Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (0341)-4814990 Int. 137 ; FAX: (0341)-4810505
E-Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

PROGRAMA DE DIRECCIÓN GERENCIAL PDG'2000

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LAS DECISIONES

"PLANTEO Y RESOLUCIÓN DE DOS CASOS PROBABILÍSTICOS":

CASO 3: "Curso de Idioma", pág. 2-16

TRABAJO PRÁCTICO 3: "El Duelo Triangular", pág. 17-19

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Mayo 2000

CASO 3: Curso de idioma.

Una empresa lanza un curso de idioma por CD (discos compactos).

- La demanda puede ser de 1000, 2000, 3000, 4000 ó 5000 unidades.
- La creación del curso costó $ 100.000.
- El juego de CD cuesta $ 200 y se vende a $ 400.

Como todos los CD a producir deben ser realizados en el mismo momento, la sociedad debe decidir el número de cursos a producir. Por razones de prestigio, los cursos que no se pudieron vender, no pueden venderse en liquidación; pero los CD se borran y se liquidan a $ 100 el juego.

I) Formulación del problema. El problema puede ser representado por una matriz, en la cual cada fila corresponde a una decisión de la empresa, y cada columna corresponde a una posibilidad futura de demanda. De acuerdo a los datos anteriores coloque en la intersección de cada fila y cada columna el beneficio (o pérdida) correspondiente (en unidades de $1.000 para facilitar las operaciones).

P D	1000	2000	3000	4000	5000
1000					
2000					
3000					
4000					
5000					

D: Demanda de CD ; P: Producción de CD

II) A continuación se estudiarán varios criterios que permitirán elegir la solución adecuada:

(a) <u>El criterio maximin</u>.

Su interés principal, además de su simplicidad, reside en su óptica conservadora: se elige la estrategia para la cual la ganancia mínima es la más grande posible. Este criterio tiene por objetivo principal dar una garantía: "se va a ganar al menos tanto", o "se va a perder a lo sumo tanto".

Sea $g(p_i, d_j)$ la ganancia obtenida para un nivel de producción de p_i unidades (i=1, ..., 5) y una demanda de d_j unidades (j = 1, ..., 5). Entonces

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j)$$

será la ganancia más pequeña posible para la producción p_i dada (i= 1, ..., 5).

La estrategia maximin es la que maximiza estos mínimos, es decir halla el nivel de producción p_i de manera tal que se tenga

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio maximin, es decir ¿Cuál es el nivel de producción p_i (i = 1, ..., 5) a elegir y la ganancia a obtener?

(b) El criterio maximax.

Este criterio es, por el contrario, extremadamente optimista. Se elige la estrategia que aporta la mayor ganancia, en el mejor de los casos posibles. La estrategia p_i a elegir es la dada por

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Max}}\ g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Max}}\ g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio maximax.

Observación: Este criterio es de un uso poco frecuente.

(c) Criterio de Laplace.

Se utiliza cuando la probabilidad de cada posibilidad futura parece ser la misma (constante) o que se ignoran sus probalidades. Este criterio consiste en elegir la estrategia que maximiza la ganancia esperada, dando la misma probabilidad a cada posibilidad futura. La estrategia p_i (i=1, ..., 5) a elegir es la dada por

$$G(p_i) = \underset{k}{\mathrm{Max}}\ G(p_k)$$

donde $G(p_i)$ es la ganancia esperada de la estrategia p_i (con n posibilidades futuras con probabilidad 1/n cada una; en nuestro caso se tiene que $n = 5$), es decir:

$$G(p_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\, g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio de Laplace.

(d) Criterio del minimax (conocido también como del lamento o costo de oportunidad mínimo, es decir que sea mínimo lo que se deja de ganar).

Se supone que se conoce a priori la demanda. Se busca hallar la estrategia que permita obtener la mejor ganancia para esta demanda.

En la columna correspondiente a esta demanda se reemplaza cada ganancia por la diferencia entre dicha ganancia y la ganancia correspondiente a la producción optimal para la demanda.

Se obtiene de esta manera una tabla identificando, para la demanda dada, el lamento o lo que se deja de ganar, correspondiente a una producción no óptima para esta demanda.

Calcule la estrategia del criterio minimax.

Observación: Ningún criterio es en sí mismo, mejor que otro. Todo depende de la situación en la que se encuentre la empresa. El sólo criterio que se puede, más o menos, eliminar es el maximax.

III) Arboles de decisión.

La empresa que lo edita tiene 6 posibilidades de acción:

- no lanzar el producto (nunca debe olvidarse esta posibilidad nula);
- producir 1.000 juegos de CD;
- producir 2.000 juegos de CD;
- producir 3.000 juegos de CD;
- producir 4.000 juegos de CD;
- producir 5.000 juegos de CD.

Se distinguirán 5 estados posibles de demanda: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 juegos de CD.

Se supone que se ha realizado un estudio del mercado a fin de predecir mejor la demanda. La encuesta ha producido los resultados siguientes:

Demanda	Probabilidad
1.000	0,10
2.000	0,30
3.000	0,40
4.000	0,15
5.000	0,05

(i) Represente el problema bajo la forma de un árbol de decisión y distinga las 26 situaciones finales posibles.

(ii) Calcule, para cada decisión de producción, la ganancia esperada:

Producción	Ganancia Esperada
1.000	
2.000	
3.000	
4.000	
5.000	

(iii) Reduzca el árbol reemplazando las ramas relativas a las diversas posibilidades de demanda por la ganancia esperada que le corresponde. Por lo tanto, el problema fue llevado a una elección entre las 6 acciones posibles, cada una de las cuales tiene una ganancia esperada, con lo cual se puede eligir la alternativa cuya ganancia esperada sea la más elevada. ¿Cuál es dicha alternativa?

(iv) Valor de la información.

En general, es muy interesante poder determinar cuánto más se podría obtener de ganancia teniendo una mejor información sobre el futuro; de allí la necesidad de información adicional.

Se supone que se puede hacer una cierta publicidad del curso de idioma y que se lo puede vender por subscripción, con lo cual se podrá producir conociendo la demanda por anticipado. Por lo tanto, ¿cuánto se podría invertir en publicidad y en organización para que este estrategia sea rentable?

Se supone, para simplificar, que esto no modifica la demanda, pero permite solamente predecirla. Bajo subscripción, se producirá exactamente la demanda.

Calcule la ganancia esperada si se produce de acuerdo a la demanda obtenida (es el cálculo de la ganancia esperada con información perfecta).

Observación. Por ende, considerando sólo la tabla de probabilidades para cada demanda se pudo calcular anteriormente la ganancia esperada máxima (dada por $350.000 para una producción de 3.000 CD). Por otro lado, con información perfecta, se pudo obtener una ganancia esperada de $ 450.000. Por lo tanto, la información extra para conocer la demanda exacta vale $100.000, es decir, es el monto máximo que se podrá pagar para el conjunto de gastos relativos a la venta por subscripción.

CASO 3: CURSO DE IDIOMA (en CD) ①

posibles
- demanda: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000
- producción: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000

(del juego de CD de un curso)

- Costo de la realización del curso: \$100.000
- Costo de cada juego: \$200
- Venta " " ": \$400
- los juegos de CD que no se venden, se borran y se liquidan a \$100.

Unidad Monetaria: 1 (\$1.000)

Formulación del problema:

Cálculo de la tabla de beneficios-pérdidas:

Producción \ Demanda	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000
1 000	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100
2 000	0	+ 300	+ 300	+ 300	+ 300
3 000	− 100	+ 200	+ 500	+ 500	+ 500
4 000	− 200	+ 100	+ 400	+ 700	+ 700
5 000	− 300	0	+ 300	+ 600	+ 900

$1000 \times 0{,}2 - 100 = 200 - 100 = 100$

$4000 \times 0{,}2 - 100 - 0{,}2 \times 1000 + 0{,}1 \times 1000 = 800 - 100 - 200 + 100$

Criterio Maximin

(2)

$g(p_i, d_j) =$ ganancia obtenida para el nivel de producción p_i y una demanda d_j

$i = 1, 2, \ldots, 5 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, 5$

$$\begin{cases} m_i = \underset{j=1,\ldots,5}{\text{Min}} \; g(p_i, d_j) & \text{es la ganancia más pequeña para la producción } p_i \\ i = 1, 2, \ldots, 5 & \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\begin{cases} m_1 = 100, & \forall j = 1, 2, \ldots, 5 \\ m_2 = 0, & j = 1 \\ m_3 = -100, & j = 1 \\ m_4 = -200, & j = 1 \\ m_5 = -300, & j = 1 \end{cases}$$

$$\underset{i=1,\ldots,5}{\text{Max}} \left[\underset{j=1,\ldots,5}{\text{Min}} \; g(p_i, d_j) \right] =$$

$$= \underset{i=1,\ldots,5}{\text{Max}} \{ m_i \} = \text{Max}(100, 0, -100, -200, -300) = 100$$

$$= \underset{j=1,\ldots,5}{\text{Min}} \; g(p_1, d_j)$$

∴ la estrategia Maximin es producir 1000 juegos de CD para una ganancia de 100. (\$100.000)

Criterio Maximax

(3)

Se elige la estrategia que produce la más grande ganancia en el mejor de los casos, es decir

hallar p_I / $\underset{j=1,\dots,5}{\text{Max}}\, g(p_I, d_j) = \underset{i=1,\dots,5}{\text{Max}}\ \underset{j=1,\dots,5}{\text{Max}}\, g(p_i, d_j)$

Sea $$M_i = \underset{j=1,\dots,5}{\text{Max}}\, g(p_i, d_j)$$

Se obtiene

$$\begin{cases} M_1 = 100 , & \forall j = 1, \dots, 5 \\ M_2 = 300 , & \forall j = 2, \dots, 5 \\ M_3 = 500 , & \forall j = 3, 4, 5 \\ M_4 = 700 , & \forall j = 4, 5 \\ M_5 = 900 , & j = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ la estrategia maximax es producir 5000 juegos de CD con una ganancia potencial de 900 ($900.000)

Criterio de Laplace (4)

Se elige la estrategia que maximiza la ganancia esperada dando la misma probabilidad a cada evento futuro, es decir

Hallar p_I / $G(p_I) = \underset{j=1,\dots,5}{\mathrm{Max}}\ G(p_j)$

donde

$$G(p_i) = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} g(p_i, d_j)$$

Se obtiene:

$$\begin{cases} G(p_1) = \frac{1}{5}\left(100+100+100+100+100\right) = \frac{500}{5} = 100 \\ G(p_2) = \frac{1}{5}\left(0+300+300+300+300\right) = \frac{1200}{5} = 240 \\ G(p_3) = \frac{1}{5}\left(-100+200+500+500+500\right) = \frac{1600}{5} = 320 \\ G(p_4) = \frac{1}{5}\left(-200+100+400+700+700\right) = \frac{1700}{5} = 340 \\ G(p_5) = \frac{1}{5}\left(-300+0+300+600+900\right) = \frac{1500}{5} = 300 \end{cases}$$

$\therefore$ se elige la estrategia cuarta de producir 4000 juegos de CD con una ganancia potencial de 340 ($340.000).

Criterio del Minimax

(5)

(lamento o costo de oportunidad mínimo, es decir que sea mínimo lo que se deja de ganar)

En una columna, para una dada demanda, se reemplaza cada ganancia por la diferencia entre dicha ganancia y la ganancia correspondiente a la producción optimal para la demanda.

Se obtiene de esta manera una tabla identificando, para la demanda dada, el lamento o lo que se deja de ganar correspondiente a una producción no óptima para esta demanda.

Se elige la estrategia que minimiza el lamento máximo.

300−100=200

700−100=600

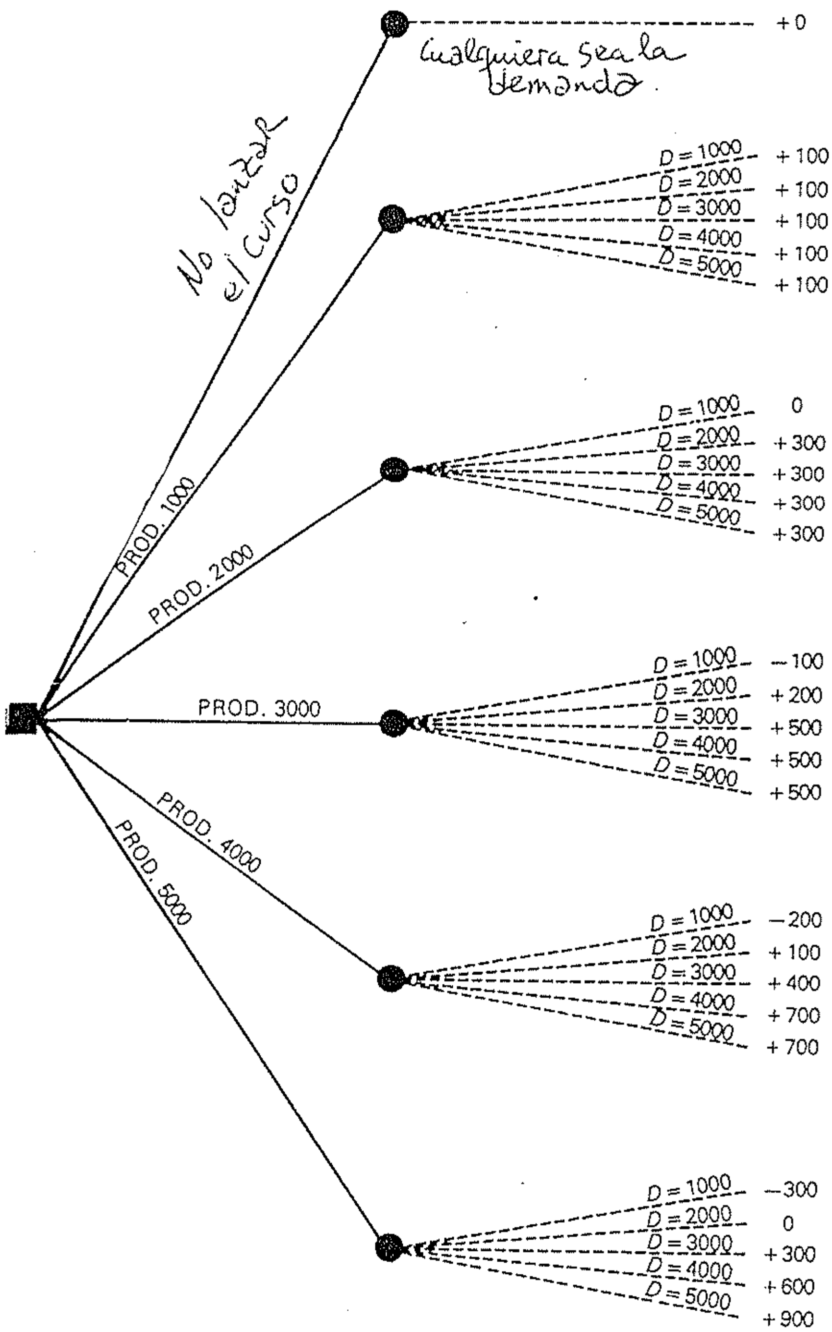
Produ \ Demanda	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000
1 000	0	200	400	600	800
2 000	100	0	200	400	600
3 000	200	100	0	200	400
4 000	300	200	100	0	200
5 000	400	300	200	100	0

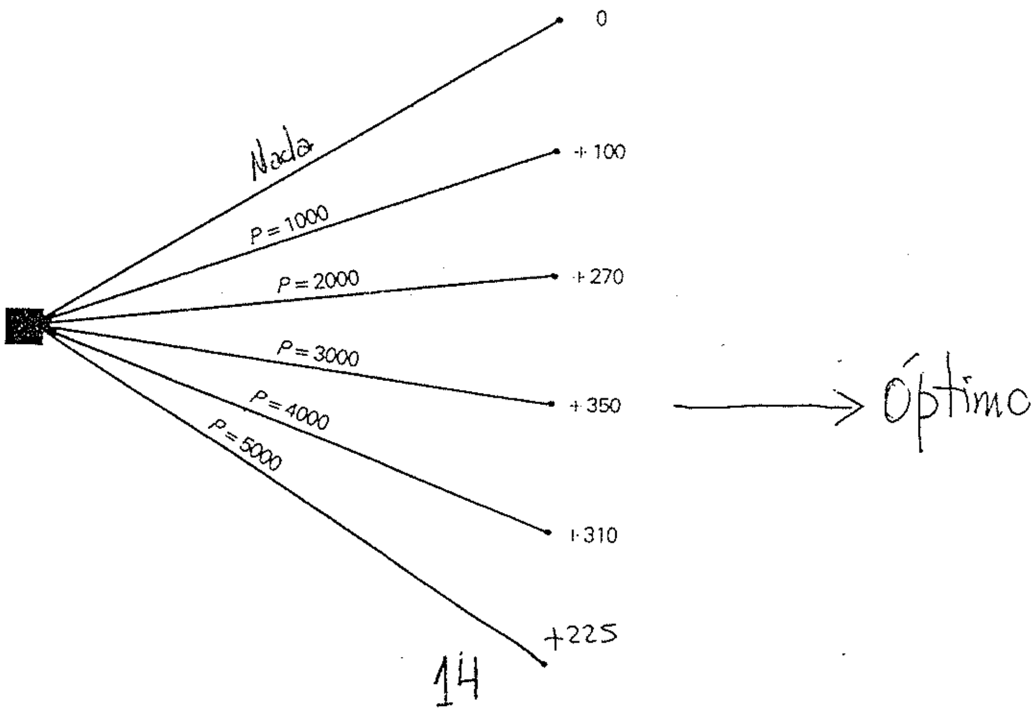
100−(−100)=200

Demanda	ganancia óptima	para producción
1000	100	P_1
2000	300	P_2
3000	500	P_3
4000	700	P_4
5000	900	P_5

Arboles de decisión

7





(6)

Nivel de producción	mayor lamento o Costo de oportunidad	obtenidos por una demanda de juegos.
1000	800	5000
2000	600	5000
3000	400	5000
4000	300	1000
5000	400	1000

∴ La estrategia optimal de acuerdo al criterio minimax es la producción de 4000 juegos de CD con un lamento máximo de 300 ($300.000) para una demanda de 1000 juegos de CD.

Valor de la Información

Se produce de acuerdo a la demanda (8)

$0{,}2 \times D - 100$

Demanda	probabilidad	Ganancia perfecta
1000	0,10	100
2000	0,30	300
3000	0,40	500
4000	0,15	700
5000	0,05	900

∴ la ganancia esperada es:

$$GE = 100 \times 0{,}10 + 300 \times 0{,}30 + 500 \times 0{,}40 + 700 \times 0{,}15 + 900 \times 0{,}05 =$$

$$= 10 + 90 + 200 + 105 + 45 = 450$$

(\$450.000)

TRABAJO PRACTICO 3: El duelo triangular. Tres políticos A, B y C deciden resolver sus diferencias mediante un duelo a pistola bajo las siguientes reglas. Luego de sortear quien dispara en primer, segundo y tercer lugar, los tres se ubican en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero. Se conviene que cada uno disparará un tiro por turno, continuando en el orden sorteado hasta que dos de ellos queden fuera de combate. Cada uno puede disparar en la dirección que desee. Además, conocen que las precisiones de tiro de A, B y C son de 100%, 80% y 50% respectivamente. Suponiendo que cada uno adopta la estrategia más favorable y que nadie muere a causa de una bala perdida que no había sido disparada contra él,

(i) ¿Quién tiene más chances de sobrevivir?

(ii) ¿Cuáles son las probabilidades de cada uno? Demuestre que se tiene que:

$$P_A = \frac{3}{10} \;;\; P_B = \frac{8}{45} \;;\; P_C = \frac{47}{90}\,.$$

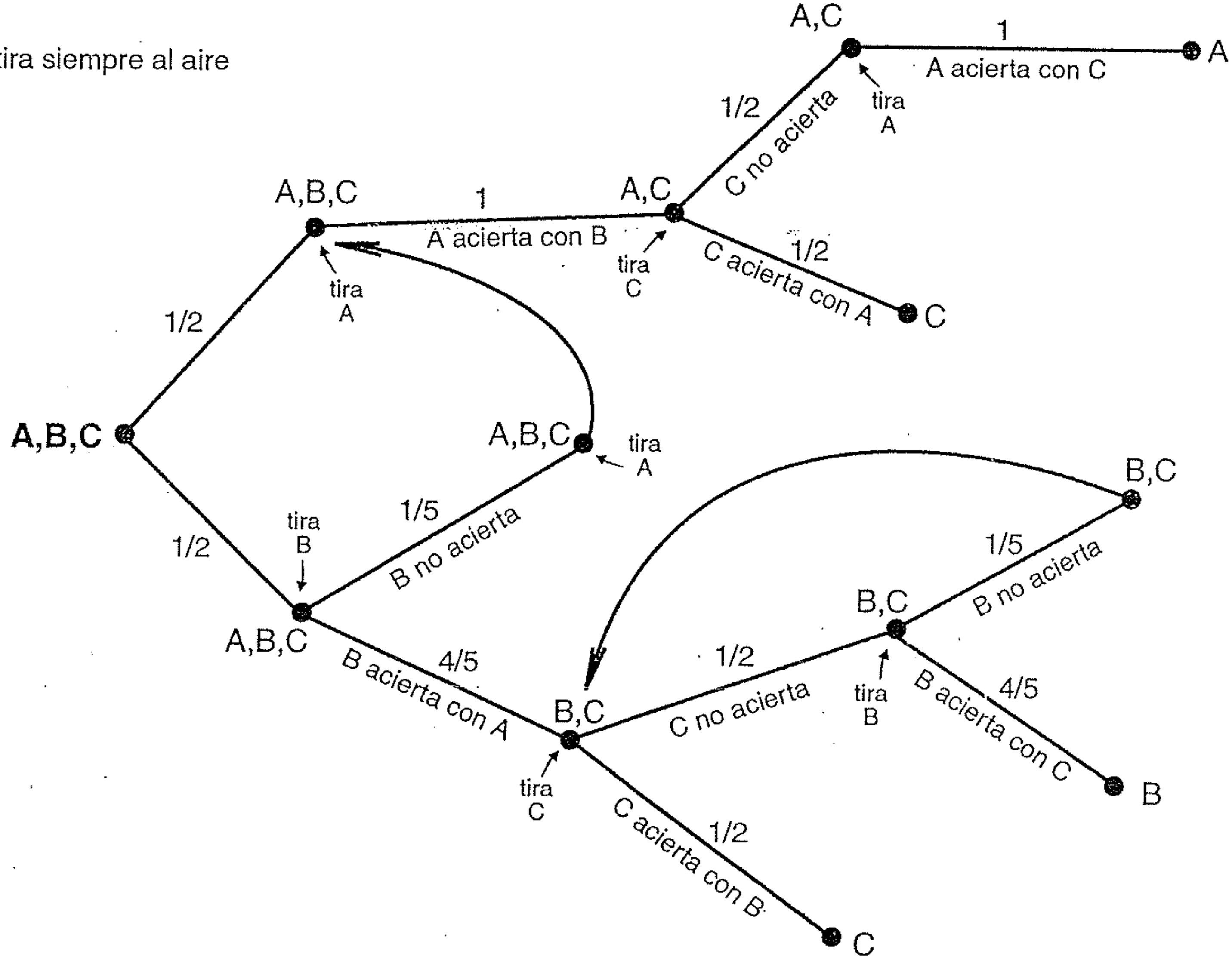
(iii) Suponiendo que C no dispara al aire, calcule las probabilidades de cada uno de sobrevivir.

(iv) Si la precisión de C es del x% ¿Cuál es el mínimo valor de x que garantice la victoria a C?

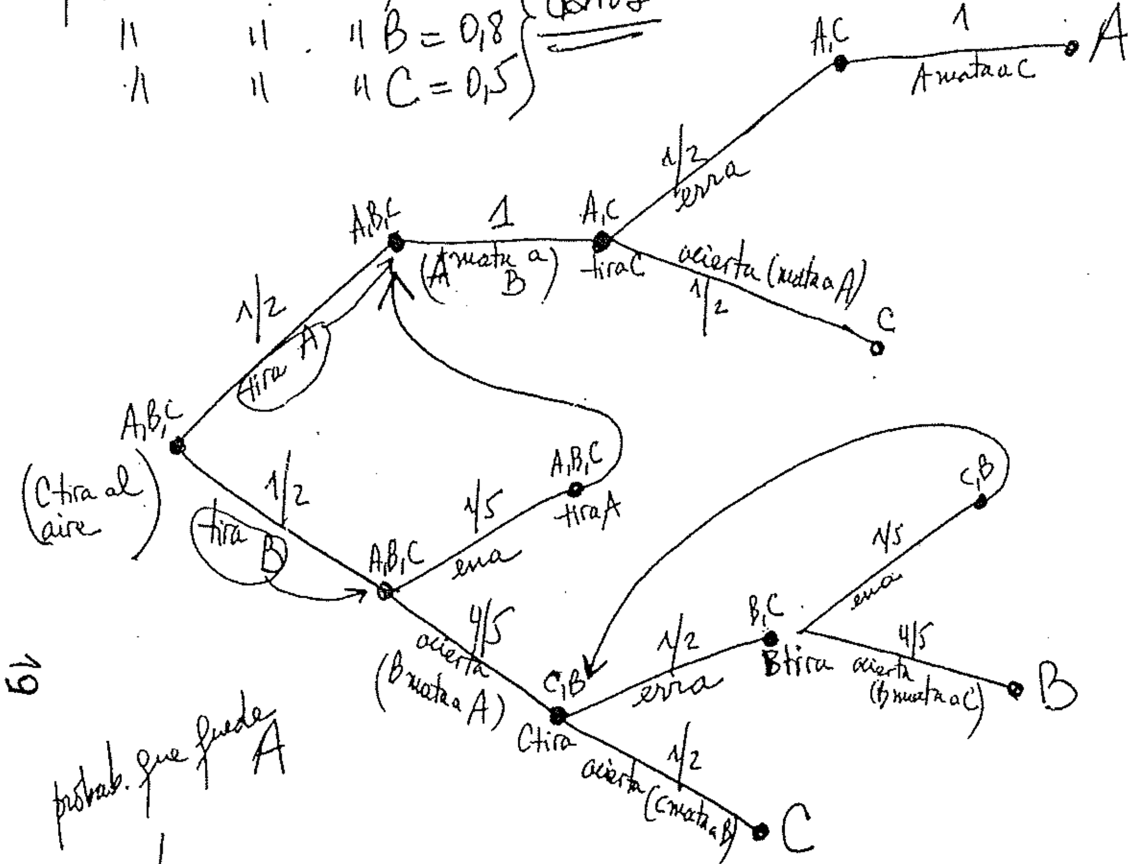
Observación: dado que A y B son los mejores tiradores, ambos tratarán de eliminarse el uno contra el otro, luego, la mejor estrategia para C es disparar al aire hasta uno A ó B caiga. De este modo, C tiene el primer disparo contra el sobreviviente con una chance del 50 % de vencer.

DUELO TRIANGULAR

- C tira siempre al aire



probabilidad acierto tiro $A = 1$
" " " $B = 0{,}8$
" " " $C = 0{,}5$
} datos



Verificación

1 TP3 p44

$$P_A + P_B + P_C = \frac{3}{10} + \frac{8}{45} + \frac{47}{90} = \frac{27+16+47}{90} = \frac{90}{90} = 1 \quad \text{OK}$$

DUELO TRIANGULAR

probab. que quede A

$$P_A = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5} = \boxed{\frac{3}{10} = P_A = \frac{27}{90}}$$

prob. quede B

$$P_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\, P\begin{pmatrix}\text{quede B}\\ \text{tirando C}\\ \text{estando B y C}\end{pmatrix} \; ; \quad P\begin{pmatrix}\text{quede B}\\ \text{tirando C}\\ \text{estando B y C}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot P\begin{pmatrix}\text{quede B}\\ \text{tirando C}\\ \text{estando B y C}\end{pmatrix} \longrightarrow x = \frac{4}{10} + \frac{1}{10}x \Leftrightarrow x\underbrace{\left(1-\frac{1}{10}\right)}_{\frac{9}{10}} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{9} = \boxed{\frac{8}{45} = P_B = \frac{16}{90}}$$

prob. quede C

$$P_C = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\, P\begin{pmatrix}\text{quede C}\\ \text{tirando C}\\ \text{estando B y C}\end{pmatrix} \; ; \quad P\begin{pmatrix}\text{quede C}\\ \text{tirando C}\\ \text{estando B y C}\end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot P\begin{pmatrix}\text{quede C}\\ \text{tirando C}\\ \text{estando B y C}\end{pmatrix} \longrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}x \Leftrightarrow \underbrace{\left(1-\frac{1}{10}\right)}_{\frac{9}{10}}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{2}{5}\,\frac{5}{9} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{2}{9} = \frac{45+9+40}{180} = \frac{94}{180} = \boxed{\frac{47}{90} = P_C} > 1/2$$