v - u'_\alpha(t)) + \Psi(v) - \Psi(u'_\alpha(t)) \geq \langle f_\alpha(t); v - u'_\alpha(t) \rangle \quad \forall v \in V \\ u'_\alpha(t) \in V \\ u_\alpha(t) \in V, u_\alpha(0) = 0 \end{array} \right. \text{ p.p. dans } [0, T]$$

Alors, moyennant les hypothèses faites sur f_α , l'existence et l'unicité de $u_\alpha \in K$ de (1-68), et la Remarque F6 (ci-dessous), on peut appliquer les résultats de Bézis [13]⁽¹³⁾ pour obtenir l'existence et l'unicité de $u_\alpha \in C([0;T];V)$ avec $u'_\alpha \in L^\infty(0,T;V)$.

En plus, si on prend $t=0$ dans (1-78), on note que l'on a nécessairement par unicité :

$$(1-79) \quad u'_\alpha(0) = u_1 \quad \forall \alpha > 0. \quad \blacksquare$$

Remarque F6 :

On tient compte de l'existence de l'isomorphisme :

$$(1-80) \quad \Delta_\alpha: V \longrightarrow V' / \quad \langle \Delta_\alpha(u); v \rangle = \mathcal{I}_\alpha(u; v) \quad \forall u, v \in V$$

où \mathcal{I}_α est le produit scalaire dans V donné par (1-64i).

En plus, on a les propriétés suivantes :

$$(1-81) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } F, F' \in L^2(0,T;V') \Rightarrow \Delta_\alpha^{-1} F, \Delta_\alpha^{-1} F' \in L^2(0,T;V) \\ \text{ii) } F'' \in L^2(0,T;V') \Rightarrow \Delta_\alpha^{-1} F'' \in L^2(0,T;V) \end{array} \right.$$

qui se démontrent aisément. \blacksquare

(13) Voir Appendice 3. \blacksquare

I-7: EXISTENCE ET UNICITE DE LA FONCTION u .PROPRIETES:Théorème I-2:

Sous les hypothèses du Lemme I-13 et $f'' \in L^\infty(0, T; V)$, il existe une solution et une seule de l'inéquation variationnelle (I-31).

En plus, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, on a:

$$(I-82) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_\alpha \longrightarrow u \quad \text{dans } \begin{cases} L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile} \\ L^2(0, T; V) \text{ faible} \end{cases} \\ \text{ii) } u'_\alpha \longrightarrow u' \quad \text{dans } \begin{cases} L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile} \\ L^2(0, T; V) \text{ faible} \end{cases} \\ \text{iii) } u''_\alpha \longrightarrow u'' \quad \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible} \end{array} \right.$$

Démonstration:i) Unicité:

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (I-31).

Si on prend:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = u_1'(t) \in K \quad \text{dans l'inéquation vérifiée par } u_2(t) \\ v = u_2'(t) \in K \quad \text{dans l'inéquation vérifiée par } u_1(t) \end{array} \right.$$

on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\beta(u_2'(t)); u_2'(t) - u_1'(t)) + \mathcal{A}(u_2(t); u_2'(t) - u_1'(t)) + Lf(u_2'(t)) - Lf(u_1'(t)) \geq \langle f(t); u_2'(t) - u_1'(t) \rangle \\ (\beta(u_1'(t)); u_1'(t) - u_2'(t)) + \mathcal{A}(u_1(t); u_1'(t) - u_2'(t)) + Lf(u_1'(t)) - Lf(u_2'(t)) \geq \langle f(t); u_1'(t) - u_2'(t) \rangle \end{array} \right. \text{ p.p. dans } [0; T].$$

Si on les ajoute, il en résulte :

$$(\beta(u_2'(t)) - \beta(u_1'(t)); u_2'(t) - u_1'(t)) + \mathcal{A}(u_2(t) - u_1(t); u_2'(t) - u_1'(t)) \leq 0 \text{ p.p. dans } [0; T]$$

En utilisant (1-40), on en obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 \|\delta'(t)\|_{\#}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mathcal{A}(\delta(t); \delta(t))] \leq 0 \text{ p.p. dans } [0; T]. \\ \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta(t) = u_2(t) - u_1(t) \in V_0 \\ \delta(0) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ou encore :

$$c_0 \int_0^t \|\delta'(z)\|_{\#}^2 dz + \frac{1}{2} \mathcal{A}(\delta(t); \delta(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0; T].$$

C'est-à-dire que :

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \in [0; T].$$

d'où l'unicité de la solution de (1-31).

ii) Existence :

On va montrer que la solution u_2 de (1-65) tend vers

un élément u solution de (1-31) lorsque α tend vers l'infini.
 Pour cela, on établit des estimations à priori A) sur u_α
 qui permettent le passage à la limite B).

A) Estimations à priori :

A1) Soit ξ la solution de: ⁽¹⁴⁾

$$(1-83) \begin{cases} \text{i) } \Delta \xi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{ii) } \xi|_{\Gamma_1} = b_0 \\ \text{iii) } \frac{\partial \xi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0 \end{cases}$$

Donc, sous forme variationnelle :

$$(1-84) \begin{cases} \mathcal{J}(\xi; v - \xi) = 0 \quad \forall v \in K \\ \xi \in K \end{cases} \quad (15)$$

Soit :

$$(1-85) \begin{cases} \text{i) } z_\alpha(t) = u_\alpha(t) - t\xi \\ \text{ii) } z'_\alpha(t) = u'_\alpha(t) - \xi \\ \text{iii) } z_\alpha(0) = 0 \end{cases}$$

(14) On verra l'interprétation physique, l'existence et l'unicité, et des autres propriétés de ξ dans le paragraphe III-4. ■

(15) $b_0 \in H^{1/2}(\Gamma_1) \Rightarrow K \neq \emptyset$. ■

Alors, si on choisit $v = \xi \in K$ dans (1-65), il vient:

$$\begin{aligned} & (\beta(u'_\alpha(t)); \xi - u'_\alpha(t)) + \alpha (u_\alpha(t); \xi - u'_\alpha(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - B(t)) (\xi - u'_\alpha(t)) d\mu_t \\ & + L f(\xi) - L f(u'_\alpha(t)) \geq \langle f(t); \xi - u'_\alpha(t) \rangle \quad \text{p.p. dans } [0; T]. \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} & (\beta(u'_\alpha(t)); z'_\alpha(t)) + \alpha (u_\alpha(t); z'_\alpha(t)) + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_1} z_\alpha^2(t) d\mu \right] \leq \\ & \leq L f(-z'_\alpha(t)) + \langle f(t); z'_\alpha(t) \rangle \quad \text{p.p. dans } [0; T]. \end{aligned}$$

Si on ajoute aux deux membres de l'inégalité le terme:

$$-(\beta(\xi); z'_\alpha(t)) - \alpha (t\xi; z'_\alpha(t))$$

on obtient:

$$\begin{aligned} & C_0 \|z'_\alpha(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\alpha (z_\alpha(t); z_\alpha(t)) \right] \leq \\ & \leq C_1 \|z_\alpha(t)\|_V + C_2 \|z'_\alpha(t)\|_H + \frac{d}{dt} \left[\langle f(t); z_\alpha(t) \rangle - \alpha (t\xi; z_\alpha(t)) \right] \\ & \quad \text{p.p. dans } [0; T]. \end{aligned} \tag{16}$$

En utilisant l'inégalité:

$$(1-86) \quad xz \leq \frac{x^2}{2\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{2} z^2 \quad \forall \lambda > 0$$

avec $\lambda = \sqrt{C_0}$, il vient:

(16) C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de α .

$$\frac{C_0}{2} \|z'_\alpha(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\alpha(z_\alpha(t); z_\alpha(t))] \leq C_3 + C_4 \|z_\alpha(t)\|_V + \frac{d}{dt} [\langle f(t); z_\alpha(t) \rangle - \alpha(t\xi; z_\alpha(t))] \quad \text{p.p. dans } [0; T] \quad (17)$$

Si on intègre, il en résulte :

$$\frac{C_0}{2} \int_0^t \|z'_\alpha(z)\|_H^2 dz + \frac{1}{2} \alpha(z_\alpha(t); z_\alpha(t)) \leq C_4 + C_5 \|z_\alpha(t)\|_V + C_1 \int_0^t \|z_\alpha(z)\|_V dz \quad \forall t \in [0; T] \quad (18)$$

Comme α est destiné à tendre vers $+\infty$, on peut supposer que $\alpha > 1$. Alors, si on tient compte de la Remarque F5, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{2} \int_0^t \|z'_\alpha(z)\|_H^2 dz + \frac{\lambda_1}{2} \|z_\alpha(t)\|_V^2 + \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 z_\alpha^2(t) dy &\leq \\ &\leq C_4 + C_5 \|z_\alpha(t)\|_V + C_1 \int_0^t \|z_\alpha(z)\|_V dz \quad \forall t \in [0; T]. \end{aligned}$$

Si on utilise une autre fois l'inégalité (1-86) avec $\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}$, il en résulte : (19)

$$(1-87) \quad \frac{C_0}{2} \int_0^t \|z'_\alpha(z)\|_H^2 dz + \frac{\lambda_1}{4} \|z_\alpha(t)\|_V^2 + \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 z_\alpha^2(t) dy \leq C_6 + C_1 \int_0^t \|z_\alpha(z)\|_V dz \quad \forall t \in [0; T].$$

(17) $C_3 = C_2^2/2C_0$ est une constante indépendante de α . ■

(18) $C_4 = C_3 T$ et C_5 sont des constantes indépendantes de α . ■

d'où :

$$\|z_\alpha(t)\|_V^2 \leq \frac{4C_6}{\lambda_1} + \frac{4C_1}{\lambda_1} \int_0^t \|z_\alpha(\tau)\|_V d\tau \quad \forall t \in [0; T].$$

En appliquant l'inégalité ⁽²⁰⁾, on a :

$$(1-88) \quad \|z_\alpha(t)\|_V \leq C_7 \quad \forall t \in [0; T] \quad (21)$$

De (1-87) et (1-88), on en déduit :

$$(1-89) \quad \int_0^t \|z'_\alpha(\tau)\|_H^2 d\tau \leq C_8 \quad \forall t \in [0; T]. \quad (22)$$

$$(1-90) \quad (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} z_\alpha^2(t) d\gamma \leq C_9 \quad \forall t \in [0; T]. \quad (23)$$

Des estimations précédentes, on a que :

$$(1-91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_\alpha \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V) \text{ et } L^2(0, T; V) \\ \text{ii) } u'_\alpha \in \text{borné de } L^2(0, T; H) \\ \text{iii) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t b_0)^2 d\gamma \leq C_9 \quad \forall t \in [0; T] \end{array} \right.$$

(19) $C_6 = C_4 + C_5^2/\lambda_1$ est une constante indépendante de α . ■

(20) Voir Appendice 4. ■

(21) $C_7 = \frac{2C_1 T}{\lambda_1} + 2\sqrt{\frac{C_6}{\lambda_1}}$ est une constante indépendante de α . ■

(22) $C_8 = \frac{2}{C_0} (C_6 + C_1 C_7 T)$ est une constante indépendante de α . ■

(23) $C_9 = C_0 C_8$ est une constante indépendante de α . ■

A2) Soit un instant $t \in [0; T)$, et un nombre $h > 0$ tel que $t+h \in [0; T]$.

Si on prend :

$$\begin{cases} \text{i) } v = u'_\alpha(t+h) \text{ dans (1-65) à l'instant } t. \\ \text{ii) } v = u'_\alpha(t) \text{ dans (1-65) à l'instant } t+h. \end{cases}$$

alors, on a :

$$\begin{cases} \text{i) } (\beta(u'_\alpha(t)); u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t)) + \mathcal{J}(u_\alpha(t); u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t)) + L \int (u'_\alpha(t+h)) - L \int (u'_\alpha(t)) + \\ \quad + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t b_0) (u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t)) d\gamma \geq \langle f(t); u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t) \rangle \\ \text{ii) } (\beta(u'_\alpha(t+h)); u'_\alpha(t) - u'_\alpha(t+h)) + \mathcal{J}(u_\alpha(t+h); u'_\alpha(t) - u'_\alpha(t+h)) + L \int (u'_\alpha(t)) - L \int (u'_\alpha(t+h)) + \\ \quad + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t+h) - (t+h) b_0) (u'_\alpha(t) - u'_\alpha(t+h)) d\gamma \geq \langle f(t+h); u'_\alpha(t) - u'_\alpha(t+h) \rangle \end{cases}$$

En les ajoutant, on obtient :

$$\begin{aligned} & (\beta(u'_\alpha(t+h)) - \beta(u'_\alpha(t)); u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t)) + \mathcal{J}(u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t); u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t)) + \\ & + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t) - h b_0) (u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t)) d\gamma \leq \langle f(t+h) - f(t); u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t) \rangle \end{aligned}$$

ou encore, en tenant compte qu'on peut supposer que $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned}
& C_0 \|u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\mathcal{J}_1(u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t); u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t)) \right] + \\
& + \frac{(\alpha-1)}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t))^2 dy \right] - (\alpha-1) \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_1} h b_0 (u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t)) dy \right] \leq \\
& \leq \langle f_1(t+h) - f_1(t); u'_\alpha(t+h) - u'_\alpha(t) \rangle = \\
& = \frac{d}{dt} \left[\langle f_1(t+h) - f_1(t); u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t) \rangle \right] - \langle f_1'(t+h) - f_1'(t); u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t) \rangle.
\end{aligned}$$

Si on intègre sur $[0; t]$, on divise par h^2 et on passe à la limite $h \rightarrow 0$, il en résulte :

$$\begin{aligned}
& C_0 \int_0^t \|u''_\alpha(z)\|_H^2 dz + \frac{1}{2} \left[\mathcal{J}_1(u'_\alpha(t); u'_\alpha(t)) - \mathcal{J}_1(u_1; u_1) \right] + \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{\Gamma_1} [(u'_\alpha(t))^2 - u_1^2] dy + \\
& + (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} b_0 (u_1 - u'_\alpha(t)) dy \leq \langle f_1'(t); u'_\alpha(t) \rangle - \langle f_1'(0); u_1 \rangle - \int_0^t \langle f_1''(z); u'_\alpha(z) \rangle dz
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
& C_0 \int_0^t \|u''_\alpha(z)\|_H^2 dz + \frac{\lambda_1}{2} \|u'_\alpha(t)\|_V^2 + \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{\Gamma_1} (u'_\alpha(t) - b_0)^2 dy \leq \\
& \leq C_{10} + C_{11} \|u'_\alpha(t)\|_V + C_{12} \int_0^t \|u'_\alpha(z)\|_V dz \quad (24)
\end{aligned}$$

(24) C_{10}, C_{11}, C_{12} sont des constantes indépendantes de α .

En utilisant l'inégalité (1-86) avec $\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}$, il vient : (25)

$$C_0 \int_0^t \|u_\alpha''(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\lambda_1}{4} \|u_\alpha'(t)\|_V^2 + \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha'(t) - b_0)^2 d\mu \leq C_{13} + C_{12} \int_0^t \|u_\alpha'(\tau)\|_V d\tau$$

d'où, on obtient :

$$(1-92) \quad \|u_\alpha'(t)\|_V \leq C_{14} \quad \forall t \in [0; T] \quad (26)$$

$$(1-93) \quad \int_0^t \|u_\alpha''(\tau)\|_H^2 d\tau \leq C_{15} \quad \forall t \in [0; T] \quad (27)$$

$$(1-94) \quad (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha'(t) - b_0)^2 d\mu \leq C_{16} \quad \forall t \in [0; T] \quad (28)$$

Des estimations précédentes, on a :

$$(1-95) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_\alpha' \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V) \text{ et } L^2(0, T; V) \\ \text{ii) } u_\alpha'' \in \text{borné de } L^2(0, T; H) \\ \text{iii) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha'(t) - b_0)^2 d\mu \leq C_{16} \quad \forall t \in [0; T] \end{array} \right.$$

(25) $C_{13} = C_{10} + \frac{C_{11}^2}{\lambda_1}$ est une constante indépendante de α . ■

(26) $C_{14} = 2 \frac{C_{12} T}{\lambda_1} + 2 \sqrt{\frac{C_{13}}{\lambda_1}}$ est une constante indépendante de α . ■

(27) $C_{15} = \frac{C_{13} + C_{12} C_{14} T}{C_0}$ est une constante indépendante de α . ■

(28) $C_{16} = 2(C_{13} + C_{12} C_{14} T)$ est une constante indépendante de α . ■

A3) Des estimations (1-91) et (1-95), il vient :

$$(1-96) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_\alpha \text{ et } u'_\alpha \in \text{borné de } L^\infty(0,T;V) \text{ et } L^2(0,T;V) \\ \text{ii) } u''_\alpha \in \text{borné de } L^2(0,T;H) \\ \text{iii) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - tb_0)^2 d\gamma \leq C_9 \quad \forall t \in [0;T] \\ \text{iv) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u'_\alpha(t) - b_0)^2 d\gamma \leq C_{16} \quad \forall t \in [0;T] \end{array} \right.$$

B) Passage à la limite :

Il résulte des estimations (1-96) que, lorsque α tend vers $+\infty$, au moins pour une sous-suite :

$$(1-97) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_\alpha \text{ tend vers } u \text{ dans } \begin{cases} L^\infty(0,T;V) \text{ faible étoile} \\ L^2(0,T;V) \text{ faible} \end{cases} \\ \text{ii) } u'_\alpha \text{ tend vers } u' \text{ dans } \begin{cases} L^\infty(0,T;V) \text{ faible étoile} \\ L^2(0,T;V) \text{ faible} \end{cases} \\ \text{iii) } u''_\alpha \text{ tend vers } u \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ faible} \end{array} \right.$$

et en plus :

$$(1-98) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - tb_0)^2 d\gamma \leq C_9 \quad \forall t \in [0;T] \\ \text{ii) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u'_\alpha(t) - b_0)^2 d\gamma \leq C_{16} \quad \forall t \in [0;T] \end{array} \right.$$

Alors, on a les conséquences:

$$B1) \quad \underline{u(0) = 0} : \quad (1-99)$$

Par (1-88) et (1-97i), on sait que :

$$(1-100) \quad u_\alpha(0) \rightarrow u(0) \text{ dans } H^1_{\text{fort}}$$

mais, du fait que $u_\alpha(0) = 0 \quad \forall \alpha > 0$, il en résulte (1-99).

$$B2) \quad \underline{u'(t) \in K \quad \forall t \in [0; T]} : \quad (1-101)$$

De (1-98ii), on obtient :

$$(1-102) \quad \underline{\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u'_\alpha(t) - b_0)^2 dy} = 0 \quad \forall t \in [0; T]$$

et, en utilisant la semi-continuité inférieure dans V faible de l'application :

$$(1-103) \quad v \longrightarrow \int_{\Gamma_1} v^2 dy$$

il vient :

$$0 \leq \int_{\Gamma_1} (u'(t) - b_0)^2 dy \leq \underline{\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u'_\alpha(t) - b_0)^2 dy} = 0$$

ou encore :

$$(1-104) \quad u'(t) /_{\Gamma_1} = b_0 \quad \forall t \in [0; T]$$

d'où (1-101).

$$B3) \quad \underline{\frac{u(t)}{t} \in K \quad \forall t \in (0; T]}: \quad (1-105) \quad (29)$$

De (1-98i), on obtient :

$$(1-106) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t b_0)^2 dy = 0 \quad \forall t \in [0; T]$$

et, en utilisant (1-103), il vient :

$$0 \leq \int_{\Gamma_1} (u(t) - t b_0)^2 dy \leq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t b_0)^2 dy = 0$$

ou encore :

$$(1-107) \quad u(t)/\Gamma_1 = t b_0 \quad \forall t \in [0; T]$$

d'où (1-105).

(1-108) B4) u est solution de l'inéquation variationnelle (1-31).

Par définition de u_α , on a :

$$(1-109) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}(u_\alpha(t); v - u'_\alpha(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t b_0)(v - u'_\alpha(t)) dy + \Psi(v) - \Psi(u'_\alpha(t)) \geq \\ \langle f(t); v - u'_\alpha(t) \rangle \quad \forall v \in V, \text{ p.p. dans } [0; T] \\ u'_\alpha(t) \in V \\ u_\alpha(t) \in V, u_\alpha(0) = 0 \end{array} \right.$$

(29) (1-105) est aussi valable pour $t=0$, car on a : $\left\{ \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u'(0) \in K. \end{array} \right.$

Soit :

$$(1-110) \quad \mathcal{K} = \{v \in L^2(0, T; V) / v(t) \in K\}$$

si on choisit $v \in \mathcal{K}$ dans (1-109), il vient :

$$\begin{aligned} \alpha(u_\alpha(t); v(t) - u'_\alpha(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t b_0) (b_0 - u'_\alpha(t)) d\mu + \\ + \Psi(v(t)) - \Psi(u'_\alpha(t)) \geq \langle f(t); v(t) - u'_\alpha(t) \rangle \quad \forall v \in \mathcal{K} \\ \text{p.p. dans } [0; T]. \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \alpha(u_\alpha(t); v(t) - u'_\alpha(t)) - \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t b_0)^2 d\mu \right] + \Psi(v(t)) - \Psi(u'_\alpha(t)) \geq \\ \geq \langle f(t); v(t) - u'_\alpha(t) \rangle \quad \forall v \in \mathcal{K}, \text{ p.p. dans } [0; T]. \end{aligned}$$

si on intègre sur $[0; T]$, on obtient :

$$\int_0^T [\alpha(u_\alpha(t); v(t) - u'_\alpha(t)) + \Psi(v(t)) - \Psi(u'_\alpha(t))] dt \geq \int_0^T \langle f(t); v(t) - u'_\alpha(t) \rangle dt \quad \forall v \in \mathcal{K}$$

car l'intégrale sur Γ_1 est affectée de signe négatif ; ou encore :

$$\begin{aligned} \int_0^T [\alpha(u_\alpha(t); v(t)) + \Psi(v(t)) - \langle f(t); v(t) - u'_\alpha(t) \rangle] dt \geq \\ \geq \int_0^T [\alpha(u_\alpha(t); u'_\alpha(t)) + \Psi(u'_\alpha(t))] dt = \\ = \frac{1}{2} \alpha(u_\alpha(T); u_\alpha(T)) + \int_0^T \Psi(u'_\alpha(t)) dt \quad \forall v \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Si on utilise, maintenant, la semi-continuité inférieure dans V faible des applications :

$$(1-111) \quad \begin{cases} v \longrightarrow \mathcal{J}(v; v) \\ v \longrightarrow \Psi(v) \end{cases}$$

alors, à la limite $\alpha \rightarrow +\infty$, on en déduit :

$$\begin{aligned} & \int_0^T [\mathcal{J}(u(t); v(t)) + \Psi(v(t)) - \langle f(t); v(t) - u(t) \rangle] dt \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \mathcal{J}(u(T); u(T)) + \int_0^T \Psi(u'(t)) dt = \\ & = \int_0^T [\mathcal{J}(u(t); u'(t)) + \Psi(u'(t))] dt \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

ou encore :

$$\int_0^T [\mathcal{J}(u(t); v(t) - u'(t)) + \Psi(v(t)) - \Psi(u'(t)) - \langle f(t); v(t) - u'(t) \rangle] dt \geq 0 \quad \forall v \in K$$

d'où, en utilisant la Remarque I-7 (ci-dessous), il en résulte (1-108).

$$B5) \quad \underline{u'(0) = u_1 \in K} : \quad (1-112)$$

Si on prend $t=0$ dans (1-31), par unicité de l'élément $u_1 \in K$ (donné par (1-68)), il vient (1-112). ▮

Remarque I7:

On a l'équivalence suivante:

$$(1-113) \begin{cases} \alpha(u(t); v - u'(t)) + \Psi(v) - \Psi(u'(t)) - \langle f(t); v - u'(t) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K, \text{ p.p. dans } [0; T] \\ u'(t) \in K, \quad u(t) \in V, \quad u(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (1-114) \begin{cases} \int_0^T [\alpha(u(t); v(t) - u'(t)) + \Psi(v(t)) - \Psi(u'(t)) - \langle f(t); v(t) - u'(t) \rangle] dt \geq 0 \quad \forall v \in K \\ u' \in K \\ u \in L^2(0, T; V), \quad u(0) = 0 \end{cases}$$

Démonstration:

\Rightarrow) Il suffit d'intégrer l'inéquation (1-113) sur $[0; T]$.

\Leftarrow) Soient:
$$\begin{cases} v \in K \\ t \in (0; T) \end{cases}$$

soit $v_0 \in K$, défini par:

$$v_0(\tau) = \begin{cases} u'(\tau) & \text{si } \tau \in (t-\varepsilon; t+\varepsilon) \\ v & \text{si } \tau \in (t-\varepsilon; t+\varepsilon)^c \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers 0.

Alors, si on utilise $v_0 \in K$ dans (1-114) et on divise par 2ε , il vient:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left[\mathcal{I}(u(\tau); v - u(\tau)) + \Psi(v) - \Psi(u'(\tau)) - \langle f(\tau); v - u(\tau) \rangle \right] d\tau \geq 0$$

donc, en appliquant le théorème de Lebesgue⁽³⁰⁾ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il en résulte (1-113). ■

On peut obtenir l'existence dans le théorème I-2, sans utiliser le passage à la limite $\alpha \rightarrow +\infty$ (ce qui traduit un fait thermique concret) par un changement de fonction inconnue et utilisation d'un résultat de Brézis [13] selon le :

Théorème I-3 :

sous les hypothèses $f, f' \in L^2(0, T; V_0')$, $f'' \in L^1(0, T; V_0')$ et $b \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, il existe une solution et une seule de l'inéquation (1-31).

Démonstration :

i) Unicité :

C'est la même démonstration que pour le théorème I-2.

ii) Existence :

Soit ξ l'élément donné par (1-83) et (1-84), et soit aussi:

$$(1-115) \begin{cases} \text{i) } z(t) = u(t) - t\xi \in V_0 \\ \text{ii) } z'(t) = u'(t) - \xi \in V_0 \\ \text{iii) } z(0) = 0 \end{cases}$$

Si dans (1-31), qui s'écrit encore:

$$(1-116) \begin{cases} \mathcal{J}(u(t); v - u'(t)) + \Psi(v) - \Psi(u'(t)) \geq \langle f(t); v - u'(t) \rangle \quad \forall v \in K \\ \text{p.p. dans } [0; T] \\ u'(t) \in K \\ \frac{u(t)}{t} \in K, \quad u(0) = 0 \end{cases}$$

on fait le changement (1-115) de fonction inconnue, on obtient: (31)

$$(1-117) \begin{cases} \mathcal{J}(z(t); v - z'(t)) + \Psi(\xi + v) - \Psi(\xi + z'(t)) \geq \langle f(t); v - z'(t) \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ \text{p.p. dans } [0; T] \\ z'(t) \in V_0 \\ z(t) \in V_0, \quad z(0) = 0 \end{cases}$$

$$(30) \quad \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(\tau) d\tau \longrightarrow f(t) \quad \text{p.p. lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$\forall f$ fonction mesurable à valeurs dans un espace de Banach. ■

(31) On tient compte du fait que:

$$\mathcal{J}(u; v - u') = \mathcal{J}(u; w - z') = \mathcal{J}(u; w - z') - t \overbrace{\mathcal{J}(\xi; w - z')}^0 = \mathcal{J}(z; w - z') \\ \forall v \in K, \text{ avec } w = v - \xi \in V_0. \blacksquare$$

Soit:

$$\eta_0: V_0 \rightarrow \mathbb{R} /$$

$$(1-118) \quad \eta_0(v) = \varphi(\xi + v) \quad \forall v \in V_0$$

alors, (1-117) est équivalent à :

$$(1-119) \quad \begin{cases} \alpha(z(t); v - z'(t)) + \eta_0(v) - \eta_0(z'(t)) \geq \langle f(t); v - z'(t) \rangle & \forall v \in V_0 \\ & \text{p.p. dans } [0; T]. \\ z'(t) \in V_0 \\ z(t) \in V_0, z(0) = 0 \end{cases}$$

L'existence de z (donc, l'existence de u) qui vérifie :

$$(1-120) \quad \begin{cases} z \in C([0; T]; V_0) \\ z' \in L^\infty(0, T; V_0) \\ \text{et (1-119)} \end{cases}$$

est donnée par Brezis [13].⁽³²⁾

(32) On utilise ici l'existence et l'unicité de l'élément $z_1 = u_1 - \xi$, où u_1 est défini par (1-68).

En plus, par unicité, on a que : $z_1 = z'(0)$. Voir Appendice 3. ▮

I-8: CAS D'EVOLUTION N°2:

On supposera, en plus du cas d'évolution n°1, que le flux de chaleur sur la partie Γ_2' de frontière est nul et qu'il n'existe pas non plus un apport d'énergie par unité de temps. C'est-à-dire qu'on suppose:

$$(1-121) \begin{cases} q = 0 \text{ dans } Q \\ \tilde{h} = 0 \text{ sur } \Gamma_2' \times [0; T] \end{cases}$$

Pour ce cas, l'inéquation variationnelle (1-31) est donnée par:

$$(1-122) \begin{cases} (\beta(u'(t)); v - u'(t)) + \alpha(u(t); v - u'(t)) + L f(v) - L f(u'(t)) \geq (q_0; v - u'(t)) \\ u'(t) \in K \\ \frac{u(t)}{t} \in K, \quad u(0) = 0. \end{cases} \quad \forall v \in K, \text{ p.p. dans } [0; T].$$

Remarque I-8:

Dans (1-122), on étudie l'évolution de la température dans Ω vers l'équilibre thermique. Cela sera fait dans le paragraphe IV-3, lorsqu'on étudiera le comportement à l'infini de la solution du problème d'évolution (1-122). ■

Lemme I-14:

Pour le cas d'évolution n°2, on a les propriétés suivantes:

$$(1-123) \begin{cases} (i) \mathcal{J}(u'(t); u'(t)) \leq \mathcal{J}(u_2; u_1) \quad \forall t \geq 0. \\ (ii) \int_0^t \|u''(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \leq \frac{1}{2c_0} \mathcal{J}(u_2; u_1) \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Démonstration:

Soit un instant $t \in [0; T)$ et un nombre $h > 0$ tel que $t+h \in [0; T]$.

Si on prend:

$$\begin{cases} v = u'(t+h) \text{ dans (1-122) à l'instant } t. \\ v = u'(t) \text{ dans (1-122) à l'instant } t+h. \end{cases}$$

alors, si on les ajoute membre à membre, on en déduit:

$$(\beta(u'(t+h)) - \beta(u'(t)); u'(t+h) - u'(t)) + \mathcal{J}(u(t+h) - u(t); u'(t+h) - u'(t)) \leq 0$$

Si on intègre et on passe à la limite $h \rightarrow 0$, il vient:

$$c_0 \int_0^t \|u''(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau + \frac{1}{2} \mathcal{J}(u'(t); u'(t)) \leq \frac{1}{2} \mathcal{J}(u_2; u_1) \quad \forall t \in [0; T)$$

d'où (1-123 i) et (1-123 ii), car on peut prendre $T = +\infty$.

Remarque I-9:

Pour la fonction z , définie par (1-115i), et pour le cas d'évolution $n=2$, on a les propriétés suivantes :

$$(1-123\text{bis}) \begin{cases} \text{i)} & \mathcal{D}(z'(t); z'(t)) \leq \mathcal{D}(z_1; z_1) \quad \forall t \geq 0. \quad (33) \\ \text{ii)} & \int_0^t \|z''(\tau)\|_{\#}^2 d\tau \leq \frac{1}{2C_0} \mathcal{D}(z_1; z_1) \quad \forall t \geq 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Lemme I-15:

On a l'équivalence suivante :

$$u(t) = t\xi \iff \xi = u_1 \quad (1-124)$$

où

$$\begin{cases} \xi \text{ est défini par (1-83) et (1-84).} \\ u_1 \text{ est défini par (1-68).} \end{cases}$$

Démonstration:

$$\Rightarrow) \quad u_1 = u'(0) = \xi.$$

$\Leftarrow)$ Pour démontrer que $u(t) = t\xi$, on va vérifier que la fonction $j(t) = tu_1 = t\xi$ est solution de l'inéquation

$$(33) \quad z_1 = u_1 - \xi = z'(0)$$

variationnelle (1-122), et puis par unicité on en déduira

que $u(t) = j(t) = t\xi$.

Donc, $\forall v \in K$:

$$\begin{aligned} & (\beta(j'(t)); v - j'(t)) + \mathcal{J}(j(t); v - j'(t)) + Lf(v) - Lf(j'(t)) = \\ & = (\beta(u_1); v - u_1) + \underbrace{t \mathcal{J}(\xi; v - \xi)}_{=0} + Lf(v) - Lf(u_1) = \\ & = (\beta(u_1); v - u_1) + Lf(v) - Lf(u_1) \geq (g_0; v - u_1) \end{aligned}$$

d'où $j(t)$ est solution de (1-122). ■

Remarque I-10 :

Le Lemme I-15 nous donne une propriété remarquable de la solution de (1-122) :

si la température initiale θ_0 donnée est telle qu'on ait $\xi = k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^-$, alors sous les hypothèses du cas d'évolution n°2 la température dans Ω ne dépendra pas du temps t et en plus, elle sera toujours égale à la température initiale θ_0 .

On verra, dans le chapitre III, que cela est lié à

la température du cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases.

Remarque I-11:

Pour le cas d'évolution n°2, la fonction $u_\alpha(t)$, définie par (1-65), est maintenant donnée par:

$$(1-125) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u'_\alpha(t)); v - u'_\alpha(t)) + \bar{a}_\alpha(u_\alpha(t); v - u'_\alpha(t)) + Lf(v) - Lf(u'_\alpha(t)) \geq \\ \geq (g_0; v - u'_\alpha(t)) + \alpha t \int_{\Gamma_1} b_0 (v - u'_\alpha(t)) d\gamma \quad \forall v \in V \\ u'_\alpha(t) \in V \\ u_\alpha(t) \in V, u_\alpha(0) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{p.p. dans } [0; T]. \end{array}$$

Lemme I-16:

Pour le cas d'évolution n°2, on a les propriétés suivantes:

$$(1-126) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \bar{a}_\alpha(u'_\alpha(t); u'_\alpha(t)) \leq \bar{a}_\alpha(u_1; u_1) \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha > 1. \\ \text{ii) } \int_0^t \|u''_\alpha(z)\|_H^2 dz \leq \frac{1}{2c_0} \bar{a}_\alpha(u_1; u_1) \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha > 1. \\ \text{iii) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u'_\alpha(t) - b_0)^2 d\gamma \leq \bar{a}_\alpha(u_1; u_1) \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha > 1. \end{array} \right.$$

Démonstration :

Si on reprend la démonstration du théorème I-2, partie ii) A2), pour le cas d'évolution n°2, on obtient :

$$C_0 \int_0^t \|u_\alpha''(z)\|_H^2 dz + \frac{1}{2} [\mathcal{Q}_1(u_\alpha'(t); u_\alpha'(t)) - \mathcal{Q}_1(u_1; u_1)] + \\ + \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{\Gamma_1} [(u_\alpha'(t))^2 - u_1^2] d\mu + (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} b_0 (u_1 - u_\alpha'(t)) d\mu \leq 0 \\ \forall t \geq 0, \forall \alpha > 1.$$

ou encore :

$$C_0 \int_0^t \|u_\alpha''(z)\|_H^2 dz + \frac{1}{2} \mathcal{Q}_1(u_\alpha'(t); u_\alpha'(t)) + \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha'(t) - b_0)^2 d\mu \leq \frac{1}{2} \mathcal{Q}_1(u_1; u_1) \\ \forall t \geq 0, \forall \alpha > 1.$$

d'où (1-126). ■

Remarque I-12 :

On peut obtenir les estimations (1-126i) et (1-126ii) pour tout $\alpha > 0$, c'est-à-dire : (34)

$$(1-127) \left\{ \begin{array}{l} i) \|u_\alpha'(t)\|_V \leq cte \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha > 0. \\ ii) \int_0^t \|u_\alpha''(z)\|_H^2 dz \leq cte \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha > 0. \end{array} \right. \blacksquare$$

(34) $\forall \alpha > 0 \exists \varepsilon / 0 < \varepsilon < \alpha$, donc $\mathcal{Q}_\alpha(u; v) = \mathcal{Q}_\varepsilon(u; v) + (\alpha - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} uv d\mu$. ■

CHAPITRE II

ETUDE DU COMPORTEMENT
DE LA SOLUTION EN
FONCTION DE LA CHALEUR
LATENTE DE FUSION

II-0: ORIENTATION:

Dans II-1, on fait un rappel de ce qui a été fait dans le chapitre I, mais maintenant on remarque que la solution dépend de la chaleur latente de fusion $L > 0$.

Dans II-2, on démontre que les applications:

$$\begin{cases} L \longrightarrow u_L \in L^\infty(0, T; V) \\ L \longrightarrow u'_L \in L^2(0, T; H) \end{cases}$$

sont lipschitziennes.

Dans II-3, on étudie le comportement de la solution u_L lorsque $L \rightarrow 0$, et on démontre que u_L converge vers un élément w qui est solution d'une équation variationnelle, laquelle aussi étudie un problème de frontière libre qui représente le cas d'évolution du problème de Stefan à deux phases dont la chaleur latente de fusion est négligeable.

Ensuite, dans II-4, on fait une interprétation physique

et on démontre quelques propriétés de la solution w ; puis, on traite un exemple.

Dans II-5, on étudie d'autres propriétés lorsque la chaleur latente de fusion L tend vers zéro. On démontre que $u_{L_2}^{(*)}$ converge vers un élément u_2 , qui est solution d'une équation variationnelle. La solution $u_2(H)$ représente aussi, au moins pour α assez grand, et après un changement de fonction inconnue, un problème de Stefan à deux phases.

Ensuite, on étudie le comportement de u_2 lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, et on démontre que u_2 converge vers w .

(*) u_{L_2} a été noté u_α dans le Chapitre I. Attention à ne pas le confondre avec u_2 défini dans le chapitre II.

II-1: PRESENTATION PHYSIQUE-MATHEMATIQUE.INEQUATION VARIATIONNELLE. RAPPEL:

On étudie, pour chaque $L > 0$, le champ de température

$$(2-1) \quad \theta_L(x;t) = \begin{cases} \theta_L(x;t) < 0 & \text{dans } Q_{1L} \\ 0 & \text{sur } \Sigma_L \\ \theta_L(x;t) > 0 & \text{dans } Q_{2L} \end{cases}$$

défini:

$$\forall (x;t) \in Q = \mathcal{R} \times (0; T) \quad (2-2)$$

où:

$$(2-3) \quad \begin{cases} \text{i) } Q_{1L} = \{ (x;t) \in Q / \theta_L(x;t) < 0 \} \\ \text{ii) } Q_{2L} = \{ (x;t) \in Q / \theta_L(x;t) > 0 \} \\ \text{iii) } \Sigma_L = \{ (x;t) \in Q / \theta_L(x;t) = 0 \} \\ \text{iv) } Q = Q_{1L} \cup \Sigma_L \cup Q_{2L} \end{cases}$$

qui satisfait les conditions suivantes: (1)

$$(2-4) \quad \begin{cases} \rho_i \frac{\partial \theta_{iL}}{\partial t} - k_i \Delta \theta_{iL} = g & \text{dans } Q_{iL} \\ i=1,2 \end{cases}$$

(1) Toutes les notations qui ne changent pas sont données dans les chapitres précédents.

$$(2-5) \quad \begin{cases} \text{i) } \theta_{1L} = \theta_{2L} = 0 \\ \text{ii) } k_1 \vec{\nabla} \theta_{1L} \cdot \vec{n}_L - k_2 \vec{\nabla} \theta_{2L} \cdot \vec{n}_L = L \vec{v}_L \cdot \vec{n}_L \end{cases} \text{ sur } \Sigma_L$$

$$(2-6) \quad \theta_L / r_1 = b$$

$$(2-7) \quad \begin{cases} \text{i) } -k_1 \frac{\partial \theta_{1L}}{\partial n_L} / r_2 = \tilde{h} & \text{si } \theta_L / r_2 < 0 \\ \text{ii) } -k_2 \frac{\partial \theta_{2L}}{\partial n_L} / r_2 = \tilde{h} & \text{si } \theta_L / r_2 > 0 \end{cases}$$

$$(2-8) \quad \theta_L(0) = \theta_0.$$

Remarque II-1:

On a mis le sous-indice L , car on étudiera des propriétés lorsque L est variable, et surtout lorsque $L \rightarrow 0$.

On introduit la nouvelle fonction inconnue $u_L(x; t)$, définie par:

$$(2-9) \quad u_L(x; t) = \int_0^t [k_2 \theta_L^+(x; \tau) - k_1 \theta_L^-(x; \tau)] d\tau$$

qui satisfait les conditions suivantes:

$$(2-10) \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \beta(u'_2(t)) - \Delta u_2(t) = G_2(t) - L \chi_2(t) \text{ dans } \mathcal{R}. \\ \text{ii)} \quad u_2(t)/\eta = B(t) \\ \text{iii)} \quad -\frac{\partial u_2(t)}{\partial \eta} = h(t) \\ \text{iv)} \quad u_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

où:

$$(2-11) \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad g_{\theta_2} = f_2 \theta_0^+ - f_1 \theta_0^- + L \chi_2(0) \text{ dans } \mathcal{R} \\ \text{ii)} \quad G_2(t) = g_{\theta_2} + \int_0^t g(z) dz \text{ dans } \mathcal{Q} \\ \text{iii)} \quad \chi_2(t) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \theta_2(t) > 0 \Leftrightarrow u'_2(t) > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow \theta_2(t) \leq 0 \Leftrightarrow u'_2(t) \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, u_2 satisfait l'inéquation variationnelle:

$$(2-12) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u'_2(t)); v - u'_2(t)) + \alpha(u_2(t); v - u_2(t)) + L f(v) - L f(u_2(t)) \geq \langle f_2(t); v - u'_2(t) \rangle \\ u'_2(t) \in K \\ \frac{u_2(t)}{t} \in K, \quad u_2(0) = 0 \end{array} \right. \quad \forall v \in K, \text{ p.p. dans } [0; T].$$

où:

$$(2-13) \quad \langle f_2(t); v \rangle = \langle G_2(t); v \rangle - \int_{\Gamma_2} h(t) v \, d\eta$$

L'existence et l'unicité de u_2 solution de (2-12), pour chaque $L > 0$, est donnée par le Théorème F2. ▮

II-2: COMPORTEMENT AVEC LA CHALEUR LATENTE DE FUSION:

On va obtenir des estimations pour les applications:

$$(2-14) \begin{cases} \text{i)} & L \longrightarrow u_L \in L^\infty(0, T; V) \\ \text{ii)} & L \longrightarrow u'_L \in L^2(0, T; H) \end{cases}$$

Lemme II-1:

Si u_{L_i} est la solution de (2-12) pour L_i ($i=1,2$), alors il existe deux constantes M_1 et M_2 (indépendantes de L_1 et L_2) telles que:

$$(2-15) \begin{cases} \text{i)} & \|u'_{L_2} - u'_{L_1}\|_{L^2(0, T; H)} \leq M_1 |L_2 - L_1| \\ \text{ii)} & \|u_{L_2} - u_{L_1}\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq M_2 |L_2 - L_1| \end{cases}$$

Démonstration:

Si on prend:

$$\begin{cases} v = u'_{L_2}(t) \text{ dans l'inéquation variationnelle correspondant à } u_{L_1} \\ v = u'_{L_1}(t) \text{ dans l'inéquation variationnelle correspondant à } u_{L_2} \end{cases}$$

alors, on obtient:

$$\left\{ \begin{aligned} & (\beta(u'_{L_1}(t); u'_{L_2}(t) - u'_{L_1}(t)) + \alpha(u_{L_1}(t); u'_{L_2}(t) - u'_{L_1}(t)) + L f(u'_{L_2}(t)) - L f(u'_{L_1}(t))) \geq \\ & \geq \langle f_{L_1}(t); u'_{L_2}(t) - u'_{L_1}(t) \rangle \quad \text{p.p. dans } [0; T]. \\ & (\beta(u'_{L_2}(t); u'_{L_1}(t) - u'_{L_2}(t)) + \alpha(u_{L_2}(t); u'_{L_1}(t) - u'_{L_2}(t)) + L f(u'_{L_1}(t)) - L f(u'_{L_2}(t))) \geq \\ & \geq \langle f_{L_2}(t); u'_{L_1}(t) - u'_{L_2}(t) \rangle \quad \text{p.p. dans } [0; T]. \end{aligned} \right.$$

Si on ajoute ces deux inéquations, on a:

$$\begin{aligned} & (\beta(u'_{L_2}(t)) - \beta(u'_{L_1}(t)); u'_{L_2}(t) - u'_{L_1}(t)) + \alpha(u_{L_2}(t) - u_{L_1}(t); u'_{L_2}(t) - u'_{L_1}(t)) \leq \\ (2-16) \quad & \leq \langle f_{L_2}(t) - f_{L_1}(t); u'_{L_2}(t) - u'_{L_1}(t) \rangle + (L_2 - L_1) (f(u'_{L_1}(t)) - f(u'_{L_2}(t))) \\ & \text{p.p. dans } [0; T]. \end{aligned}$$

mais:

$$\begin{aligned} & \langle f_{L_2}(t) - f_{L_1}(t); v \rangle = \langle G_{L_2}(t) - G_{L_1}(t); v \rangle = \langle g_{L_2} - g_{L_1}; v \rangle = \\ (2-17) \quad & = (L_2 - L_1) \langle \chi_{L_2}(0); v \rangle \leq |L_2 - L_1| \sqrt{\text{mes } \mathcal{R}} \|v\|_H. \quad (2) \end{aligned}$$

De (2-16) et (2-17), il en résulte:

$$C_0 \| \delta'(t) \|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\alpha(\delta(t); \delta'(t))] \leq C_4^* |L_2 - L_1| \| \eta'(t) \|_H \quad \text{p.p. dans } [0; T] \quad (3)$$

où:

$$\begin{cases} \delta(t) = u_{L_2}(t) - u_{L_1}(t) \in V_0 \\ \delta'(t) = u'_{L_2}(t) - u'_{L_1}(t) \in V_0 \\ \delta(0) = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$(2-18) \quad C_0 \int_0^t \|\delta'(z)\|_H^2 dz + \frac{1}{2} \alpha(\delta(t); \delta(t)) \leq C_1^* |L_2 - L_1| \int_0^t \|\delta'(z)\|_H dz \quad \forall t \in [0; T].$$

Si on utilise l'inégalité :

$$(2-19) \quad \int_0^t \|\delta'(z)\|_H dz \leq \sqrt{T} \sqrt{\int_0^t \|\delta'(z)\|_H^2 dz}.$$

dans (2-18), il en résulte :

$$(2-20) \quad C_0 \sqrt{\int_0^t \|\delta'(z)\|_H^2 dz} + \frac{1}{2} \alpha_0 \|\delta(t)\|_V^2 \leq C_1^* |L_2 - L_1| \sqrt{T}. \quad (4)$$

d'où, on obtient (2-15i) et (2-15ii), avec :

$$(2-21) \quad \begin{cases} \text{i) } M_1 = \frac{C_1^* \sqrt{T}}{C_0} \\ \text{ii) } M_2 = C_1^* \sqrt{\frac{2T}{\alpha_0 C_0}} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Par la suite, on va étudier ce qui se passe avec la

$$(3) \quad C_1^* = 2 \sqrt{\text{mes } \mathcal{R}}. \quad \blacksquare$$

$$(2) \quad \|Y_2(0)\|_H \leq \sqrt{\text{mes} \{x \in \mathcal{R} / \theta_0(x) > 0\}} \leq \sqrt{\text{mes } \mathcal{R}}. \quad \blacksquare$$

$$(4) \quad \exists \alpha_0 > 0 / \alpha(v; v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V_0 \quad (\text{Voir Appendice 2}). \quad \blacksquare$$

solution u_L lorsque $L \rightarrow 0$.

On démontrera que u_L converge vers un élément w qui est solution d'une équation variationnelle, laquelle aussi étudie un problème de frontière libre de propagation de la chaleur dans \mathcal{R} .

II-3: COMPORTEMENT DE LA SOLUTION u_L LORSQUE
 L TEND VERS ZERO. EQUATION VARIATIONNELLE:

On introduit les notations suivantes :

$$(2-22) \begin{cases} i) g_0 = \lambda_2 \theta_0^+ - \lambda_1 \theta_0^- & \text{dans } \Omega. \\ ii) G_0(t) = g_0 + \int_0^t g(z) dz & \text{dans } Q. \\ iii) \langle f_0(t); v \rangle = \langle G_0(t); v \rangle - \int_{\Gamma_2} h(t) v dy \end{cases}$$

donc, on aura :

$$(2-23) \langle f_L(t); v \rangle = \langle f_0(t); v \rangle + L (\lambda_2 / 0; v).$$

Théorème II-1:

Sous les hypothèses du Théorème I-2, et lorsque $L \rightarrow 0$:

$$(2-24) \begin{cases} i) u_L \rightarrow w \\ ii) u_L' \rightarrow w' \\ iii) u_L'' \rightarrow w'' \end{cases} \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile et } L^2(0, T; V) \text{ faible} \\ \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible.}$$

où $w(t)$ est la seule solution de l'équation variationnelle :

$$(2-25) \begin{cases} (\beta(w'(t)); v - w'(t)) + \alpha(w(t); v - w'(t)) = \langle f_0(t); v - w'(t) \rangle \quad \forall v \in K \\ w'(t) \in K \\ \frac{w(t)}{t} \in K, \quad w(0) = 0. \end{cases} \text{ p.p. dans } [0, T].$$

Démonstration:

On va montrer que la solution u_L de (2-12) tend vers un élément w , qui est solution de (2-15), lorsque $L \rightarrow 0$. Pour cela, on établit des estimations à priori sur u_L qui permettent le passage à la limite.

i) Unicité:

On utilise une méthode analogue à celle faite pour démontrer l'unicité dans le Théorème I-2.

ii) Existence:A) Estimations à priori:

A1) Soit ξ la solution donnée par (1-83) et (1-84).

Soit:

$$(2-26) \begin{cases} \text{i) } z_L(t) = u_L(t) - t\xi \in V_0 \\ \text{ii) } z_L'(t) = u_L'(t) - \xi \in V_0 \\ \text{iii) } z_L(0) = 0 \end{cases}$$

Si on choisit $v = \xi$ dans (2-12), on ajoute $-(\beta(\xi), \xi - u_L'(t))$ aux deux membres, en utilisant:

$$\begin{cases} \mathcal{J}(\xi; z_L'(t)) = 0 \\ 0 \leq L \leq L_0 \end{cases} \quad (5)$$

on obtient :

$$C_0 \|z'_L(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(z_L(t); z_L(t))] \stackrel{(6)}{\leq} C_1 \|z_L(t)\|_V + C_2 \|z'_L(t)\|_H + \frac{d}{dt} [\langle f_0(t); z_L(t) \rangle]$$

En utilisant l'inégalité (1-86) avec $\lambda = \sqrt{C_0}$, il vient: p.p. dans $[0; T]$.

$$\frac{C_0}{2} \|z'_L(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(z_L(t); z_L(t))] \leq C_3 + C_1 \|z_L(t)\|_V + \frac{d}{dt} [\langle f_0(t); z_L(t) \rangle] \quad (7)$$

p.p. dans $[0; T]$.

Si on intègre, on a :

$$\frac{C_0}{2} \int_0^t \|z'_L(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\alpha_0}{2} \|z_L(t)\|_V^2 \leq C_4 + C_5 \|z_L(t)\|_V + C_1 \int_0^t \|z_L(\tau)\|_V d\tau \quad \forall t \in [0; T] \quad (8)$$

Si on utilise une autre fois l'inégalité (1-86) avec $\lambda = \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}$, il en résulte :

$$\frac{C_0}{2} \int_0^t \|z'_L(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\alpha_0}{4} \|z_L(t)\|_V^2 \leq C_6 + C_1 \int_0^t \|z_L(\tau)\|_V d\tau \quad \forall t \in [0; T] \quad (9)$$

d'où :

$$(2-27) \quad \begin{cases} \text{i) } \|z_L(t)\|_V \leq C_7 \quad \forall t \in [0; T] & (10) \\ \text{ii) } \int_0^t \|z'_L(\tau)\|_H^2 d\tau \leq C_8 \quad \forall t \in [0; T] & (11) \end{cases}$$

Des estimations précédentes, on a que :

(5) L est destiné à tendre vers zéro. ■

(6) C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de L . ■

(7) $C_3 = C_2^2 / 2C_0$ est une constante indépendante de L . ■

$$(2-28) \begin{cases} i) u_L \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V) \text{ et } L^2(0, T; V). \\ ii) u_L' \in \text{borné de } L^2(0, T; H). \end{cases}$$

A2) Soit un instant $t \in [0, T)$ et un nombre $h > 0$ tel que $t+h \in [0, T]$. Si on prend :

$$\begin{cases} v = u_L'(t+h) \text{ dans (2-12) à l'instant } t. \\ v = u_L'(t) \text{ dans (2-12) à l'instant } t+h. \end{cases}$$

et en les ajoutant, on obtient :

$$\begin{aligned} C_0 \|u_L'(t+h) - u_L'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(u_L(t+h) - u_L(t), u_L(t+h) - u_L(t))] &\leq \\ &\leq \langle f_L(t+h) - f_L(t), u_L'(t+h) - u_L'(t) \rangle = \langle f_0(t+h) - f_0(t), u_L'(t+h) - u_L'(t) \rangle \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} C_0 \|z_L'(t+h) - z_L'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a(z_L(t+h) - z_L(t), z_L(t+h) - z_L(t))] &\leq \\ &\leq \langle f_0(t+h) - f_0(t), z_L'(t+h) - z_L'(t) \rangle = \frac{d}{dt} \left[\langle f_0(t+h) - f_0(t), z_L(t+h) - z_L(t) \rangle \right] - \\ &- \langle f_0'(t+h) - f_0'(t), z_L(t+h) - z_L(t) \rangle. \end{aligned}$$

(8) $C_4 = C_3 T$ et C_5 sont des constantes indépendantes de L . ■

(9) $C_6 = C_4 + \frac{C_5^2}{\alpha_0}$ est une constante indépendante de L . ■

(10) $C_7 = 2C_4 T / C_0 + 2\sqrt{C_6 / \alpha_0}$ est une constante indépendante de L . ■

(11) $C_8 = 2(C_6 + C_4 C_7 T) / \alpha_0$ est une constante indépendante de L . ■

si on intègre sur $[0; t]$, on divise par h^2 et on passe à la limite $h \rightarrow 0$, il en résulte :

$$C_0 \int_0^t \|z_L''(z)\|_H^2 dz + \frac{1}{2} a(z_L'(t); z_L'(t)) \leq \frac{1}{2} a(z_1; z_1) + \langle f_0'(t); z_L'(t) \rangle - \langle f_0'(0); z_1 \rangle - \int_0^t \langle f_0''(z); z_L'(z) \rangle dz \quad (12)$$

ou encore :

$$C_0 \int_0^t \|z_L''(z)\|_H^2 dz + \frac{\alpha_0}{2} \|z_L'(t)\|_V^2 \leq C_9 + C_{10} \|z_L'(t)\|_V + C_{11} \int_0^t \|z_L'(z)\|_V dz \quad (13)$$

donc :

$$C_0 \int_0^t \|z_L''(z)\|_H^2 dz + \frac{\alpha_0}{4} \|z_L'(t)\|_V^2 \leq C_{12} + C_{11} \int_0^t \|z_L'(z)\|_V dz \quad (14)$$

d'où, on obtient :

$$(2-29) \begin{cases} i) \|z_L'(t)\|_V \leq C_{13} \quad \forall t \in [0; T] & (15) \\ ii) \int_0^t \|z_L''(z)\|_H^2 dz \leq C_{14} \quad \forall t \in [0; T] & (16) \end{cases}$$

Des estimations précédentes, on a :

$$(2-30) \begin{cases} i) u_L' \in \text{borne}' \text{ de } L^\infty(0, T; V) \text{ et } L^2(0, T; V). \\ ii) u_L'' \in \text{borne}' \text{ de } L^2(0, T; H). \end{cases}$$

A3) Des estimations (2-28) et (2-30), il vient :

(12) $z_1 = z_L'(0) = u_1 - \xi$. ■

(13) C_9, C_{10}, C_{11} sont des constantes indépendantes de L . ■

(14) $C_{12} = C_9 + C_{10}^2/\alpha_0$ est une constante indépendante de L . ■

$$(2-31) \begin{cases} \text{i) } u_L \in \text{borne}' \text{ de } L^\infty(0,T;V) \text{ et } L^2(0,T;V). \\ \text{ii) } u_L' \in \text{borne}' \text{ de } L^\infty(0,T;V) \text{ et } L^2(0,T;V). \\ \text{iii) } u_L'' \in \text{borne}' \text{ de } L^2(0,T;H). \end{cases}$$

B) Passage à la limite :

Il résulte des estimations (2-31) que, lorsque $L \rightarrow 0$, au moins pour une sous-suite :

$$(2-32) \begin{cases} \text{i) } u_L \text{ tend vers } w \\ \text{ii) } u_L' \text{ tend vers } w' \\ \text{iii) } u_L'' \text{ tend vers } w'' \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{dans } L^2(0,T;V) \text{ faible et } L^\infty(0,T;V) \text{ faible} \\ \text{étoile.} \\ \text{dans } L^2(0,T;H) \text{ faible.} \end{array} \right\}$$

Conséquences :

$$B1) \quad \underline{w(0) = 0} : \quad (2-33)$$

De (2-27i) et (2-32i), il en résulte que :

$$(2-34) \quad 0 = u_L(0) \rightarrow w(0) \text{ dans } H \text{ fort lorsque } L \rightarrow 0$$

d'où (2-33)

$$B2) \quad \underline{w'(t) \in K \quad \forall t \in [0;T]} : \quad (2-35)$$

Du fait que $u_L'(t)/l_1 = b_0 \quad \forall L > 0$, on a : $\lim_{L \rightarrow 0} \int_{T_1}^T (u_L'(t) - b_0)^2 dt = 0$

(15) $c_{13} = 2TC_{11}/c_0 + 2\sqrt{c_{12}/c_0}$ est une constante indépendante de L . ■

(16) $c_{14} = 2(c_{12} + c_{11}c_{13}T)/c_0$ est une constante indépendante de L . ■

donc, en utilisant (1-103), il vient :

$$0 \leq \int_{T_1} (w'(t) - b_0)^2 \leq \lim_{L \rightarrow 0} \int_{T_1} (u_L'(t) - b_0)^2 dt = 0 \quad \forall t \in [0; T]$$

d'où (2-35).

$$B3) \quad \underline{\frac{w(t)}{t} \in K \quad \forall t \in [0; T]} : \quad (2-36)$$

On le démontre d'une façon similaire.

(2-37) B4) w est solution de l'équation variationnelle (2-25) :

Par définition, u_L vérifie (2-12) ou encore l'inéquation variationnelle équivalente, donnée par :

$$(2-38) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}(u_L(t); v - u_L'(t)) + \Psi(v) - \Psi(u_L'(t)) + L f(v) - L f(u_L'(t)) \geq \\ \geq \langle f_0(t); v - u_L'(t) \rangle + L (\chi_2(0); v - u_L'(t)) \quad \forall v \in K, \text{ p.p. dans } [0; T]. \\ u_L'(t) \in K \\ \frac{u_L(t)}{t} \in K, \quad u_L(0) = 0 \end{array} \right.$$

Si on choisit $v \in K^{(17)}$, on intègre sur $[0; T]$, on utilise la semi-continuité inférieure dans V faible des applications :

$$(2-39) \left\{ \begin{array}{l} i) v \rightarrow \mathcal{J}(v; v) \\ ii) v \rightarrow \Psi(v) \end{array} \right.$$

alors, à la limite $L \rightarrow 0$, on obtient :

(17) K est défini par (1-110). ■

$$\int_0^T \left[\mathcal{J}(w(t); v(t) - w'(t)) + \Psi(v(t)) - \Psi(w'(t)) - \langle f_0(t); v(t) - w'(t) \rangle \right] dt \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

ou encore :

$$(2-40) \int_0^T \left[(\beta(w(t)); v(t) - w'(t)) + \mathcal{J}(w(t); v(t) - w'(t)) - \langle f_0(t); v(t) - w'(t) \rangle \right] dt \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

De (2-40) et de la Remarque II-2 (ci-dessous), il en résulte :

$$(2-41) \begin{cases} (\beta(w'(t)); v - w'(t)) + \mathcal{J}(w(t); v - w'(t)) - \langle f_0(t); v - w'(t) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \\ w'(t) \in K \\ \frac{w(t)}{t} \in K, \quad w(0) = 0 \end{cases} \text{ p.p. dans } [0; T].$$

ou encore (2-37).

$$B5) \quad \underline{w_1 = w'(0) = u_1 \in K} : \quad (2-42)$$

De l'existence et l'unicité de $w(t)$, solution de (2-25), il en résulte pour $t=0$ que $w_1 = w'(0)$ vérifie l'équation :

$$(2-43) \begin{cases} (\beta(w_1); v - w_1) + \mathcal{J}(w(0); v - w_1) = \langle f_0(0); v - w_1 \rangle \quad \forall v \in K \\ w_1 \in K \end{cases}$$

ou encore

$$(2-44) \begin{cases} (\beta(w_1) - g_{00}; v) = 0 \quad \forall v \in V_0 \\ w_1 \in K \end{cases}$$

Comme :

$$\begin{cases} i) \quad g_{00}/r_1 = r_2 b^+ - r_1 b^- \quad (2-45). \end{cases}$$

$$\begin{cases} ii) \quad \beta(w_1)/r_1 = \beta(w'(0))/r_1 = r_2 b^+ - r_1 b^- \quad (2-46). \end{cases}$$

il en résulte que :

$$\beta(w_1) - g_{00} \in V_0 \quad (2-47)$$

donc, de (2-44) et (2-47), on en déduit que :

$$\beta w_1 = g_{00} \text{ dans } \mathcal{R} \quad (2-48)$$

ou encore :

$$w_1 = k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^- = u_1 \in K \quad (2-49)$$

d'où (2-42). ▮

Remarque II-2 :

On a l'équivalence suivante :

$$(2-50) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(w'(t)); v - w'(t)) + \alpha(w(t); v - w'(t)) - \langle f_0(t); v - w'(t) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \\ w'(t) \in K, \quad \frac{w(t)}{t} \in K, \quad w(0) = 0 \end{array} \right. \text{ p.p. dans } [0; T].$$

$$(2-51) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T [(\beta(w'(t)); v(t) - w'(t)) + \alpha(w(t); v(t) - w'(t)) - \langle f_0(t); v(t) - w'(t) \rangle] dt \geq 0 \\ w' \in K, \quad w \in L^2(0; T; V), \quad w(0) = 0 \end{array} \right. \quad \forall v \in K.$$

Démonstration :

On utilise une méthode analogue à celle utilisée pour démontrer la Remarque I-7. ▮

Remarque II-3 :

Sous les hypothèses du cas d'évolution n°2, défini dans le

paragraphe I-8, la fonction $w(t)$ est donnée par :

$$(2-52) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(w'(t)); v - w'(t)) + \mathcal{J}(w(t); v - w'(t)) = (g_{00}; v - w'(t)) \quad \forall v \in K \\ w'(t) \in K, \quad \frac{w(t)}{t} \in K, \quad w(0) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{p.p. dans } [0; T]. \end{array}$$

Remarque II-4:

L'existence de la solution de (2-25) peut être démontrée directement par un raisonnement similaire à celui fait au théorème I-3, mais le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nous donne un fait thermique concret.

II-4: INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA SOLUTION w .PROPRIETES:

La solution w de (2-25) représente, après un changement de fonction inconnue, l'étude de la propagation de la chaleur dans un milieu \mathcal{R} composé de deux phases (la phase solide et la phase liquide), mais pour lequel la chaleur latente de fusion est négligeable. En plus, (2-25) représente aussi l'étude d'un problème de frontière libre (de Stefan à deux phases).

Soit l'étude de la température $\theta^*(x;t)$, définie par :

$$(2-53) \quad \theta^*(x;t) = \begin{cases} \theta_1^*(x;t) < 0 & \text{dans } Q_1^* \\ 0 & \text{sur } \Sigma^* \\ \theta_2^*(x;t) > 0 & \text{dans } Q_2^* \end{cases}$$

où :

$$(2-54) \quad \begin{cases} \text{i) } Q_1^* = \{(x;t) \in Q / \theta^*(x;t) < 0\} \\ \text{ii) } Q_2^* = \{(x;t) \in Q / \theta^*(x;t) > 0\} \\ \text{iii) } \Sigma^* = \{(x;t) \in Q / \theta^*(x;t) = 0\} \\ \text{iv) } Q = \mathcal{R} \times (0;T) = Q_1^* \cup Q_2^* \cup \Sigma^* \end{cases}$$

qui vérifie les équations suivantes:

$$(2-55) \begin{cases} \text{i) } \rho_1 \frac{\partial \theta_1^*}{\partial t} - k_1 \Delta \theta_1^* = q & \text{dans } Q_1^* \\ \text{ii) } \rho_2 \frac{\partial \theta_2^*}{\partial t} - k_2 \Delta \theta_2^* = q & \text{dans } Q_2^* \end{cases}$$

$$(2-56) \begin{cases} \text{i) } \theta_1^* = \theta_2^* = 0 \\ \text{ii) } k_1 \frac{\partial \theta_1^*}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2^*}{\partial n} \end{cases} \quad \text{sur } \Sigma^*$$

$$(2-57) \quad \theta^*/\rho_1 = b$$

$$(2-58) \begin{cases} \text{i) } -k_1 \frac{\partial \theta_1^*}{\partial n} / \rho_2 = \tilde{h} & \text{si } \theta^*/\rho_2 < 0 \\ \text{ii) } -k_2 \frac{\partial \theta_2^*}{\partial n} / \rho_2 = \tilde{h} & \text{si } \theta^*/\rho_2 > 0 \end{cases}$$

$$(2-59) \quad \theta^*(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega$$

Si on fait le changement de fonction inconnue $w(x;t)$ définie par:

$$(2-60) \quad w(x;t) = \int_0^t [k_2(\theta(x,z))^+ - k_1(\theta(x,z))^-] dz$$

alors, en utilisant une méthode similaire à celle faite aux paragraphes I-2, I-3 et I-4, on obtient que $w(t)$ est solution de l'équation variationnelle (2-25).

Remarque II-5:

Le problème (2-55), (2-56), (2-57), (2-58) et (2-59) peut se résoudre en faisant un changement de fonction inconnue différent à celui de (2-60). Il est donné par:

$$(2-60\text{bis}) \quad w^*(x;t) = k_2 (\theta^*(x;t))^+ - k_1 (\theta^*(x;t))^-$$

On verra que pour le cas d'évolution n°2 et pour une certaine condition initiale θ_0 , on pourra calculer $w(t)$ explicitement.

Lemme II-2:

Pour le cas d'évolution n°2, on a l'équivalence suivante:

$$(2-61) \quad w(t) = t\xi \iff \xi = w_1.$$

Démonstration:

Pour le cas d'évolution n°2, on a:

$w(t)$ est solution de (2-52) \iff

$$(2-62) \quad \begin{cases} (\beta(w(t)) - g_{00}; v) + \alpha(w(t); v) = 0 \quad \forall v \in V_0, \text{ p.p. dans } [0; T]. \\ w'(t) \in K, \frac{w(t)}{t} \in K, w(0) = 0 \end{cases}$$

On achève la démonstration d'une façon analogue à celle utilisée pour démontrer le Lemme I-15.

Remarque II-6 :

Soit u_{1L} la solution de (1-68) pour chaque $L > 0$ (ou de (1-31) pour $t=0$); c'est-à-dire :

$$(2-63) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u_{1L}); v - u_{1L}) + Lf(v) - Lf(u_{1L}) \geq (g_{0L}; v - u_{1L}) \quad \forall v \in K \\ u_{1L} \in K \end{array} \right.$$

Par (1-74) et (1-112), on a que :

$$(2-64) \quad u_{1L} = u_L(0) = u_1 = k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^- \in K$$

Soit $u_{1L\alpha}$ la solution de (1-68) pour chaque $\alpha > 0$ et $L > 0$ (ou de (1-65) pour $t=0$); donc, on a :

$$(2-65) \quad u_{1L\alpha} = u_{1L} = u_1 \quad \forall L > 0, \forall \alpha > 0.$$

Remarque II-7 :

On a les équivalences suivantes :

$$(2-66) \quad u_L(t) = t\xi \Leftrightarrow \xi = k_2 \theta_0^+ - k_1 \theta_0^- \Leftrightarrow w(t) = t\xi.$$

Dans le chapitre IV, on verra une interprétation physique de (2-66) qui fait intervenir la température du cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases.

Remarque II-8:

On a vu que pour $t=0$, on a:

$$(2-67) \quad u'_L(0) = w'_L(0) \quad \forall L > 0$$

donc, c'est un résultat indépendant de la chaleur latente de fusion $L > 0$. On verra au chapitre IV, que pour $t \rightarrow +\infty$, les fonctions $u'_L(t)$ et $w'_L(t)$ auront la même limite dans H fort. Cette limite sera donc la même $\forall L > 0$.

Lemme II-3:

Pour le cas d'évolution n°2, on a les propriétés suivantes:

$$(2-68) \quad \begin{cases} i) & \alpha(w'_L(t); w'_L(t)) \leq \alpha(w_1; w_1) \quad \forall t > 0. \\ ii) & \int_0^t \|w''(\tau)\|_H^2 d\tau \leq \frac{1}{2c_0} \alpha(w_1; w_1) \quad \forall t > 0. \end{cases}$$

Démonstration:

On le démontre d'une façon similaire à celle faite dans le Lemme I-14.

Exemple:

On considère un milieu matériel Ω unidimensionnel:

$$(2-69) \begin{cases} \Omega = (0; a) \\ \text{avec } a > 0 \end{cases}$$

On se propose de trouver la température

$$(2-70) \quad \theta^*(x; t) = \begin{cases} \theta_2^*(x; t) & \text{si } 0 < x < s(t) \\ 0 & \text{si } x = s(t) \\ \theta_1^*(x; t) & \text{si } s(t) < x < a \end{cases}$$

et la frontière libre $s(t) \geq 0$, qui sépare la phase solide de la phase liquide à l'instant $t > 0$, solutions du problème suivant:

$$(2-71) \begin{cases} \text{i) } \rho_2 \frac{\partial \theta_2^*}{\partial t} - k_2 \frac{\partial^2 \theta_2^*}{\partial x^2} = 0 & \text{si } \begin{cases} t > 0 \\ 0 < x < s(t) \end{cases} \\ \text{ii) } \rho_1 \frac{\partial \theta_1^*}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 \theta_1^*}{\partial x^2} = 0 & \text{si } \begin{cases} t > 0 \\ s(t) < x < a \end{cases} \end{cases}$$

$$(2-72) \begin{cases} \text{i) } \theta_1^*(s(t); t) = \theta_2^*(s(t); t) = 0 & \forall t > 0 \\ \text{ii) } k_1 \frac{\partial \theta_1^*}{\partial x}(s(t); t) = k_2 \frac{\partial \theta_2^*}{\partial x}(s(t); t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

$$(2-73) \quad \theta_2^*(0; t) = B > 0 \quad \forall t > 0$$

$$(2-74) \quad \theta_1^*(a; t) = -C < 0 \quad \forall t > 0$$

$$(2-75) \quad \theta(x; 0) = \theta_0(x) \quad \forall 0 < x < a$$

Dans le cas où la condition initiale θ_0 est donnée par:

$$(2-76) \quad \theta_0(x) = \begin{cases} B - \frac{B+kC}{a} x & \text{si } 0 \leq x \leq s_0 \\ \frac{B}{k} - \frac{B+kC}{ka} x & \text{si } s_0 \leq x \leq a \end{cases}$$

avec:

$$(2-77) \quad \begin{cases} \text{i) } k = \frac{k_1}{k_2} \\ \text{ii) } s_0 = \frac{aB}{B+kC} \end{cases}$$

on peut affirmer que:

$$(2-78) \quad \theta^*(x;t) = \theta_0(x) \quad \forall t > 0, \quad (18)$$

Remarque II-9:

On verra au chapitre IV que pour n'importe quelle condition initiale θ_0 , la limite de $\theta^*(t)$ (de l'exemple précédent) lorsque $t \rightarrow +\infty$ est donnée toujours par la formule (2-76). ■

(18) On applique le Lemme II-2 et le calcul de ξ qui sera fait au chap. III. ■

II-5: AUTRES PROPRIETES LORSQUE LA CHALEUR LATENTEDE FUSION TEND VERS ZERO:

Soit $u_{L\alpha}(t)$ ⁽¹⁹⁾ la seule solution, donnée par le Lemme I-13, de l'inéquation variationnelle:

$$(2-79) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u'_{L\alpha}(t)); v - u'_{L\alpha}(t)) + \frac{\alpha}{L} (u_{L\alpha}(t); v - u'_{L\alpha}(t)) + L f(v) - L f(u'_{L\alpha}(t)) \geq \\ \geq \langle f_{L\alpha}(t); v - u'_{L\alpha}(t) \rangle \quad \forall v \in V, \text{ p.p. dans } [0; T]. \\ u'_{L\alpha}(t) \in V \\ u_{L\alpha}(t) \in V, u_{L\alpha}(0) = 0 \end{array} \right.$$

où:

$$(2-80) \quad \langle f_{L\alpha}(t); v \rangle = \langle f_L(t); v \rangle + \alpha \int_{\Gamma_1} \beta(t) v \, d\gamma_1$$

On a déjà étudié, au chapitre I, la limite de $u_{L\alpha}(t)$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ pour démontrer l'existence de $u_L(t)$, solution de l'inéquation variationnelle (I-31). Maintenant, on voudrait étudier la limite de $u_{L\alpha}(t)$ lorsque $L \rightarrow 0$. On va démontrer que cette limite existe et qu'en plus elle aussi vérifie

(19) noté $u_L(t)$ au chapitre I.

une équation variationnelle.

Lemme II-4:

Sous les hypothèses du Théorème I-2 et lorsque $L \rightarrow 0$:

$$(2-81) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_{L\alpha} \rightarrow u_{\alpha} \\ \text{ii) } u'_{L\alpha} \rightarrow u'_{\alpha} \\ \text{iii) } u''_{L\alpha} \rightarrow u''_{\alpha} \end{array} \right\} \text{ dans } L^{\infty}(0,T;V) \text{ faible étoile et } L^2(0,T;V) \text{ faible.}$$

$$\text{dans } L^2(0,T;H) \text{ faible.}$$

où $u_{\alpha}(t)$ est la seule solution, pour chaque $\alpha > 0$, de l'équation variationnelle :

$$(2-82) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u'_{\alpha}(t)); v) + \alpha_2(u_{\alpha}(t); v) = \langle f_{0\alpha}(t); v \rangle \quad \forall v \in V, \text{ p.p. dans } [0; T]. \\ u'_{\alpha}(t) \in V \\ u_{\alpha}(t) \in V, \quad u_{\alpha}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration :

On utilise une méthode analogue à celle utilisée pour démontrer le Théorème II-1.

Remarque II-10: (Interprétation physique de $u_{\alpha}(t)$).

La solution $u_{\alpha}(t)$ de (2-82) représente, pour chaque $\alpha > 0$ et après un changement de fonction inconnue, l'étude de la

température dans un milieu Ω pour lequel la chaleur latente de fusion est négligeable, lorsque sur une partie Γ_1 de frontière la température vérifie une loi de type Newton avec coefficient $\alpha > 0$. En plus, (2-82) représente aussi, pour α assez grand⁽²⁰⁾, l'étude d'un problème de frontière libre de Stefan à deux phases.

Soit l'étude de la température $\theta_\alpha(x;t)$, définie par :

$$(2-83) \quad \theta_\alpha(x;t) = \begin{cases} \theta_{\alpha_1}(x;t) < 0 & \text{dans } Q_{\alpha_1} \\ 0 & \text{sur } \Sigma_\alpha \\ \theta_{\alpha_2}(x;t) > 0 & \text{dans } Q_{\alpha_2} \end{cases}$$

où :

$$(2-84) \quad \begin{cases} \text{i) } Q_{\alpha_1} = \{(x;t) \in Q / \theta_\alpha(x;t) < 0\} \\ \text{ii) } Q_{\alpha_2} = \{(x;t) \in Q / \theta_\alpha(x;t) > 0\} \\ \text{iii) } \Sigma_\alpha = \{(x;t) \in Q / \theta_\alpha(x;t) = 0\} \\ \text{iv) } Q = \Omega \times (0;T) = Q_{\alpha_1} \cup Q_{\alpha_2} \cup \Sigma_\alpha \end{cases}$$

qui vérifie les équations suivantes :

(20) La justification de l'expression "à assez grand" est donnée par le Lemme II-6.

$$(2-85) \begin{cases} \text{i) } \rho_1 \frac{\partial \theta_{\alpha_1}}{\partial t} - k_1 \Delta \theta_{\alpha_1} = g & \text{dans } Q_{\alpha_1} \\ \text{ii) } \rho_2 \frac{\partial \theta_{\alpha_2}}{\partial t} - k_2 \Delta \theta_{\alpha_2} = g & \text{dans } Q_{\alpha_2} \end{cases}$$

$$(2-86) \begin{cases} \text{i) } \theta_{\alpha_1} = \theta_{\alpha_2} = 0 \\ \text{ii) } k_1 \frac{\partial \theta_{\alpha_1}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_{\alpha_2}}{\partial n} \end{cases} \text{ sur } \Sigma_2$$

$$(2-87) \begin{cases} \text{i) } -k_1 \frac{\partial \theta_{\alpha_1}}{\partial n} / \rho_1 = \alpha (k_1 \theta_{\alpha_1} - b_0) & \text{si } \theta_{\alpha_1} / \rho_1 < 0 \\ \text{ii) } -k_2 \frac{\partial \theta_{\alpha_2}}{\partial n} / \rho_2 = \alpha (k_2 \theta_{\alpha_2} - b_0) & \text{si } \theta_{\alpha_2} / \rho_2 > 0 \end{cases}$$

$$(2-88) \begin{cases} \text{i) } -k_1 \frac{\partial \theta_{\alpha_1}}{\partial n} / \rho_1 = \tilde{h} & \text{si } \theta_{\alpha_1} / \rho_1 < 0 \\ \text{ii) } -k_2 \frac{\partial \theta_{\alpha_2}}{\partial n} / \rho_2 = \tilde{h} & \text{si } \theta_{\alpha_2} / \rho_2 > 0 \end{cases}$$

$$(2-89) \quad \theta_{\alpha}(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega$$

Alors, si on fait le changement de fonction inconnue $u_{\alpha}(x;t)$, défini par :

$$(2-90) \quad u_{\alpha}(x;t) = \int_0^t [k_2 \theta_{\alpha}^+(x;\tau) - k_1 \theta_{\alpha}^-(x;\tau)] d\tau$$

et si l'on utilise une méthode similaire à celle faite dans les paragraphes I-2, I-3 et I-4, on obtient que $u_{\alpha}(t)$

est solution de l'équation variationnelle (2-82). ▀

Lemme II-5:

L'élément $u_{1\alpha} = u'_\alpha(0)$ est donné par:

$$(2-91) \quad u_{1\alpha} = u_1 \in K \quad \forall \alpha > 0$$

Démonstration:

Si on prend $t=0$ dans (2-82), il en résulte:

$$(2-92) \quad \beta(u_{1\alpha}) = g_{00} \quad \forall \alpha > 0$$

d'où (2-91). ▀

Remarque II-11:

Pour le cas d'évolution $n=2$, la fonction $u_\alpha(t)$ est donnée par:

$$(2-93) \quad \begin{cases} (\beta(u'_\alpha(t)); v) + \alpha_\alpha(u_\alpha(t); v) = (g_{00}; v) + \alpha t \int_{\Gamma_1} b_0 v \, dy & \forall v \in V \\ u'_\alpha(t) \in V & \text{p.p. dans } [0; T]. \\ u_\alpha(t) \in V, u_\alpha(0) = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Remarque II-12:

On sait que:

$$(2-94) \quad u_{1\alpha} = u_{1\alpha} = u_1 \quad \forall \alpha > 0, \forall L > 0$$

ce qui se traduit par:

$$(2-95) \quad u'_{L\alpha}(0) = u'_{\alpha}(0) = u_1 \quad \forall \alpha > 0, \forall L > 0.$$

On verra, dans le chapitre IV, que pour $t \rightarrow +\infty$ les fonctions $u'_{L\alpha}(t)$ et $u'_{\alpha}(t)$ auront aussi la même limite dans H fort, pour tout $L > 0$. ■

Lemme II-6:

Lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, on a que:

$$(2-96) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u_{\alpha} \rightarrow w \\ \text{ii) } u'_{\alpha} \rightarrow w' \\ \text{iii) } u''_{\alpha} \rightarrow w'' \end{array} \right\} \text{ dans } L^{\infty}(0, T; V) \text{ faible étoile et } L^2(0, T; V) \text{ faible}$$

$$\text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible}$$

Démonstration:

On utilise une méthode analogue à celle faite dans le théorème I-2. ■

Lemme II-7:

Pour le cas d'évolution n°2, on a les propriétés suivantes:

$$(2-97) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \mathcal{Q}_1(u'_\alpha(t); u'_\alpha(t)) \leq \mathcal{Q}_1(u_1; u_1) \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha \geq 1. \\ \text{ii) } \int_0^t \|u'_\alpha(z)\|_H^2 dz \leq \frac{1}{2c_0} \mathcal{Q}_1(u_1; u_1) \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha \geq 1. \\ \text{iii) } (\alpha-1) \int_1^{\frac{1}{\alpha}} (u'_\alpha(t) - b_0)^2 d\mu \leq \mathcal{Q}_1(u_1; u_1) \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha \geq 1. \end{array} \right.$$

Démonstration:

On utilise une méthode analogue à celle faite, pour le cas $L \geq 0$, au Lemme I-16. ▀

CHAPITRE III

CAS
STATIONNAIRE

III-0 : ORIENTATION :

Dans III-1, on fait une présentation physique du cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases.

Dans III-2, on transforme les équations au sens des distributions dans \mathbb{R} et on fait un changement de fonction inconnue.

Dans III-3, on obtient une équation variationnelle qui doit vérifier la nouvelle fonction inconnue. Puis, on démontre l'existence et l'unicité de la solution.

Dans III-4, on écrit la formulation variationnelle d'un cas particulier de celui traité dans III-1 et on traite deux exemples simples dont les solutions respectives peuvent être calculées explicitement.

Dans III-5, on introduit une famille de problèmes auxiliaires du cas stationnaire dépendant d'un paramètre $\alpha > 0$. Pour chaque $\alpha > 0$, on démontre l'existence et

l'unicité de la solution θ_∞^α . Puis, on démontre que lorsque α tend vers l'infini, θ_∞^α converge, dans H^1 fort, vers θ_∞ qui est la température solution du cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases.

III-1: PRESENTATION DU PROBLEME PHYSIQUE:

Reprenant la présentation du cas d'évolution dans le chapitre 0, on est amené à étudier le champ de température $\theta_{\infty}(x)$, défini pour :

$$(3-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in \Omega : \text{ouvert, connexe et borné de } \mathbb{R}^3 \\ \text{avec frontière } \Gamma \text{ assez régulière.} \end{array} \right.$$

On suppose que :

$$(3-2) \quad \theta_{\infty} = 0 \quad (0 \text{ degré Centigrade}).$$

est la température du changement de phase entre la phase solide et la phase liquide.

L'ensemble Ω est donc divisé en deux régions, occupées par :

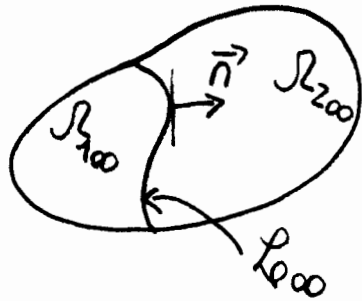
$$(3-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \Omega_{1\infty} = \{x \in \Omega / \theta_{\infty}(x) < 0\} : \text{la phase solide} \\ \text{ii) } \Omega_{2\infty} = \{x \in \Omega / \theta_{\infty}(x) > 0\} : \text{la phase liquide} \end{array} \right.$$

On désigne par Γ_{∞} la frontière libre qui les sépare, définie par :

$$(3-4) \quad \Gamma_{\infty} = \{x \in \Omega / \theta_{\infty}(x) = 0\}$$

La température θ_{∞} peut s'exprimer dans Ω par :

$$(3-5) \quad \theta_{\infty}(x) = \begin{cases} \theta_{1\infty}(x) < 0 & \text{dans } \Omega_{1\infty} \\ 0 & \text{sur } \Gamma_{\infty} \\ \theta_{2\infty}(x) > 0 & \text{dans } \Omega_{2\infty} \end{cases}$$



où :

$$(3-6) \quad \begin{cases} \Omega = \Omega_{1\infty} \cup \Gamma_{\infty} \cup \Omega_{2\infty} \\ \vec{n} : \text{vecteur normal à } \Gamma_{\infty} \end{cases}$$

L'équation de la chaleur dans $\Omega_{i\infty}$ ($i=1,2$) s'écrit :

$$(3-7) \quad \begin{cases} -k_i \Delta \theta_{i\infty} = g_{\infty} & \text{dans } \Omega_{i\infty} \\ i=1,2 \end{cases}$$

où :

$$(3-8) \quad \begin{cases} i) k_i : \text{est la conductivité calorifique dans } \Omega_{i\infty}. \\ ii) g_{\infty} : \text{représente un apport d'énergie dans } \Omega. \end{cases}$$

Sur la frontière libre Γ_∞ , on a les conditions suivantes :

$$(3-9) \begin{cases} \text{i) } \theta_{1\infty} = \theta_{2\infty} = 0 \\ \text{ii) } k_1 \frac{\partial \theta_{1\infty}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_{2\infty}}{\partial n} \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_\infty$$

Enfin, les conditions aux limites sont données par :

$$(3-10) \quad \theta_{\infty}/\Gamma_1 = b$$

$$(3-11) \begin{cases} \text{i) } -k_1 \frac{\partial \theta_{1\infty}}{\partial n} / \Gamma_2 = h_{\infty} & \text{si } \theta_{\infty}/\Gamma_2 < 0 \\ \text{ii) } -k_2 \frac{\partial \theta_{2\infty}}{\partial n} / \Gamma_2 = h_{\infty} & \text{si } \theta_{\infty}/\Gamma_2 > 0 \end{cases}$$

où :

$$(3-12) \begin{cases} \text{i) } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \text{ii) } \Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1, \text{ avec } \text{mes} \Gamma_1 > 0. \end{cases}$$

$$(3-13) \begin{cases} \text{i) } b \text{ est une fonction donnée sur } \Gamma_1 \\ \text{ii) } h_{\infty} \text{ est une fonction donnée sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Remarque III-1 :

La chaleur latente de fusion L n'intervient pas dans le cas stationnaire car le matériel \mathcal{R} est composé de

deux parties qui ne bougent pas, l'une la phase solide (de la glace) et l'autre la phase liquide (de l'eau); on peut donc supposer qu'on est en face d'un problème de transmission de la chaleur avec la présence d'une frontière libre caractérisée par les deux conditions (3-9). Cela nous explique la non-présence de L dans la condition (3-9ii).

Remarque III-2:

Pour que le problème stationnaire donné soit à deux phases il faut que la fonction b prenne sur I_1 des valeurs positives et négatives. Avec cela, on est sûr que la frontière libre Γ_{00} puisse exister physiquement.

On va maintenant écrire le problème (3-7), (3-9), (3-10) et (3-11) au sens des distributions dans \mathcal{R} , et puis on fera un changement de fonction inconnue pour obtenir une équation variationnelle du problème.

III-2: CALCUL AU SENS DES DISTRIBUTIONS DANS \mathcal{R} .CHANGEMENT DE FONCTION INCONNUE.

Pour transformer les équations précédentes de manière à les écrire en terme des distributions dans \mathcal{R} , on introduit :

$$(3-14) \left\{ \begin{array}{l} T_{i\infty}(x) = \begin{cases} \theta_{i\infty}(x) & \text{si } x \in \mathcal{R}_{i\infty} \\ 0 & \text{si } x \in (\mathcal{R} - \mathcal{R}_{i\infty}) \end{cases} \\ i=1,2 \end{array} \right.$$

donc :

$$(3-15) \left\{ \begin{array}{l} i) T_{2\infty} = \theta_{\infty}^+ \text{ dans } \mathcal{R} \\ ii) T_{1\infty} = -\theta_{\infty}^- \text{ dans } \mathcal{R} \end{array} \right.$$

On peut aussi écrire $\mathcal{R}_{i\infty}$ par :

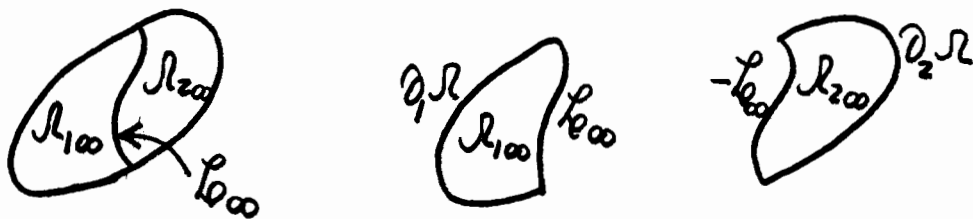
$$(3-16) \left\{ \begin{array}{l} i) \mathcal{R}_{1\infty} = \{x \in \mathcal{R} / T_{1\infty}(x) < 0\} \\ ii) \mathcal{R}_{2\infty} = \{x \in \mathcal{R} / T_{2\infty}(x) > 0\} \end{array} \right.$$

En plus, on a :

$$(3-17) \left\{ \begin{array}{l} i) \partial \mathcal{R}_{1\infty} = \partial_1 \mathcal{R} \cup \mathcal{L}_{\infty} \\ ii) \partial \mathcal{R}_{2\infty} = \partial_2 \mathcal{R} \cup (-\mathcal{L}_{\infty}) \quad (a) \end{array} \right.$$

où :

$$(3-18) \begin{cases} \text{i)} \partial_1 \Omega = \partial \Omega \cap \bar{\Omega}_{100} \\ \text{ii)} \partial_2 \Omega = \partial \Omega \cap \bar{\Omega}_{200} \end{cases}$$



Alors, on a les lemmes suivants :

Lemme III-1:

$\forall \varphi \in D(\Omega)$, on a :

$$(3-19) \begin{cases} \text{i)} \langle -k_2 \Delta T_2; \varphi \rangle = \int_{\Omega_{200}} g_{00} \varphi dx - k_2 \int_{\Gamma_{000}} \frac{\partial \varphi_{200}}{\partial n} \varphi dy \\ \text{ii)} \langle -k_1 \Delta T_1; \varphi \rangle = \int_{\Omega_{100}} g_{00} \varphi dx + k_1 \int_{\Gamma_{000}} \frac{\partial \varphi_{100}}{\partial n} \varphi dy \end{cases}$$

Démonstration:

i) $\forall \varphi \in D(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle -k_2 \Delta T_2; \varphi \rangle &= -k_2 \langle T_2; \Delta \varphi \rangle = -k_2 \int_{\Omega} T_2 \Delta \varphi dx = \\ &= -k_2 \int_{\Omega_{200}} \varphi_{200} \Delta \varphi dx = -k_2 \left[\int_{\Omega_{200}} \Delta \varphi_{200} \varphi dx + \int_{\partial(\Omega_{200})} (\varphi_{200} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_{200}}{\partial n}) dy \right] \end{aligned}$$

1) On prend l'expression $(-\Gamma_{000})$, car on tient déjà compte que sur Γ_{000} on utilise toujours, pour le vecteur normal, la direction de Ω_{100} à Ω_{200} .

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{R}_{200}} g_{00} \Psi dx - k_2 \int_{-l_{00}}^{l_{00}} \left[\underbrace{\theta_{200}}_{\circ} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \frac{\partial \theta_{200}}{\partial n} \Psi \right] dy - k_2 \int_{\mathcal{R}_2} \left[\underbrace{\theta_{200}}_{\circ} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \frac{\partial \theta_{200}}{\partial n} \underbrace{\Psi}_{\circ} \right] dy \\
&= \int_{\mathcal{R}_{200}} g_{00} \Psi dx - k_2 \int_{l_{00}}^{l_{00}} \frac{\partial \theta_{200}}{\partial n} \Psi dy.
\end{aligned}$$

ii) On le démontre d'une façon similaire. ▮

On introduit la nouvelle fonction inconnue $u_{00}(x)$, définie par :

$$(3-20) \quad u_{00}(x) = k_2 T_{200}(x) + k_1 T_{100}(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

En tenant compte de (3-15), on a aussi pour u_{00} l'expression suivante :

$$(3-21) \quad u_{00} = k_2 \theta_{00}^+ - k_1 \theta_{00}^- \quad \text{dans } \mathcal{R}. \quad \blacksquare$$

Remarque III-3:

Il est clair qu'une fois qu'on a pu connaître u_{00} , on pourra connaître θ_{00} par les relations suivantes :

$$(3-22) \quad \begin{cases} \text{i) } u_{00}^+ = k_2 \theta_{00}^+ = k_2 T_{200} \text{ dans } \mathcal{R}. \\ \text{ii) } u_{00}^- = k_1 \theta_{00}^- = -k_1 T_{100} \text{ dans } \mathcal{R}. \end{cases}$$

qui nous donnent:

$$(3-23) \quad \theta_{\infty} = \frac{1}{k_2} u_{\infty}^+ - \frac{1}{k_1} u_{\infty}^- \quad \text{dans } \Omega.$$

Une nouvelle formulation du problème (3-7), (3-9), (3-10) et (3-11) s'écrit, en terme de la nouvelle fonction inconnue u_{∞} , selon le lemme suivant:

Lemme III-2:

La fonction u_{∞} satisfait les conditions suivantes:

$$(3-24) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u_{\infty} = g_{\infty} \quad \text{dans } D(\Omega). \\ \text{ii)} & u_{\infty}|_{\Gamma_1} = b_0 \\ \text{iii)} & -\frac{\partial u_{\infty}}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h_{\infty} \end{cases}$$

Démonstration:

i) $\forall \Psi \in D(\Omega)$, on a:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_{\infty}; \Psi \rangle &= -\langle u_{\infty}; \Delta \Psi \rangle = -k_2 \langle \Delta_{\Omega_2}; \Psi \rangle - k_1 \langle \Delta_{\Omega_1}; \Psi \rangle = \\ &= \int_{\Omega_2} g_{\infty} \Psi dx - k_2 \int_{\Gamma_{200}} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial n} \Psi d\mu + \int_{\Omega_1} g_{\infty} \Psi dx + k_1 \int_{\Gamma_{100}} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial n} \Psi d\mu = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} g_{\infty} \varphi dx + \int_{\Gamma_{\infty}} \underbrace{\left(k_2 \frac{\partial \theta_{2\infty}}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_{1\infty}}{\partial n} \right)}_{=0} \varphi dy = \langle g_{\infty}; \varphi \rangle$$

d'où (3-24i).

ii) Immédiate.

iii) $\forall x \in \Gamma_2$, on a :

$$-\frac{\partial u_{\infty}}{\partial n}(x) = -k_2 \frac{\partial \theta_{\infty}^+(x)}{\partial n} + k_1 \frac{\partial \theta_{\infty}^-(x)}{\partial n} = -k_2 \frac{\partial \theta_{\infty}(x)}{\partial n} H(\theta_{\infty}(x)) -$$

$$-k_1 \frac{\partial \theta_{\infty}}{\partial n} H(-\theta_{\infty}(x)) = h_{\infty}(x)$$

d'où (3-24iii). ▮

On est maintenant en mesure d'obtenir une formulation variationnelle de notre problème stationnaire. D'abord, on obtiendra une équation variationnelle, puis on démontrera l'existence et l'unicité de la solution. ▮

III-3: EQUATION VARIATIONNELLE. THEOREMED'EXISTENCE ET D'UNICITE POUR u_{∞} :

Soit :

$$\langle f_{\infty}; v \rangle = \langle g_{\infty}; v \rangle - \int_{\Gamma_2} h_{\infty} v \, d\gamma \quad (3-25)$$

alors, on a :

Lemme III-3:

Si u_{∞} est une solution régulière de (3-24), alors u_{∞} est aussi solution de l'équation variationnelle :

$$(3-26) \begin{cases} \mathcal{J}(u_{\infty}; v - u_{\infty}) = \langle f_{\infty}; v - u_{\infty} \rangle \quad \forall v \in K. \\ u_{\infty} \in K \end{cases}$$

Démonstration :

Si on prend $v \in K$, et si on multiplie l'équation (3-24i) par $(v - u_{\infty})$, et puis on intègre sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle g_{\infty}; v - u_{\infty} \rangle &= -(\Delta u_{\infty}; v - u_{\infty}) = \mathcal{J}(u_{\infty}; v - u_{\infty}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial n} (v - u_{\infty}) \, d\gamma \\ &= \mathcal{J}(u_{\infty}; v - u_{\infty}) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial n} \underbrace{(v - u_{\infty})}_{=0} \, d\gamma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial n} \underbrace{(v - u_{\infty})}_{= -h_{\infty}} \, d\gamma = \end{aligned}$$

$$= a(u_{00}; v - u_{00}) + \int_{\Gamma_2} h_{00} (v - u_{00}) d\mu$$

d'où (3-26). ▮

Théorème III-1:

Sous les hypothèses :

$$(3-27) \begin{cases} i) f_{00} \in V_0' \\ ii) b \in H^{1/2}(\Gamma_1) \end{cases}$$

il existe une solution et une seule de (3-26).

Démonstration:

De (3-27ii), il en existe un élément $B \in V /$

$$(3-28) \begin{cases} i) B/\Gamma_1 = b_0 \\ ii) \exists \text{ une constante } b_1 > 0 / \|B\|_V \leq b_1 \|b\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$(3-29) \quad v \in K \Leftrightarrow v - B \in V_0.$$

donc, on a les équivalences suivantes:

$$(3-26) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{J}(u_{00}; v) = \langle f_{00}; v \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ u_{00} - B \in V_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(3-30) \begin{cases} \mathcal{A}(U_{\infty}; v) = \langle F_{\infty}; v \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ U_{\infty} \in V_0 \end{cases}$$

où :

$$(3-31) \begin{cases} i) U_{\infty} = u_{\infty} - B \in V_0. \\ ii) \langle F_{\infty}; v \rangle = \langle f_{\infty}; v \rangle - \mathcal{A}(B; v). \end{cases}$$

avec :

$$(3-32) \begin{cases} i) \mathcal{A}: \text{forme bilinéaire, symétrique,} \\ \quad V_0\text{-elliptique et continue sur } V_0. \\ ii) F_{\infty} \in V_0'. \end{cases}$$

donc, l'existence et l'unicité de $U_{\infty} \in V_0$ solution de (3-30) (donc, l'existence et l'unicité de $u_{\infty} \in K$ solution de (3-26)) est donnée par le Lemme de Lax-Milgram.

III-4: CAS PARTICULIER. EXEMPLES:

On considérera le cas particulier du problème (3-7), (3-9), (3-10) et (3-11), défini par:

$$(3-33) \begin{cases} \text{i) } g_{\infty} = 0 \text{ dans } \mathcal{R} \\ \text{ii) } h_{\infty} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

dont la formulation variationnelle est donnée par:

$$(3-34) \begin{cases} \mathcal{J}(u_{\infty}; v - u_{\infty}) = 0 \quad \forall v \in K \\ u_{\infty} \in K \end{cases}$$

Remarque III-4:

On a déjà utilisé l'élément u_{∞} , défini par (3-34), comme l'élément ξ défini par (1-83) et (1-84).

On traite maintenant explicitement deux exemples qui utilisent les hypothèses (3-33) avec $\Gamma_2 = \emptyset$.

Exemple 1:

On considère:

$$(3-35) \begin{cases} \text{i) } \Omega = (0; a) \text{ , avec } a > 0 \\ \text{ii) } \Gamma_1 = \{0; a\} \text{ , } \Gamma_2 = \emptyset \\ \text{iii) } b(x)/\Gamma_1 = \begin{cases} B > 0 & \text{si } x=0 \\ -C < 0 & \text{si } x=a \end{cases} \end{cases}$$

donc, le problème à résoudre pour u_{00} est défini par:

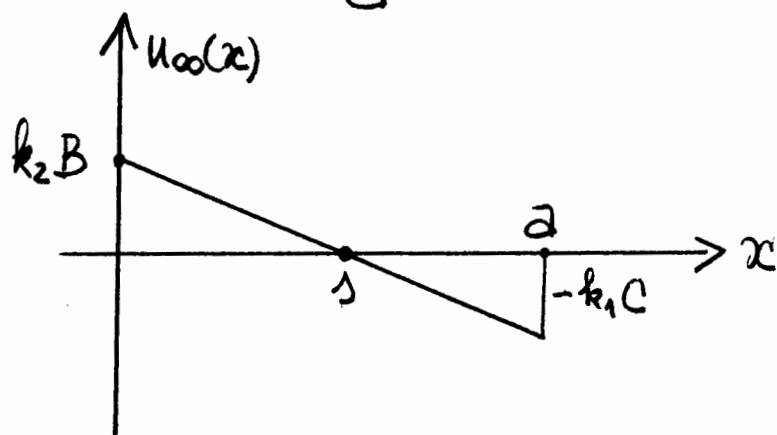
$$(3-36) \begin{cases} \text{i) } \frac{d^2 u_{00}}{dx^2} = 0 & 0 < x < a \\ \text{ii) } u_{00}/\Gamma_1 = b_0 \end{cases}$$

où :

$$(3-37) \quad b_0(x) = \begin{cases} k_2 B & \text{si } x=0 \\ -k_1 C & \text{si } x=a \end{cases}$$

La solution de (3-36) est donnée par:

$$(3-38) \quad u_{00}(x) = -\frac{k_2 B + k_1 C}{a} x + k_2 B$$



La frontière libre L_{∞} est définie par:

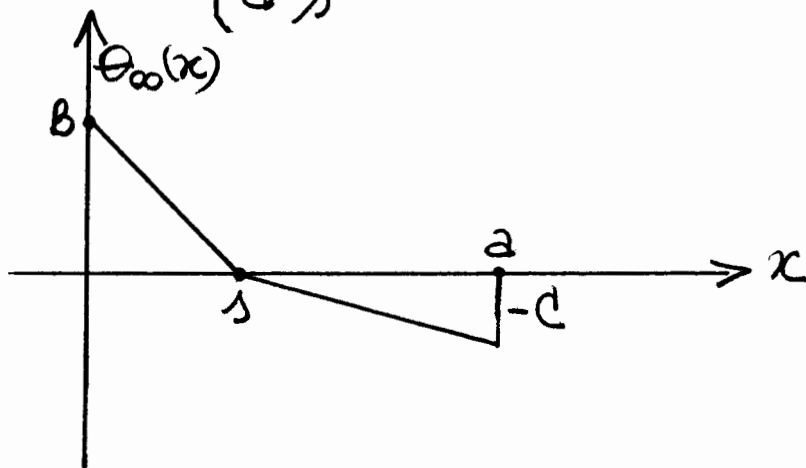
$$(3-39) \quad L_{\infty} = \{x \in \Omega / u_{\infty}(x) = 0\} = \{s\}$$

donc, on a:

$$(3-40) \quad \begin{cases} i) & s = \frac{e_0}{1+e_0} a \\ ii) & e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \end{cases}$$

De (3-38) et (3-22), on en déduit pour la température stationnaire θ_{∞} l'expression suivante:

$$(3-41) \quad \theta_{\infty}(x) = \begin{cases} \frac{B}{s}(s-x) & \text{si } 0 \leq x \leq s \\ \frac{-C}{a-s}(x-s) & \text{si } s \leq x \leq a \end{cases}$$



Remarque III-5:

On peut faire les remarques suivantes qui ont un sens

physique très significatif:

i) On a:

$$(3-42) \quad \begin{cases} a) \lim_{B \rightarrow +\infty} s = a & \forall C \text{ fini} \\ b) \lim_{C \rightarrow +\infty} s = 0 & \forall B \text{ fini} \end{cases}$$

ii) Si les températures imposées aux extrémités de l'intervalle $(0; a)$ sont égales en valeur absolue mais de signes différents (c'est-à-dire: $B=C$), alors la frontière libre ne dépend pas de la température B .

iii) La fonction θ_0 est continue dans Ω , mais sa dérivée ne l'est pas, car:

$$(3-43) \quad \theta_0 \in C^1(\Omega) \iff k_1 = k_2 \quad \blacksquare$$

Exemple 2:

On considère:

$$(3-44) \quad \begin{cases} i) \Omega = \{(r, w) / r_1 < r < r_2\}, \text{ avec } 0 < r_1 < r_2 & (2) \\ ii) \Gamma_1 = \{(r, w) / r = r_1 \text{ ou } r = r_2\}, \Gamma_2 = \emptyset \\ iii) b(r, w) / \Gamma_1 = \begin{cases} B > 0 & \text{si } r = r_2 \\ -C < 0 & \text{si } r = r_1 \end{cases} \end{cases}$$

donc, le problème à résoudre pour u_{00} est défini par:

$$(3-45) \begin{cases} \text{i)} & \Delta u_{00} = 0 \text{ dans } \mathcal{R} \\ \text{ii)} & u_{00}/r_1 = b_0 \end{cases}$$

où

$$(3-46) \quad b_0(r; \omega) = \begin{cases} k_2 B & \text{si } r = r_2 \\ -k_1 C & \text{si } r = r_1 \end{cases}$$

Comme les conditions aux limites sont indépendantes de la variable angulaire ω , il est naturel de chercher une solution qui dépend de la seule variable r , c'est-à-dire de la forme:

$$u_{00} = u_{00}(r) \quad (3-47)$$

Le problème (3-45) est maintenant donné par:

$$(3-48) \begin{cases} \text{i)} & r \frac{d^2 u_{00}}{dr^2} + \frac{du_{00}}{dr} = 0 & r_1 < r < r_2 \\ \text{ii)} & u_{00}(r_1) = -k_1 C \\ \text{iii)} & u_{00}(r_2) = k_2 B \end{cases}$$

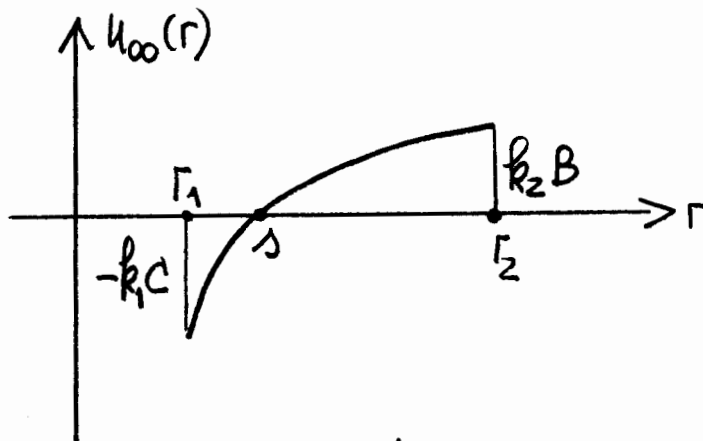
La solution de (3-48) est donnée par:

(2) $(r; \omega)$ représentent les coordonnées polaires dans le plan x_1, x_2 .

$$(3-49) \quad u_{\infty}(r) = h + m \log r$$

où h et m sont des constantes, données par :

$$(3-50) \quad \begin{cases} \text{i)} & m = \frac{k_2 B + k_1 C}{\log \frac{r_2}{r_1}} \\ \text{ii)} & h = - \frac{k_2 B \log r_1 + k_1 C \log r_2}{\log \frac{r_2}{r_1}} \end{cases}$$



La frontière libre L_{∞} est définie par :

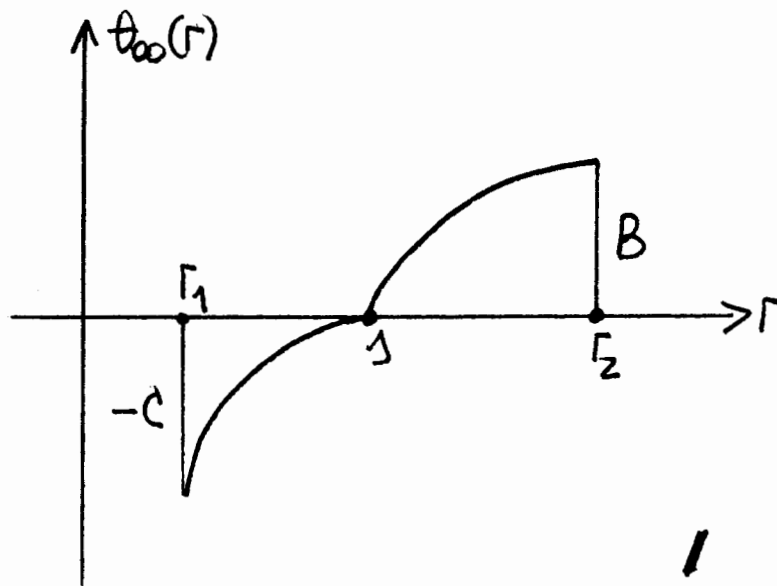
$$(3-51) \quad L_{\infty} = \left\{ r \in (r_1, r_2) \mid u_{\infty}(r) = 0 \right\} = \{s\}$$

où :

$$(3-52) \quad \begin{cases} \text{i)} & s = (r_2)^{\frac{1}{\eta_0}} \cdot (r_1)^{\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}} \\ \text{ii)} & \eta_0 = 1 + e_0 \\ \text{iii)} & e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \end{cases}$$

Pour la température stationnaire θ_{∞} , on déduit l'expression suivante : (3)

$$(3-53) \quad \theta_{\infty}(r) = \begin{cases} -C \cdot \frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{s}{r_1}} & \text{si } r_1 \leq r \leq s \\ B \cdot \frac{\log \frac{r}{s}}{\log \frac{r_2}{s}} & \text{si } s \leq r \leq r_2 \end{cases}$$



Remarque III-6:

On peut faire pour la solution de l'exemple 2 les mêmes constatations que celles faites dans la Remarque III-5.

(3) Il faut tenir compte des expressions suivantes :

$$i) \log \frac{r_2}{s} = \epsilon_0 \log \frac{s}{r_1} ; \quad ii) \log \frac{r_2}{r_1} = \eta_0 \log \frac{s}{r_1}$$

Remarque III-7:

Dans ces deux exemples, on voit que le calcul de la température stationnaire θ_{∞} est simplifié grâce au changement de fonction inconnue (3-21). En général, le calcul direct reste compliqué.

III-5: UNE FAMILLE DE PROBLEMES QUI CONVERGENTVERS LE CAS STATIONNAIRE:

Remplaçons la condition (3-10) par:

$$(3-10bis) \begin{cases} -k_1 \frac{\partial \theta_{100}}{\partial n} / \Gamma_1 = \alpha (k_1 \theta_{100} - b_0) \text{ si } \theta_{00} / \Gamma_1 < 0 \\ -k_2 \frac{\partial \theta_{200}}{\partial n} / \Gamma_2 = \alpha (k_2 \theta_{200} - b_0) \text{ si } \theta_{00} / \Gamma_2 > 0 \end{cases}$$

où α est un paramètre positif.

Pour chaque $\alpha > 0$, considérons θ_{00}^α solution des équations (3-7), (3-9), (3-10bis) et (3-11).

Alors, la fonction u_{00}^α , définie par:

$$(3-54) \quad u_{00}^\alpha = k_2 (\theta_{00}^\alpha)^+ - k_1 (\theta_{00}^\alpha)^- \text{ dans } \Omega$$

est solution des équations suivantes: (4)

$$(3-55) \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u_{00}^\alpha = g_{00} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \text{ii)} & -\frac{\partial u_{00}^\alpha}{\partial n} / \Gamma_2 = h_{00} \\ \text{iii)} & -\frac{\partial u_{00}^\alpha}{\partial n} / \Gamma_1 = \alpha (u_{00}^\alpha - b_0) \end{cases}$$

La seule condition qui change par rapport à (3-24), c'est celle sur Γ_1 :

$\forall x \in \Gamma_1$, on a:

$$\frac{\partial u_{\infty}^{\alpha}(x)}{\partial n} = k_2 \frac{\partial (\theta_{\infty}^{\alpha})^{+}(x)}{\partial n} - k_1 \frac{\partial (\theta_{\infty}^{\alpha})^{-}(x)}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_{2\infty}^{\alpha}(x)}{\partial n} H(\theta_{\infty}^{\alpha}(x))_+ + k_1 \frac{\partial \theta_{2\infty}^{\alpha}(x)}{\partial n} H(-\theta_{\infty}^{\alpha}(x)) = -\alpha (k_2 \theta_{2\infty}^{\alpha}(x) - b_0(x)) H(\theta_{\infty}^{\alpha}(x)) - \alpha (k_1 \theta_{1\infty}^{\alpha}(x) - b_0(x)) H(-\theta_{\infty}^{\alpha}(x)) = -\alpha (u_{\infty}^{\alpha}(x) - b_0(x)).$$

d'où (3-55 iii). \blacksquare

Le problème (3-55) a, pour chaque $\alpha > 0$, la formulation variationnelle suivante:

$$(3-56) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}(u_{\infty}^{\alpha}; v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u_{\infty}^{\alpha} v \, d\mu = \langle f_{\infty}; v \rangle - \int_{\Gamma_2} h_{\infty} v \, d\mu + \alpha \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\mu \\ u_{\infty}^{\alpha} \in V \end{array} \right. \quad \forall v \in V.$$

Soient:

$$(3-57) \left\{ \begin{array}{l} i) \langle f_{\infty}^{\alpha}; v \rangle = \langle f_{\infty}; v \rangle + \alpha \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\mu \\ ii) \mathcal{J}_{\alpha}(u; v) = \mathcal{J}(u; v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u v \, d\mu \end{array} \right.$$

(4) On utilise la même méthode que dans les lemmes III-1 et III-2. \blacksquare

Alors, (3-56) peut se mettre sous la forme équivalente :

$$(3-58) \begin{cases} J_{\alpha}(u_{\infty}^{\alpha}; v) = \langle f_{\infty}^{\alpha}; v \rangle \quad \forall v \in V \\ u_{\infty}^{\alpha} \in V \end{cases}$$

Lemme III-4 :

Sous les hypothèses :

$$(3-59) \begin{cases} i) f_{\infty} \in V' \\ ii) b \in H^{1/2}(\Gamma_1) \end{cases}$$

il existe, pour chaque $\alpha > 0$, une solution et une seule de l'équation variationnelle (3-58).

Démonstration :

En tenant compte de la Remarque I-5 et du fait que (3-59) implique $f_{\infty}^{\alpha} \in V' \quad \forall \alpha > 0$, l'existence et l'unicité de u_{∞}^{α} , pour chaque $\alpha > 0$, est donnée par le Lemme de Lax-Milgram.

On va montrer que la solution u_{∞}^{α} de (3-58) tend vers un élément qui est solution de (3-26) lorsque α tend

vers l'infini. Pour cela, on établit des estimations à priori sur u_α et on en déduit le passage à la limite.

Théorème III-2:

Sous les hypothèses du Lemme III-4, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$

$$u_\alpha \rightarrow u_\infty \in K \quad \text{dans } V \text{ faible} \quad (3-60)$$

Démonstration:

i) Estimations à priori:

Par définition de u_α , on a:

$$(3-61) \begin{cases} \mathcal{J}(u_\alpha; v) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha - b_0) v \, d\mu = \langle f_\alpha; v \rangle \quad \forall v \in V \\ u_\alpha \in V \end{cases}$$

Donc, si on choisit $v = u_\alpha - u_\infty \in V$ dans (3-61), on obtient:

$$(3-62) \quad \mathcal{J}(u_\alpha; u_\alpha - u_\infty) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha - u_\infty)^2 \, d\mu = \langle f_\alpha; u_\alpha - u_\infty \rangle$$

Si on ajoute aux deux membres de l'égalité (3-62), le terme:

$$- \mathcal{J}(u_\infty; u_\alpha - u_\infty)$$

on en déduit:

$$(3-63) \begin{cases} \alpha(\eta_\alpha; \eta_\alpha) + \alpha \int_{\Gamma_1} \eta_\alpha^2 d\mu = \langle f_\infty; \eta_\alpha \rangle - \alpha(u_\infty; \eta_\alpha) \\ \text{avec } \eta_\alpha = u_\infty^\alpha - u_\infty \end{cases}$$

Comme α est destiné à tendre vers $+\infty$, on peut supposer que $\alpha > 1$; alors, si on tient compte de la Remarque I-5, il vient:

$$(3-64) \quad \lambda_1 \|\eta_\alpha\|_V^2 + (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} \eta_\alpha^2 d\mu \leq C_1 \|\eta_\alpha\|_V \quad (5)$$

d'où:

$$(3-65) \begin{cases} \text{i) } \|\eta_\alpha\|_V \leq C_2 & (6) \\ \text{ii) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} \eta_\alpha^2 d\mu \leq C_3 & (7) \end{cases}$$

Des estimations précédentes, on a que:

$$(3-66) \begin{cases} \text{i) } u_\infty^\alpha \in \text{borne}' \text{ de } V \\ \text{ii) } (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u_\infty^\alpha - b_0)^2 d\mu \leq C_3 \end{cases}$$

(5) C_1 est une constante indépendante de α .

(6) $C_2 = C_1/\lambda_1$ est une constante indépendante de α .

(7) $C_3 = C_1 C_2$ est une constante indépendante de α .

ii) Passage à la limite:

Il résulte des estimations (3-66) que, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, au moins pour une sous-suite:

(3-67) u_∞^α tend vers η dans V faible.

et en plus:

$$(3-68) \quad (\alpha-1) \int_{\Gamma_1} (u_\infty^\alpha - b_0)^2 d\mu \leq C_3$$

Conséquences:

A) $\eta \in K$: (3-69)

De (3-68), il vient:

$$(3-70) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\infty^\alpha - b_0)^2 d\mu = 0$$

Utilisant (1-103), on en déduit:

$$0 \leq \int_{\Gamma_1} (\eta - b_0)^2 d\mu \leq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\infty^\alpha - b_0)^2 d\mu = 0$$

c'est-à-dire:

$$\eta|_{\Gamma_1} = b_0, \quad \text{d'où (3-69)}$$

B) $\eta = u_\infty$: (3-71)

Si dans (3-61), on prend $v \in V_0$, il vient:

$$(3-72) \begin{cases} \alpha(u_\alpha; v) = \langle f_\alpha; v \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ u_\alpha \in V \end{cases}$$

Alors, à la limite $\alpha \rightarrow +\infty$, on a:

$$(3-73) \begin{cases} \alpha(\eta; v) = \langle f_\alpha; v \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ \eta \in K \end{cases}$$

ou encore:

$$(3-74) \begin{cases} \alpha(\eta; v - \eta) = \langle f_\alpha; v - \eta \rangle \quad \forall v \in K \\ \eta \in K \end{cases}$$

d'où (3-71).

On va démontrer maintenant une propriété auxiliaire qui sera utilisée par la suite:

Remarque III-8:

si $v_n \rightarrow v$ dans H fort, alors:

$$\left. \begin{array}{l} v_n^+ \rightarrow v^+ \\ v_n^- \rightarrow v^- \end{array} \right\} \text{ dans } H \text{ fort} \quad (3-75)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|_H^2 &= \|(v_n^+ - v^+) - (v_n^- - v^-)\|_H^2 = \|v_n^+ - v^+\|_H^2 + \|v_n^- - v^-\|_H^2 - \\ &\quad - 2(v_n^+ - v^+; v_n^- - v^-) = \|v_n^+ - v^+\|_H^2 + \|v_n^- - v^-\|_H^2 + 2(v_n^+; v^-) + 2(v^+; v_n^-) \geq \\ &\geq \|v_n^+ - v^+\|_H^2 + \|v_n^- - v^-\|_H^2 \end{aligned}$$

d'où (3-75). ▮

Lemme III-5:

On a:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|\theta_{\infty}^{\alpha} - \theta_{\infty}\|_H = 0 \quad (3-76)$$

Démonstration:

De (3-60), il en résulte que:

$$u_{\infty}^{\alpha} \rightarrow u_{\infty} \text{ dans } H \text{ fort} \quad (3-77)$$

De (3-77) et de la Remarque III-8, on en déduit:

$$(3-78) \quad \begin{cases} \text{i) } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|(u_{\infty}^{\alpha})^+ - u_{\infty}^+\|_H = 0 \\ \text{ii) } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|(u_{\infty}^{\alpha})^- - u_{\infty}^-\|_H = 0 \end{cases}$$

donc, de (3-21), (3-54) et (3-78), on déduit (3-76). ▮

Remarque III-9:

Avec (3-76), on a démontré que, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, la température θ_∞^α converge, dans H fort, vers θ_∞ qui est la température solution du cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases.

Et, on a aussi démontré que, pour α assez grand, le problème (3-7), (3-9), (3-10bis) et (3-11) représente un problème de Stefan à deux phases.

Remarque III-10:

Pour le cas particulier, défini par (3-33), la fonction u_∞^α est donnée par:

$$(3-79) \begin{cases} J_\alpha(u_\infty^\alpha; v) = \alpha \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\mu \quad \forall v \in V \\ u_\infty^\alpha \in V \end{cases}$$

Lemme III-6:

Pour le cas d'évolution n°2, et pour chaque $\alpha > 0$, on a l'équivalence suivante:

$$(3-80) \quad u_\alpha(t) = t u_\infty^\alpha \iff u_\infty^\alpha = u_1.$$

Démonstration:

$$\Rightarrow / \quad u_1 = u_\alpha'(0) = u_\infty^\alpha.$$

\Leftarrow) Pour démontrer que $u_\alpha(t) = t u_\infty^\alpha$, on va vérifier que la fonction $f_\alpha(t) = t u_\infty^\alpha = t u_1$ est solution de l'équation variationnelle (2-93), et puis par unicité on en déduira que : $u_\alpha(t) = f_\alpha(t) = t u_\infty^\alpha$.

donc, $\forall v \in V$ on a :

$$\begin{aligned} & (\beta(f_\alpha'(t)) - g_\infty; v) + a_\alpha(f_\alpha(t); v) - \alpha t \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\mu = \\ & = \underbrace{(\beta(u_1) - g_\infty; v)}_{=0} + t \underbrace{\left[a_\alpha(u_\infty^\alpha; v) - \alpha \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\mu \right]}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

d'où $f_\alpha(t)$ est solution de (2-93). ■

Remarque III-11:

Le Lemme III-6, en terme de température et pour chaque $\alpha > 0$, nous dit que :

$$\theta_\alpha(t) = \theta_\infty^\alpha \iff \theta_\infty^\alpha = \theta_0. \quad (3-81)$$

CHAPITRE IV

COMPORTEMENT DES
SOLUTIONS LORSQUE
LE TEMPS TEND
VERS L'INFINI

IV-0: ORIENTATION:

Dans IV-1, on fait un rappel des différentes solutions dont on se propose d'étudier le comportement à l'infini. On travaillera toujours, dans ce chapitre, sur le cas d'évolution n°2 qui a été défini dans le paragraphe I-8.

Dans IV-2, on étudie le comportement à l'infini de la température $\theta^*(t)$ (indépendant de la chaleur latente de fusion L et du coefficient de Newton α). On démontre la convergence de θ^* , dans H fort, vers la température stationnaire θ_0 .

Dans IV-3, on étudie le comportement à l'infini de la température $\theta_2(t)$ (dépendant de la chaleur latente de fusion L), et on démontre de façon analogue la convergence, dans H fort, vers la température stationnaire θ_0 .

Dans IV-4, on étudie des autres propriétés à l'infini. En particulier, on montre que la chaleur latente de fusion L

n'intervient pas lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Dans IV-5, on étudie le comportement à l'infini de la température $\theta_{L\alpha}(t)$ (dépendant de la chaleur latente de fusion L et du coefficient de Newton α), et dans IV-6 le comportement de la température $\theta_{\alpha}(t)$ (dépendant du coefficient de Newton α). En particulier, on montre la convergence de ces températures, dans H fort, vers les températures stationnaires correspondantes, qui se trouvent être la même température θ_{∞}^{α} .

IV-1: RAPPEL DES DIFFERENTES SOLUTIONS:

On utilisera, dans ce chapitre, les fonctions dépendantes du temps :

$$(4-1) \quad u_{L\alpha}(t); u_L(t); w(t); u_\alpha(t)$$

pour étudier leur comportement lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On utilisera aussi les solutions stationnaires :

$$(4-2) \quad u_{\infty}^{\alpha}; u_{\infty}$$

Rappelons ici comme sont caractérisées ces diverses fonctions :

i) $u_{L\alpha}(t)$: introduit en (1-125) satisfait :

$$(4-3) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u'_{L\alpha}(t)); v - u'_{L\alpha}(t)) + \sigma_2(u_{L\alpha}(t); v - u'_{L\alpha}(t)) + L f(v) - L f(u'_{L\alpha}(t)) \geq \\ \geq (q_{0L}; v - u'_{L\alpha}(t)) + t\alpha \int_{T_1} b_0 (v - u'_{L\alpha}(t)) d\eta \quad \forall v \in V \\ u'_{L\alpha}(t) \in V \\ u_{L\alpha}(t) \in V, u_{L\alpha}(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{p.p. dans } [0; T].$$

La relation entre $u_{L\alpha}(t)$ et la température $\theta_{L\alpha}(t)$ ⁽¹⁾ est définie par :

(1) $\theta_{L\alpha}(t)$: est la température non-stationnaire, dépendant de la chaleur latente de fusion L et du coefficient de Newton α .

$$(4-4) \quad u_{L\alpha}(t) = \int_0^t [k_2 \theta_{L\alpha}^+(z) - k_1 \theta_{L\alpha}^-(z)] dz$$

donc

$$(4-5) \quad \begin{cases} i) (u'_{L\alpha}(t))^+ = k_2 \theta_{L\alpha}^+(t) \\ ii) (u'_{L\alpha}(t))^- = k_1 \theta_{L\alpha}^-(t) \end{cases}$$

ou encore:

$$\theta_{L\alpha}(t) = \frac{1}{k_2} (u'_{L\alpha}(t))^+ - \frac{1}{k_1} (u'_{L\alpha}(t))^- \quad (4-6)$$

ii) $u_L(t)$: introduit en (1-122) satisfait:

$$(4-7) \quad \begin{cases} (\beta(u'_L(t)); v - u'_L(t)) + \alpha(u_L(t); v - u'_L(t)) + L \int(v) - L \int(u'_L(t)) \geq (g_0; v - u'_L(t)) \\ u'_L(t) \in K \\ \frac{u_L(t)}{t} \in K, u_L(0) = 0 \end{cases} \quad \forall v \in K, \text{ p.p. dans } [0; T].$$

La relation entre $u_L(t)$ et la température $\theta_L(t)$ ⁽²⁾ est définie par:

$$u_L(t) = \int_0^t [k_2 \theta_L^+(z) - k_1 \theta_L^-(z)] dz \quad (4-8)$$

donc:

$$(4-9) \quad \begin{cases} i) (u'_L(t))^+ = k_2 \theta_L^+(t) \\ ii) (u'_L(t))^- = k_1 \theta_L^-(t) \end{cases}$$

(2) $\theta_L(t)$: est la température non-stationnaire, dépendant de la chaleur latente de fusion L .

ou encore :

$$\theta_2(t) = \frac{1}{k_2} (u_2'(t))^+ - \frac{1}{k_1} (u_2'(t))^- \quad (4-10)$$

iii) $u_\alpha(t)$: introduit en (2-93) satisfait :

$$(4-11) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(u_\alpha'(t); v) + \alpha_\alpha(u_\alpha(t); v) = (g_{00}; v) + t\alpha \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\mu \quad \forall v \in V \\ u_\alpha'(t) \in V \\ u_\alpha(t) \in V, u_\alpha(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{p.p. dans } [0; T].$$

La relation entre $u_\alpha(t)$ et la température $\theta_\alpha(t)$ ⁽³⁾ est définie par :

$$u_\alpha(t) = \int_0^t [k_2 \theta_\alpha^+(z) - k_1 \theta_\alpha^-(z)] dz \quad (4-12)$$

donc :

$$(4-13) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } (u_\alpha'(t))^+ = k_2 \theta_\alpha^+(t) \\ \text{ii) } (u_\alpha'(t))^- = k_1 \theta_\alpha^-(t) \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\theta_\alpha(t) = \frac{1}{k_2} (u_\alpha'(t))^+ - \frac{1}{k_1} (u_\alpha'(t))^- \quad (4-14)$$

iv) $w(t)$: introduit en (2-52) satisfait :

(3) $\theta_\alpha(t)$: est la température non-stationnaire, dépendant du coefficient de Newton α .

$$(4-15) \left\{ \begin{array}{l} (\beta(w'(t)); v - w'(t)) + \alpha(w(t); v - w'(t)) = (q_{00}; v - w'(t)) \quad \forall v \in K \\ w'(t) \in K \\ \frac{w(t)}{t} \in K, \quad w(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{p.p. dans } [0; T].$$

La relation entre $w(t)$ et la température $\theta^*(t)$ ⁽⁴⁾ est définie par :

$$w(t) = \int_0^t [k_2 (\theta^*(z))^+ - k_1 (\theta^*(z))^-] dz \quad (4-16)$$

donc :

$$(4-17) \left\{ \begin{array}{l} i) (w'(t))^+ = (\theta^*(t))^+ \\ ii) (w'(t))^- = (\theta^*(t))^- \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\theta^*(t) = \frac{1}{k_2} (w'(t))^+ - \frac{1}{k_1} (w'(t))^- \quad (4-18)$$

v) u_{00}^α : introduit en (3-79) satisfait :

$$(4-19) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_\alpha(u_{00}^\alpha; v) = \alpha \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\mu \quad \forall v \in V \\ u_{00}^\alpha \in V \end{array} \right.$$

La relation entre u_{00}^α et la température θ_{00}^α ⁽⁵⁾ est définie par :

(4) $\theta^*(t)$: est la température non-stationnaire, indépendant de la chaleur latente de fusion L et du coefficient de Newton α .

$$u_{\infty}^{\alpha} = k_2 (\theta_{\infty}^{\alpha})^{+} - k_1 (\theta_{\infty}^{\alpha})^{-} \quad (4-20)$$

donc :

$$(4-21) \begin{cases} \text{i) } (u_{\infty}^{\alpha})^{+} = k_2 (\theta_{\infty}^{\alpha})^{+} \\ \text{ii) } (u_{\infty}^{\alpha})^{-} = k_1 (\theta_{\infty}^{\alpha})^{-} \end{cases}$$

ou encore :

$$\theta_{\infty}^{\alpha} = \frac{1}{k_2} (u_{\infty}^{\alpha})^{+} - \frac{1}{k_1} (u_{\infty}^{\alpha})^{-} \quad (4-22)$$

v) u_{∞} : introduit en (3-34) satisfait :

$$(4-23) \begin{cases} \mathcal{J}(u_{\infty}; v - u_{\infty}) = 0 \quad \forall v \in K \\ u_{\infty} \in K \end{cases}$$

La relation entre u_{∞} et la température $\theta_{\infty}^{(6)}$ est définie par :

$$u_{\infty} = k_2 \theta_{\infty}^{+} - k_1 \theta_{\infty}^{-} \quad (4-24)$$

donc :

$$(4-25) \begin{cases} \text{i) } u_{\infty}^{+} = k_2 \theta_{\infty}^{+} \\ \text{ii) } u_{\infty}^{-} = k_1 \theta_{\infty}^{-} \end{cases}$$

(5) θ_{∞}^{α} : est la température stationnaire dépendant du coefficient de Newton α . ■

(6) θ_{∞} : est la température stationnaire. ■

ou encore :

$$\theta_{\infty} = \frac{1}{k_2} u_{\infty}^+ - \frac{1}{k_1} u_{\infty}^- . \quad (4-26)$$

Remarque IV-1:

Par la suite, on supposera qu'on est sous les hypothèses des théorèmes et des Lemmes des chapitres précédents qui nous assurent l'existence et l'unicité des six solutions données en IV-1. ▮

IV-2: COMPORTEMENT A L'INFINI DE LA TEMPERATURE θ^* :

Avant d'étudier le comportement de la température $\theta^*(t)$ lorsque le temps tend vers l'infini, on étudiera les limites de $w'(t)$ et $\frac{w(t)}{t}$.

Lemme IV-1:

on a :

$$(4-27) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|w'(t) - u_{\infty}\|_H = 0 \\ \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{w(t)}{t} - u_{\infty} \right\|_V = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration:

Soit :

$$(4-28) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } z(t) = w(t) - t u_{\infty} \in V_0 \\ \text{ii) } z'(t) = w'(t) - u_{\infty} \in V_0 \\ \text{iii) } z(0) = 0 \end{array} \right.$$

Si dans (4-15), on prend $v = u_{\infty} \in K$, il vient:

$$(\beta(w'(t)) - \beta(u_{\infty}); z'(t)) + \alpha(z(t); z'(t)) = \left(\frac{q}{\rho_0} - \beta(u_{\infty}); z'(t) \right) \quad (7)$$

p.p. dans $[0; T]$.

(7) On tient compte de : $\alpha(u_{\infty}; z'(t)) = 0$.

si on utilise (4-40) et on intègre sur $[0; T]$, on obtient :

$$(4-29) \quad C_0 \int_0^t \|z'(z)\|_H^2 dz + \frac{\alpha_0}{2} \|z(t)\|_V^2 \leq \|g_{\beta_0} - \beta(u_{\infty})\|_H \|z(t)\|_H \quad \forall t \geq 0$$

De (4-29), il en résulte :

$$(4-30) \quad \begin{cases} \text{i) } \|z(t)\|_V \leq \beta_0 \quad \forall t \geq 0 \\ \text{ii) } \int_0^t \|z'(z)\|_H^2 dz \leq \beta_1 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

avec :

$$(4-31) \quad \begin{cases} \text{i) } \beta_0 = \frac{2}{\alpha_0} \|g_{\beta_0} - \beta(u_{\infty})\|_H \\ \text{ii) } \beta_1 = \frac{2}{\alpha_0 C_0} \|g_{\beta_0} - \beta(u_{\infty})\|_H^2 \end{cases}$$

d'où (4-27ii). De (4-30ii), (2-68ii) et l'Appendice 5, on en déduit (4-27i). ■

Corollaire IV-1 :

$$\text{On a :} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\theta^*(t) - \theta_{\infty}\|_H = 0 \quad (4-32)$$

Démonstration :

De (4-27i) et de la Remarque III-8, on en déduit :

$$(4-33) \quad \begin{cases} \text{i) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(w'(t))^+ - u_{\infty}^+\|_H = 0 \\ \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(w'(t))^- - u_{\infty}^-\|_H = 0 \end{cases}$$

De (4-18), (4-26), (4-33i) et (4-33ii), il en résulte (4-32). ▀

Remarque IV-2 :

Avec (4-32), on a démontré que lorsque $t \rightarrow +\infty$, la température $\theta^*(t)$ converge, dans H fort, vers la température stationnaire θ_∞ du problème de Stefan à deux phases.

Remarque IV-3 :

Le Lemme IV-1, par l'intermédiaire de (4-27ii), nous donne aussi une convergence de $\theta^*(t)$ vers θ_∞ dans V fort, mais cette fois la convergence doit s'entendre comme une convergence de type moyenne temporelle, car de (4-27ii), on déduit :

$$(436) \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t [k_2(\theta^*(z))^+ - k_1(\theta^*(z))^-] dz - (k_2 \theta_\infty^+ - k_1 \theta_\infty^-) \right\|_V = 0. \quad \blacktriangle$$

Corollaire IV-2 :

Si la température initiale θ_0 et la température stationnaire

θ_∞ sont égales, alors on aura :

$$\theta^*(t) = \theta_\infty \quad \forall t \geq 0 \quad (A-37)$$

Cela vient du fait que :

$$(A-38) \quad \theta_\infty = \theta_0 \Rightarrow \beta_{t_\infty} = \beta_0 \Rightarrow \beta_0 = 0 \Rightarrow w(t) = t_{t_\infty}.$$

Remarque II-4 :

Le résultat du Corollaire II-2, on l'aurait déjà annoncé par un autre procédé, dans le Lemme II-2.

On verra que le Corollaire II-2 est aussi vrai pour n'importe quelle valeur $L > 0$.

IV-3: COMPORTEMENT A L'INFINI DE LA TEMPERATURE θ_2 :

Avant d'étudier le comportement de la température $\theta_2(t)$ lorsque le temps tend vers l'infini, on étudiera celui de $u_2'(t)$ et $\frac{u_2(t)}{t}$.

Pour cela, on établit un lemme préliminaire :

Lemme IV-2:

On a :

$$f(u) - f(v) + (Hv; v-u) \geq 0 \quad \forall u, v \in H \quad (4-39)$$

Démonstration:

$\forall u, v \in H$, on a :

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) + (Hv; v-u) &= \int_{\Omega} u^+ dx - \int_{\Omega} v^+ dx + \int_{\Omega} \frac{Hv \cdot v}{v^+} dx - \\ &- \int_{\Omega} Hv \cdot u dx = \int_{\Omega} (1-Hv) u^+ dx + \int_{\Omega} Hv \cdot \bar{u} dx \geq 0 \end{aligned}$$

d'où (4-39). ■

Lemme IV-3:

On a :

$$(4-40) \begin{cases} \text{i) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u_2'(t) - u_{\infty}\|_H = 0 \\ \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{u_2(t)}{t} - u_{\infty} \right\|_V = 0 \end{cases}$$

Démonstration:

Soit :

$$(4-41) \begin{cases} \text{i)} z_L(t) = u_L(t) - t u_{\infty} \in V_0 \\ \text{ii)} z'_L(t) = u'_L(t) - u_{\infty} \in V_0 \\ \text{iii)} z_L(0) = 0 \end{cases}$$

Si dans (4-7), on prend $v = u_{\infty} \in K$, il vient :

$$\begin{aligned} (\beta(u'_L(t)) - \beta(u_{\infty}); z'_L(t)) + \alpha(z_L(t); z'_L(t)) &\leq \\ &\leq L(f(u_{\infty}) - f(u'_L(t))) + (g_{0L} - \beta(u_{\infty}); z'_L(t)) \\ &\quad \text{p.p. dans } [0; T]. \end{aligned}$$

Si on utilise (1-40) et (4-39), et on intègre sur $[0; t]$, on obtient :

$$(4-42) \quad c_0 \int_0^t \|z'_L(z)\|_H^2 dz + \frac{\alpha_0}{2} \|z_L(t)\|_V^2 \leq \|g_{0L} - \beta(u_{\infty}) - L H(u_{\infty})\|_H \|z_L(t)\|_H \quad \forall t \geq 0.$$

De (4-42), il en résulte :

$$(4-43) \begin{cases} \text{i)} \|z_L(t)\|_V \leq \beta_{0L} \quad \forall t \geq 0 \\ \text{ii)} \int_0^t \|z'_L(z)\|_H^2 dz \leq \beta_{1L} \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

avec

$$(4-44) \begin{cases} \text{i)} \beta_{0L} = \frac{2}{\alpha_0} \|g_{0L} - \beta(u_{\infty}) - L H(u_{\infty})\|_H \\ \text{ii)} \beta_{1L} = \frac{2}{\alpha_0 c_0} \|g_{0L} - \beta(u_{\infty}) - L H(u_{\infty})\|_H^2 \end{cases}$$

d'où (4-40ii).

De (4-43ii), (1-123bisii) et l'Appendice 5, on en déduit (4-40i). ■

Corollaire IV-3:

On a:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\theta_L(t) - \theta_{\infty}\|_H = 0 \quad \forall L > 0 \quad (4-45)$$

Démonstration:

On utilise une méthode analogue à celle faite dans le Corollaire IV-1. En particulier, on a:

$$(4-46) \begin{cases} i) \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(u_L'(t))^+ - u_{\infty}^+\|_H = 0 \\ ii) \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(u_L'(t))^- - u_{\infty}^-\|_H = 0. \end{cases}$$

Remarque IV-5:

Avec (4-45), on a démontré que lorsque $t \rightarrow +\infty$, la température $\theta_L(t)$ converge, dans H fort, vers la température stationnaire θ_{∞} , et cela est vrai pour tout $L > 0$. ■

Remarque IV-6:

Pour le cas $L > 0$, on peut faire la même remarque

qui a été faite pour le cas $L=0$, car de (4-40ii) on déduit :

$$(4-48) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t [k_2 \theta_L^+(z) - k_1 \theta_L^-(z)] dz - (k_2 \theta_{\infty}^+ - k_1 \theta_{\infty}^-) \right\|_V = 0 \quad \forall L > 0.$$

Corollaire IV-4:

Si la température initiale θ_0 et la température stationnaire θ_{∞} sont égales, alors on aura :

$$\theta_L(t) = \theta_{\infty} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall L > 0 \quad (4-49)$$

C'est une conséquence du fait que :

$$(4-50) \quad \theta_{\infty} = \theta_0 \Rightarrow \beta_{0L} = 0 \Rightarrow u_L(t) = t u_{\infty} \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque IV-7:

Les Corollaires IV-2 et IV-4 peuvent se comprendre très bien physiquement, car la condition de Stefan, donnée par (0-8ii), aura toujours, dans les deux cas, un second membre nul :

$$(4-51) \quad \begin{cases} i) \text{ Cas } L > 0 : & \vec{V} = \vec{0} \text{ (la frontière ne bouge pas)} \\ ii) \text{ Cas } L = 0 : & \vec{V} = \vec{0} \text{ et } L = 0 \end{cases}$$

Donc, on peut espérer une solution indépendante du temps. En plus, cela nous donne une interprétation physique de la Remarque II-7.

IV-4: AUTRES PROPRIETES DES TEMPERATURES θ_L ET θ^* LORSQUE LE TEMPS TEND VERS L'INFINI :

Des Lemmes précédents, démontrés dans les paragraphes IV-2 et IV-3, on déduit aisément les propriétés suivantes :

Remarque IV-8 :

On a :

$$(4-52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{u_L(t)}{t} - \frac{w(t)}{t} \right\|_V = 0 \\ \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| u'_L(t) - w'(t) \right\|_H = 0 \\ \text{iii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| u'_L(t) - \frac{u_L(t)}{t} \right\|_H = 0 \\ \text{iv) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| w'(t) - \frac{w(t)}{t} \right\|_H = 0 \end{array} \right.$$

L'interprétation physique de ces relations en terme des températures $\theta_L(t)$ et $\theta^*(t)$ est immédiate. En effet, de (4-52 ii), on déduit :

$$(4-53) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \theta_L(t) - \theta^*(t) \right\|_H = 0 \quad \forall L > 0.$$

Remarque II-9:

Les conditions (4-32), (4-45) et (4-53) nous indiquent que lorsque le temps tend vers l'infini la température du milieu ne dépend pas de la chaleur latente de fusion $L > 0$; c'est-à-dire qu'en première approximation on pourrait prendre $L = 0$ pour simplifier un peu les difficultés du problème d'évolution.

En plus, cela nous explique la Remarque II-8.

Remarque II-10:

De (1-123ii) et (2-68ii), il vient :

$$(A-54) \begin{cases} \text{i) } u_L'' \in L^2(0, t_0; H) & \forall L > 0 \\ \text{ii) } w'' \in L^2(0, t_0; H) \end{cases}$$

Par ailleurs, on a :

i) Si on fait une intégration par partie, on obtient :

$$\int_0^t z \cdot u_L''(z) dz = t u_L'(t) - \int_0^t u_L'(z) dz =$$

$$= t u_L'(t) - u_L(t) \quad \forall L > 0 \quad (4-55)$$

donc :

$$(A-56) \quad u_2'(t) - \frac{u_2(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t z \cdot u_2''(z) dz \quad \forall t > 0.$$

avec :

$$(A-57) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t z u_2''(z) dz \right\|_{\#} = 0 \quad \forall t > 0$$

ii) si on fait le même calcul pour $w(t)$, on obtient :

$$(A-58) \quad w'(t) - \frac{w(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t z w''(z) dz$$

avec :

$$(4-59) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t z w''(z) dz \right\|_{\#} = 0 \quad \blacksquare$$

Exemple :

On considère un milieu matériel unidimensionnel $\Omega = (0; a)$ avec $a > 0$. Soit $\theta(x; t)$ la température qui satisfait les conditions suivantes :

$$(4-60) \quad \theta(x; t) = \begin{cases} \theta_1(x; t) < 0 & \text{si } s(t) < x < a \\ 0 & \text{si } x = s(t) \\ \theta_2(x; t) > 0 & \text{si } 0 < x < s(t) \end{cases}$$

$s(t)$ est la frontière libre qui sépare la phase solide

de la phase liquide à l'instant $t > 0$)

$$(4-61) \begin{cases} \text{i) } \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = 0 & \text{si } \begin{cases} s(t) < x < a \\ t > 0 \end{cases} \\ \text{ii) } \rho_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - k_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} = 0 & \text{si } \begin{cases} 0 < x < s(t) \\ t > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(4-62) \begin{cases} \text{i) } \theta_1(s(t); t) = \theta_2(s(t); t) = 0 \\ \text{ii) } k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(s(t); t) - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(s(t); t) = L s'(t) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

$$(4-63) \quad \theta_2(0; t) = B > 0 \quad \forall t > 0$$

$$(4-64) \quad \theta_1(a; t) = -C < 0 \quad \forall t > 0$$

$$(4-65) \quad \theta(x; 0) = \theta_0(x) \quad \text{si } 0 < x < a$$

On a :

$$(4-66) \begin{cases} \text{i) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(x; t) = \theta_\infty(x) \quad \text{dans } \mathbb{H} \text{ fort} \\ \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_\infty \end{cases}$$

$$\text{où : } (4-67) \quad \theta_\infty(x) = \begin{cases} \frac{B}{s_\infty} (s_\infty - x) & \text{si } 0 \leq x \leq s_\infty \\ \frac{-C}{s_\infty - a} (x - s_\infty) & \text{si } s_\infty \leq x \leq a \end{cases} \quad (8)$$

(8) Voir (3-41).

avec :

$$(4-68) \begin{cases} \text{i)} & S_{\infty} = \frac{e_0}{1+e_0} a \\ \text{ii)} & e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \end{cases}$$

La condition (4-66i) a été démontrée par (4-45) et la condition (4-66ii) dans Friedman [71] et Cannon-Primerio [24].

En plus, (4-66) est vrai pour n'importe quelle condition initiale θ_0 .

IV-5: COMPORTEMENT A L'INFINI DE LA TEMPERATURE $\theta_{L\alpha}$:

Avant de passer à l'étude du comportement de la température $\theta_{L\alpha}(t)$ lorsque le temps tend vers l'infini, on étudie les limites de $u'_{L\alpha}(t)$ et $\frac{u_{L\alpha}(t)}{t}$.

Lemme IV-4:

On a:

$$(4-69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u'_{L\alpha}(t) - u_{\infty}^{\alpha}\|_H = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \forall L > 0. \\ \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{u_{L\alpha}(t)}{t} - u_{\infty}^{\alpha} \right\|_V = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \forall L > 0. \end{array} \right.$$

Démonstration:

Soit:

$$(4-70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } z_{L\alpha}(t) = u_{L\alpha}(t) - t u_{\infty}^{\alpha} \in V \\ \text{ii) } z'_{L\alpha}(t) = u'_{L\alpha}(t) - u_{\infty}^{\alpha} \in V \\ \text{iii) } z_{L\alpha}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Si on prend:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = u_{\infty}^{\alpha} \in V \text{ dans (4-3)} \\ v = u_{\infty}^{\alpha} - u'_{L\alpha}(t) \in V \text{ dans (4-19)} \end{array} \right.$$

on tient compte de (4-40) et (4-39), on intègre sur $[0; t]$,
alors on obtient :

$$(4-71) \quad c_0 \int_0^t \|z'_{L\alpha}(z)\|_H^2 dz + \frac{1}{2} \alpha (z_{L\alpha}(t); z_{L\alpha}(t)) \leq \frac{(g - \beta(u_{\infty}^\alpha) - L H(u_{\infty}^\alpha); z_{L\alpha}(t))}{\beta_{0L}} \quad \forall t \geq 0$$

ou encore :

$$(4-72) \quad c_0 \int_0^t \|z'_{L\alpha}(z)\|_H^2 dz + \frac{\lambda_\alpha}{2} \|z_{L\alpha}(t)\|_V^2 \leq \frac{(g - \beta(u_{\infty}^\alpha) - L H(u_{\infty}^\alpha))}{\beta_{0L}} \|z_{L\alpha}(t)\|_H \quad \forall t \geq 0$$

d'où :

$$(4-73) \quad \begin{cases} \text{i) } \|z_{L\alpha}(t)\|_V \leq \beta_{0L\alpha} & \forall t \geq 0 \\ \text{ii) } \int_0^t \|z'_{L\alpha}(z)\|_H^2 dz \leq \beta_{1L\alpha} & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

avec :

$$(4-74) \quad \begin{cases} \text{i) } \beta_{0L\alpha} = \frac{2}{\lambda_\alpha} \|g - \beta(u_{\infty}^\alpha) - L H(u_{\infty}^\alpha)\|_H \\ \text{ii) } \beta_{1L\alpha} = \frac{2}{\lambda_\alpha c_0} \|g - \beta(u_{\infty}^\alpha) - L H(u_{\infty}^\alpha)\|_H^2 \end{cases}$$

d'où (4-69ii).

De (4-73ii), (1-126ii) et l'Appendice 5, on en déduit (4-69i).

Corollaire IV-5 :

$$\text{On a : } (4-75) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\theta_{L\alpha}(t) - \theta_{00}^\alpha\|_H = 0 \quad \forall L > 0, \forall \alpha > 0.$$

Démonstration:

On utilise (4-69i) et la Remarque III-8. ▮

Remarque IV-11:

On peut faire pour $\theta_{L_2}(t)$ des remarques analogues à celles faites pour $\theta_2(t)$ et $\theta^*(t)$. ▮

Remarque IV-12:

On voit que chaque fois qu'on fait la limite $t \rightarrow \infty$ avec $L = \text{constante}$, on obtient une limite qui est indépendante de L . Cela s'explique physiquement, car le cas stationnaire du problème de Stefan à deux phases (dépendant ou non du coefficient de Newton $\alpha > 0$) ne dépend pas de la chaleur latente de fusion $L > 0$. ▮

IV-6: COMPORTEMENT A L'INFINI DE LA TEMPERATURE θ_α :

Le comportement à l'infini de la température $\theta_\alpha(t)$ est donné par :

Lemme IV-5:

On a :

$$(4-76) \quad \begin{cases} \text{i) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\theta'_\alpha(t) - \theta'_{\infty}\|_H = 0 \quad \forall \alpha > 0 \\ \text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\theta_\alpha(t)}{t} - \theta_{\infty}^\alpha \right\| = 0 \quad \forall \alpha > 0 \end{cases}$$

Démonstration:

On utilise une méthode analogue à celle faite dans le Lemme IV-4. ■

Corollaire IV-6:

On a :

$$(4-77) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\theta_\alpha(t) - \theta_{\infty}^\alpha\|_H = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Démonstration: Immédiate. ■

Remarque IV-13:

On peut faire pour $\theta_\alpha(t)$ des remarques analogues à celles faites pour $\theta_2(t)$, $\theta^*(t)$ et $\theta_{2\alpha}(t)$. ■

RESUME

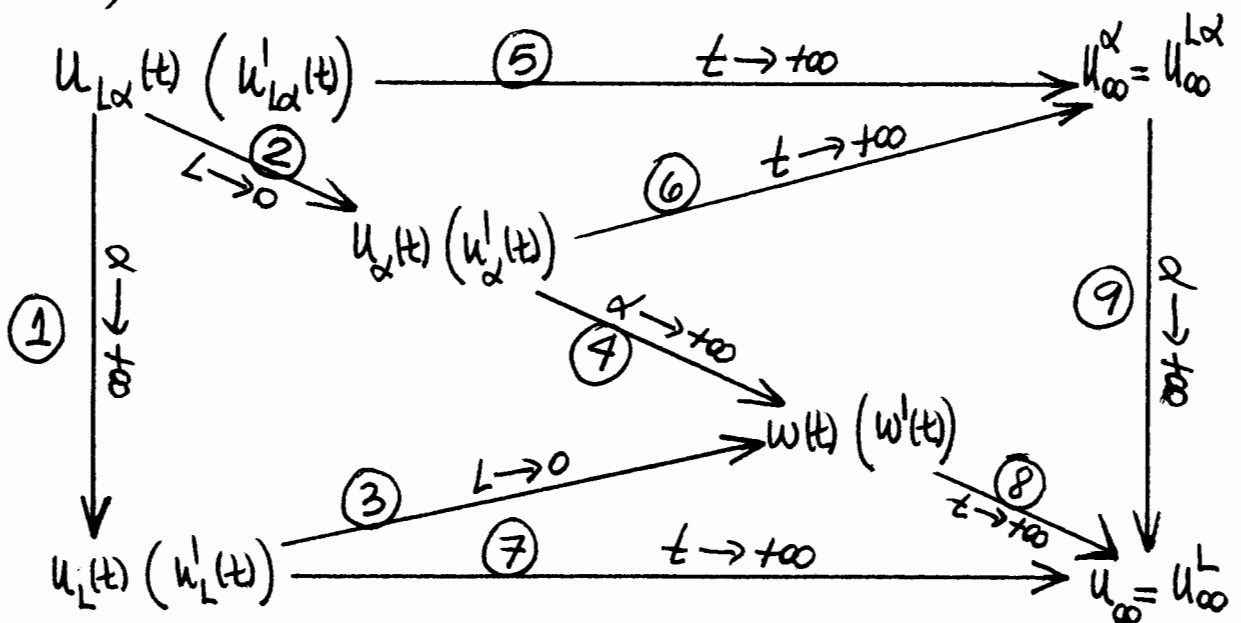
Dans ce travail, il y a trois variables que l'on peut considérer comme variables indépendantes :

- i) $t > 0$: le temps.
- ii) $L > 0$: la chaleur latente de fusion.
- iii) $\alpha > 0$: le coefficient de Newton ou de transmission de la paroi P_1 .

sur lesquelles, on a fait une passage à la limite :

- i) $t \rightarrow +\infty$
- ii) $L \rightarrow 0$
- iii) $\alpha \rightarrow +\infty$

Ces passages à la limite peuvent être résumés dans le tableau suivant :



En plus, chaque limite (avec le sens qu'il faut lui attribuer) a été démontrée dans :

① : Théorème I-2.

② : Lemme II-4.

③ : Théorème II-1.

④ : Lemme II-6.

⑤ : Lemme IV-4.

⑥ : Lemme IV-5.

⑦ : Lemme IV-3.

⑧ : Lemme IV-1.

⑨ : Théorème III-2.

APPENDICES

APPENDICE 1Lemme 1:

Soient:

$$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ un espace de Banach.} \\ K \subset V \text{ un ensemble convexe.} \\ J: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ une fonction }^{(1)} G\text{-différentiable} \end{array} \right.$$

alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } J \text{ est convexe (strictement convexe)} \iff \\ J(v) - J(u) \geq \langle J'(u); v - u \rangle \quad \forall u, v \in K. \\ \left(J(v) - J(u) > \langle J'(u); v - u \rangle \quad \forall u, v \in K; u \neq v \right) \\ \text{ii) } J \text{ est convexe (strictement convexe)} \iff \\ J' \text{ est monotone (strictement monotone).} \end{array} \right.$$

Lemme 2:

Soient:

$$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ un espace de Banach réflexif.} \\ K \subset V \text{ un ensemble convexe et fermé.} \\ J: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ une fonction s.c.i. dans } V \text{ faible} \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ selon Gâteaux.

Sous l'hypothèse supplémentaire au choix :

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } K \text{ est borné.} \\ \text{ou} \\ \text{b) } \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty \end{array} \right.$

alors :

i) \exists au moins un élément u /

$$(P) \begin{cases} J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

ii) Si J est convexe, alors l'ensemble :

$$S = \{ u \in K \mid u \text{ vérifie (P)} \}$$

est convexe et fermé dans V .

iii) Si J est strictement convexe, alors S se réduit à un seul élément, ce qui est équivalent à dire que le problème (P) admet une solution et une seule. ■

Lemme 3 :

Si J est une fonction convexe et G -différentiable, alors sous les hypothèses du Lemme 2, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \iff \begin{cases} \langle J'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \quad \blacksquare$$

APPENDICE 2

Soient :

$$H = L^2(\Omega).$$

$$V = H^1(\Omega).$$

$$V_0 = \{v \in V / v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, connexe et borné avec
frontière $\Gamma = \partial\Omega$ assez régulière.

$\Gamma_1 \subset \Gamma$ avec $\text{mes} \Gamma_1 > 0$.

$$(u; v) = \int_{\Omega} u v \, dx \quad ; \quad \|v\|_H^2 = (v; v)$$

$$\mathcal{J}(u; v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx \quad ; \quad \|v\|_V^2 = \mathcal{J}(v; v) + \|v\|_H^2$$

$$\mathcal{J}_1(u; v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_{\Gamma_1} u v \, dy$$

alors, on a :

Lemme :

$$\exists \lambda_1 > 0 / \quad \mathcal{J}_1(v; v) \geq \lambda_1 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que :

$$\exists c > 0 / \quad \mathcal{J}_1(v; v) \geq c \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V.$$

Supposons que cela n'est pas vrai :

$$\text{donc, } \exists \{w_n\} \subset V / \quad \mathcal{J}_1(w_n; w_n) < \frac{1}{n} \|w_n\|_H^2 \quad \forall n.$$

soit :

$$u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_H}$$

alors, on a :

$$\exists u_n \in V / \quad \begin{cases} \|u_n\|_H = 1 \\ \mathcal{J}(u_n; u_n) + \int_{\Gamma_1} u_n^2 dy < \frac{1}{n} \end{cases} \quad \forall n.$$

d'où :

$$\|u_n\|_V^2 = \mathcal{J}(u_n; u_n) + \|u_n\|_H^2 < \frac{1}{n} + 1 \leq 2 \quad \forall n.$$

c'est-à-dire qu'il existe :

$$u \in V / \quad u_n \longrightarrow u \text{ dans } V \text{ faible} \\ \text{(donc, dans } H \text{ fort).}$$

Du fait que $\|u_n\|_H = 1 \quad \forall n$, on a $\|u\|_H = 1$.

En utilisant la s.c.i. dans V faible des applications :

$$\begin{cases} v \longrightarrow \int_{\Gamma_1} v^2 dy \\ v \longrightarrow \mathcal{J}(v; v) \end{cases}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} 0 \leq \int_{\Gamma_1} u^2 dy \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} u_n^2 dy \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ 0 \leq \mathcal{J}(u; u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n; u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u; u) = 0 \\ \int_{\Omega_1} u^2 dy = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$u = 0 \text{ dans } \Omega$$

ce qui est en contradiction avec $\|u\|_H = 1$.

Corollaire:

$$\exists \alpha_0 > 0 / \mathcal{A}(v; v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V_0$$

APPENDICE 3

Soit H un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(;)$ et soit φ une fonction convexe s.c.i. de H dans $]-\infty; +\infty]$, $\varphi \neq +\infty$.

Etant donnés f et u_0 , on cherche u solution du problème :

$$\begin{cases} (u; v - \frac{du}{dt}) + \varphi(v) - \varphi(\frac{du}{dt}) \geq (f; v - \frac{du}{dt}) & \text{p.p. sur }]0; T[\\ \forall v \in D(\varphi), \quad u(0) = u_0 \end{cases}$$

Théorème (Brézis [13, p116])

Soit $f \in L^2(0, T; H)$ avec $\frac{df}{dt} \in L^2(0, T; H)$ et $\frac{d^2 f}{dt^2} \in L^2(0, T; H)$.

Soit $u_0 \in H$; on fait l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} \text{il existe } u_1 \in D(\varphi) \text{ tel que :} \\ (u_0; v - u_1) + \varphi(v) - \varphi(u_1) \geq (f(0); v - u_1) \quad \forall v \in D(\varphi). \end{cases}$$

Alors, il existe une fonction unique $u \in C^1([0, T]; H)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{a) } u \text{ est dérivable à droite en tout } t \in [0, T]; \\ \text{b) } \frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; H) \text{ et plus précisément :} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{i) } \left| \frac{d^+ u}{dt} \right| \leq \left| \frac{df(t)}{dt} \right| + \left| \frac{df(0) - u_1}{dt} \right| + \int_0^t \left| \frac{d^2 f}{dt^2} \right| ds \quad \forall t \in [0; T[. \\
 \text{ii) } \frac{d^+ u}{dt} \in \mathcal{D}(\varphi) \quad \forall t \in [0; T[. \\
 \text{iii) } \left\{ \begin{array}{l}
 (u; v - \frac{d^+ u}{dt}) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{d^+ u}{dt}\right) \geq (f; v - \frac{d^+ u}{dt}). \\
 \forall v \in \mathcal{D}(\varphi), \forall t \in [0; T[. \\
 u(0) = u_0.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

APPENDICE 4Lemme (Inégalités de Gronwall)

Si on a:

$$\begin{cases} m \in L^1(0, T; \mathbb{R}) \text{ avec } m(t) \geq 0. \\ A \geq 0 \text{ (constante)}. \\ \varphi(t) \geq 0. \end{cases}$$

alors:

$$\begin{cases} \text{i) } \varphi(t) \leq A + \int_0^t m(z) \varphi(z) dz \Rightarrow \varphi(t) \leq A \cdot e^{\int_0^t m(z) dz} \\ \text{ii) } \varphi^2(t) \leq A + \int_0^t m(z) \varphi(z) dz \Rightarrow \varphi(t) \leq \sqrt{A} + \frac{1}{2} \int_0^t m(z) dz. \end{cases}$$

Démonstration:

i) Soit:

$$\psi(t) = A + \int_0^t m(z) \varphi(z) dz$$

alors:

$$\begin{cases} \psi'(t) = m(t) \varphi(t) \leq m(t) \psi(t) \\ \psi(0) = A \end{cases}$$

donc:

$$\psi(t) \leq A e^{\int_0^t m(z) dz}$$

d'où i).

ii) soit :

$$\Psi(t) = A + \int_0^t m(z) \Psi(z) dz$$

alors :

$$\Psi'(t) = m(t) \Psi(t) \leq m(t) \sqrt{\Psi(t)}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \frac{d(\sqrt{\Psi(t)})}{dt} \leq \frac{m(t)}{2} \\ \Psi(0) = A \end{cases}$$

donc :

$$\sqrt{\Psi(t)} - \sqrt{A} \leq \frac{1}{2} \int_0^t m(z) dz$$

d'où ii). ▮

Remarque :

ii) peut se mettre sous la forme équivalente :

$$\text{ii bis) } \Psi^2(t) \leq A^2 + 2 \int_0^t m(z) \Psi(z) dz \Rightarrow \Psi(t) \leq A + \int_0^t m(z) dz. \quad \blacksquare$$

APPENDICE 5Lemme 1: (1)Soit f une fonction qui vérifie:

$$(A-5-1) \begin{cases} \text{i) } \int_0^{+\infty} f^2(t) dt < +\infty \\ \text{ii) } \int_0^{+\infty} \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2 dt < +\infty \end{cases}$$

alors:

$$(A-5-2) \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

Démonstration:

De (A-5-1i), il vient:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Si (A-5-2) n'est pas vrai, alors:

$$\exists (t_n) / \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \\ t_{n+1} \geq 1 + t_n \\ f^2(t_n) \geq \delta > 0 \quad \forall n \end{cases}$$

Soit:

$$t_n \leq t \leq 1 + t_n$$

(1) On trouve ce Lemme, sous une forme un peu différente, dans Friedman [68, p72].

donc :

$$f(t) = f(t_n) + \int_{t_n}^t f'(z) dz$$

d'où :

$$0 < \delta \leq f^2(t_n) = \left[f(t) - \int_{t_n}^t f'(z) dz \right]^2 \leq 2 f^2(t) + 2 \left(\int_{t_n}^t f'(z) dz \right)^2$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_n}^t f'(z) dz \right)^2 &\leq \int_{t_n}^t dz \cdot \int_{t_n}^t (f'(z))^2 dz = \underbrace{(t-t_n)}_{\leq 1} \int_{t_n}^t (f'(z))^2 dz \leq \\ &\leq \int_{t_n}^{1+t_n} (f'(z))^2 dz = \epsilon_n. \end{aligned}$$

De (A-5-1ii), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$$

donc, $\exists M > 0 / 0 \leq \epsilon_n < \frac{\delta}{4} \quad \forall n \geq M.$

c'est-à-dire :

$$f^2(t) \geq \frac{\delta}{2} - \epsilon_n > \frac{\delta}{4} > 0 \quad \begin{cases} \forall n \geq M \\ \forall t / t_n \leq t \leq 1+t_n. \end{cases}$$

ce qui est en contradiction avec (A-5-1i). ■

Remarque :

On utilise le Lemme 1, dans le chapitre IV, en ayant une

hypothèse supplémentaire :

(A-5-1 iii) $0 \leq f(t) \leq \text{constante}$
ce qui n'est pas nécessaire. ■

Lemme 2:

Soient $f, f' \in L^2(0, T; H)^{(2)}$, alors :

$$(A-5-3) \quad \left| \frac{d}{dt} \|f(t)\|_H \right| \leq \|f'(t)\|_H \quad \text{p.p. dans } [0, T].$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} (\|f(t)\|_H) \cdot \|f(t)\|_H \right| &= \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|f(t)\|_H^2) \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (f(t); f(t)) \right| = \\ &= |(f(t); f'(t))| \leq \|f(t)\|_H \cdot \|f'(t)\|_H \end{aligned}$$

d'où (A-5-3). ■

Corollaire:

$$\begin{cases} \text{i) } f, f' \in L^2(0, T; H) \Rightarrow \frac{d}{dt} (\|f(t)\|_H) \in L^2(0, T). \\ \text{ii) } f', f'' \in L^2(0, T; H) \Rightarrow \frac{d}{dt} (\|f'(t)\|_H) \in L^2(0, T). \quad \blacksquare \end{cases}$$

(2) $H = L^2(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

J. Aguirre Puente - M. Frémond:

[1]: Frost propagation in wet porous media, Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics, Marseille, September 1-6 (1975), Lectures Notes in Mathematics (n°503), Springer Verlag, p137-147.

C. Baiocchi:

[2]: Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux, C.R. Acad. Sc. Paris, 273A (1971) p1215-1217.

[3]: Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Annali di Mat. Pura ed Appl., 92(1972) p107-127.

[4]: Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi-variacional y numérico, Cuadernos n°8 del Instituto de Mat. "Beppo Levi", Fac. Ciencias Ex. e Ing., Univ. de Rosario - Argentina (1975).

C. Baiocchi - A. Capelo:

[5]: Diseguazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera. Volume 1 (problemi variazionali), Pitagora Editrice, Bologna (1978).

A. Bensoussan - A. Friedman:

- [6]: Non zero-sum stochastic differential games with stopping times and free boundary problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 231 n°2 (1977) p275-327.

B.A. Bolez:

- [7]: A method of heat conduction analysis of melting and solidification problems, *J. Math. Phys.*, 40 (1961) p300-313.
- [8]: Upper and lower bounds for the solution of a melting problem, *Quart. Appl. Math.*, 21 (1963) p1-11.
- [9]: Upper and lower bounds in problems of melting or solidifying slabs, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 17 (1964) p253-269.
- [10]: A general starting solution for melting and solidifying slabs, *Int. J. Eng. Sci.*, 6 (1968) p89-111.
- [11]: Uniqueness in a melting slab with space and time dependent heating, *Quart. Appl. Math.*, 27 n°4 (1970) p481-487.

B.A. Bolez - H.P. Yagoda:

- [12]: The starting solution for two-dimensional heat conduction

problems with change of phase, *Quant. Appl. Math.*, 27 (1969) p 223-246.

H. Brézis:

[13]: Problèmes unilatéraux, *J. Math. Pures et Appl.*, 51 (1972) p 1-168.

[14]: Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland (1973).

T. Brière:

[15]: Applications des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un métal fondu s'écoulant dans une gaine de refroidissement, thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI (1976).

L.A. Caffarelli:

[16]: The regularity of free boundaries in higher dimensions, *Acta Math.*, 139 (1977) p 156-184.

[17]: Some aspects of the one-phase Stefan problem, *Indiana Univ. Math. J.*, 27 n°1 (1978) p 73-77.

J.R. Cannon - A. Fasano:

[18]: Boundary value multidimensional problems in fast chemical reactions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 53 n°1 (1973) p 1-13.

[19]: A nonlinear parabolic free boundary problem, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 112 (1977) p119-149.

J.R. Cannon - C.D. Hill:

[20]: On the movement of a chemical reaction interface, *Indiana Univ. Math. J.*, 20 n°5 (1970) p429-454.

[21]: Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in the Stefan problem for the heat equation, *J. Math. Mech.*, 17 n°1 (1967) p1-19.

[22]: Remarks on a Stefan problem, *J. Math. Mech.*, 17 n°5 (1967) p433-441.

[23]: On the infinity differentiability of the free boundary in a Stefan problem, *J. Math. Anal. Appl.* 22 (1967) p385-397.

J.R. Cannon - M. Primicerio:

[24]: A two phase Stefan problem with temperature boundary conditions, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 88 (1971) p177-191.

[25]: A two phase Stefan problem with flux boundary conditions, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 88 (1971) p193-205.

[26]: A two phase Stefan problem: regularity of the free boundary,

Annali di Mat. Pura ed Appl., 88 (1971) p 217-228.

[27]: Remarks on the one-phase Stefan problem for the heat equation with the flux prescribed on the fixed boundary, *J. Math. Anal. Appl.*, 35 n°2 (1971) p 361-373.

[28]: A Stefan problem involving the appearance of a phase, *Siam J. Math. Anal.*, 4 n°1 (1973) p 141-148.

J.R. Cannon - J. Douglas - C.D. Hill:

[29]: A multi-boundary Stefan problem and the disappearance of phases, *J. Math. Mech.*, 17 n°1 (1967) p 21-33.

J.R. Cannon - D.B. Henry - D.B. Kottlow:

[30]: Continuous differentiability of the free boundary for weak solutions of the Stefan problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974) p 45-48.

[31]: Classical solutions of the one-dimensional, two-phase Stefan problem, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 107 (1975) p 311-341.

J.R. Cannon - C.D. Hill - M. Primicerio:

[32]: The one-phase Stefan problem for the heat equation with boundary temperature specification, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 39 (1970) p 270-274.

H.S. Carslaw - J.C. Jaeger:

[33]: *Conduction of heat in solids*, Oxford Univ. Press (1959).

J. Cea:

[34]: *Optimisation, théorie et algorithmes*, Dunod, Paris (1971).

C.Y. Chan:

[35]: Uniqueness of a nonmonotone free boundary problem, *Siam J. Appl. Math.*, 20 n°2 (1971) p189-194.

[36]: Continuous dependence on the data for a Stefan problem, *Siam J. Math. Anal.*, 1 n°2 (1970) p282-287.

Y. Choquet-Bruhat:

[37]: *Distributions, théorie et problèmes*, Masson et Cie, Paris (1973).

S. J. Citron:

[38]: On the conduction of heat in a melting slab, *Proceedings of the 4th U.S. National Congress of Appl. Mech.*, Univ. of California, June 18-21 (1962).

J. Crank:

[39]: *The mathematics of diffusion*, Oxford Univ. Press (1956).

[40]: Two methods for the numerical solution of moving-boundary problems in diffusion and heat flow, *Quant. J. Mech. Appl. Math.*, 10(1957) p 220-231.

D'Ambrosio - L.A. Medeiros - E. Roisman:

[41]: Métodos teóricos y numéricos de la Física Matemática, Cuaderno n°6 del Inst. Mat. "Beppo Levi", Fac. Ciencias Exactas e Ing., Univ. de Rosario (1974).

A. Dambrosian:

[42]: Résolution de certaines inéquations variationnelles stationnaires et d'évolution, Thèse d'Etat, Univ. Paris VI (1976).

A. Datzeff:

[43]: Sur le problème de propagation de la chaleur dans les corps solides (Mémoires des sciences Physiques, n°67), Gauthier-Villars, Paris (1963).

[44]: Sur le problème linéaire de Stefan (Mémoires des sciences Physiques, n°69), Gauthier-Villars, Paris (1970).

J. Douglas, Jr :

[45]: A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem,
Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957) p 402-408.

J. Douglas, Jr - T.M. Gallie, Jr :

[46]: On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math. J., 22(1955) p 557-571.

G. Duvaut :

[47]: Etude de problèmes unilatéraux en mécanique par des méthodes variationnelles, C.I.M.E., Cours à Bressanone (New variational techniques in Mathematical-Physics), 17-26 juin 1973, p 45-102.

[48]: Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré), C.R. Acad. Sc. Paris, 276A(1973) p 1461-1463.

[49]: Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus, 2ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1975). Rapport de Recherche n°185, Laboria - I.R.I.A. (1976).

[50] Diffusion de l'oxygène dans les tissus vivants, C.R. Acad.

sc. Paris, 282 A (1976) p33-36.

[51]: Initiation aux méthodes variationnelles en Mécanique,
Cours du D.E.A. de Mécanique Théorique des Solides (Univ.
Paris VI), 2ème semestre 1976/77.

G. Duvaut - J. L. Lions:

[52]: Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod,
Paris (1972).

E. R. G. Eckert - R. M. Drake, Jr:

[53]: Heat and mass transfer, Mc Graw Hill, New York (1959).

I. Ekeland - R. Teman:

[54]: Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod-Gauthier
Villars, Paris (1973).

G. W. Evans, II:

[55]: A note on the existence of a solution to a problem of
Stefan, Quart. Appl. Math., 9(1951) p185-193.

G. W. Evans, II - E. Isaacson - J. K. L. Mac Donald:

[56]: Stefan-like problems, Quart. Appl. Math., 8 n°3/1950 p312-319.

L.C. Evans:

[57]: A free boundary problem: the flow of two immiscible fluids in one-dimensional porous medium.

Part I: *Indiana Univ. Math. J.*, 26 n°5 (1977) p 915-932.

Part II: *Indiana Univ. Math. J.*, 27 n°1 (1978) p 93-111.

A. Fasano:

[58]: Stime a priori per le soluzioni di un problema del tipo parabolico con condizioni al contorno non lineari, *Rendiconti Ist. Mat. Univ. Trieste*, 3 (1971) p 218-229.

[59]: Alcune osservazioni su una classe di problemi a contorno libero per l'equazione del calore, *Le Matematiche*, 29 (1974) p 397-411.

A. Fasano - M. Primicerio:

[60]: Il problema di Stefan con condizioni al contorno non lineari, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 26 (1972) p 711-737.

[61]: Convergence of Huber's method for heat conduction problems with change of phase, *Z. A.M.M.*, 53 (1973) p 341-348.

- [62]: One-phase and two-phase free boundary problems of general type for the heat equation, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 57(1970) p387-390.
- [63]: Viscoplastic impact of a rod on a wall, *Bollettino U.M.I.*, (4) 11, Suppl. fasc. 3 (1975) p531-553.
- [64]: General free-boundary problems for the heat equations:
 Part I: *J. Math. Anal. Appl.*, 57(1977) p694-723.
 Part II: *J. Math. Anal. Appl.*, 58(1977) p202-231.
 Part III: *J. Math. Anal. Appl.*, 59(1977) p1-14.

A. Fasano - M. Primicerio - S. Kamin:

- [65]: Regularity of weak solutions of one-dimensional two-phase Stefan problems, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 115(1977) p341-348.

M. Frémond:

- [66]: Diffusion problems with free boundaries, Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, I.C.T.P., Trieste (1976).

A. Friedman:

- [67]: Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall,

Englewood Cliffs, N.J. (1964).

[68]: The Stefan problem in several space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 132 (1968) p 51-87.

Correction: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142 (1969) p 557.

[69]: Free boundary problems for parabolic equations:

Part I: Melting of solids, *J. Math. Mech.*, 8 n°4 (1959) p 499-517.

Part II: Evaporation or condensation of a liquid drop, *J. Math. Mech.*, 9 n°1 (1960) p 19-66.

Part III: Dissolution of a gas bubble in liquid, *J. Math. Mech.*, 9 n°3 (1960) p 327-345.

[70]: Remarks on Stefan-type free boundary problems for parabolic equation, *J. Math. Mech.*, 9 n°6 (1960) p 885-903.

[71]: One dimensional Stefan problems with nonmonotone free boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 133 (1968) p 89-114.

[72]: Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary, *J. Funct. Anal.*, 18 (1975) p 151-176.

[73]: Analyticity of the free boundary for the Stefan problem, *Arch.*

Rat. Mech. Anal., 61 n°2 (1976) p 97-125.

[74]: Free boundary problems for parabolic equations, Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970) p 934-941.

A. Friedman - R. Jensen:

[75]: Convexity of the free boundary in the Stefan problem and in the Dam problem, Arch. Rat. Mech. Anal., 67 (1977) p 1-24.

A. Friedman - D. Kinderlehrer:

[76]: A class of parabolic quasi-variational inequalities, J. Diff. Eq., 21 (1976) p 395-416.

[77]: A one phase Stefan problems, Indiana Univ. Math. J., 24 (1975) p 1005-1035.

W. Fulks - R.B. Guenther:

[78]: A free boundary problem and an extension of Muskat's model, Acta Mat., 121 (1968) p 273-300.

P. Germain:

[79]: Cours de Mécanique des Milieux Continus, Tome 1 (théorie générale), Masson et Cie, Paris (1973).

R. E. Gibson:

[80]: A heat conduction problem involving a specified moving boundary, *Quart. Appl. Mech.*, 16(1958) p426-430.

R. Glowinski:

[81]: Methodes itératives pour les problèmes variationnelles. Applications, Cours du D.E.A. d'Analyse Numérique (Univ. Paris VI), 1ère semestre 1976/77.

J. M. Greenberg:

[82]: A free boundary problem for the linear heat equation, *J. Diff. Eq.*, 7(1970) p287-306.

C. D. Hill:

[83]: Parabolic equations in one space variable and the non-characteristic Cauchy problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20(1967) p619-633.

C. D. Hill - D. B. Kottlow:

[84]: Classical solutions in the large of a two-phase free boundary problem.
Part I: *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 45 n°1 (1972) p63-78.
Part II: *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 47 n°5 (1972) p369-379.

M. Jakob:

[85]: Heat transfer, Volume 1, John Wiley, New York (1949).

J.W. Jerome:

[86]: Nonlinear equations of evolution and a generalized Stefan problem, J. Diff. Eq., 26 (1977) p240-261.

H. Kawarada:

[87]: Stefan-type free boundary problems for heat equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 9 (1974) p517-533.

D. Kinderlehrer - L. Nirenberg:

[88]: The smoothness of the free boundary in the one-phase Stefan problem, Comm. Pure Appl. Math., 31 n°3 (1978) p257-282.

I.I. Kolodner:

[89]: Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase, Comm. Pure Appl. Math., 9 (1956) p1-31.

S.N. Kruzhkov:

[90]: On some problems with unknown boundaries for the heat conduction equation, P.M.M., 31 n°6 (1967) p1009-1020.

W.T. Kzner:

[91]: On a free boundary value problem for the heat equation, *Quart. Appl. Math.*, 17(1959) p305-310.

[92]: An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem, *J. Math. Mech.*, 8 n°4 (1959) p483-498.

O.A. Ladyženskaja - V.A. Solonnikov - N.N. Ural'ceva:

[93]: Linear and quasilinear equations of parabolic type, *Amer. Math. Soc.*, Providence (1968).

H.G. Landau:

[94]: Heat conduction in a melting solid, *Quart. Appl. Math.*, 8(1950) p81-94.

N.M.H. Lightfoot:

[95]: The solidification of molten steel, *Proc. London Math. Soc.*, 31(1930) p97-116.

J.L. Lions:

[96]: Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, *Dunod - Gauthier Villars*, Paris (1969).

[97]: Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal, Les Presses de l'Univ. de Montréal (1976).

J. L. Lions - E. Magenes:

[98]: Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris (1968).

J. Li-Shong:

[99]: The proper posing of free boundary problems for nonlinear parabolic differential equations, Chinese Math., 3 (1963) p 399-418.

[100]: The two-phase Stefan problem,

Part I: Chinese Math., 4 (1963) p 686-702.

Part II: Chinese Math., 5 (1964) p 36-53.

[101]: Existence and differentiability of the solution of two-phase Stefan problem for quasilinear parabolic equations, Chinese Math., 7 (1965) p 481-496.

M. Lotkin:

[102]: The calculation of heat flow in melting solids, Quart. Appl. Math., 18 (1960) p 79-85.

A. V. Luikov:

[103]: *Analytical heat diffusion theory*, Academic Press, New York (1968).

G. Ljan-Kun:

[104]: The behavior of the solution of Stefan's problem when time increases unboundedly, *Soviet Math.*, 2 n°1 (1961) p 570-573.

E. Magenes:

[105]: Topics in parabolic equations: Some typical free boundary problems, *Laboratorio di Anal. Numerica (Pavia)*, Publ. n°130 (1977).

A. McNabb:

[106]: Asymptotic behavior of solutions of a Stefan problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 51 (1975) p 633-642.

G. H. Mejer:

[107]: *Initial value methods for boundary value problems*, Academic Press, New York (1973).

W. L. Miranker:

[108]: A free boundary value problem for the heat equation, *Quart. Appl. Math.*, 16 (1958) p 121-130.

W.L. Miranker - J.B. Keller:

[109]: The Stefan problem for a nonlinear equation, *J. Math. Mech.*,
9 n°1 (1960) p 67-70.

P.V. Moerbeke:

[110]: An optimal stopping problem with linear reward, *Acta Math.*, 132 (1974) p 111-151.

U. Mosco:

[111]: Transformada de Fourier y distribuciones, Cuadernos n°3
del Inst. Mat. "Beppo Levi", Fac. Ciencias Ex. e Ing., Univ. de Rosario (1972).

J.C. Muehlbauer - J.E. Sunderland:

[112]: Heat conduction with freezing or melting, *Appl. Mech. Reviews*,
18 n°12 (1965) p 951-959.

O. Oleinik:

[113]: A method of solution of the general Stefan problem, *Soviet Math.*, 1 (1960) p 1350-1354.

[114]: On Stefan-type free boundary problems for parabolic equations,
Seminari dell'Istituto di Alta Mat., (1962-63) p 388-403.

P.J. Patel - B.A. Bolez:

- [115]: Solidification problems with space and time varying boundary conditions and imperfect mold contact, *Int. J. Eng. Sci.*, 7(1969) p 1041-1066.

M. Primicerio:

- [116]: Problemi al contorno libero per l'equazione della diffusione, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino*, 32(1973-74) p 183-206.
- [117]: Stefan-like problems with space-dependent latent heat, *Meccanica*, 5(1970) p 187-190.

D. Quilghini:

- [118]: Su di un nuovo problema del tipo di Stefan, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 62(1963) p 59-97.
- [119]: Una analisi Fisico-Matematica del processo del cambiamento di fase, *Annali Mat. Pura ed Appl.*, 67(1965) p 33-74.
- [120]: Un teorema di unicità per un problema del tipo di Stefan, *Bollettino U.M.I.*, 18(1963) p 270-278.
- [121]: Sul comportamento asintotico delle soluzioni di un problema

del tipo di Stefan, *Atti Sem. Mat. Fis. Modena*, 12(1962/63) p107-120.

[122]: Sul problema inverso di quello di Stefan, *Riv. Mat. Univ. Parma*, (2) 8(1967) p131-142.

M.E. Rose:

[123]: On the melting of a slab, *Siam J. Appl. Math.*, 15(1967) p495-504.

[124]: A method for calculating solutions of parabolic equations with a free boundary, *Math. Comp.*, 14(1960) p249-256.

L.I. Rubenstein:

[125]: The Stefan problem, *Trans. Math. Monographs (Vol. 27)*, Amer. Math. Soc., Providence (1971).

A.L. Rvoff:

[126]: An alternate solutions of Stefan's problem, *Quart. Appl. Math.*, 16(1958) p197-201.

G.G. Sackett:

[127]: An implicit free boundary problem for the heat equation, *Siam J. Num. Anal.*, 8 n°1 (1971) p81-97.

C. Soguez:

[128]: Un problème de Stefan avec source sur la frontière libre,
Rapport de Recherche n°268, Laboria - I.R.I.A. (1977).

D. G. Schaeffer:

[129]: A new proof of the infinite differentiability of the free boundary in the Stefan problem, *J. Diff. Eq.*, 20(1976) p266-269.

A. Schatz:

[130]: Free boundary problems of Stefan type with prescribed flux, *J. Math. Anal. Appl.* 28(1969) p569-580.

O. Sero-Guillaume:

[131]: Problème à frontière libre de type Stefan, Thèse de 3ème Cycle, Institut National Polytechnique de Lorraine (1978).

G. Sestini:

[132]: Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan, *Conference del Sem. di Mat. dell'Univ. di Bari*, n°55-56 (1960).

[133]: Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali

- analoghi a quello di Stefan, *Bollettino U.M.I.*, 12(1957) p516-519.
- [134]: Ancora su di un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan, *Boll. U.M.I.*, 14(1959) p373-375.
- [135]: Sul problema unidimensionale non lineare di Stefan in uno stato piano indefinito, *Annali Mat. Pura ed Appl.*, 51(1960) p203-224.
- [136]: Sul problema non lineare di Stefan in stati cilindrici o sferici, *Annali Mat. Pura ed Appl.*, 56(1961) p193-207.
- [137]: Su un problema non lineare del tipo di Stefan, *Lincei-Rend. Sc. fis-Mat. e Nat.*, 35(1963) p518-523.

B. Sherman:

- [138]: A free boundary problem for the heat equation with heat input at a melting interface, *Quart. Appl. Math.*, 23(1966) p 337-347.
- [139]: A free boundary for the heat equation with prescribed flux at both face and melting interface, *Quart. Appl. Math.*, 25(1967) p53-63.
- [140]: Continuous dependence and differentiability properties of the

solution of a free boundary problem for the heat equation,
 Quart. Appl. Math., 27(1970) p 427-439.

[141]: A general one-phase Stefan problem, Quart. Appl. Math.,
 28(1970) p 377-382.

[142]: Limiting behavior in some Stefan problems as the latent
 heat goes to zero, Siam J. Appl. Math., 20 (1971) p 319-327.

[143]: General one-phase Stefan problems and free boundary
 problems for the heat equation with Cauchy data prescribed
 on the free boundary, Siam J. Appl. Math., 20 (1971) p 555-570.

[144]: Free boundary problems for the heat equation in which
 the moving interface coincides initially with the fixed face,
 J. Math. Anal. Appl., 33 (1971) p 449-466.

D. L. Sikarskie - B. A. Bolez:

[145]: The solution of a class of two-dimensional melting
 and solidification problems, Int. J. Solid Struct., 1 (1965) p 207-234.

A. Solomon:

[146]: Some remarks on the Stefan problem, Math. Comp., 20 (1966) p 347-360.

A. I. Suslov:

[147]: On Stefan's problem occurring in the theory of powder burning,
P.M.M., 41 n°1 (1977) p 95-101.

G. Stampacchia:

[148]: Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e
inecuaciones variacionales, Cuaderno n°1 del Instituto de Mat.
"Beppo Levi", Fac. Ciencias Ex. e Ing., Univ. de Rosario (1971).

D.A. Tarzia:

[149]: Trabajos Especial de la Licenciatura en Física (El
Caso estacionario del problema de Stefan a dos fases,
Capítulo 2), Fac. Ciencias Ex. e Ing., Univ. de Rosario (1977).
A paraître dans Mat. Notae.

A.N. Tikhonov - A.A. Samarskii:

[150]: Equations of mathematical Physics, Pergamon Press (1963).

W. F. Trench:

[151]: On an explicit method for the solution of a Stefan problem,
J. Soc. Ind. Appl. Math., 7 n°2 (1959) p 184-204.

J.G. Wilson - A.D. Solomon - P.T. Boggs (Editors):

[152]: *Moving boundary problems*, Academic Press, New York (1978).

T.S. Wu - B.A. Bolez:

[153]: *Bounds in melting problems with arbitrary rates of liquid removal*, *J. Siam Appl. Math.*, 14 n°2 (1966) p306-323.