

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (0341)-4814990 ; FAX: (0341)-4810505
E-Mail: tarzia@uafce.edu.ar

PROGRAMA DE DIRECCIÓN GERENCIAL PDG'99

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Marzo 1999

INDICE

I) MÓDULO: "CÓMO PENSAR, ENTENDER, RAZONAR, DEMOSTRAR Y CREAR EN MATEMÁTICA" (pág. 1 – 23).

- Diversos Conceptos de Interés en la Matemática (pág. 3 – 4);
- Introducción (pág. 5 – 7);
- Problema Fundamental en la Matemática: P Implica Q (pág. 8 – 9);
- Los Tres Métodos más Importantes para Demostrar: Método Progresivo-Regresivo, Método por Contradicción, Método contrarrecíproco (pág. 10 – 13);
- Problemas por Resolver y Problemas por Demostrar. Razonamiento Heurístico (pág. 14 – 16);
- Resumen de los métodos: progresivo-regresivo, por construcción, por selección, por inducción, por particularización, por contradicción, contrarrecíproco, de unicidad, de la o exclusiva, máx-mín (pág. 17 – 22);
- Referencias (pág. 23).

II) MÓDULO: COMPLEMENTO DE "CÓMO PENSAR, ENTENDER, RAZONAR, DEMOSTRAR Y CREAR EN MATEMÁTICA" (pág. 1 – 49).

- Gráfica experiencia vs edad (pág. 2);
- Usted es una persona clave (pág. 3);
- Cerebro y aprendizaje. Motivación (pág. 4 – 15);
- Laberintos (pág. 16 – 18);
- Método regresivo (pág. 19 – 20);
- Lógica, cuantificadores y tablas de verdad. Los tres métodos más importantes para demostrar en Matemática (pág. 21 – 26);
- Demostraciones visuales (pág. 27);
- Errores en las demostraciones geométricas (pág. 28);
- Cerebro humano (pág. 29);
- Estilos de aprendizaje de los niños en el área Matemática (pág. 30);
- Fases en la resolución de problemas (pág. 31);
- La actividad subconsciente en la resolución de problemas (pág. 32 – 47);
- Actividad eléctrica del cerebro (pág. 48);
- Referencias (pág. 49).

III) MÓDULO: "PENSAR PARA LA EXCELENCIA CON EL LADO DERECHO DE SU CEREBRO" (pág. 1 – 15).

- Test: ¿Dónde encaja usted en una escala de derecho-izquierdo? (pág. 2 – 6);
- El cuadro de la liga sensorial (pág. 7);
- El poder de los hábitos mentales (pág. 8);
- Directivo del 2000 (pág. 9 – 15).

IV) MÓDULO: "LÓGICA, NÚMEROS, PROPORCIONES, ECUACIONES Y FUNCIONES APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LA ADMINISTRACIÓN. PROBLEMAS, TRABAJOS PRÁCTICOS Y CASOS" (pág. 1 – 159).

- Etapas en la resolución de problemas (pág. 3 – 4);
- Actividades sobre la resolución de problemas y juegos matemáticos (pág. 5 – 24);
- Estrategias en la resolución de problemas (pág. 25 – 30);
- Se plantean problemas, juegos, trabajos prácticos y casos no clásicos sobre los temas:
 - Lógica y Conjuntos (pág. 31 – 38);
 - Números Reales, Proporciones (Porcentajes), Ecuaciones y Funciones Reales (pág. 39 – 58);
 - Trabajo Práctico Especial: "Aplicaciones de los Números y de las Funciones Reales a Problemas de la Economía y de la Administración" (pág. 59 – 67);
 - Bibliografía (pág. 68);
 - Complemento sobre lógica y juegos matemáticos (pág. 69 – 159).

V) MÓDULO: "EL MÉTODO DE BIFURCACIÓN Y SU APLICACIÓN EN EL MÉTODO PROGRESIVO – REGRESIVO. UNA METODOLOGÍA QUE INCENTIVA LA CREATIVIDAD EN MATEMÁTICA" (pág. 1 – 14).

- Bifurcación simple (pág. 3 – 5);
- Bifurcación condicionada (pág. 6);
- Resoluciones de problemas (pág. 7 – 13);
- Bibliografía (pág. 14).

VI) MÓDULO: "ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA. PROBLEMAS, TRABAJOS PRÁCTICOS Y CASOS" (pág. 1 – 54).

- Un resumen de las definiciones y propiedades básicas en la teoría de la probabilidad y estadística:
 - Introducción a la probabilidad (pág. 3 – 6);
 - El espacio muestral finito (pág. 6 – 8);
 - Probabilidad condicional e independencia (pág. 9 – 11);
 - Variables aleatorias unidimensionales (pág. 12 – 13);
 - Características de las variables aleatorias (pág. 13 – 14);
 - Matemática de las distribuciones de probabilidades más frecuentes (variables aleatorias discretas: binomial y Poisson; variables aleatorias continuas: normal y exponencial) (pág. 15 – 20);
- Probabilidad condicionada y tablas de contingencia (diagramas de árbol) (pág. 21 – 29);
- Probabilidad geométrica (pág. 30 – 38);
- Probabilidad dinámica (pág. 39 – 41);
- Problemas con probabilidades (pág. 42 – 43);
- Trabajos prácticos y casos (pág. 44 – 50);
- Un modelo de fidelidad de marca para marketing y sus consecuencias matemáticas (pág. 51 – 53);
- Bibliografía (pág. 54).

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)-814990 ; FAX: (041)-810505
E-Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

SEMINARIO

**"COMO PENSAR, ENTENDER, RAZONAR,
DEMOSTRAR Y CREAR EN MATEMÁTICA"**

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Mayo 1995

INDICE

Diversos Conceptos de Interés en la Matemática

Introducción

Problema Fundamental en la Matemática : P Implica Q

Los Tres Métodos más Importantes para Demostrar

- Método Progresivo-Regresivo
- Método por Contradicción
- Método contrarrecíproco

Problemas por Resolver y Problemas por Demostrar

Razonamiento Heurístico

Resumen de los métodos :

- progresivo-regresivo,
- por construcción,
- por selección,
- por inducción,
- por particularización,
- por contradicción,
- contrarrecíproco,
- de unicidad,
- de la o exclusiva,
- máx-mín.

Referencias

NOTA : El presente texto servirá de apoyo para la realización del Seminario. Durante el mismo, numerosos ejemplos y problemas ampliarán y justificarán los métodos y conceptos vertidos aquí.

DIVERSOS CONCEPTOS DE INTERÉS EN LA MATEMÁTICA.

- Creación : Acción y efecto de crear.
- Crear (Lat. creare) : Componer artística o intelectualmente.
- Componer (lat. componere, arreglar) : Formar o constituir un todo juntando o disponiendo elementos diversos.
- Corolario (lat. corollarium) : Es la proposición que se deduce por sí sola de lo demostrado anteriormente.
- Deducción (lat. deductionem) : Acción y efecto de deducir. Razonamiento que, partiendo de hipótesis conduce a la verdad de una proposición usando reglas de inferencia.
- Deducir (lat. deducere) : Sacar consecuencias de un principio, proposición o supuesto y, en general, llegar a un resultado por el razonamiento : de esto deduzco que...
- Demostración : Acción y efecto de demostrar. Razonamiento que deduce la verdad de una proposición partiendo de axiomas que se han enunciado.
- Demostrar : Probar de forma inequívoca.
- Entender (lat. intendere) : Percibir por medio de la inteligencia el sentido o significado de algo : entender un problema. Percibir las causas o motivos de algo : entender el porque de un hecho.
- Entendimiento : Aptitud para comprender.
- Comprender (lat. comprehendere) : Entender, percibir : comprender un texto.
- Hipótesis (gr. hypothesis, suposición) : Conjunto de datos a partir del cual se intenta demostrar en forma lógica una nueva proposición.
- Lema (lat. lemma) : Proposición preliminar cuya demostración facilita la de un teorema subsiguiente.
- Pensamiento : Facultad de pensar : el pensamiento es atributo del hombre. Idea principal, manera de opinar de un individuo o de un determinado ambiente.
- Pensar : Formar y ordenar en la conciencia ideas y conceptos : pienso luego existo. Meditar, reflexionar. Hacer proyectos para poner en práctica alguna cosa.
- Principio (lat. principium) : Concepto, idea fundamental que sirve de base a un orden determinado de conocimientos o sobre la que se apoya un razonamiento. Proposición que sirve de fundamento a una deducción. Nociones primeras de una ciencia o arte.
- Probar (lat. probare) : Demostrar, evidenciar la verdad de cierta cosa.
- Problema (lat. problemam) : Cuestión en que hay algo que averiguar. Proposición dirigida a averiguar un resultado cuando ciertos datos son conocidos.
- Proposición : Enunciado susceptible de ser verdadero o falso.
- Razonamiento : Acción y efecto de razonar. Serie de conceptos encaminados a demostrar algo.

- Razonar : Pensar, ordenando ideas en la mente, para llegar a deducir una consecuencia o conclusión.
- Teorema (gr. theoremata) : Proposición científica que puede demostrarse.
- Tesis (gr. thesis) : Proposición que se enuncia y se mantiene con argumentos.

En matemática existen cuatro términos que se encontrarán frecuentemente siempre que se trate con demostraciones. Estos son proposición, lema, teorema y corolario. Una PROPOSICIÓN es un enunciado de interés que se está tratando de demostrar. Algunas proposiciones son consideradas (subjetivamente) extremadamente importantes y se las llama TEOREMAS.

La demostración de un teorema puede ser muy larga, por lo que resulta más fácil comunicar la demostración por "partes". Por ejemplo, para demostrar "P implica Q", puede ser necesario demostrar primero que "P implica C", luego, que "C implica D" y finalmente, que "D implica Q". Cada una de las proposiciones obtenidas podría presentarse por separado, y éstas se llaman LEMAS. En otras palabras, un lema es una proposición preliminar, la cual va a utilizarse en la demostración de un teorema. Una vez que un teorema ha sido establecido, sucede frecuentemente que ciertas proposiciones surgen casi inmediatamente como resultado de que el teorema es verdadero. A estas proposiciones se las denomina COROLARIOS.

Así como existen ciertos conceptos matemáticos que se aceptan sin una definición formal, así también existen ciertas proposiciones las cuales se aceptan sin una demostración formal, son los AXIOMAS.

En resumen, una proposición es un enunciado que se trata de demostrar que es verdadero. Un teorema es una proposición importante. Un lema es una proposición preliminar que va a utilizarse en la demostración de un teorema, y un corolario es una proposición que surge como resultado inmediato de un teorema.

IMPORTANTE : Un aporte importante al crecimiento intelectual y a la iniciación a la creatividad es el poder particionar una demostración larga en la concatenación de lemas cortos, los cuales son unos independientes de los otros (es decir, que los lemas o resultados intermedios, representan implicancias verdaderas que por reiteración ayudan a demostrar el resultado o teorema fundamental).

INTRODUCCIÓN

La finalidad de este seminario es el análisis de las reglas fundamentales que rigen el razonamiento matemático. Una vez conocidas y asimiladas, su mente podrá enfocarse hacia los aspectos creativos de la matemática. Estas reglas no son substitutos para la creatividad, y tampoco tienen como finalidad enseñar como ser creativo; sin embargo, pueden proporcionarle las herramientas necesarias para expresar su propia creatividad. Del mismo modo, estas herramientas le permitirán entender y apreciar la creatividad de otros autores, y así aprenderá un aspecto clave del proceso de razonamiento matemático.

El objetivo de la matemática es descubrir y comunicar ciertas verdades. La matemática es el lenguaje de los matemáticos, y una demostración es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también "habla" el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de la matemática es su precisión. Una demostración propiamente presentada no deberá contener ambigüedades para que no haya dudas de que es correcta.

Para entender y para hacer una demostración se deberá aprender un idioma nuevo, un método nuevo de razonamiento. Se explicará gran parte de la "gramática" básica necesaria, pero como sucede en el aprendizaje de un nuevo idioma, será menester mucha práctica para llegar a tener fluidez.

"La incapacidad para comunicar demostraciones" de una manera comprensible ha sido perjudicial para estudiantes y profesores en todas las ramas de la matemática. Entender una demostración matemática es una traba para la mayoría de los estudiantes. Muchos de ellos tratan de salvar este obstáculo evadiéndolo, confiando en la indulgencia del profesor para que no incluya demostraciones en los exámenes. Esta confabulación entre estudiante y profesor evita algunas de las consecuencias desagradables, tanto para el alumno como para el profesor, producidas por la falta de dominio del tema por parte del estudiante, pero esto no modifica el hecho de que un elemento clave de la matemática, probablemente su característica más notable, no ha entrado en el repertorio del estudiante.

Es posible enseñar a entender la naturaleza de las demostraciones sistematizándolas. Una de las metas principales del docente es enseñar al estudiante a leer demostraciones como las que se encuentran en los libros de texto. Seguramente, estas demostraciones, no se presentan en forma sistemática. Por lo tanto, se debe enseñar a reconocer los elementos típicos de un argumento matemático en una presentación informal de una demostración. Se debe analizar y entender su estructura, con lo cual se podrá leer y entender las versiones más informales que se encuentran en los libros de texto y finalmente, se estará en condiciones de crear sus propias demostraciones. Se sugiere que todos tendríamos una mejor oportunidad de enseñar a comprender las demostraciones sistematizándolas en

lugar de presentar los procedimientos tradicionales con la esperanza de que los estudiantes puedan aprender éste difícil arte por ósmosis.

Uno podría concluir que la mayoría de los estudiantes no pueden entender matemática, pero la experiencia indica todo lo contrario, simplemente hay que saber guiarlos. Lo que parece hacer falta es una metodología apropiada para explicar la matemática. En estas charlas se desarrollarán métodos para comunicar demostraciones. Se tratará de clasificar las diversas técnicas que se usan en forma repetitiva para prácticamente todas las demostraciones. Una vez que se entiendan estas técnicas, se estará en condiciones para poder explicar cualquier demostración mediante la aplicación sucesiva de las mismas.

El objetivo fundamental del Seminario será clasificar y explicar las diversas técnicas que se utilizan en las demostraciones. El primer objetivo es enseñar a leer y entender una demostración escrita mediante la identificación de las técnicas que se han utilizado. El segundo objetivo es enseñar a desarrollar y comunicar sus propias demostraciones de verdades matemáticas conocidas. Para lograrlo se necesita que se aplique una cierta cantidad de ingenio, creatividad, intuición y experiencia. Así como hay maneras diferentes para expresar la misma idea en cualquier idioma, así también hay diferentes demostraciones para la misma verdad matemática. Cuando trate de hacer su propia demostración, es importante seleccionar conscientemente la técnica de demostración, en vez de desperdiciar horas tratando de ver qué hacer. Tanto mejor será cuanto más consciente se esté del proceso de razonamiento. El objetivo final es que utilice las nuevas habilidades adquiridas para descubrir y comunicar verdades matemáticas anteriormente desconocidas. Esta meta es admirable aunque no trivial de lograr. El primer paso en ese sentido es alcanzar un nivel en el que uno sea capaz de leer y desarrollar las demostraciones propias de las verdades ya conocidas. Esto le dará un entendimiento mucho más profundo y rico del universo matemático que lo rodea.

Explicar una demostración en términos de las técnicas que la componen no es difícil. Una vez que los estudiantes conocen las técnicas para hacer demostraciones, sus mentes tenderán a cuestionar los aspectos más importantes de la matemática como por qué una demostración se realiza de una forma particular y por qué esa parte de la matemática es importante. No se pretende enseñar como ser creativo, pero se describirán muchas de las aptitudes básicas cuya adquisición hará posible que su mente se concentre en los aspectos creativos.

Entender una demostración matemática resultará más sencillo cuando se conozcan las diferentes técnicas para hacer demostraciones. Entre ellas, se destacan los métodos :

- progresivo-regresivo,
- por construcción,
- por selección,

- por inducción,
- por particularización,
- por contradicción,
- contrarrecíproco,
- de unicidad,
- de la o exclusiva,
- máx-mín.

La matemática ha ocupado un lugar de privilegio en los programas escolares y ha influido explícitamente e implícitamente en la formación e información del estudiante, con distinto énfasis a lo largo del tiempo. Hoy, a estas dimensiones formativa e informativa, más dirigidas hacia el sujeto, se suma lo social, por cuanto la Matemática, desde su lenguaje y desde su método, se ha constituido en un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico en que vivimos. Es desde esta potencialidad que la matemática puede contribuir en forma privilegiada a la consecución de los objetivos que la Ley Federal de Educación puntualiza para la Educación General Básica (EGB), pues colabora con el desarrollo individual y social de los alumnos propiciando en ellos "la búsqueda de la verdad" y en relación con ella, el juicio crítico, el rigor en el método de trabajo, la presentación honesta de los resultados, la simplicidad y exactitud en el lenguaje, la valorización de las ideas ajenas y del trabajo compartido.

PROBLEMA FUNDAMENTAL EN LA MATEMÁTICA : P IMPLICA Q

Dadas dos proposiciones P y Q, un problema de fundamental interés en matemática es el de demostrar que si P es verdadero, entonces Q es verdadero. Una demostración es un método formal para realizar esta tarea. A menudo, la forma particular de P y Q pueden indicar el camino a seguir.

Para poder hacer una demostración, se debe saber exactamente lo que significa demostrar que "si P es verdadero entonces Q es verdadero". La proposición P se llama a menudo "HIPÓTESIS" y el postulado Q "CONCLUSION". Para abreviar, la proposición "si P es verdadero entonces Q es verdadero", se reduce a "si P entonces Q", o simplemente "P implica Q" (que se nota : $P \Rightarrow Q$).

Parece razonable que las condiciones bajo las cuales "P implica Q" es verdadero dependerán de si P y Q son verdaderos. Por lo tanto, hay cuatro posibles casos a considerar :

1. P es verdadero y Q es verdadero ;
2. P es verdadero y Q es falso ;
3. P es falso y Q es verdadero ;
4. P es falso y Q es falso .

Una tabla de verdad es un método para determinar cuándo una proposición (Por ejemplo : "P implica Q") es verdadera, debiendo examinarse todos los posibles valores de la verdad de las proposiciones individuales P y Q.

Cuando se trata de demostrar que "P implica Q" es verdadero, se puede suponer que la proposición de la izquierda de la palabra "implica" es verdadera. La meta es concluir que el postulado de la derecha es verdadero.

Se debe tener en cuenta que una demostración de la proposición "P implica Q" no es un intento de verificar si P y Q son verdaderos, sino demostrar que Q es una consecuencia lógica de haber supuesto que P es verdadero.

En general, la habilidad para demostrar que Q es verdadero dependerá mucho del hecho de que se haya supuesto que P es verdadero y, finalmente, se tendrá que descubrir la relación entre P y Q. Para realizar esto se requerirá una cierta cantidad de creatividad de su parte. Las técnicas que se presentarán para hacer demostraciones están diseñadas para iniciarlo y guiarlo a lo largo del camino.

Existen muchas maneras de decir que "P implica Q" :

1. Cuando P es verdadera, Q debe ser también verdadera ;
2. Q se deduce de P ;
3. Q es una consecuencia necesaria de P ;
4. P es condición suficiente para Q ;
5. P sólo si Q .

Otras tres proposiciones relacionadas con " P implica Q " (llamada Proposición directa) son :

1. " Q implica P " (llamada Proposición recíproca) ,
2. " $\text{NO } P$ implica $\text{NO } Q$ " (llamada Proposición inversa) ,
3. " $\text{NO } Q$ implica $\text{NO } P$ " (llamada Proposición contrarrecíproca) .

En lo sucesivo, P y Q serán proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. Por lo tanto, el problema de interés será demostrar que " P implica Q " .

LOS TRES MÉTODOS MÁS IMPORTANTES PARA DEMOSTRAR

MÉTODO PROGRESIVO-REGRESIVO

Para el primer paso en cualquier demostración se necesita identificar las proposiciones P y Q. En general, todo lo que sigue a la palabra "SI" y antes de la palabra "ENTONCES", constituye la proposición P, es decir todo lo que se supone que es verdadero. Lo que se está tratando de demostrar es la proposición Q.

Es importante recordar que al demostrar "P implica Q" se puede suponer que P es verdadero y, de alguna forma, debe usar esta información para lograr la conclusión de que Q es también verdadero. Al tratar de determinar cómo llegar a esta conclusión de que Q es verdadero, se está realizando el proceso regresivo. Por otro lado, cuando haga uso específico de la información contenida en P, se estará realizando el proceso progresivo.

El proceso regresivo se inicia preguntando :

"cómo o cuándo puedo concluir que la proposición Q es verdadero?".

La manera en la cual se formule esta pregunta es crítica puesto que debe ser capaz de contestarla. La pregunta debe formularse de un modo abstracto, conocida como pregunta de abstracción. Una pregunta de abstracción formulada adecuadamente no deberá contener ni los símbolos, ni la notación del problema específico bajo consideración; la clave de muchas demostraciones es formularla correctamente.

El proceso para formular la pregunta de abstracción, contestarla abstractamente y aplicarla a la situación específica se denomina "PROCESO DE ABSTRACCIÓN".

El proceso de abstracción proporciona una nueva proposición Q1, con la propiedad de que si se pudiese demostrar que Q1 es verdadero, entonces Q sería también verdadero.

Una vez que se tiene la proposición Q1, todos los esfuerzos deberán dirigirse ahora a llegar a la conclusión de que Q1 es verdadero y como consecuencia Q también será verdadero.

Cómo se podrá demostrar que Q1 es verdadero?

Al final, se tendrá que suponer que P es verdadero, y resolver el problema lo cual podría hacerse ahora, pero por el momento, se continúa el proceso regresivo repitiendo la pregunta de abstracción con la nueva proposición Q1.

Una de las dificultades que pueden surgir en el proceso de abstracción es la posibilidad de que haya más de una pregunta de abstracción. La selección de la pregunta correcta es más un arte que una ciencia. En circunstancias afortunadas habrá solo una. En otros casos, se tendrá que proceder por ensayo y error. Aquí es donde la intuición, ingenio, experiencia, creatividad, diagramas y gráficas pueden jugar un papel importante. Como regla general, se debe permitir que la información contenida en P (la cual se supone que es verdadera), ayude a seleccionar la pregunta adecuada.

Independientemente de la pregunta que se seleccione, el siguiente paso será contestarla, primero en lo abstracto y después en la situación específica.

Una vez más, el proceso de abstracción habrá proporcionado una nueva proposición Q2, con la propiedad de que si se pudiera demostrar que Q2 es verdadero, entonces Q1 sería verdadero y por lo tanto Q lo sería también.

Ahora todos los esfuerzos deberán dirigirse a la conclusión de que Q2 es verdadero. Se debe hacer uso en alguna parte de la demostración de la información en P, pero por el momento, se continúa una vez más con el proceso de abstracción aplicándolo al nuevo postulado Q2 y así sucesivamente.

El proceso progresivo se inicia con la proposición P, que se supone es verdadera y se obtiene a partir de ella otra proposición P1, la cual ya se sabe que es verdadera como resultado de que P es verdadera. Se debe enfatizar que las proposiciones derivadas de P no se deben al azar. Por el contrario, deben estar dirigidas hacia la obtención de la última proposición derivada en el proceso regresivo. Esta última proposición debe actuar como una guía en el proceso progresivo.

Es común usar definiciones para contestar ciertas preguntas de abstracción durante el proceso progresivo-regresivo. Mientras más proposiciones equivalentes a la definición se puedan demostrar, más recursos disponibles se tendrán para usar en el proceso progresivo-regresivo, sin embargo, un gran número de proposiciones equivalentes pueden complicar también el proceso, debido a que se tendría que determinar cuál de todas las proposiciones se podría llegar a utilizar.

En la misma forma que se hace uso de una definición durante los procesos progresivo y regresivo, así también una proposición previamente demostrada puede utilizarse.

MÉTODO POR CONTRADICCIÓN

En el método por contradicción se comienza suponiendo que P es verdadero, tal como en el método progresivo-regresivo. Sin embargo, para obtener la conclusión deseada de que Q es verdadero, se procede haciéndose una pregunta muy sencilla : Porqué Q no puede ser falso?. Después de todo, si

debemos concluir que Q es verdadero, entonces debe haber alguna razón por la cual Q no puede ser falso. El objetivo del método por contradicción es descubrir esta razón. En otras palabras, la idea de una demostración por contradicción es suponer que P es verdadero y que Q es falso y ver porqué esto no puede suceder.

Otra manera de ver el método por contradicción es recordar que la proposición "P implica Q" es verdadera en todos los casos excepto cuando P es verdadero y Q es falso. En una demostración por contradicción se descarta este caso suponiendo que esto sucede y obteniendo, entonces, una contradicción.

En este punto aparecen preguntas muy naturales como :

1. Qué contradicción se debería buscar?
2. Cómo se usa la suposición de que P es verdadero y que Q es falso para obtener la contradicción?
3. Cuándo y porqué se debería usar este método en lugar del método progresivo-regresivo?

La primera pregunta es la más difícil de contestar, ya que no existen líneas de acción específicas. Cada problema proporciona su propia contradicción y, usualmente, se requiere de creatividad, perspicacia, persistencia y suerte para generar una contradicción.

Respecto a la segunda pregunta, uno de los enfoques comunes para encontrar una contradicción es trabajar progresivamente a partir de la suposición de que P y NO Q son verdaderos.

En el método progresivo-regresivo, sólo se supone que P es verdadero, mientras que en el método por contradicción se supone que tanto P como NO Q son verdaderos. Así, en vez de sólo una, se obtienen dos proposiciones a partir de las cuales se puede trabajar progresivamente. Obsérvese que no hay manera de determinar de antemano en dónde va a surgir la contradicción.

Regla general : El método por contradicción se usa cuando la proposición NO Q da alguna información útil.

Existe una diferencia sutil, pero significativa entre una demostración utilizando el método por construcción y otra que utiliza el método por contradicción. Si se tiene éxito con el método por construcción, se habrá generado el objeto deseado o por lo menos se habrá indicado cómo se puede producir, tal vez con la ayuda de una computadora. Por otro lado, si se estableciera el mismo resultado por contradicción, se sabrá que el objeto existe sin haber tenido que construirlo físicamente. Por esta razón, sucede a menudo que las demostraciones hechas por contradicción son mucho más

cortas y fáciles que aquellas hechas por construcción, debido a que no se tiene que crear el objeto deseado, sólo se tiene que mostrar que su inexistencia es imposible.

MÉTODO CONTRARRECÍPROCO

En el método por contradicción se trabaja progresivamente a partir de dos postulados P y NO Q para lograr algún tipo de contradicción. En general, la dificultad con este método es que no se sabe de antemano qué contradicción se va a obtener. En el método contrarrecíproco se tiene la ventaja de que se dirige hacia un tipo específico de contradicción.

El método contrarrecíproco es similar al de contradicción en que se comienza por suponer que P y NO Q son verdaderos. Sin embargo, la diferencia consiste en que en el método contrarrecíproco no se trabaja progresivamente desde P y NO Q. En vez de eso, se trabaja progresivamente solamente desde NO Q. El objetivo es lograr la contradicción de que P es falso (denotado como NO P). Se puede pedir una mejor contradicción que esa?. Cómo puede ser que P sea falso y verdadero al mismo tiempo?

Nuevamente, en el método contrarrecíproco se supone que P y NO Q son verdaderos y se trabaja progresivamente partiendo de la proposición NO Q hasta lograr la contradicción de que P es falso. Como tal, el método contrarrecíproco puede verse como una forma pasiva del método por contradicción en el sentido de que la suposición de que P es verdadero proporciona pasivamente la contradicción. Sin embargo, en el método por contradicción, la suposición de que P es verdadero se utiliza activamente para lograr la contradicción.

La desventaja del método contrarrecíproco es que se trabaja progresivamente partiendo solamente desde una proposición (NO Q) en vez de dos. Por otro lado, la ventaja es que se sabe precisamente lo que se está buscando (NO P). Como tal, se puede aplicar con frecuencia el proceso de abstracción a la proposición NO P intentando trabajar regresivamente. La opción de trabajar regresivamente no existe en el método por contradicción, dado que no se sabe qué contradicción se está buscando!

PROBLEMAS POR RESOLVER Y PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

PROBLEMAS POR RESOLVER

El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema. La incógnita es lo que se busca o lo que se pide.

Estos problemas pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos, son problemas serios o simples acertijos.

Los principales elementos del problema por resolver son : la incógnita, los datos y la condición. Para encontrar la solución a estos problemas hay que conocer, de modo preciso, los elementos principales : incógnita, datos y condición.

A continuación se detallan preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos :

- Cuál es la incógnita? ; Cuáles son los datos? ; Cuál es la condición?
- Distinga las diversas partes de la condición.
- Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.
- Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
- No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra, en qué medida la incógnita queda entonces determinada? ; cómo puede variar? ; puede deducir de los datos algún elemento útil? ; podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita? ; podría cambiar la incógnita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí ?
- Ha empleado todos los datos? ; ha utilizado la condición por completo?

PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

El propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada.

Los elementos de estos problemas son (si es un problema matemático usual), la hipótesis y la conclusión del teorema que hay que demostrar.

Para resolverlos deben conocerse exactamente sus partes principales (hipótesis y conclusión).

A continuación se detallan preguntas y sugerencias adaptadas a este tipo de problema :

- Cuál es la hipótesis? ; Cuál es la conclusión?
- Distinga las diversas partes de la hipótesis.
- Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.
- Mire bien la conclusión. Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o similar.
- No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte; sigue siendo válida la conclusión?
- Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil? ; Podría pensar en otra hipótesis de la cual se pudiera deducir fácilmente la conclusión? ; Podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí?
- Ha empleado la hipótesis completa?

Por regla general, los problemas por resolver tienen mayor importancia en la matemática elemental mientras que los problemas por demostrar son más importantes en la matemática superior.

RAZONAMIENTO HEURÍSTICO

El razonamiento heurístico es un razonamiento que se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible y cuyo objeto es descubrir la solución del problema propuesto. El razonamiento heurístico es de empleo frecuente. No se llega a una certeza plena sino después de haber obtenido la solución completa, pero hasta ahí uno se contenta con frecuencia con una hipótesis más o menos plausible. Se puede necesitar lo provisorio antes de lograr lo definitivo. En la construcción de una demostración rigurosa el razonamiento heurístico juega el mismo papel que el andamiaje en la construcción de un edificio.

Este tipo de razonamiento es bueno por sí mismo; lo que es malo es asociarlo a la demostración rigurosa; lo que es peor, es presentarlo como demostración rigurosa.

Para resolver un problema se necesita:

Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

I Comprender el problema

II Concebir un plan

Determinar la relación entre los datos y la incógnita.

De no encontrarse una relación inmediata, puede considerarse problemas auxiliares.

Obtener finalmente un plan de solución.

III Ejecución del plan

IV Examinar la solución obtenida

RESUMEN

Existen diversas técnicas para realizar demostraciones, ya sea para entender lo que otro ha hecho o para expresar la propia creatividad. Durante el Seminario se explicitarán más detalles sobre cada técnica como asimismo se darán diversos ejemplos que mostrarán el uso del correspondiente método. Las técnicas presentadas aquí no son de ningún modo las únicas, pero constituyen un conjunto básico. Sin duda se encontrarán otras a medida que se avance más en el campo de la matemática; quizás pueda desarrollar algunas técnicas propias. En cualquier caso, existen muchos detalles, variantes y trucos que se obtendrán con la práctica. A continuación, se proporcionará un resumen para saber cómo y cuándo se deben usar las diversas técnicas para demostrar la proposición :

" P implica Q " .

Con el método progresivo-regresivo se puede suponer que P es verdadero y el trabajo consiste en demostrar que Q es verdadero. A través del proceso progresivo se deducirá a partir de P, una secuencia de proposiciones P1 , P2, las cuales son necesariamente verdaderas como resultado de que se ha supuesto que P es verdadera. Esta secuencia no es aleatoria, sino que está guiada por el proceso regresivo, según el cual, a través de la formulación y respuesta de la pregunta de abstracción, se obtiene a partir de Q una proposición Q1, con la característica de que si Q1 es verdadera, Q también lo es. Este proceso de abstracción puede aplicarse a Q1 obteniendo una nueva proposición Q2 y así sucesivamente. El objetivo es unir la secuencia progresiva con la secuencia regresiva, generando una proposición en la secuencia progresiva, la cual es precisamente igual a la última proposición obtenida en la secuencia regresiva. Entonces, se puede hacer la demostración progresivamente siguiendo la secuencia desde P hasta Q. Cuando se está tratando de obtener esta secuencia de proposiciones, se debe ser cuidadoso con los cuantificadores que aparezcan, pues, entonces, los métodos por construcción, selección, inducción y particularización pueden ser de utilidad para hacer la demostración.

Por ejemplo, cuando el cuantificador "existe" se origina en el proceso regresivo en la forma usual :

Existe un "objeto" con una "cierta propiedad" tal que "algo sucede"

se debería considerar el uso del método por construcción para producir el objeto deseado.

Con el método por construcción, se trabaja progresivamente desde la suposición de que P es verdadero para generar (producir o diseñar) un algoritmo que produzca el objeto deseado. Siempre debe verificarse que el objeto hallado satisface dicha "propiedad" y también que "algo sucede".

Por otro lado, cuando el cuantificador "para todo" se origina en el proceso regresivo en la forma usual :

Para todos los "objetos" con una "cierta propiedad", " algo sucede"

se debería considerar el uso del método por selección. Aquí el objetivo es diseñar una máquina que haga demostraciones y que sea capaz de tomar cualquier objeto con "cierta propiedad" y demostrar que "algo sucede". Para hacerlo, se selecciona o se escoge un objeto, el cual tiene dicha cierta propiedad. Se debe concluir que, para dicho objeto, "algo sucede". Una vez que se ha seleccionado el objeto, lo mejor es proceder a trabajar progresivamente partiendo del hecho de que el objeto seleccionado tiene "cierta propiedad" (junto con la información que hay en P, si fuese necesario) y, regresivamente, desde lo que "algo sucede".

El método por inducción se deberá tomar en cuenta (aún antes que el método por selección) cuando la proposición Q tiene la forma :

Para todo entero n mayor o igual que algún entero inicial, la proposición P(n) es verdadera.

El primer paso del método de inducción consiste en verificar que la proposición es verdadera para el primer valor posible de n. El segundo paso requiere demostrar que si P(n) es verdadera entonces P(n+1) es verdadera.

Se debe recordar y tener presente que el éxito de una demostración por inducción reside en la habilidad para relacionar la proposición P(n+1) con P(n), de modo que se pueda hacer uso de la suposición de que P(n) es verdadera. En otras palabras, para realizar el segundo paso de la demostración por inducción, se debe escribir la proposición P(n), cambiar n en dicha proposición por (n+1) para obtener P(n+1) y, entonces ver si se puede expresar P(n+1) en términos de P(n). Sólo entonces se podrá usar la suposición de que P(n) es verdadera para llegar a la conclusión deseada de que P(n+1) es también verdadera.

Por otra parte, cuando el cuantificador "para todo" surge en el proceso progresivo en la forma usual :

Para todos los "objetos" con una "cierta propiedad" " algo sucede"

probablemente se deseará usar el método por particularización.

Para hacer esto, se identifica estos "objetos" cuando aparezcan en el proceso regresivo, porque entonces, con el método de particularización se puede concluir que "algo sucede" para el "objeto particular bajo consideración". Este hecho deberá ser útil para llegar a la conclusión de que Q es verdadero. Cuando se utilice la particularización, se debe verificar que el objeto específico satisface la

"cierta propiedad", porque solamente en ese caso algo sucederá.

Cuando la proposición original Q contiene la palabra "no", o cuando falle el método progresivo-regresivo, entonces se debe considerar el método contrarrecíproco o el método por contradicción dando preferencia al primero. Para utilizar el método contrarrecíproco, se deben escribir inmediatamente las proposiciones $\text{NO } Q$ y $\text{NO } P$, usando las técnicas correspondientes para la obtención de la negación de una proposición. Entonces, empezando con la suposición de que $\text{NO } Q$ es verdadera, el trabajo consiste en concluir que $\text{NO } P$ es verdadera. Esto se realiza mejor aplicando el método progresivo-regresivo, trabajando progresivamente a partir de la proposición $\text{NO } Q$ y, regresivamente a partir de la proposición $\text{NO } A$. Una vez más, se deben analizar y observar los cuantificadores que pudieran aparecer en el proceso progresivo o en el regresivo, ya que, entonces, los métodos por construcción, por selección, por inducción y particularización podrán ser útiles.

En el caso que fallara el método contrarrecíproco, existe todavía una esperanza con el método por contradicción. En este método, se permite suponer no solamente que P es verdadera sino también que Q es falsa. Esto proporciona dos suposiciones a partir de las cuales se debe deducir una contradicción a algo que se sabe que es verdadero. No es siempre obvio dónde surge la contradicción, pero ésta se obtendrá trabajando progresivamente las proposiciones P y $\text{NO } Q$.

Al tratar de demostrar " P implica Q ", se debe permitir que la forma de Q lo debe guiar tanto como sea posible. Específicamente, se debería explorar la proposición Q buscando ciertas palabras claves, ya que éstas indicarán a menudo cómo proceder. Por ejemplo, si se encuentra el cuantificador "existe", considere el método por construcción, en tanto que el cuantificador "para todo" sugiere el método por selección o el método por inducción. Cuando la proposición Q tiene la palabra "no" se podrá usar el método contrarrecíproco o el método por contradicción. Otras palabras claves que se deben buscar son "único", "o", "máximo" y "mínimo" ya que al encontrarlas, se utilizarán los correspondientes métodos de unicidad, o exclusiva y máx/mín. Si no se pudiera elegir un método basándose en la forma de Q , entonces se debe proceder con el método progresivo-regresivo.

A partir de ahora ya se está capacitado para "hablar" el lenguaje de la matemática pues se conoce el "vocabulario" y la "gramática" básica. Se ha aprendido los tres métodos de demostración más importantes para demostrar proposiciones, lemas, teoremas y corolarios. Estos son : los métodos progresivo-regresivo, contrarrecíproco y por contradicción. Se conocen ahora los diferentes cuantificadores y los métodos correspondientes por construcción, selección, inducción y particularización. Para situaciones especiales, la cartera de técnicas, para hacer demostraciones, incluye los métodos de unicidad, o exclusiva y máx/mín.

Si aún así todas estas técnicas para hacer demostraciones fallaran, posiblemente se deseará quedar con el idioma chino, porque al final de cuentas todo lo antes escrito "ESTÁ EN CHINO".

RESUMEN DE TÉCNICAS PARA HACER DEMOSTRACIONES ($P \Rightarrow Q$)

Técnica de demostración	Cuándo usarla	Qué suponer	Qué concluir	Cómo hacerlo
Progresivo-regresivo	Como un primer intento o cuando Q no tiene una forma reconocible	P	Q	Trabaje progresivamente partiendo de P y aplique el proceso de abstracción a Q.
Contrarrecíproco	Cuando Q contiene la palabra "no"	NO Q	NO P	Trabaje progresivamente partiendo de NO Q y regresivamente partiendo de NO P.
Contradicción	Cuando Q contiene la palabra "no" o cuando los dos primeros métodos fallen	P y NO Q	Alguna Contradicción	Trabaje progresivamente partiendo de P y NO Q para obtener una Contradicción.
Construcción	Cuando Q contiene el término "existe"	P	Existe el objeto deseado	Adivine, construya, etc el objeto que tiene cierta propiedad y muestre que algo sucede
Selección	Cuando Q contiene el término "para todo", "para cada", etc.	P y seleccione un objeto con cierta propiedad	Que algo sucede	Trabaje progresivamente partiendo de P y el hecho de que el objeto tiene la cierta propiedad. Trabaje regresivamente partiendo de lo que sucede.

Técnica de Demostración	Cuándo usarla	Que suponer	Que Concluir	Cómo hacerlo
Particularización	Cuando P contiene el término "para todo", "para cada", etc.	P	Q	Trabaje progresivamente particularizando P a un objeto en especial, es decir, al obtenido en el proceso regresivo.
Inducción	Cuando Q es verdadero para cada entero empezando con alguno en particular, por ejemplo n_0 .	La proposición es verdadera para n .	La proposición es verdadera para $n+1$. También demuestre que es verdadera para n_0 .	(i) Verifique que la proposición es verdadera para n_0 . (ii) Recorra a la hipótesis de inducción para demostrar que es verdadero para $n+1$.
Unicidad 1	Cuando Q contiene la palabra "único".	P y existen dos objetos.	Los dos objetos son iguales.	Trabaje progresivamente utilizando P y las propiedades de los dos objetos. También trabaje progresivamente para mostrar que los objetos son iguales.
Unicidad 2	Cuando Q contiene la palabra "único".	P y existen dos objetos diferentes	Alguna contradicción	Trabaje progresivamente desde P, utilizando las propiedades de los dos objetos y el hecho de que son diferentes.

Técnica de demostración	Cuándo usarla	Qué suponer	Qué concluir	Cómo hacerlo
Exclusiva 1	Cuando Q tiene la forma "R O S".	P y NO R	S	Trabaje progresivamente partiendo de P y NO R, y regresivamente partiendo de S.
Exclusiva 2	Cuando Q tiene la forma "R O S".	P y NOS	R	Trabaje progresivamente partiendo de P y NO S, y regresivamente partiendo de R.
Máx/Mín 1	Cuando Q tiene la forma "máx S ≤ x" o "mín S ≥ x".	P y seleccione un elemento s en S	s ≤ x o s ≥ x	Trabaje progresivamente desde P y el hecho de que s está en S. También trabaje regresivamente.
Máx/Mín 2	Cuando Q tiene la forma "máx S ≥ x" o "mín S ≤ x".	P	Construya s en S tal que s ≥ x o s ≤ x.	Utilice P y el método por construcción para producir la s deseada en S.

REFERENCIAS

- DICCIONARIO ENCICLOPEDICO LAROUSSE, (8 tomos) Planeta Internacional, Barcelona (1992).
- Y.S. DUBNOV, "Errores de las demostraciones geométricas", Limusa, México (1973).
- R.B. NELSEN, "Proofs without words. Exercises in visual thinking", Mathematical Association of America, Washington (1993).
- G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas", Trillas, México (1994)
- L.A. SANTALÓ, "Matemática 1 y 2. Iniciación a la creatividad", Kapelusz, Buenos Aires (1993).
- D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).
- D.A. TARZIA, "Curso de nivelación de Matemática", Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1993).



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)-814990 ; FAX: (041)-810505
E-Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

COMPLEMENTO DE
"COMO PENSAR, ENTENDER, RAZONAR,
DEMOSTRAR Y CREAR EN MATEMÁTICA" (*)

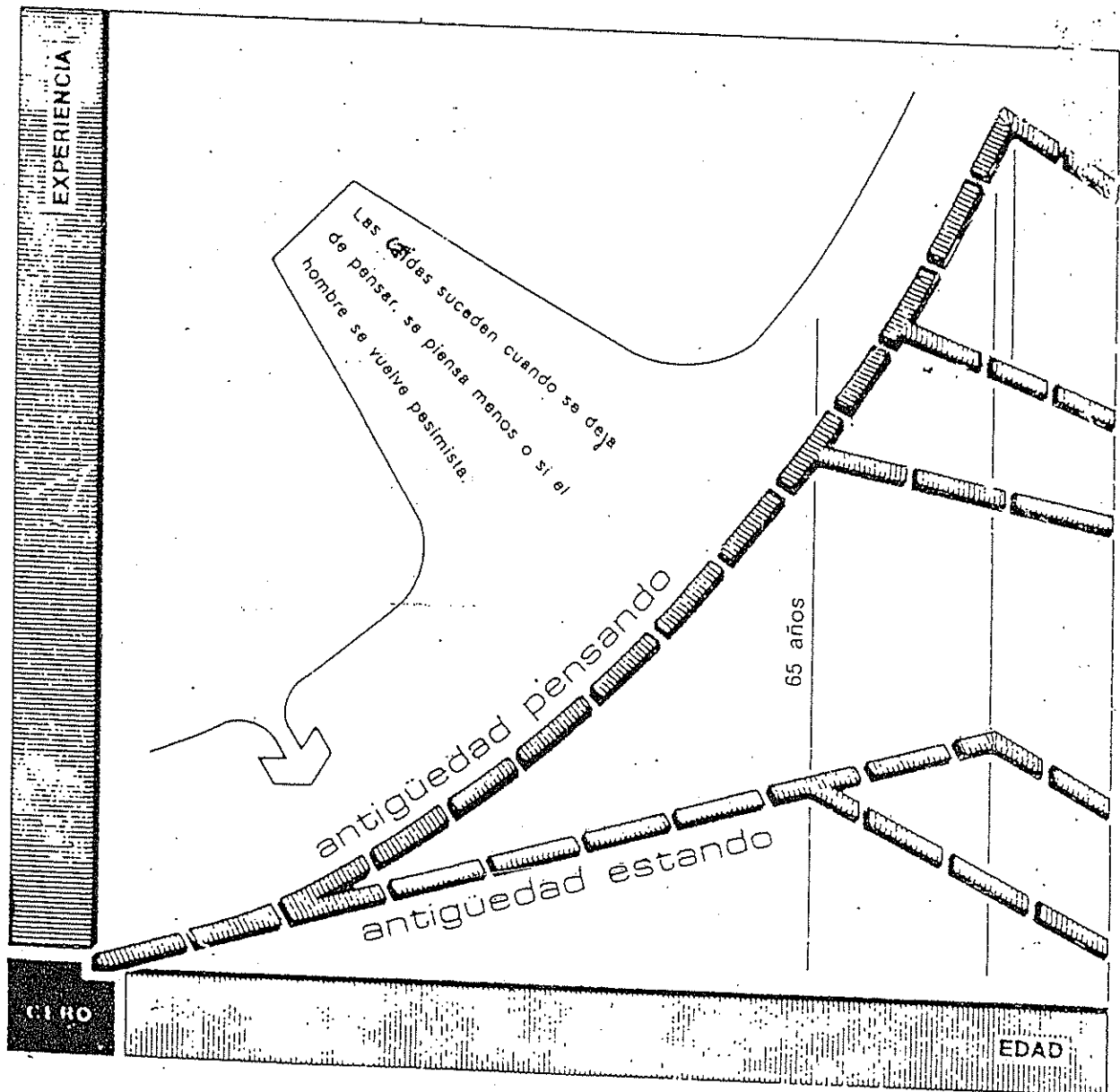
Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Marzo 1998

(*) Se presentan diversos tópicos de interés general como introducción al pensamiento matemático, a saber: experiencia vs edad, cerebro y aprendizaje (hemisferios izquierdo y derecho), laberintos, método regresivo, lógica, tablas de verdad, cuantificadores universal y existencial, los tres métodos más importantes para realizar demostraciones en Matemática (métodos progresivo-regresivo, por contradicción y contrarrecíproco), pruebas sin palabras, errores en las demostraciones geométricas. Este material sirve al sólo efecto de complementar lo realizado en clase.

en C. Virasoro,
"PENSAR para HACER"



Un xmplxado xn cincuxnta xs importantx xn "Calidad Total"

Un Gerente de una importante empresa, emitió una comunicación a los casi 50 empleados de su área de responsabilidad. Su propósito fue hacerles entender lo importante que eran todos en el objetivo de "Calidad Total", el cual se estaba implementando en la empresa. Su texto, era el siguiente:

Ustxd xs una pxrsona clavx.

Aunqux xl modxlo dx mi vixja máquina dx xscribir xs vixjo, funciona muy bixn, xxcxptuando una sola txcla.

Ustxd pxnsaría qux con todas las otras txclas funcionando adxcuadamxntx, una sola txcla fuxra dx sxrvicio no sx notaría, pxro aparxntxmxntx, una sola txcla fuxra dx sxrvicio arruina todo xl xsfuxrzo.

Ustxd puxdx dxcirsx a sí mismo:

"Buxno, sólo soy una pxrsona xntrx tantas, nadix notará si no doy lo mxjor de mí". Pxro sí hacx una difxrxncia, ya qux para qux una organización sxa xfxctiva, nxcxsita dx la participación activa dx todos y cada uno, xn su mxjor capacidad.

Así qux la próxima vxz qux ustxd crxa qux no xs importantx, rxcuxrdx mi vixja máquina dx xscribir.

Recorte esta página y péguela en el lugar más visto de su ámbito laboral.

do con coherencia (al menos es lo que pretendemos) todos los ámbitos de normación técnica de la práctica docente a los que hagamos referencia en estas páginas.

Explicando ahora el significado de los ítems de la figura 31, recordamos que en el eje horizontal se encuentran las quince teorías del aprendizaje enumeradas en los apartados 6.1.1 a 6.1.15 de esta cuarta dimensión de la complejidad de la tarea de enseñar (= de la tarea de ayudar a aprender, de optimizar el aprendizaje, de ahí que nos ocupemos tan centralmente de él aquí); en el eje vertical, en cambio, deben leerse los once rasgos que destacaríamos como más definidores, salvo mejor opinión, de nuestro concepto de aprendizaje, a saber:

1. El concepto o analizador de «semantización», en el sentido de atribución de significado arriba definido.
2. El analizador de la pluridimensionalidad semántica, en el sentido de la implicación de las cuatro dimensiones antropológicas básicas a las que hemos hecho referencia en nuestro modelo de educación (la cognitiva-intelectual, la fabril o técnica, la ética y la estética).
3. La compleja estructura reticular y sistémica (redes semánticas, mapas conceptuales) que el aprendizaje va construyendo anasintácticamente sobre los materiales que la experiencia humana va aportando al individuo en cada uno de los cuatro ámbitos antropológicos antedichos.
4. El analizador del concepto de anasintaxis o anasíntesis: procesos alternantes de análisis y síntesis presentes en la adquisición de la más elemental «experiencia aprendida».
5. Los procesos, igualmente alternantes en permanente dialéctica constructiva, de abstracción-concreción y de inducción-deducción, dado el carácter inferencial («ir más allá de lo escuetamente dado») de todo proceso de aprendizaje real, de toda experiencia adquirida/vivida por el *homo sapiens* que piensa, fabrica, decide desde su conciencia de libertad y disfruta/admira.
6. La universalidad genética de todo aprendizaje en la experiencia, es decir, el carácter empírico en el origen o génesis de todo aprendizaje, por más que, sobre esa base empírica, primariamente experiencial, la mente será capaz de elaborar las más complejas y abstractas construcciones científicas, progresando por los carriles conceptuales del lenguaje, verdadera clave, individual y sociológica, de todo conocimiento homínido.
7. El analizador del carácter social de toda «experiencia humana aprendida», con lo que adquiere especial relevancia todo el contexto de las relaciones del individuo con su entorno físico (socialmente codificado en los diferentes lenguajes accesibles), con su entorno familiar cercano, su entorno social más amplio y su entorno cultural vigente.
8. El carácter progresivo, de construcción procesual, de todo aprendizaje, como explicamos en el apartado 1.2 de la introducción a esta primera tarea (resumido gráficamente en la figura 6), en la que nuestras «zonas de expansión» de los analizadores recuerdan la zona fronteriza de desarrollo próximo de Vygotsky.
9. El analizador del «metaaprendizaje», como posibilidad específicamente hu-

mana de reflexionar, para aprender las condiciones del propio aprendizaje, base de toda posibilidad pedagógica de plantear su optimización.

10. El carácter «fabril» (de *homo faber*) de todo conocimiento y de todo concepto, no sólo por su génesis en algún tipo de actividad/experiencia, sino porque todo concepto puede ser inmediatamente utilizado por el sujeto como conceptualizador, es decir, para fabricar/adquirir/construir nuevos conceptos; todo conocimiento puede aprovecharse para seguir conociendo/descubriendo/explorando nuevos territorios; todo concepto analizado puede convertirse en analizador a su vez de nuevos campos experienciales: aquí radicaría precisamente una diferencia didácticamente fundamental y decisiva, a saber, la diferencia entre conocimientos para el examen, y conocimientos para el conocimiento (Whitehead llamaría a los primeros conceptos estériles y a los segundos, conocimientos/conceptos/aprendizajes fértiles).

11. La intención escolar de nuestra perspectiva general, es decir, hemos tratado de identificar rasgos definitorios nacidos en experiencias reales del aprendizaje de los alumnos, de la enseñanza de los profesores en las aulas, con toda la complejidad añadida de este contexto complicadísimo (como veremos en apartados siguientes), pero ya es hora de ir comprendiendo que a los profesores reales les dice muy poco, para su práctica a pie de aula, la interminable y lejana serie de experimentos con ratas en un aséptico laboratorio de un lejano país.

Con esto damos por concluido el apartado 6.1 (es decir, damos por iniciado el posible aprendizaje del lector, al hilo de las tareas sugeridas en el lugar oportuno de la segunda parte de nuestra obra), apartado que se ocupaba de la primera subdimensión de complejidad de la tarea de enseñar, dentro de la cuarta dimensión de complejidad de dicha tarea, la que hemos denominado «enorme complejidad psicodidáctica». Esta primera subdimensión, como hemos ido viendo, se refería a la complejidad del proceso que centra la finalidad de toda enseñanza, el aprendizaje del alumno. Pasamos ahora, con mayor brevedad, a ocuparnos de otras subdimensiones de esta cuarta dimensión de complejidad psicodidáctica, al servicio siempre, como explicitamos en su lugar, de la rotura de la trivialidad/superficialidad en la aproximación de los profesores a su tarea docente, a sus aulas, pues no hay atajo más económico para esa rotura, que la toma de conciencia, inteligente y honesta profesionalmente, de la complejidad, importancia, trascendencia, gravedad y dificultad que encierra la tarea a la que uno se viene dedicando, quizá desde décadas, tal vez con excesiva tranquilidad, en el sentido peyorativo del término.

6.2. CEREBRO Y APRENDIZAJE: UN ANALIZADOR EN EXPANSIÓN

Si bien esta temática ha estado (y todavía está) ausente de la inmensa mayoría de los planes de formación de profesores, no es posible ignorar hoy, desde hace ya al menos tres décadas, este analizador para comprender el aprendizaje humano y, en consecuencia, la enorme complejidad de la tarea de intervenir sobre él a través de

la enseñanza. Hace más de quince años aludí a la necesidad de tener en cuenta este dato de la complejidad de los procesos de enseñanza/aprendizaje, atendiendo a la complejidad de lo que acontece en el cerebro de un ser humano que aprende.⁸² Hace ya ocho años que la prestigiosa revista *Theory into Practice*, editada por la Ohio State University, amiga, como su título indica, tan sólo de las teorías que tienen que ver sustancialmente con aplicaciones educativas pragmáticas, consideró necesario publicar un número monográfico sobre «Cerebro y aprendizaje» («Learning and the brain»)⁸³. Como escribe Charles A. Letteri en uno de los artículos de este número monográfico: «Sólo cuando la complejidad de la actividad docente llegue a igualar el grado de complejidad de la actividad de aprender, podrá tener lugar en las aulas una mejora significativa del aprendizaje y de los resultados que en ellas obtengan los estudiantes».⁸⁴ El lector podrá hacerse una idea acerca de que subanalizadores que la citada revista introduce bajo este analizador de la complejidad psicodidáctica, si enumeramos algunos de los artículos que en ella se incluyen, por ejemplo: «Cerebro y aprendizaje: una síntesis emergente», «El cerebro humano: intuiciones y rompecabezas», «Aplicación del mapa bioeléctrico de la actividad cerebral en el diagnóstico de dificultades de aprendizaje», «Relaciones entre el cerebro y la conducta...», «El biofeedback electroencefalográfico y las dificultades de aprendizaje», «La ciencia neurocognitiva y la formación de los profesores», «Un programa de intervención académica: aplicación de conceptos de estilo cerebral y estilo de aprendizaje», «El neuropedagogo: un profesional del futuro», etcétera.

Al estudiar el cerebro humano, en sus relaciones con la educación, un especialista como José M. Asensio⁸⁴ hace algunas afirmaciones excepcionalmente pertinentes para nuestro concepto de aprendizaje, que expusimos en el anterior apartado, por ejemplo: a. Denomina al cerebro «el gran analizador», explicitando en términos de neurofisiología lo que nosotros hemos definido en términos de funcionamiento mental, de proceso psíquico, los analizadores disponibles del sujeto que le permiten aprender, adquirir experiencias nuevas, percibir objetos, etcétera; b. Al asumir la ya tradicional diferenciación cerebral de McLean (cerebro reptiliano, paleomamífero y neomamífero), en su teoría del «cerebro triúnico», está proporcionando una base biológica, filogenética y ontogenética, a nuestra diferenciación antropológica de dimensiones en los sujetos a educar (*homo sapiens*, etcétera); c. La escasa predeterminación por el programa genético de las conexiones sinápticas posibles, a diferencia de lo que acontece en las especies animales, otorga al ser humano una posibilidad excepcional de aprender, de ser educado (se dan aquí la mano la clásica filosofía de la educabilidad con la biología de la educación...); d. Los miles de millones de cuerpos neuronales (146 000 neuronas por milímetro cuadrado), como quiera que cada neurona posee un promedio de 20 000 conexiones sinápticas en cada una de sus dendritas, posibilitan un total de unos mil billones! (10¹⁴) de dichas conexiones.

Resulta casi ocioso subrayar la formidable infraestructura neurofisiológica que el estudio anatómico electroquímico del cerebro suministra a la expansión y multiplicación, cuantitativa y cualitativa, de las redes semánticas, árboles lógicos, mapas conceptuales y estructuras de referencia que hemos definido en nuestra definición de aprendizaje. Es más, el concepto de «plasticidad», acuñado por el premio Nobel

Lorenz desde sus investigaciones etológicas, concepto clave en todo aprendizaje o modelado del comportamiento adquirido, no programado unívocamente en el paquete hereditario, encuentra aquí una confirmación de extraordinaria fuerza lógica. Sorprende muy gratamente que nuestros conceptos de análisis y síntesis, como procesos de recurrencia anasintáctica, se vean literalmente replicados por las modernas investigaciones sobre la electroquímica del córtex y la localización topológica cerebral específica de funciones analíticas y sintéticas. Así, cuando el neurofisiólogo y premio Nobel John Eccles, a quien tuvimos la oportunidad de escuchar recientemente en Madrid (verano de 1992), expone su teoría de una hipótesis unitaria de la interacción mente-cerebro en la corteza cerebral («a unitary hypothesis of mind-brain interaction in the cerebral cortex») y cuando se descubren las redes de interconexión entre los tres cerebros arriba citados, se nos está facilitando el camino para la simetría funcional entre la complejidad del funcionamiento de la mente que conoce y aprende, por un lado, y la complejidad del cerebro que se modifica en cada acto de aprendizaje (almacenamiento, tratamiento, recuperación y/o aprovechamiento de la información «ordenadamente almacenada»), por otro, no menos que nuestro propósito de una educación integral, unificando las dimensiones antropológicas reseñadas.

Como era de esperar, la sospechosa similitud entre el funcionamiento del cerebro y el de la mente que conoce y aprende, ha hecho converger hacia la investigación neurocognitiva a los más modernos y vivaces de los teóricos del aprendizaje a base de redes de significación (replicada en la reticularidad sináptica del cerebro), como Joseph D. Novak, por ejemplo.⁸⁵

Mas, desde el punto de vista que interesa a los profesores, el interés didáctico, tal vez sea lo más relevante la teoría de la denominada epigénesis probabilística cerebral. En esencia viene a decir esta teoría, que cuenta ya con impresionante base empírica de verificación, que el cerebro humano posee una enorme capacidad de autoconfigurarse, funcionalmente, se entiende (es decir, en sus estructuras de funcionamiento, no tanto en su anatomía), esto es, que su funcionamiento lo organiza como instrumento más o menos poderoso de almacenamiento de información, de conocimiento, de aprendizaje (como es sabido, la función hace al órgano). Difícilmente podría encontrarse una simetría más afortunada para nuestra concepción del aprendizaje, en la que, como veíamos en el anterior apartado, los conceptos «bien adquiridos» estaban disponibles inmediatamente como conceptualizadores, los objetos «bien analizados» podrían utilizarse como analizadores conceptuales en ulteros búsquedas cognitivas o de otro tipo. Aunque Ausubel no sólo no lo vio, sino que lo consideró como una elucubración teorizante sin mucho sentido, puede empezar a pensarse en el hecho de que las redes mentales de significación tienen su réplica en las redes sinápticas del córtex, en la hipótesis de la diferenciación mente-cerebro, cuestión apasionante sobre la que ha disertado largamente la privilegiada mente-cerebro de nuestro Laín Entralgo, en diálogo con los últimos descubrimientos de la neurociencia.⁸⁶ El lector interesado puede ver también el capítulo sobre «neurofisiología, transfísica y honradez» de la reciente publicación de Florencio Bao sobre «psicopedagogía del sentido».⁸⁷

Dejando para próximas páginas, en su apartado específico, el tema de los estilos cognitivos, cuya base cerebral es obvia después de lo dicho, puede revestir también el adjetivo de los hemisferios cerebrales. Consideramos el hecho suficientemente conocido, en términos generales, pero tal vez sea interesante destacar lo que han destacado psicopedagogos y neuropsicólogos de contextos culturales diversos (norteamericanos, franceses y alemanes, si bien la ciencia es cada vez más planetaria, más aldeana...). Es de destacar que, en este caso concreto, no ha sido la investigación psicodidáctica la que ha sugerido los descubrimientos neurofisiológicos, sino viceversa, han sido las verificaciones neurofisiológicas (en situaciones de neurocirugía cerebral o de investigaciones electroencefalográficas) las que han acentuado las diferenciaciones en los procesos mentales tipificados. Así, por ejemplo, Hergert⁸⁸ establece, como resumen macroconceptual, la siguiente diferenciación:

Hemisferio izquierdo	Hemisferio derecho
Verbal	No-verbal
Lógico, analítico	Sintético
Racional	Intuitivo
Objetivo	Subjetivo

Inteligencia	Intuición
Convergente	Divergente
Realista	Impulsivo
Intelectual	Sensitivo
Unidades discretas, separadas	Continuidad
Dirigido, controlado	Libre
Racional	Intuitivo
Histórico	Atemporal
Analítico	Holístico, sintetizador
Sucesivo	Simultáneo
Objetivo	Subjetivo
Atomista, detallista	Consideración en bloque, «al por mayor»

Bogen⁸⁹ especifica más esta especialización funcional:

Inteligencia	Intuición
Convergente	Divergente
Realista	Impulsivo
Intelectual	Sensitivo
Unidades discretas, separadas	Continuidad
Dirigido, controlado	Libre
Racional	Intuitivo
Histórico	Atemporal
Analítico	Holístico, sintetizador
Sucesivo	Simultáneo
Objetivo	Subjetivo
Atomista, detallista	Consideración en bloque, «al por mayor»

Otto J. Peier⁹⁰, quien escribe en un contexto específicamente didáctico y que se dirige directamente a profesores en ejercicio (en la revista *Gymnasium Helveticum*), antes de proponer su detallada diferenciación interhemisférica, menciona la diferenciación menos prolija, pero semánticamente muy rica, de la autora Gabriele L. Rico⁹¹:

Hemisferio izquierdo	Hemisferio derecho
Necesidad de certeza.	Reconocimiento de la inseguridad.
Distancia, no participativo.	Compromiso.
Alejamiento o rechazo de todo lo que suena a nuevo, tipo cerrado, tenso.	Predisposición favorable a lo nuevo, abierto, distendido/relajado.
Lenguaje literal.	Lenguaje metafórico.
Rígido.	Flexible.
Constante, pertinaz, «cabezota».	Condescendiente.
Tendencia hacia lo seguro.	Propensión al riesgo.
Fronteras del yo fijas.	Fronteras del yo fluidas.
Tiende a la claridad, precisión, penetrante, duro, logro de sus propósitos.	Tendencia a la amplitud, comprensión, prudencia, delicadeza/sensibilidad, capacidad de acogida/aceptación.

Necesidad de certeza.
Distancia, no participativo.
Alejamiento o rechazo de todo lo que suena a nuevo, tipo cerrado, tenso.
Lenguaje literal.
Rígido.
Constante, pertinaz, «cabezota».
Tendencia hacia lo seguro.
Fronteras del yo fijas.
Tiende a la claridad, precisión, penetrante, duro, logro de sus propósitos.

Nótese el cambio de analizadores, de perspectiva o plano/dimensión, que realiza O. J. Peier^{91,1} al pasar a la siguiente diferenciación interhemisférica:

Elabora las informaciones una tras otra.	Elabora las informaciones que le llegan al mismo tiempo.
Se atiene a secuencias de sucesión: primero A, luego B, etcétera.	Procede simultáneamente: capta una imagen compleja.
Registra detalles: una verruga.	Capta el todo: un rostro.
Descompone el mundo en partes y secciones identificables, abarcables.	Unifica el mundo en una estructura de totalidades.
Es lógico: ve causas y efectos.	Es analógico: percibe correspondencias y semejanzas.
Responde a aspectos verificables del mundo: 2 X 2.	Reacciona a aspectos cualitativos, no cuantificables: sentimientos.
Registra los aspectos informativos de la realidad.	Capta los aspectos emocionales del pensamiento.
Pensamiento lineal.	Pensamiento plástico, gráfico.
Formación de ideas conforme a reglas: se atiene a estructuras previamente establecidas, estables; depende en gran medida de la información almacenada, organizada.	Formación de ideas transformativa, abierta; se apoya en estructuras cualitativas, no cuantificables, que no se ordenan en secuencias determinadas, sino que se agrupan en imágenes de marcado matiz afectivo.
Es sintáctico, junta/reúne las palabras de acuerdo con las reglas gramaticales.	Tiene una sintaxis limitada, pero reacciona al contenido plástico/imaginativo de los vocablos o evoca frases como unidades cerradas: el texto de una canción, de una poesía o de un cuento rimado.
Separa: lo importante son las diferencias.	Une: lo importante son las relaciones y nexos.
Puede recordar secuencias de movimiento complejas.	Puede recordar imágenes o cuadros complejos.

Habla y habla y habla.

Sabe, «cómo».

Utiliza las palabras primordialmente como signos.

Pensamiento conceptual.

Es mudo, se sirve de imágenes, no de palabras.

Descubre, «qué».

Es sensible a las imágenes que las palabras evocan y a su sonoridad.

Pensamiento visual, plástico, metafórico.

Charles de Carlini, aprovechando los fecundos trabajos de Antoine de la Ganderie⁹², introduce esta temática en un marco específicamente didáctico, ya desde el título mismo de su aportación, publicada en 1990: «En torno a los métodos de trabajo de los alumnos: la gestión de la mente» (literalmente, *la gestión mentale*). Su interés aplicado a la enseñanza, en el que coincidimos, le hace concluir su trabajo con un «esquema de la pedagogía del cerebro total», como veremos. Mas vayamos por partes. Nuestro autor, Carlini, resume así la diferenciación hemisférica cerebral:

Hemisferio izquierdo

Percebe características, detalles, componentes, categorías.
Analiza.
Tratamiento secuencial, en serie.
Secciona el tiempo linealmente.
Codifica y decodifica los lenguajes: verbal, matemático, musical, etcétera.
Su prioridad: el sentido, el contenido.

Hemisferio derecho

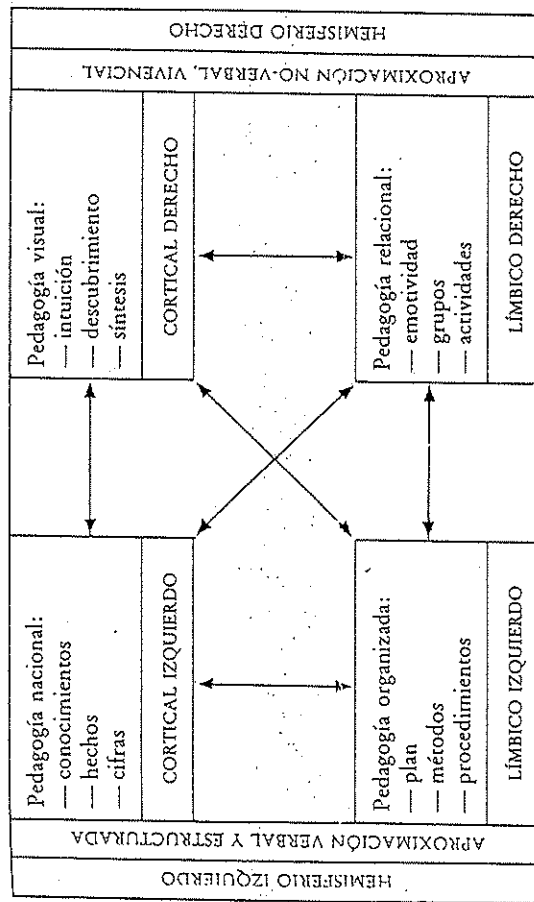
Integra, organiza los datos en estructuras, ensambla elementos.
Sintetiza, pone en relación.
Tratamiento simultáneo.
Percebe relaciones en el espacio.
Codifica/decodifica analogías, metáforas, imágenes, melodías, etcétera.
Prioridad: la forma.

Partiendo de esta diferenciación cerebral, que establece en realidad dos estilos cognitivos en los alumnos, propone el esquema de la figura 32 con vistas a una pedagogía del cerebro total («*du cerveau total*»).

Conviene advertir, sin embargo, que estas tipologías bipolares, facilitadas aquí por una topología cerebral empíricamente verificable, no establecen, obviamente, tipos excluyentes e irreductibles, sino que se trata más bien de preferencias o sistemas reactivos prioritarios, que un individuo puede compartir, en mayor o menor medida, con características del otro tipo bipolar. Esto se ve con claridad en la figura 33 (idea adaptada de Ned Hermann, en su sugestivo trabajo *Whole brain teaching and learning*)⁹³, en la que se insinúa la posibilidad de cuantificar, siquiera aproximativa y gráficamente, perfiles tipológicos, siguiendo la topología de los cuatro cuadrantes que resultan de la lateralidad funcional cortical y límbica del cerebro que, como veremos, tiene su enigmática réplica en la fisiología electroquímica complejísima de los neurotransmisores, fisiología, como veremos también, hecha posible sobre la infraestructura de una no menos compleja estructura anatómica de billones de células nerviosas reticularmente interconectadas.

No deja de ser notable que la edición de 1988 de la obra *Introducción a las teorías del aprendizaje* (editada por la potente editorial norteamericana Prentice-

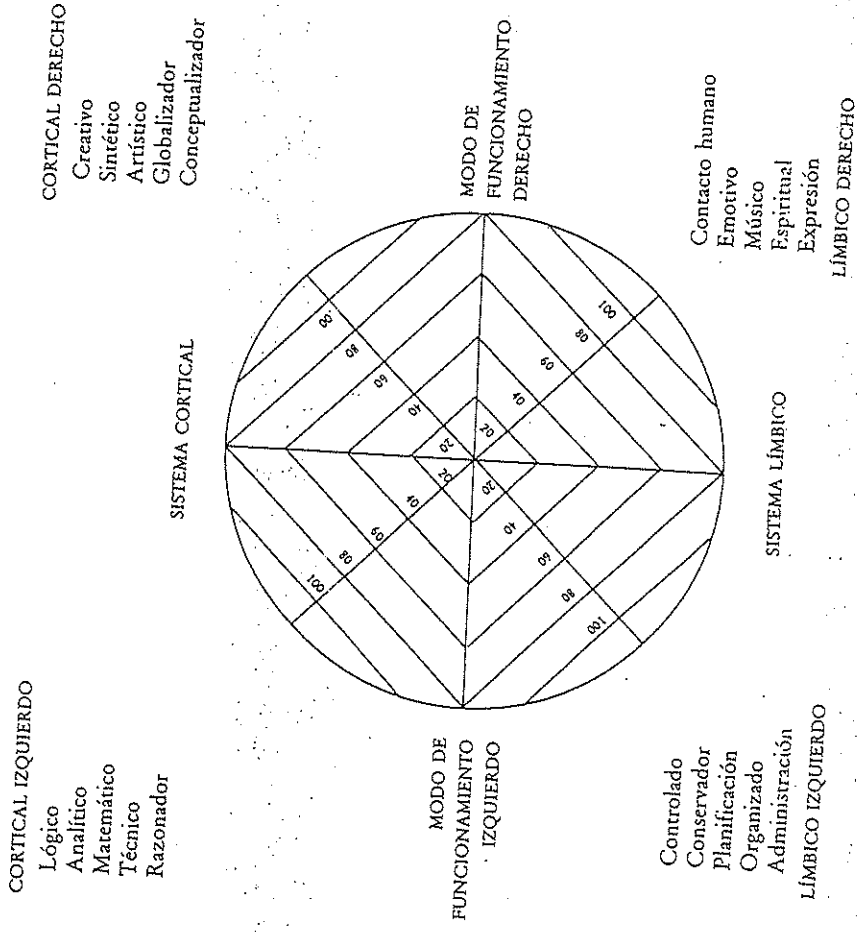
FIGURA 32. Esquema de Carlini (véase nota 92) para una pedagogía «del cerebro total».



Hall International⁹⁴), tan sólo reconoce cuatro grandes grupos de teorías del aprendizaje: funcionalistas, asociacionistas, cognitivas y «a predominantly neuropsychological theory», lo que da idea de la importancia que el autor concede a la perspectiva que aquí nos ocupa con vistas a una fundamentación científica de la práctica de la enseñanza, lo cual constituye el objetivo expreso de la obra: examinar posibles relaciones entre las teorías del aprendizaje y las prácticas pedagógicas (*to examine some of the relationships that exist between learning theory and educational practices*)⁹⁵. Desde la revolución de la neurofisiología, de la mano de Ramón y Cajal y de Claude Bernard, que despejó el camino para el descubrimiento de los neurotransmisores, pieza clave en la concepción actual de toda la neuroquímica, pasando por Hebb y Washley, Sperry y Miller, hasta Luria y John Eccles, la investigación científica del cerebro nos ha aportado impresionantes y apasionantes conocimientos, cada vez más aplicables a la comprensión de los procesos de aprendizaje y, en consecuencia, más aplicables cada día a una fundamentación científica de la práctica racional de la enseñanza. Autores hay, incluso, que unen este conocimiento especializado de la neurociencia, en sus aplicaciones educativas, a la entrada, por fin, de los docentes en el campo de los «verdaderos» profesionales, pues para nadie es un secreto que no son considerados como tales socialmente («*It is no secret that teaching is not considered as a "true" profession*» [...])⁹⁶.

Es por esta razón, entre otras, por lo que constituye una satisfacción la introducción en los planes de estudio de Ciencias de la Educación de materias como Neuropedagogía, que ya ha empezado a darse en nuestro país (Universidad de La

FIGURA 33. Sistema de representación de los cuatro sectores de preferencia cerebral, según Ned Hermann (véase nota 93)



Laguna, por ejemplo, con el entusiasmo y tesón de «convencido racional» del profesor Enrique Burunat 97, si bien con la lentitud y avatares propios de un principio de cosa es tenido por loco hasta que su idea triunfa». En nuestro caso, para hacer referencia a y aplicación de un conocimiento/analizador recién adquirido por el lector en páginas anteriores, y por seguir aprovechando la genialidad feliz de Mark Twain, sería muy aplicable aquello de que «quien tiene como único instrumento un martillo, tenderá inevitablemente a ver el mundo como un clavo», pues carece de otro analizador para comprender/analizar técnicamente su entorno. Esperemos que entre los instrumentos mentales de los formadores de los futuros profesores tengan entrada nuevas teorías y perspectivas sobre el aprendizaje y la enseñanza, incluida la perspectiva neurofisiológica, de la que tal vez no podamos concretar

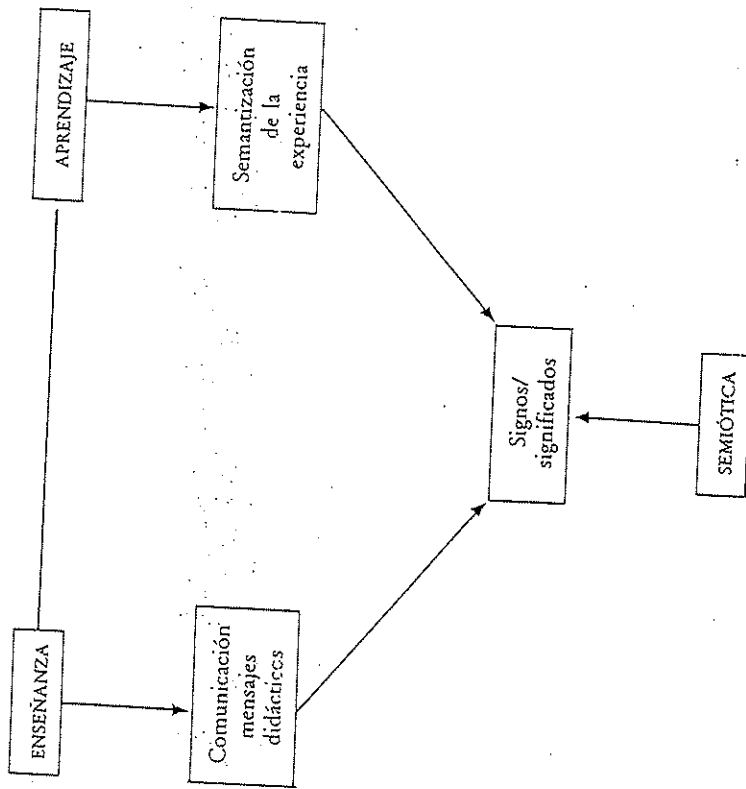
«cuál» será su futuro en la educación, pero de la que sí podemos pronosticar ya «cuánto» futuro tendrá, pues tendrá indudablemente mucho.

6.3. LA APORTACIÓN DE LA SEMIÓTICA: COMUNICACIÓN Y APRENDIZAJE

Partiendo del punto de vista de los docentes, el analizador didáctico que nos ocupa en este apartado es central. En efecto, en primer lugar, porque toda enseñanza es un acto de comunicación, con intención de producir determinado aprendizaje en el alumno, y toda comunicación requiere algún tipo de codificación de los mensajes, utilizando signos que representen cosas, objetos, principios, relaciones, etcétera, tenía del que se ocupa la semiótica. En segundo lugar, siendo así que toda enseñanza apunta, por definición, a la optimización de un aprendizaje en los alumnos, al haber definido el aprendizaje humano como «semantización anasintáctica de la experiencia» (apartado 6.1.16, *supra*), concibiendo la semantización como una atribución de significado, estamos de nuevo en el corazón de la semiótica, pues todo significado se da siempre en signos, que «sustituyen», «hacen referencia a» o «están por» las cosas/objetos significados. En la figura 34 tratamos de representar gráficamente este lugar conceptual clave de la semiótica para ambos polos de toda actividad didáctica, la enseñanza y el aprendizaje. Nosotros tenemos ya mucho camino andado, puesto que en el apartado 3.3 («el cuestionamiento epistemológico: indeterminación semántica e indeterminación técnica») hemos introducido conceptos claves en esa parte de la semiótica que es para nosotros más sustancial, la semántica. Veamos el puente entre las ideas básicas (analizadores aquí ahora) allí expuestas y el esquema básico de la comunicación, puesto que la enseñanza, como queda dicho, no es sino una clase peculiar de comunicación, la que apunta a la optimización sistemática y científica del aprendizaje en el alumno. Resumiendo lo allí dicho que puede servirnos en este apartado temático, hemos de poner de relieve, de entrada, la generalidad antropológica del ser humano como «animal semiótico», es decir, constituye una constante de hominización el hecho radical de que el hombre habita entre signos y símbolos, no entre cosas; puesto que no hay para él cosa sin significado, como enseñan las investigaciones, ya casi centenarias, sobre la percepción humana. La argumentación es muy nítida, puesto que no hay hominización sin cultura y no hay culturificación sin «interaccionismo simbólico», en una permanente comunicación que crea, recibe, interpreta y transmite significados sobre todas las cosas percibidas.

Ahora bien, en todo proceso de comunicación interhumana, específico tanto del proceso enseñanza/aprendizaje como del proceso de hominización, se daban, como veíamos, tres características peculiares: 1.ª Amplia equivocidad de los signos que se decodifican (de los mensajes que se descifran, por tanto); 2.ª Modificación creativa (transignificación productiva) de los mensajes recibidos, adaptándolos a los sistemas de analizadores disponibles por el receptor, sin posibilidad de adjudicarles otros significados que los previamente conocidos o los que desde ellos puedan construir-

FIGURA 34. Convergencia de la actividad de enseñar y de la actividad de aprender en su necesidad de utilizar signos y en la utilidad para ambos, por tanto, de los conocimientos de la semiótica (en cuanto ciencia de los signos)

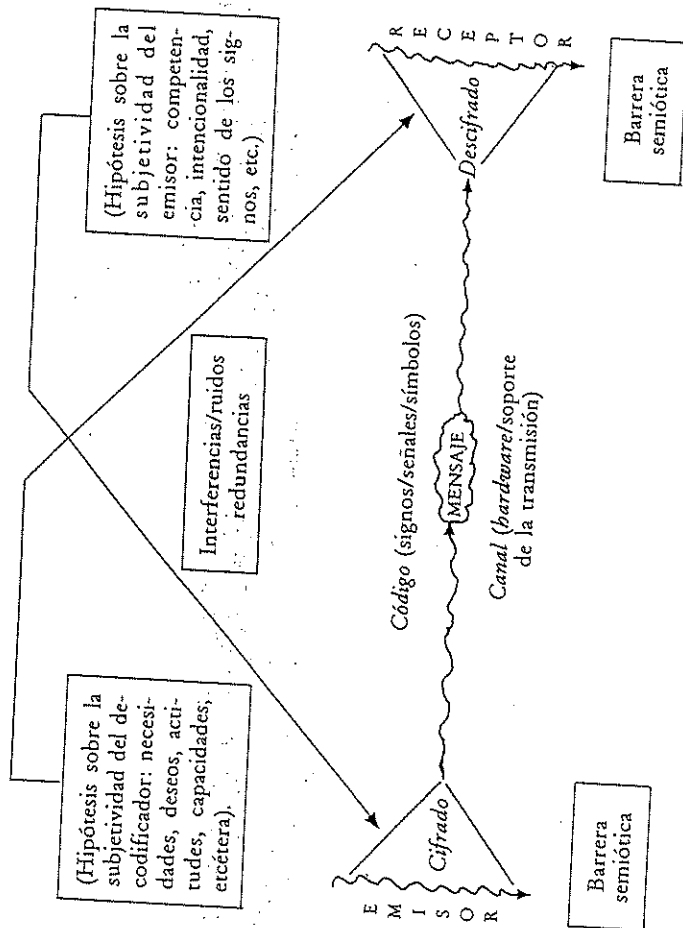


se; 3.º En los procesos de comunicación de mensajes pueden darse, tanto al cifrarlos como al descifrarlos (*encoding/decoding*), cambios de segundo orden, esto es, modificaciones más allá de la mera equivoicidad inevitable del lenguaje, por ejemplo, cambios de código, cambios de intención (se pueden emitir mensajes para enganar/desinformar al receptor), cambio de los marcos globales de referencia, por ejemplo, transición de la dimensión semiótica del *homo sapiens*, a la del *homo aestheticus* (del valor de verdad, al valor de belleza/felicidad, como horizonte significativo, o del valor de bondad al de eficacia técnica o económica, etcétera). En la figura 35 se pretende representar esquemáticamente lo que venimos diciendo: entre el polo emisor y el polo receptor de la comunicación se da el recorrido típico (unidad básica) de toda transmisión interhumana: un emisor que codifica un mensaje conforme a determinado código de signos y utiliza un canal que codifica un mensaje conforme a señales transmitidas (voz humana, escrito, imágenes, medios audiovisuales, etc.), un

receptor. que «lee» el mensaje y convierte los signos en los significados que, supuestamente, el emisor quiso codificar para su «canalización» hasta el receptor. Ahora bien, sobre este esquema general del proceso de la comunicación, es esencial tener en cuenta tres «complicaciones» recogidas en la figura: 1.º La modificación que sufren los mensajes, tanto al emitirlos como al recibirlos, de acuerdo con las hipótesis de subjetividad cruzada, es decir, la adecuación del mensaje emitido según lo que piense el emisor del receptor, no menos que la interpretación/decodificación de dicho mensaje por parte del receptor, según lo que éste piense del emisor (mensajes no directamente transmitidos, sino ocultados cuidadosamente a veces, por cierto); 2.º La modificación/modulación del mensaje a causa de interferencias: o ruidos (metáfora literalmente aprovechada de la terminología acústica de las transmisiones físicas, aplicada aquí a posibles coincidencias con otros mensajes paralelos disonantes de la intención semiótica del emisor) o a causa del nivel de redundancia (emisión de más información que la teóricamente imprescindible para un emisor «perfecto», por ejemplo, en la enseñanza, repetición o concepto, etcétera); aportación de un segundo ejemplo de la misma ley, principio o concepto, etcétera); 3.º La barrera semiótica interpuesta fatalmente entre todo emisor humano y su mensaje emitido, así como entre todo receptor humano y el mensaje recibido: esta barrera tiene como férreo armazón los mapas conceptuales y redes semióticas de cada uno de ellos y, como impenetrable relleno de su férrea estructura, la argamasa de los niveles de motivación y atención, voluntad de esfuerzo, situación del entorno extraescolar que incide sobre las tareas académicas de los alumnos, etcétera.

Nos encontramos ante una de las reflexiones/constataciones de mayor potencia pedagógica en la formación del profesorado, para la rotura de la trivialidad profesional de los docentes, objetivo primordial de toda esta primera tarea: comprender la enseñanza. En efecto, como veíamos en el citado apartado 3.3 («indeterminación semiótica e indeterminación técnica», cuya relectura aconsejamos a efectos de economía conceptual de analizadores aquí), el decodificador humano no asume los mensajes que le llegan como podría hacerlo el aparato decodificador de telegramas en el código Morse, ni como esas máquinas de empaquetar que introducen a toda velocidad los mensajes/cartas/revistas/libros en determinado envoltorio premanu-facturado, sin transformar en nada el contenido que empaquetan y transmiten. Al no ser el sujeto humano cosa entre cosas, sino más bien animal de significados entre signos y símbolos, todos los mensajes que aterrizan en la superficie de sus antenas son decodificados no mecánicamente, sino desde su interioridad semiótica y semiótica, con sus significados y signos disponibles, inteligibles para él y utilizables por él. No se trata, por tanto, de un mero transporte superficial, que deja la mercancía (los mensajes) tal y como estaban, sino que se trata de una verdadera «digestión» (valga la analogía), que produce efectos de transformación, como toda digestión, en ambos: en el alimento que se digiere (elemento metabólico) y en el sujeto que digiere (elemento estructural). Si insertamos ahora, en la complejidad metafórica de toda digestión, la complejidad semantizada y semantizada de toda experiencia humana, de todo aprendizaje humano, con los complejimos tejidos de las redes y campos semióticos que veíamos en el apartado 1.2 de esta misma tarea, sobre la

FIGURA 35. Representación esquemática del proceso de comunicación, con indicación de las barreras semióticas, punto crítico para la posibilidad de una enseñanza eficaz, que produzca el aprendizaje pretendido



comprensión (véase esquema de la figura 6), no nos quedará más remedio que reconocer que los profesionales de la enseñanza entramos con frecuencia en las aulas como elefante en cristalería, desconociendo totalmente la anatomía y fisiología de los tejidos (mentales) sobre los que tenemos que «operar» con el bisturí de nuestra enseñanza, desconociendo que permite predecir, sin gran dificultad, el nivel de éxito didáctico esperable de nuestras «intervenciones».

Instrumentos como el diferencial semiótico de Osgood (véase el citado apartado 3.3) pueden enseñarnos, en una adaptación artesana del instrumento para su aplicación en el aula, no sólo que el mensaje emitido por nosotros, los profesores, con intención didáctica, tiene poco que ver con el mensaje captado por nuestros alumnos, sino que, además, con frecuencia el mensaje descifrado por unos alumnos no tiene mucho que ver con el que han decodificado otros, a pesar de que todos oyeron/leyeron idénticos signos emitidos por su profesor. Por si fuera poco, a esta complejidad, un tanto lineal y previsible, que evidencia el diferencial semiótico de Osgood (u otro instrumento similar de «medición» del significado vivido por sujetos humanos), hay que añadir la diversidad, imprevisible e incalculable, de la

estructura cognitiva concreta disponible para «anásintatizar» (analizadores previos) la nueva información que la enseñanza suministra, además de añadir la diversidad que aporta al descifrado el filtro connotativo (afectivo) de todo conocimiento y de toda experiencia, no sólo ya el filtro conceptual (denotativo: véase explicación de estos términos en el antedicho apartado 3.3). Como veremos en la tercera tarea, la de ayudar a aprender (metodología didáctica), la consecuencia práctica, a pie de aula, de esta complejísima diversidad anatomofisiológica (mental, se entiende) de sujetos, o tipos de sujetos, entre nuestros alumnos, es técnicamente doble: a. necesidad de diagnosticar/conocer esas diferencias existentes entre nuestros alumnos, diferencias que condicionan lo que van a poder aprender de nuestros mensajes/exPLICACIONES (el profesor que no tiene en su mente el mapa que el alumno tiene en la suya, no está hablando a su alumno, sino a la pared de enfrente, o a sí mismo...); b. necesidad de adaptar los mensajes didácticos que los profesores emitimos a los decodificadores que sabemos (después de haberlos investigado) que los alumnos tienen. De lo contrario, la probabilidad de que nuestros mensajes estén condenados a la incompreensión por parte del alumno, es decir, a su fracaso académico, será muy elevada.

En el apartado anterior, sobre cerebro y aprendizaje, hemos puesto de relieve la base orgánica, neurofisiológica, del mundo de los conceptos (el sistema cortical) y el mundo de la afectividad, de la emocionalidad (sistema límbico). Pues bien, esas dos dimensiones cerebrales tienen su réplica semiótica en la fría dimensión de la denotación semiótica, por un lado, y en la cálida significación de la connotación, por otro. En todo caso, ambas contribuyen a fundamentar la necesidad de tener en cuenta el destinatario específico de nuestros mensajes didácticos, si queremos que éstos sirvan para algo, aparte de para justificar nuestra remuneración salarial.

La potencia explicativa y tecnológica (para comprender y para actuar pedagógicamente en las aulas) de este analizador semiótico (la enseñanza como proceso clásico de comunicación interhumana) es tan alta, que, en realidad, los siete apartados que restan de este capítulo sexto («La enorme complejidad psicodidáctica») tienen algo que ver con algún lugar de la topología representada en el esquema de la figura 35. En efecto, el próximo apartado (6.4: Motivación y «atribuciones») podría perfectamente inscribirse en tres lugares del esquema: entre las hipótesis del emisor (profesor) sobre la subjetividad del receptor (alumno), entre las interferencias/ruidos (en los casos de motivación negativa o aversión) y entre la argamasa o cemento de la barrera semiótica previa al descifrado de la recepción de los mensajes didácticos; el apartado 6.5 («La clave de la rentabilidad: transferencia del aprendizaje») guardaría estrecha relación con las redes semióticas y campos conceptuales del alumno, título por el que entraría de lleno en la amplitud relacional del cifrado del emisor y del descifrado o decodificación del receptor; el apartado 6.6 (sobre «la gramática mental del discurso didáctico»), al tratarse de las operaciones lógicas implicadas en los mensajes verbales del profesor, se situaría en el ámbito del cifrado y del canal, pues, en realidad, el léxico y la sintaxis, desde la perspectiva de la semiótica, vienen a ser como una especie de «hardware/sopORTE» fino, como un canal de segundo orden, que vehicula conceptos y argumentos, de la misma manera

que un hilo telefónico puede transmitir palabras/sonidos; los apartados 6.7 y 6.8 (estilos de aprendizaje y estilos didácticos de alumnos y profesores, respectivamente) tienen que ver, obviamente, con el código que el profesor va a utilizar, no menos que con la decodificación que el alumno va a hacer y, por otra parte, con las hipótesis sobre la subjetividad del alumno que el profesor va a formularse con vistas a la configuración de su mensaje (adaptada a sus hipótesis); el apartado 6.9 («psicología de la codificación medial») más que obviamente, casi terminológicamente, ya por su propio enunciado, se inserta en la «canalización» (*hardware*) de los mensajes; finalmente, el apartado 6.10 («ecología psicodinámica del aula») formaría parte de las interferencias, ruidos y redundancias que favorecen u obstaculizan la eficacia comunicativa de los mensajes didácticos.

Al hacer lo que acabamos de hacer en el párrafo anterior, el lector avisado habrá advertido que, con el pretexto (mensaje manifiesto) de hacer ver la potencia del analizador semiótico para comprender el proceso de comunicación enseñanza/aprendizaje, en realidad, además (mensaje oculto) hemos llevado a cabo una aplicación práctica de conceptos teóricos (analizadores) anteriormente expuestos: *a.* hemos verificado en un caso concreto la pluripectividad de que es susceptible todo objeto de estudio/análisis, en nuestro caso el objeto enseñanza/aprendizaje (al ponerse a aplicar el foco de luz específico de distintos modelos de comprensión, en nuestro caso la enseñanza como proceso de comunicación); *b.* hemos visto funcionar en la práctica las estructuras de los mapas conceptuales y de las redes semánticas, como analizadores previos que dan sentido a la realidad observada (en nuestro caso el enseñar/aprender), puesto que si éstos no hubieran tenido incorporado en su estructura de inclusores el modelo/concepto de comunicación representado en la figura 35, mal hubieran podido subsumir, como un caso particular de su clase conceptual, dicho proceso de enseñar/aprender.

6.4. MOTIVACIÓN Y «ATRIBUCIONES»

Como quiera que la finalidad de esta obra es mejorar la calidad de la enseñanza a través de los profesionales de la educación que, por una u otra situación, la tienen, al menos en parte, en sus manos, partiremos, como venimos haciendo, de una experiencia común a cuantos llevamos tiempo ejerciendo la docencia: es un hecho probablemente experimentado por la práctica totalidad de los lectores que uno se encuentra frecuentemente con casos de alumnos (o de hijos de amigos, o de propios hijos) en los que se aprecia un alto nivel de inteligencia demostrado de capacidad técnica para emprender/organizar proyectos, alto nivel de concentración/dedicación/esfuerzo/atención a actividades que emprende por su cuenta, una imaginación constructiva y lógica fuera de lo común, todo ello, junto con un bajo (incluso bajísimo) rendimiento académico. Ante estos casos, el comentario suele ser tan común, como dijimos que lo era la experiencia que todos tenemos de ellos: «Les falta motivación. Ah, si ellos quisieran...», etcétera. Lamentablemente, ésta es otra

de las grandes trivialidades profesionales de los docentes, con cuantas excepciones queramos: entramos en el aula, enseñamos, evaluamos, preparamos los cursos que impartimos, sin prestar la menor atención a este aspecto clave, si alguno lo es, para la eficacia de la enseñanza, es decir, para el éxito en el aprendizaje por parte del alumno, a saber, su sistema motivacional, sistema que puede ser tan diferenciado de unos estudiantes a otros, como veíamos que podían serlo los sistemas de analizadores cognitivos (mapas conceptuales, árboles lógicos, redes semánticas, estructuras referenciales), o incluso más.

En su excelente trabajo, que ya nos es conocido, *Éléments de psycho-pédagogie générale*, Louis Not dice con claridad cartesiana: «Toda actividad requiere un dinamismo, una dinámica, la cual se define por dos conceptos, el concepto de energía y el concepto de dirección. En el campo de la psicología este dinamismo tiene su origen en las motivaciones que los sujetos puedan tener»⁹⁸. Para nuestro interés didáctico aplicado, creo esencial aprovechar estas dos nociones: la motivación de los alumnos hacia el aprendizaje que nuestra enseñanza persigue depende de que la cantidad de su energía (psíquica, mental, atencional, etcétera) que seamos capaces de provocar tome la dirección de nuestros mensajes didácticos. Evidentemente, la cuestión inevitable que inmediatamente se plantea es la de averiguar de qué depende que los alumnos opten por centrar su energía/interés en el aprendizaje escolar, en el estudio de tales o cuales materias del currículo, como primer interrogante teórico/descriptivo, para pasar inmediatamente a un segundo interrogante, éste de carácter técnico/práctico: ¿cómo podríamos intervenir, qué podríamos hacer como profesores, para conseguir que los alumnos estuvieran motivados hacia el aprendizaje escolar, hacia lo que vendemos? Porque sólo después de haber respondido a la primera cuestión hay posibilidad de responder racionalmente a la segunda, como sólo después de saber de qué depende que un paciente tenga fiebre, podremos hacer algo eficaz para eliminarla (a menos que nos quedemos en el entramado superficial y meramente sintomático de los antipiréticos, que no curan la enfermedad, tan sólo la ocultan). Pues bien, de la primera cuestión, descriptiva, ocuparemos en el presente apartado, ya que en toda esta tarea nuestro objetivo es precisamente describir la «enorme complejidad psicodidáctica» de la enseñanza; la segunda cuestión, la técnico/práctica (¿qué hacer como profesionales de la enseñanza al respecto?), será objeto de estudio en el apartado 4.4 de la tercera tarea: «¿Cómo enseñar/ayudar a aprender? Metodología didáctica», bajo el epígrafe del «principio o constante didáctica de la motivación».

Empezaremos por diferenciar distintos tipos o clases de motivación, con lo que se irá destruyendo nuestra trivialidad profesional como docentes, al ir tomando conciencia pretécnica de la complejidad descriptiva de esta subdimensión dentro de la complejidad psicodidáctica de la enseñanza/aprendizaje.

El mismo autor citado⁹⁹ distingue dos grandes tipos de motivación para el aprendizaje escolar: *a.* Las motivaciones del alumno en las pedagogías centradas en el docente, pedagogías de la transmisión y la inculcación (las sanciones, la emulación, la atracción/atrativo); *b.* Las motivaciones en las pedagogías centradas en el alumno (necesidad, interés, juego), concluyendo el autor con un análisis de las

perspectivas geneúcoestructurales sobre la motivación, que culmina con la convergencia deseable entre el proyecto pedagógico del centro y el proyecto vital que para su propia vida pueden tener los alumnos («*projet pédagogique et projet de soi*»).

En trabajos tan específicos para nuestro interés psicodidáctico, como el título *Research on motivation in education*, vol. 2: *The classroom milieu*¹⁰⁰, encontramos los siguientes sistemas de motivación aplicados en las aulas: *a.* Sistema de motivación individualista, que puede ser intrínseco (se desea aprender) o extrínseco (se desea positivamente granjearse la aceptación del profesor o de los padres, o se persigue negativamente verse libre de los castigos de ambos); *b.* Sistema motivacional competitivo, en el que el alumno lo que busca es quedar por encima de sus compañeros, no quedar por debajo de ellos; *c.* Sistema motivacional cooperativo, que puede subsumir una doble incentivación: la consecución de algo útil o la ayuda a los demás (deseo de ayuda que bien puede ocultar a veces una necesidad de «afiliación», es decir, una dependencia inconsciente de la aceptación por individuos o grupos de los que se depende, estableciéndose relaciones de pertenencia subordinada en los que el sujeto encuentra su bienestar psíquico, seguridad, afecto, aplauso, etcétera). Tendríamos pues también en este caso los dos tipos básicos de motivación, la intrínseca (aumentar la propia competencia, los propios conocimientos y capacidades) y la extrínseca (la dependencia egocéntrica antedicha). Renunciando, como siempre que nos es posible, a fundamentar nuestras reflexiones en lejanas y asépticas investigaciones de laboratorio (a veces, incluso, llevadas a cabo en otras especies animales), para establecer más bien nuestras referencias en trabajos realizados en las aulas (garantía básica de su aplicabilidad a las aulas), nos parece muy interesante la tipificación que establecen Day y Berlyne en su excelente esquema publicado bajo el título de *Intrinsic motivation* dentro del marco editorial «*Psychology and educational practice*»¹⁰¹. Convencidos estos autores de la importancia motivacional de la curiosidad, y de la actividad exploratoria consiguiente, para un auténtico aprendizaje, comienzan por diferenciar, atendiendo a la superficialidad del proceso cognitivo movilizado por el sujeto, la curiosidad perceptiva (sustanciales novedades del objeto) y la curiosidad epistémica, estimulada por una duda o interrogante cognitivo conceptual, de nivel superior, de mayor profundidad. Esta curiosidad epistémica puede generar para estos autores dos tipos de exploración: *a.* una exploración o búsqueda (aprendizaje) específica (centración detallada en un tema concreto, en cuyo análisis se profundiza); *b.* una exploración diversificada, que va más allá de los hechos/datos originadores de la curiosidad/exploración, para iluminar zonas afines y ensanchar marcos de referencia. Recordamos elementos de análisis anteriores expuestos que pueden servir para establecer puentes (nexos internalizadores) entre esta clasificación y las redes semánticas del aprendizaje y de la motivación, por ejemplo: semantización anasintáctica, zona de expansión de los sistemas de analizadores, etcétera.

Puede revestir especial interés para nosotros también la visión de Ausubel, máxime cuando su trabajo sobre *Psicología educativa: un punto de vista cognitivo* va acompañado de la firma de dos colaboradores suyos de la categoría de Novak y

de Hanesian¹⁰², y ello por dos razones: por su proximidad a nuestro sistema de analizadores, aunque sólo sea a causa de su énfasis en la estructuración cognitiva y, además, debido a su perspectiva centralmente escolar, perspectiva en la que coincide con la mayoría de los lectores de la presente obra. Pues bien, Ausubel y sus colaboradores distinguen casi más bien que tres tipos o clases de motivación, tres componentes de la misma, en mayor o menor medida, compatibles en simultaneidad, dentro de la inevitable tensión por acaparar cada uno de ellos el máximo de conciencia psíquica (atención expresa) del alumno, del discente en general. Estos tres componentes serían: el impulso cognitivo, la necesidad de aprender/conocer y de resolver problemas académicos por sí mismos (motivación intrínseca, orientada a la tarea); el impulso hacia el mejoramiento del yo (autoestima, estatus primario, prestigio, futuras metas académicas y/o profesionales, en su calidad de futuras fuentes de estatus también primarios); la motivación afiliativa, que no está objetivamente orientada ni hacia la adquisición del conocimiento en sí mismo (motivación intrínseca), ni al mejoramiento del yo y sus habilidades futuras efectivas, sino que esta tendencia hacia la afiliación, de manera egocéntrica y en búsqueda de una satisfacción psíquica momentánea (a corto plazo: aquí y ahora) se dirige hacia la satisfacción afectiva que produce la aceptación, aprobación o aplauso del alumno por parte de personas o grupos que él percibe superiores a él, en el sentido de que su bienestar psíquico depende de esa aceptación/aprobación precisadamente (en términos de la psicología moderna, relaciones manifiestas de dependencia).

De lo dicho hasta ahora se nos van ya perfilando las cuatro grandes clases de motivación para la conducta humana en general, y para la conducta de aprendizaje/estudio en particular, que es la que aquí nos ocupa: *a.* motivación relacionada con la tarea misma o motivación intrínseca (el sujeto experimenta que aprende, que aumenta su competencia en el ámbito de que se trate, que está haciendo lo que él desea [lo que a él le gusta], se siente absorbido por la tarea que le ocupa, sin aburrimiento ni ansiedad alguna: se trata de las denominadas tareas «autotéticas», las más gratificantes, cuyo fin está en sí mismas, no buscando el sujeto nada fuera de ellas, al menos en su autoconciencia explícita); *b.* motivación relacionada con el yo, en términos de lo que hemos denominado «autoestima», y que en el contexto escolar, muy pragmáticamente, significa no percibirse inferior a los demás y, en versión positiva más ambiciosa, percibirse como superior/mejor que otros; *c.* motivación centrada en la valoración social, a la que nos hemos referido líneas arriba como motivación de afiliación; *d.* motivación que apunta al logro de recompensas externas (conseguir premios, dinero, un regalo, etcétera)¹⁰³. Nuestra preocupación, del lector y mía, por la aplicación práctica de cuantos modelos teóricos se nos ofrezcan, empieza ya a inquietarse por las preguntas pedagógicamente pertinentes: ¿qué motivación es educativamente la mejor? ¿Qué puede hacerse, desde la actividad docente, por fomentarla? Hacia estas cuestiones didácticamente significativas nos aproximamos ya apresuradamente.

Dos psicólogas americanas, Dweck y Elliot, al ocuparse de la motivación de logro («*achievement motivation*»), han investigado una tipología simplificada de la motivación para el aprendizaje escolar precisadamente¹⁰⁴. Distinguen estas autoras

entre una motivación centrada en conseguir metas de aprendizaje, en elevar el propio nivel de competencia, y una motivación que apunta a metas egocéntricas, centradas en el yo (reconocimiento social, prestigio, evitar castigos, etcétera). Jesús Alonso¹⁰⁵, investigador él mismo de estas cuestiones, resume en diez puntos de gran aplicabilidad didáctica las diferencias existentes entre los sujetos movidos por MA (motivación centrada en el aprendizaje) y los sujetos que actúan por ME (motivación centrada en su propio yo), a la hora de hacer frente a sus tareas escolares:

Aspecto o ámbito de aproximación a las tareas	Sujetos con motivación del tipo MA	Sujetos con motivación del tipo ME
1. Cuestión inicial.	¿Cómo puedo hacerlo?	¿Puedo hacerlo?
2. Foco de atención.	Proceso de realización.	Resultados de la tarea.
3. Concepción de los posibles errores.	Algo natural que puede ser ocasión para aprender.	Fracaso, algo siempre negativo.
4. Incertidumbre de los resultados.	Un desafío, un reto, una invitación/estímulo.	Una amenaza, peligro sistemático.
5. Tareas preferidas.	Aquellas en las que más pueden aprender.	Aquellas en las que más podrán lucirse.
6. Información que buscan.	Saber lo que saben e ignoran, para mejorar.	Noticias aduladoras sobre sus éxitos.
7. Tipo de normas de medición para su evaluación.	Personales, flexibles, a largo plazo.	Normatividad rígida, estimación inmediata.
8. Fundamento de sus expectativas.	El esfuerzo que están dispuestos a realizar.	Percepción de su competencia actual.
9. Percepción del profesor.	Ayuda, orientador, servido de asesoramiento.	Juez, sancionador con poder.
10. Por qué las metas son refuerzo.	Por la experiencia (intrínseca) del aumento del propio saber.	Por el reconocimiento esperado de los demás.

Es interesantísima, a efectos de analizador psicodidáctico y de posible actuación pedagógica, la sugerencia que hacen estas investigadoras en el sentido de que los sujetos movidos básicamente por motivaciones del tipo MA conciben la inteligencia como un conjunto de saberes y habilidades que ellos pueden incrementar con su esfuerzo, entendido como una inversión al servicio del aumento de su competencia y del logro de los objetivos de aprendizaje. Por el contrario, los sujetos movidos estable, que se pone de manifiesto a través de las propias actuaciones, con algo cualquier esfuerzo por conseguir un logro de aprendizaje puede representar, al mismo tiempo, una arriesgada oportunidad en la que quede de manifiesto el bajo nivel de la propia inteligencia. Por otra parte, las investigaciones del citado autor¹⁰⁶, más cercanas a nuestro contexto académico, ponen de relieve una relación de extraordinario interés psicopedagógico: los sujetos MA tienden a situar la causa

de sus resultados (*locus of attribution*) en sí mismos, mientras que los sujetos motivacionales ME propenden a buscar causas externas. Queda dicho con ello que los primeros se autoperiben como capaces de controlar el logro de las metas que se proponen, no así los segundos. Pero esto nos introduce ya en un nuevo analizador de enormes repercusiones didácticas, a través de los tipos de motivación que se generan, como es lógico: el analizador de la «teoría de la atribución».

Este modelo explicativo de los tipos motivacionales concede un papel decisivo al lugar en el que el sujeto sitúa la causa de sus resultados de éxito o fracaso en el aprendizaje. Weiner¹⁰⁷ distingue tres conceptos básicos para esta explicación: *a.* el citado lugar de control (*locus of control*), que da lugar a las categorías/analizadores de internalidad/externalidad, según que el sujeto encuentre la causa en sí mismo o en factores ajenos a él; *b.* la categoría bipolar de estabilidad/inestabilidad, que se da, por ejemplo, cuando el sujeto percibe un fracaso como producido por su falta de inteligencia (factor más bien estable), o cuando lo atribuye a su falta de esfuerzo (factor que puede considerarse más variable); *c.* el nivel de controlabilidad/incontrolabilidad que el sujeto cree que puede tener sobre las causas de los resultados observados en su rendimiento.

De manera semejante, Kelly¹⁰⁸ define tres categorías básicas de las que los sujetos toman su información para decidir sus opciones atribucionales, su adjudicación de causas a los éxitos y/o fracasos que experimentan, en nuestro caso, en su aprendizaje escolar: *a.* Especificidad: en qué medida un comportamiento determinado se da en situaciones diferentes o tan sólo en un contexto peculiar, por ejemplo: la especificidad será mayor cuando un estudiante tan sólo rechaza (suspende en) una asignatura muy concreta, que cuando rechaza/suspende casi todas las asignaturas de su currículo académico; *b.* Consistencia: en qué medida se observa una respuesta semejante por parte del sujeto en el pasado, por ejemplo: si el alumno viene rechazando/suspendiendo sistemáticamente, desde siempre, determinada asignatura, o si sólo acontece este año, con un profesor diferente, etcétera; *c.* Consenso: en qué medida la respuesta analizada es sólo del sujeto en cuestión o es compartida por otros, por ejemplo: si nuestro alumno es el único que rechaza/suspende una asignatura o si les acontece lo mismo a muchos o casi todos los alumnos de su clase. En la figura 36 pueden verse los ocho tipos teóricos de situaciones atribucionales que teóricamente podrían seguirse de la combinatoria de estas tres categorías de Kelly para los juicios de atribución de los sujetos.

De esta tabla cabe deducir una nueva dimensión de complejidad (diversidad de los alumnos en razón de sus situaciones diferenciales de atribución causal), complejidad que se sumaría a la introducida en los anteriores apartados (tipos cerebrales, diversidad semiótica) y a la que queda por introducir en las dimensiones de los apartados que siguen. Nótese, en todo caso, que si bien desde la perspectiva psicocomatemática, meramente descriptiva, de la combinatoria de los tres rasgos de Kelly resultan los ocho tipos atribucionales de la tabla de la figura 36, sin embargo, desde la perspectiva que aquí nos interesa, la del interés por la intervención didáctica en las aulas con los alumnos, los tipos habría que multiplicarlos por dos; en efecto, desde la práctica pedagógica, cada uno de esos tipos se desdobra, al menos,

FIGURA 36. Tabla generadora de los ocho posibles tipos atribucionales que se seguirían de las categorías de análisis de H. H. Kelley

Analizadores	Tipos atribucionales							
	A	B	C	D	E	F	G	H
Especificidad	+	+	+	-	-	-	+	-
Consistencia	+	+	-	-	+	-	-	+
Consenso	+	-	-	-	+	+	+	-

en dos, según que se trate de alumnos que buscan un lugar causal para sus éxitos, o de alumnos que buscan dónde está la causa de sus fracasos (huelga decir que el tratamiento pedagógico deberá ser diferente en una u otra de estas dos alternativas de situación pragmática, alternativa que deberá cruzarse con cada uno de los ocho tipos deducibles de las categorías atribucionales de Kelley).

Dentro de este universo semántico de analizadores conceptuales, parece lógico que: *a.* los alumnos/sujetos tenderán a hacer atribuciones causales externas (la causa estará para ellos fuera de ellos mismos), cuando se den, o él perciba, condiciones de alta especificidad, consistencia y consenso; *b.* al contrario, los alumnos tenderán a formular atribuciones causales internas (la causa dentro de ellos mismos), si se dan, o ellos perciben, condiciones de baja especificidad, alta consistencia y bajo consenso. Diferenciando ahora, como dijimos arriba, entre alumnos caracterizados por su éxito escolar y los fracasados (con bajas calificaciones), los primeros tendrán su máxima satisfacción cuando perciban que se da en su situación baja especificidad, bajo consenso, pero alta consistencia; por el contrario, estos alumnos exitosos tendrán su máxima insatisfacción, cuando se den, o ellos perciban que se dan, las condiciones de alta especificidad, alto consenso y alta consistencia. Los alumnos con malas calificaciones escolares, como es fácil inferir, tendrán su mayor satisfacción en las condiciones atribucionales de Kelley en las que los alumnos con éxito obtienen su máxima insatisfacción y, viceversa, cruzarán también su máxima insatisfacción con las condiciones en las que los alumnos de éxito logran su máxima insatisfacción mayor. Dejamos a la imaginación del lector: *a.* Proponer situaciones específicas subyacente a estos asertos atribucionales derivados de los analizadores Kelley y aplicados a la realidad escolar y académica 109

Pasando ahora de la mera descripción de los fenómenos motivacionales del aprendizaje a una selección crítica de los tipos de motivación pedagógicamente más deseables y, por tanto, didácticamente a instrumental, resumimos lo que nos parece más esencial al respecto:

A. La motivación intrínseca es pedagógicamente superior a la extrínseca, hasta el punto que las investigaciones coinciden en concluir que, cuando se introducen motivos extrínsecos a situaciones en que los sujetos se venían moviendo por motivos intrínsecos, la motivación intrínseca comienza a disminuir.

B. La ansiedad, como factor de motivación académica, puede servir, dentro de ciertos límites, para incrementar el rendimiento en aprendizajes de tipo mecánico, pero obstaculiza los aprendizajes de alto nivel, en los que entran en actividad los procesos más complejos/ricos de la mente.

C. La dificultad percibida en una tarea de aprendizaje, siempre dentro de ciertos límites, puede tener un efecto-estimulante para emprenderla, motivador, al contrario que tareas percibidas como excesivamente fáciles.

D. Evidentemente los sujetos que tienden a situar el *locus of control*, la causa de sus resultados, en sí mismos, más bien que en causas ajenas a sus posibilidades de intervención personal, suelen sentirse más fácilmente motivados a emprender tareas y afrontar problemas, pues parten de la hipótesis de posibilidad de éxito. Como se ha dicho agudamente, si bien no todos los que se proponen subir al Everest lo consiguen, ninguno de los que no se lo proponen lo logra. Se trata de un sencillo cálculo de probabilidades.

Aparte de programas de entrenamiento específicos, en los que se formula expresamente el objetivo de mejorar los niveles de motivación de los sujetos, modificando, si es necesario, los patrones habituales de atribución de los estudiantes 110 en la tercera tarea («ayudar a aprender, metodología didáctica», bajo el epígrafe 4.4: «la constante metodológica de la motivación»), nos ocuparemos de numerosas sugerencias prácticas para progresar en la optimación del aprendizaje del alumno, a través de la preparación de escenarios escolares motivadores por parte del profesor.

En una aproximación más profunda, quizá también más radical y, desde luego, más holística, al tema de la motivación para el aprendizaje en la escuela, podrían destacarse ideas como las que siguen:

A. El viejo Herbart ponía el dedo en la raíz del fracaso de la escuela y de las instituciones académicas en general, cuando defendía que, en realidad, el cometido central y sustancial de la escuela no debería ser otro que el de crear intereses nuevos en los alumnos; el resto o vendría por sí solo (tratándose de alumnos estadísticamente normales) o sería muy fácil de conseguir con la ayuda de los profesores.

B. La ya clásica jerarquía motivacional de Maslow (necesidades fisiológicas/de supervivencia, necesidad de seguridad, de amor/perterencia/aceptación, de estima y de autorrealización) puede prestarnos a los profesores un doble servicio: *a.* proporcionar un punto de referencia para ir diferenciando niveles evolutivos en el desarrollo motivacional de los alumnos a lo largo del sistema educativo y en consonancia con su edad; *b.* establecer inteligentemente nexos pragmáticos entre las tareas escolares y estas necesidades universales (constantes antropológicas) del ser humano, lo cual representaría, por definición, una garantía de éxito universal/consistente.

C. De la misma manera que, al hablar de los sistemas de analizadores, subra-

yábamos la necesidad de integrar en la intervención didáctica los cuatro ámbitos de nuestra definición de educación (el *homo sapiens*, el *homo faber*, el *homo ethicus* y el *homo aestheticus*), es esencial advertir aquí también que estos cuatro ámbitos del psiquismo humano constituyen al mismo tiempo cuatro fuentes naturales de motivaciones para todo ser humano, según sus niveles de educación: es más, cada uno de ellos, desde cualquiera de las asignaturas del currículo académico, puede/debe ser técnicamente «didactizado» sobre los otros tres, de manera que, por ejemplo, el *homo sapiens*, desde su especificidad intelectual y cognitiva, tome conciencia de los motivos que puede encontrar para su conducta y sus opciones personales en cada uno de los otros tres ámbitos y, de manera similar, desde sus especificidades respectivas, cada uno de los otros ámbitos. Las tareas de aplicación práctica para los profesores, intentando esta «pedagogización» motivacional antropológica, para las diferentes materias que enseñan, será de gran utilidad a sus alumnos, como podremos verificar en la segunda parte de esta obra.

D. Si ya veíamos la importancia de la socialización incluso para el desarrollo cognitivo del ser humano (aspecto especialmente destacado por autores como Vygotsky y Wallon), el desarrollo motivacional, dada la mayor implicación de las dimensiones afectivas de la comunicación y de la función connotativa del lenguaje (definida páginas atrás), guardará todavía mucha mayor relación de génesis respecto de los procesos de interacción social y de inculturación.

E. Aunque hablaremos de ello en la sexta tarea (sobre aspectos organizativos de la escuela), es esencial tomar nota ya aquí de que, aparte de la inteligencia y la habilidad con que un profesor aislado en su aula pueda intentar generar en sus alumnos altos niveles de motivación homínida hacia el aprendizaje académico, sus objetivos pueden quedar enmarcados en las nubes de la utopía, si el contexto organizativo de la escuela (relaciones humanas, sistemas de poder, ejercicio de la autoridad, reglamento de disciplina, clima escolar, etcétera) están en contradicción con las piadosas intenciones del ingenuo quijote de turno (la realidad es sistémica y quien lo ignora la pierde: lo grave es que en una escuela los profesores no suelen perderse solos, sino más bien acompañados de numerosos alumnos...).

F. Finalmente, conviene prestar atención a la dimensión evolutiva de las motivaciones asequibles a los alumnos, por razón de sus diversas edades (intelectual, moral, afectiva, social, etcétera): al igual que veíamos a propósito del desarrollo cognitivo, si no tenemos en cuenta los límites de las «zonas de crecimiento próximo» (en las que tanto incide el contexto de la interacción social), podemos correr el riesgo de cometer verdaderos despropósitos, tanto en el sentido de despilfarrar económico de intervenciones pedagógicas condenadas a la esterilidad, como en el sentido de aberraciones educativas, que conseguirían lo contrario de lo pretendido (los alumnos pueden llegar a rechazar/odiar, de manera muy especial y específica, precisamente los motivos que la escuela, fuera de tiempo y de momento, pretendía desarrollar en ellos, algo así como un niño puede llegar a odiar de por vida la lectura, a causa de que se intentó forzarle a aprender a leer, antes de haber llegado al umbral de la madurez lectora, la *reading readiness*, tan investigada empíricamente, por otra parte).

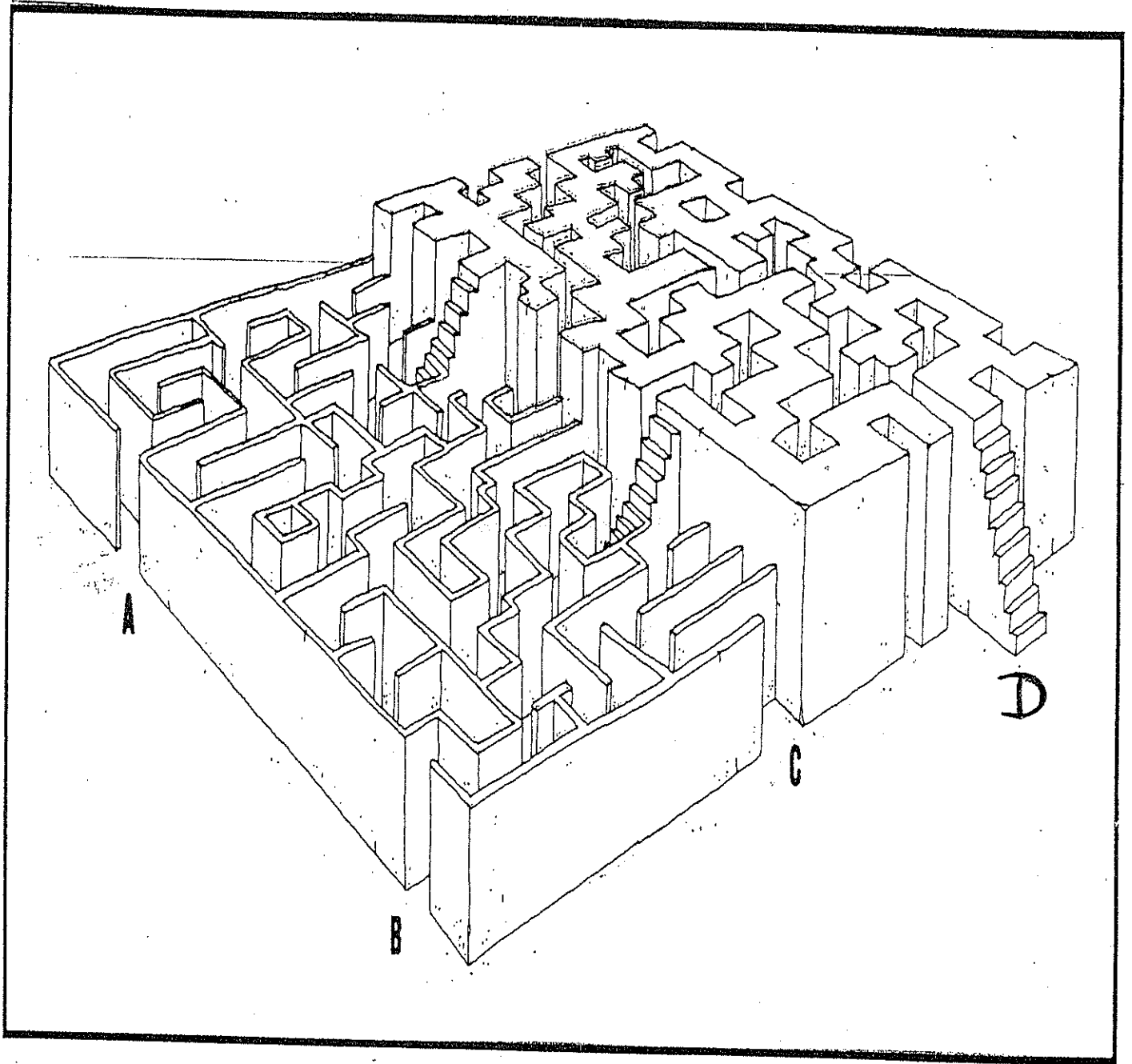
6.5. LA CLAVE DE LA RENTABILIDAD: TRANSFERENCIA DEL APRENDIZAJE

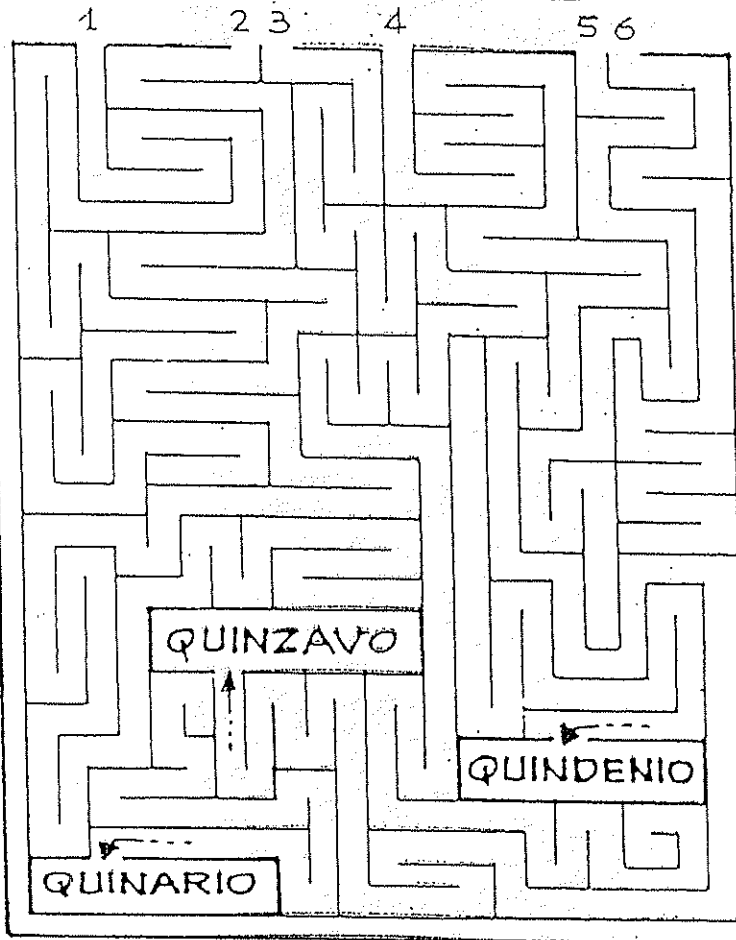
Pocos conceptos son tan obvios como el de la transferencia del aprendizaje, para la justificación de las tareas docentes y, sin embargo, pocas leyes de la economía didáctica son tan ignoradas, como las que se siguen de este concepto. Sin entrar en mayores disquisiciones, definiremos la transferencia del aprendizaje como la capacidad que un aprendizaje determinado puede tener de influir sobre otro u otros aprendizajes, para bien o para mal, para favorecerlo o para obstaculizarlo, para incrementar o disminuir la cantidad y/o calidad del mismo. Es conocido, por ejemplo, cómo la agilidad adquirida aprendiendo a tocar el piano, incide favorablemente sobre el aprendizaje de la mecanografía, por lo que se refiere a la precisión, control y rapidez de la motricidad digital. Lo mismo acontece con el aprendizaje de la suma, a la hora de aprender a multiplicar; con el aprendizaje de un idioma, respecto de otro que se aprendió antes o se va a aprender posteriormente; con el aprendizaje de la lectura en determinado texto, que puede transferirse a la lectura de nuevos textos distintos; con el aprender a caminar en determinada habitación de la casa, que puede luego transferirse a saber caminar en otras habitaciones, en otras casas, por la calle, en el campo, etcétera; con el aprendizaje de la lógica, que puede aplicarse a argumentaciones muy diferentes de aquellas en las que inicialmente se ejerció y aprendió, etcétera.

Como anticipábamos en el título, se trata de una cuestión clave para la rentabilidad de la enseñanza (la rentabilidad del aprendizaje), hasta tal punto que sencillamente la define. Es decir, tanto más rentable es (tanto más justificado está que figure en el currículo académico) determinado aprendizaje, cuanto más transferible sea a otros aprendizajes, a otros contextos, a otras situaciones, a otros problemas, etcétera. Precisamente radica aquí una de las críticas más frontales a multitud de aprendizajes que ocupan el espacio y el tiempo de las aulas escolares: más allá del papel del examen (más allá de la escuela), ¿a qué otros aprendizajes o situaciones del futuro (profesional, social o personal) va a poder aplicar el alumno los conocimientos adquiridos a través del aprendizaje, más o menos obligado, sistemáticamente institucionalizado en los centros docentes? Nótese que no está simplemente en juego aquí una cuestión tecnicista, a discutir entre altos expertos en teoría del aprendizaje; al contrario, lo que nos jugamos aquí es algo tan cotidiano y elemental como la rentabilidad de las cuantiosas inversiones que los ciudadanos financiamos anualmente con destino al sostenimiento del sistema educativo. En efecto: de muy poco serviría que un niño hubiera «aprendido» a andar, si no sabe dar un paso fuera de la habitación en que aprendió sus primeros pasos; de poco serviría que un alumno aprenda toda la mecánica de la resolución de sistemas de ecuaciones con varias incógnitas, si es incapaz de transferir ese conocimiento a resolver problemas concretos de álgebra; de poco serviría que un alumno tuviese media de sobresaliente en su expediente académico y fuera incluso premio extraordinario fin de carrera, si es incapaz de aplicar sus brillantes aprendizajes académicos a la profesión específica para la que dicha carrera, se supone, preparaba (medicina, derecho, pedagogía, arquitectura, etcétera).

LABERINTO

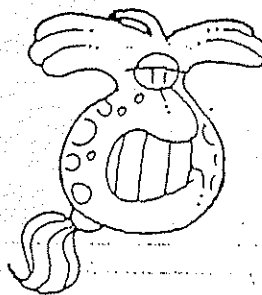
Determine cuáles entradas (A, B, C) permiten salir por D.



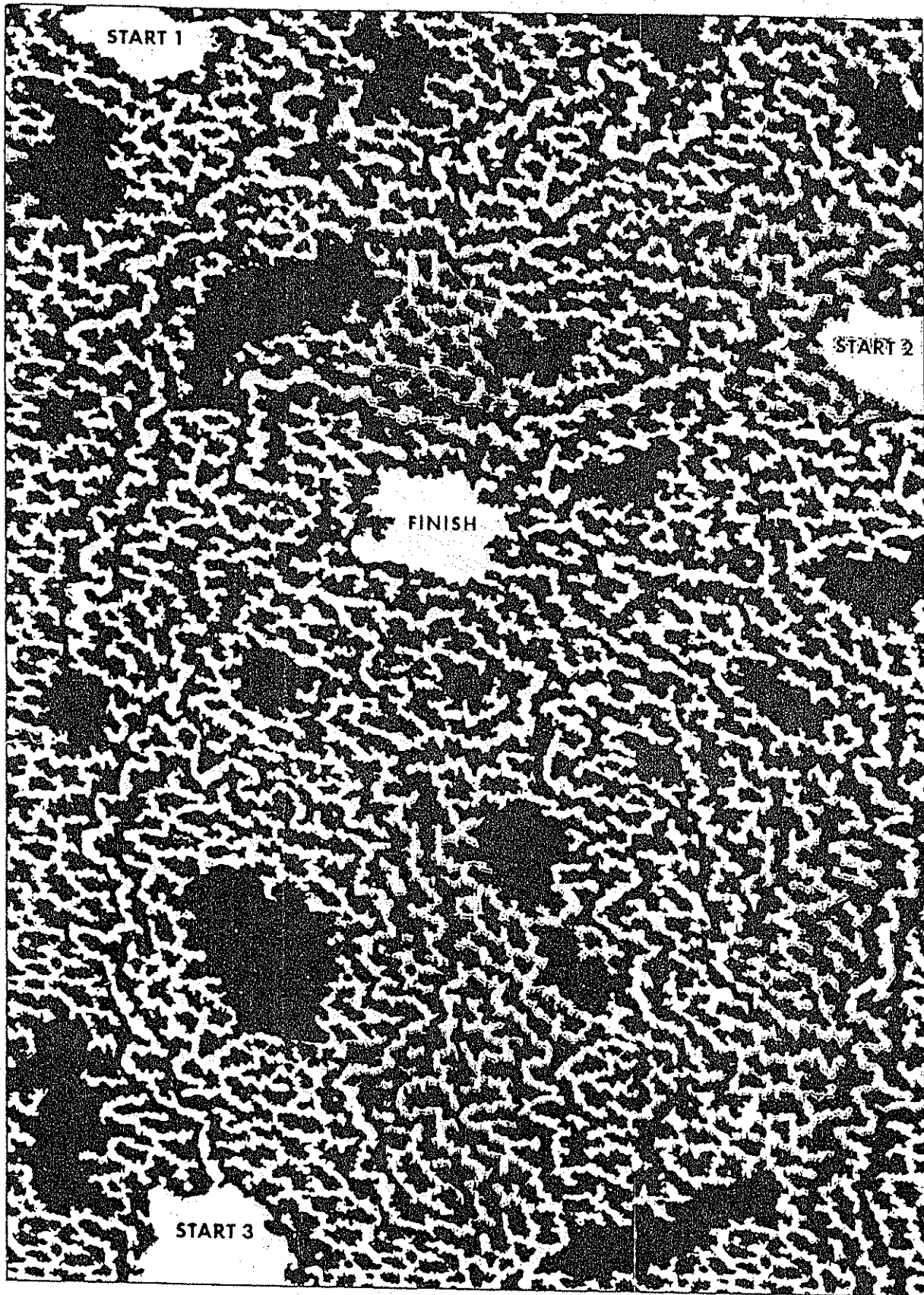


Laberinto didáctico

Sólo uno de los caminos numerados los llevará hasta donde se encuentra la palabra cuyo significado es una de las quince partes en que se divide un todo.

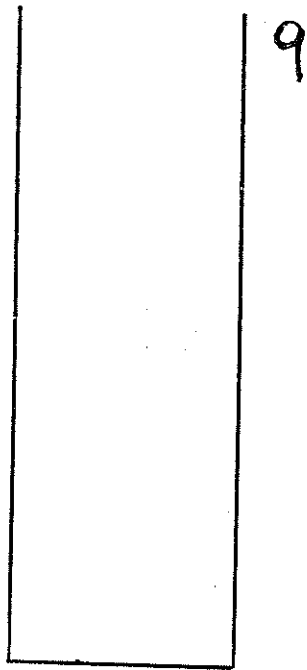


de R. Allen

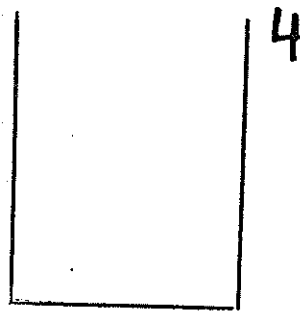


de G. Kolya

METODO REGRESIVO



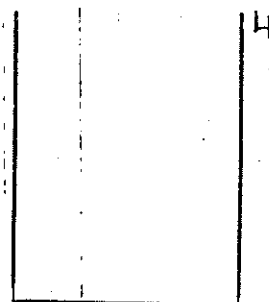
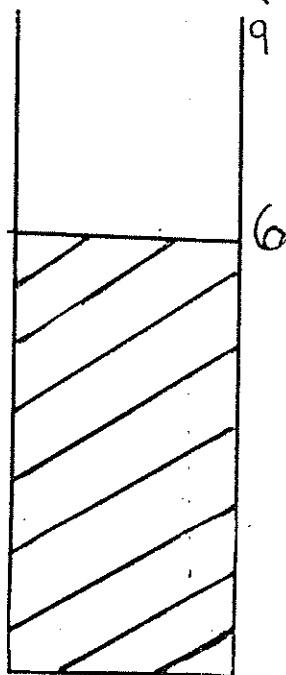
P: Situación inicial!



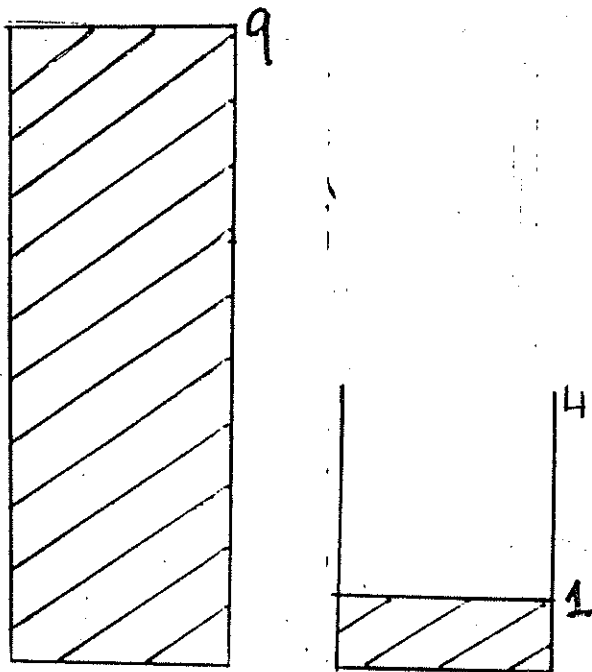
¿Cómo se puede traer de un río 6 litros de agua si, para medir el agua, sólo se dispone de 2 recipientes, uno de 4 litros y otro de 9 litros?

¿Qué se pide? (¿Cuál es la incógnita?)

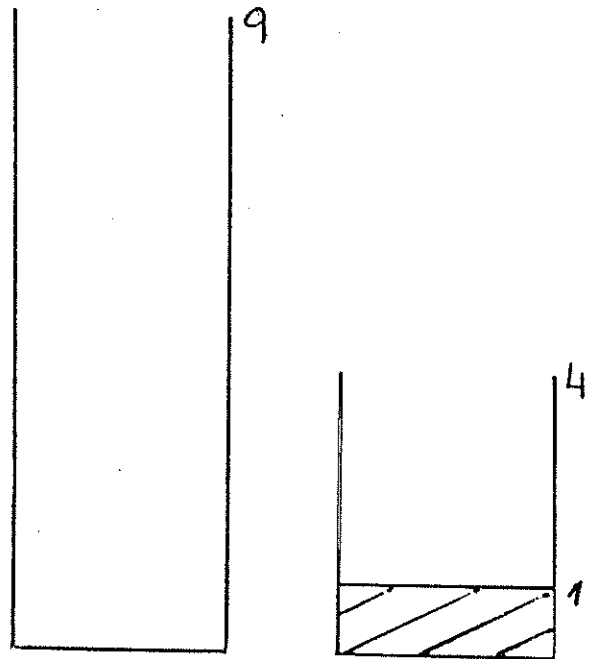
Q: Situación final que se quiere alcanzar



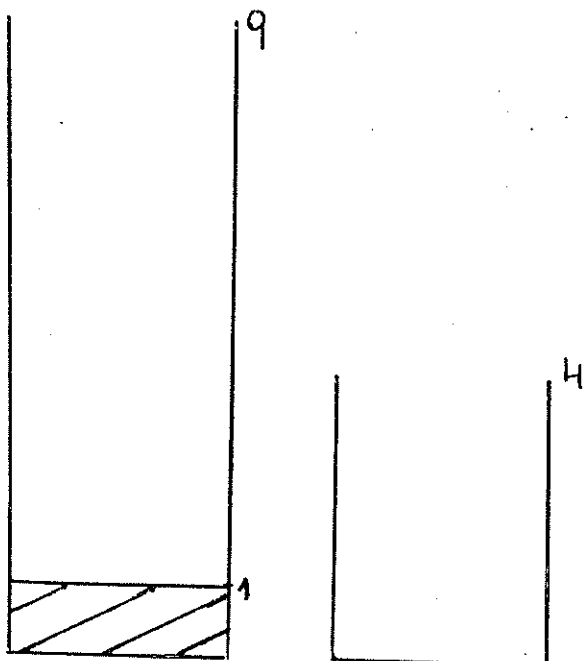
Q
19



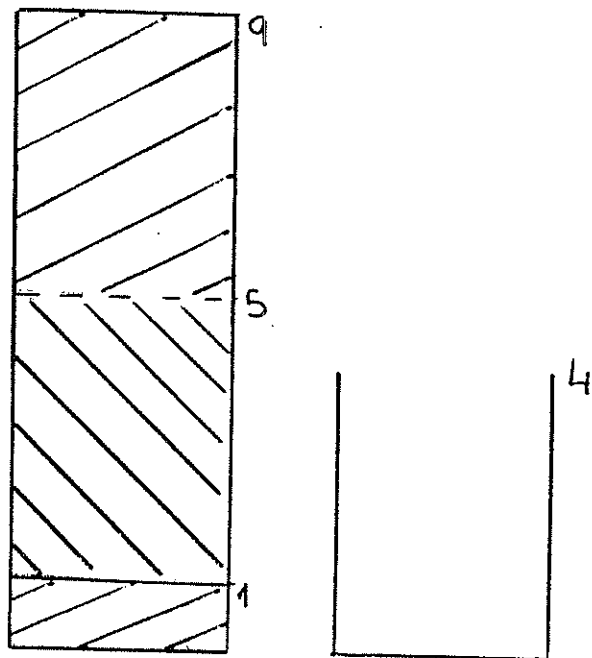
Q1



Q2



Q3



Q4

$P \Rightarrow Q4 \Rightarrow Q3 \Rightarrow Q2 \Rightarrow Q1 \Rightarrow Q$
 (Búsqueda de la solución utilizando el método progresivo-regresivo)

LOGICA de H. Rabuffetti

Proposición: Es toda expresión del lenguaje para la que tiene sentido afirmar que es VERDADERA (V) o que es FALSA (F).

Ejemplos.-

- 1) Buenos Aires es la capital de Argentina. \rightarrow proposición V
- 2) 1 es un número real negativo. \rightarrow proposición F
- 3) x es un número racional. \rightarrow No es una proposición
- 4) ¿Quién soy yo? \rightarrow pues nada puede decirse sobre la verdad o falsedad de la expresión.

Esquema proposicional en una variable:

$P(x)$ es un esquema proposicional en la variable x si y sólo si existe, al menos, una sustitución de x por una constante (o elemento de un conjunto numérico) que la transforma en proposición. ($p: \text{Dom}\{x\} \rightarrow \{V, F\}$ es una función)

Ejemplos.- $p(x)$ es el esquema " x es un número racional" (ver 3)
entonces $\begin{cases} p(1), p(\frac{2}{3}) \text{ son verdaderas} \\ p(\sqrt{2}), p(\sqrt{3}) \text{ son falsas} \end{cases}$

Cuantificación: Es un método para transformar esquemas proposicionales en proposiciones

Cuantificador universal: \forall (para todos, para cada)

Cuantificador existencial: \exists (existe al menos uno, existe alguno)

Se pueden considerar las siguientes proposiciones:

Sea $p(x)$ un esquema proposicional con un dado dominio. Entonces:

- 1) $\forall x : p(x)$ significa Todos los elementos tienen la propiedad p .
- 2) $\exists x : p(x)$ significa Algún elemento tiene la propiedad p .
- 3) $\forall x : \sim p(x)$ significa Ningún elemento tiene la propiedad p .
- 4) $\exists x : \sim p(x)$ significa Algún elemento no tiene la propiedad p .

De acuerdo con el lenguaje usual:

(i) (4) es la negación de (1), es decir:

$$\sim (\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim p(x)$$

(ii) (3) es la negación de (2), es decir:

$$\sim (\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \sim p(x)$$

Observación.- Tanto la cuantificación (\forall , \exists) como la negación (\sim) modifican el esquema propuesto. Por ende, tiene gran importancia el orden en que se colocan.

1) $\sim (\forall x : p(x))$ significa que "no todos los elementos poseen la propiedad p "
o su equivalente "algún elemento no tiene la propiedad p "

2) $\forall x : \sim p(x)$ significa que "ningún elemento tiene la propiedad p "

Ejemplos.

$$1) \sim (\forall x : x > 1) \Leftrightarrow \exists x : x \leq 1$$

$$2) \sim (\exists x : x \leq 1) \Leftrightarrow \forall x : x > 1$$

Observación.- El contraejemplo tiene la fuerza de una demostración. Es decir, que un ejemplo simple tiene la misma potencia, para negar una propiedad, que un Teorema para probarla.

Por ejemplo, para negar que todos los elementos de un conjunto tienen una propiedad, basta exhibir un elemento del conjunto que no la tenga.

Cuantificador universal: \forall \rightarrow "para todos" o "para cada"

Cuantificador existencial: \exists \rightarrow "existe algunos" o "existe por lo menos uno"

Ejemplos:

(i) $\forall x : P(x)$ \rightarrow todos los elementos tienen la propiedad P

(ii) $\exists x : P(x)$ \rightarrow algún elemento tiene la propiedad P

(iii) $\exists x, \forall y : P(x, y)$ \rightarrow indica que existe un elemento x para cualquier valor de y (el elemento x es el mismo para todo y)

Se lo utiliza para definir el elemento neutro en un conjunto. $\exists x, \forall y : x + y = y + x = y$

(iv) $\forall y, \exists x : P(x, y)$ \rightarrow indica que para todo elemento y existe un elemento x (el elemento x puede ser distinto para cada y)

Se lo utiliza para definir el elemento simétrico (opuesto para la suma, inverso para el producto) en un conjunto

$$\forall y, \exists x : x + y = y + x = 0 \quad (\forall y, x = -y)$$

TABLAS DE VERDAD

P	Q	$\text{NO } P \equiv \sim P$	$\text{NO } Q \equiv \sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\text{NO } Q \Rightarrow \text{NO } P$	$Q \Rightarrow P$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

son equivalentes

		\vee \downarrow $P \wedge Q$	o inclusivo \downarrow $P \vee Q$	o exclusivo (excluyente) \downarrow $P \Delta Q$
P	Q			
V	V	V	V	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

LOS TRES MÉTODOS MÁS IMPORTANTES PARA DEMOSTRAR PROPOSICIONES EN MATEMÁTICA

(de D. Solow)

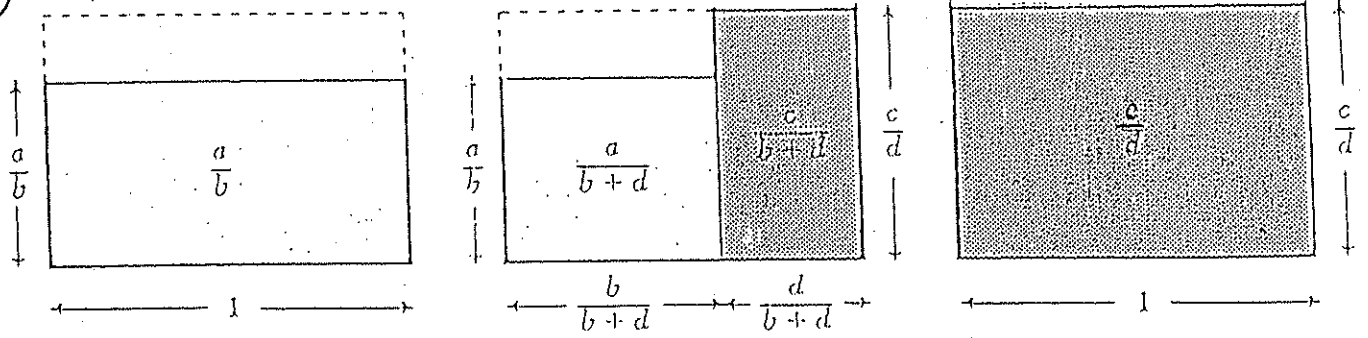
$$P \Rightarrow Q$$

<u>MÉTODO</u>	<u>SUPONGA</u>	<u>CONCLUYA</u>
Progresivo-regresivo	$P \xrightarrow{\dots\dots\dots} \dots\dots\dots$ (progresivamente)	$\dots\dots\dots \xleftarrow{\dots\dots\dots} Q$ (regresivamente)
Contradicción	$P \dots\dots\dots$ (progresivamente) $\text{NO } Q \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots \ast$ (Contradicción)
Contrarrecíproco	$P \leftarrow$ no se supone $\text{NO } Q \dots\dots\dots$ progresivamente	$\dots\dots\dots \xleftarrow{\dots\dots\dots} \text{NO } P$ regresivamente

Proof without Words: Règle des Nombres Moyens

[Nicolas Chuquet, *Le Triparty en la Science des Nombres*, 1484]

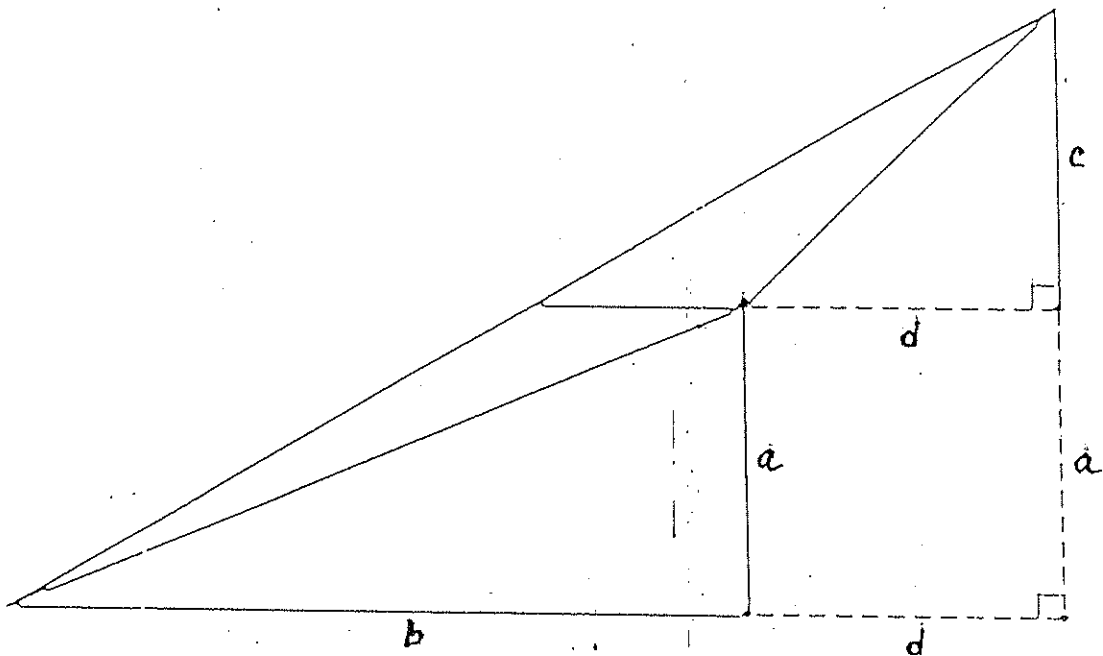
I)



$$a, b, c, d > 0; \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

II)



Errores en las Demostraciones Geométricas

del libro: Y.S. DUBNOV, "Errores de las demostraciones geométricas", Limusa, México (1973).

Problema. - (i) ¿Un cuadrado Q de lado 21 tiene la misma área de un rectángulo R cuyos lados son 34 y 13?

(ii) El cuadrado Q se divide en cuatro regiones, designadas I, II, III y IV, según la Figura 1. Dichas cuatro partes se reacomodan para formar el rectángulo R según la Figura 2. ¿De dónde proviene la unidad de área extra en el rectángulo R?

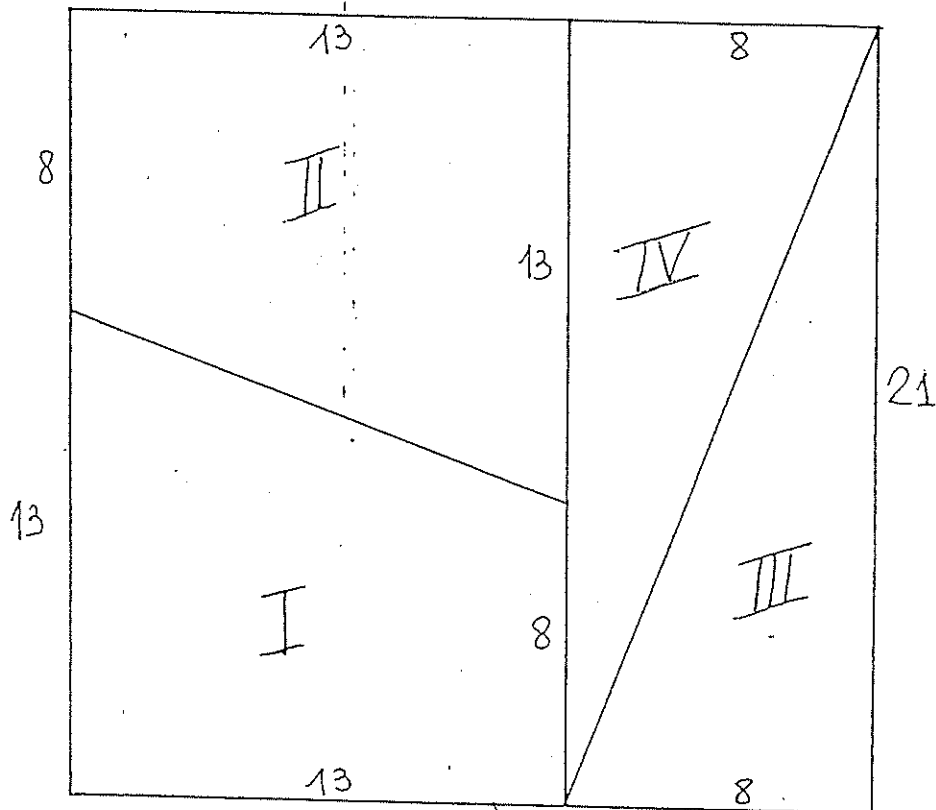


Figura 1. - Cuadrado Q de lado 21, Área Q = $21 \times 21 = 441$

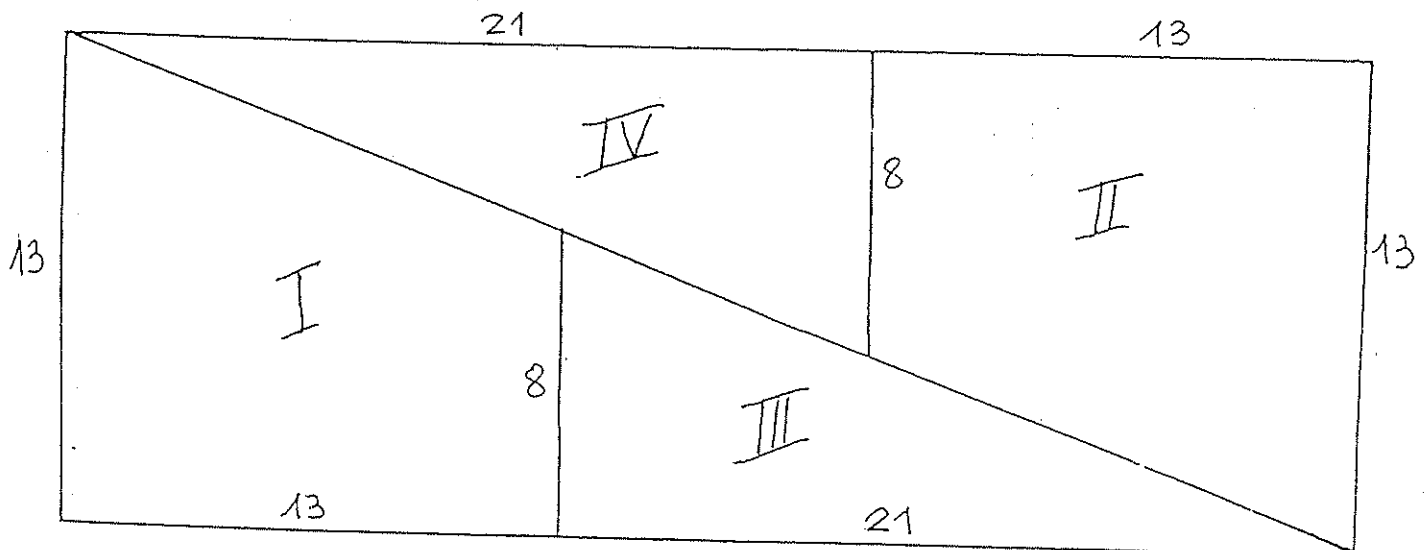
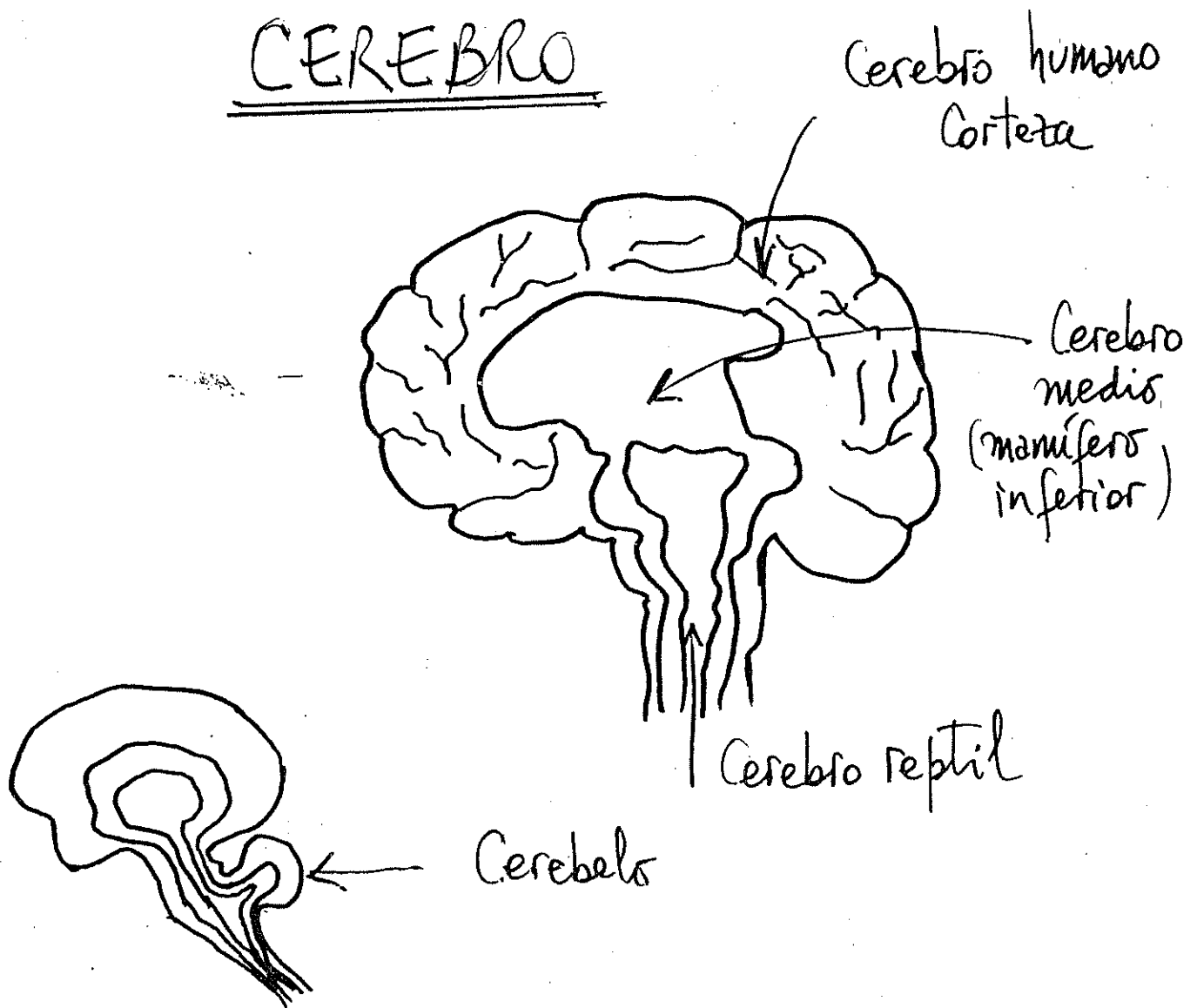


Figura 2. - Rectángulo R de dimensiones 13 x 34; Área R = $13 \times 34 = 442$

¿DE DONDE PROVIENE LA UNIDAD DE AREA EXTRA?

CEREBRO



El cerebro reptil y mamífero están vinculados con las emociones y lo biológico.

El reptil obra por instinto, empleando el conocimiento acumulado en el pasado. Es el jefe de máquina.

El cerebro medio reacciona ante las situaciones presente.

La corteza es muy flexible y adaptable a los cambios y diversas circunstancias. Es capaz de planificar lo venidero, el futuro. Es el capitán y tiene 2 hemisferios.

El cerebelo (o cerebro pequeño) es el "piloto automático" del ser humano.

ESTILOS DE APRENDIZAJE DE LOS NIÑOS EN EL AREA MATEMÁTICA (Davidson - Marolda, Mathematics Diagnostic/Prescriptive Inventory)

ESTILO 1.

PREFIEREN UNA "FÓRMULA" DE APROXIMACIÓN A LAS MATEMÁTICAS EN LA QUE SIGAN UNA SECUENCIA PASO A PASO DE OPERACIONES, AVANZANDO HACIA UNA SOLUCIÓN. RARA VEZ EVALÚAN, TIENDEN A RECORDAR PARTES MEJOR QUE CONJUNTOS, Y SIENTEN UNA IMPERIOSA NECESIDAD DE CONVENCERSE A SÍ MISMOS A TRAVÉS DE LAS OPERACIONES... A MENUDO SON MUY EXACTOS EN DESARROLLAR (LA FÓRMULA), PERO SI BIEN PUEDEN LLEGAR AL RESULTADO CORRECTO, CABE QUE PERMANEZCAN TOTALMENTE AL MARGEN DE LA LÓGICA QUE CONFIERE SENTIDO A LO QUE ESTÁN HACIENDO.

ESTILO 2.

MUESTRAN IMPACIENCIA ANTE LOS PROCEDIMIENTOS PASO A PASO Y ES PROBABLE QUE COMETAN ERRORES MIENTRAS LOS EFECTÚAN. ESTOS NIÑOS SON VÁLIDOS PARA LA ESTIMACIÓN, PUEDEN DAR ESPONTÁNEAMENTE UNA RESPUESTA CORRECTA SIN SABER CÓMO SE HA LLEGADO A ELLA, Y SON SUPERIORES EN EL RECONOCIMIENTO DE PAUTAS A GRAN ESCALA (Loviglio, The Massachusetts Teacher (1981)).

Fases en la Resolución de Problemas

1) SATURACIÓN:

Trabaje sobre su problema hasta que haya realizado todo lo que podía hacer.
(Pruebe con todos los métodos e ideas que se le presenten en su mente).

2) INCUBACIÓN:

Ponga el problema fuera de su mente consciente y deje que su inconsciente lo tome y trabaje.

3) INSPIRACIÓN:

La respuesta al problema le viene en un flash (en un momento).

4) VERIFICACIÓN:

Chequee la respuesta para estar seguro.

M. De GUZMÁN, "Para pensar mejor.
Desarrollo de la creatividad a través de
los procesos matemáticos",
Ediciones Pirámide, Madrid (1995).

PARTE QUINTA

La actividad subconsciente en la resolución de problemas

En nuestro complicado mecanismo mental confluyen simultáneamente y de modo natural y espontáneo actividades de muy diverso tipo. Los dinamismos del conocimiento son muchos y muy variados: sensaciones, imágenes subyacentes, memorias, surcos de inferencia, patrones de reconocimiento... que se presentan con un tipo de conciencia gradual que va desde la plena atención consciente a un aspecto determinado hasta la percepción difusa que casi desaparece o que permanece en la total penumbra, aun así influyendo tal vez fuertemente en la marcha del pensamiento.

Por otra parte, la coloración afectiva de nuestra mente proporciona un profundo impacto sobre nuestro pensamiento y sobre su posible eficacia o ineficacia. Los deseos, ansiedades, repugnancias, miedos..., son intensas fuerzas que también condicionan de modo decisivo nuestra actuación mental.

Calibrar exactamente el grado de importancia en la labor creativa, de resolución de problemas, de los movimientos subconscientes e inconscientes es una tarea nada sencilla, pues implica tratar de adentrarse en lo más recóndito y misterioso de la mente humana.

Como veremos en el primer capítulo de esta parte, para muchos matemáticos de gran éxito creativo la influencia de la actividad subconsciente en sus procesos mentales aparece como algo totalmente patente y decisivo. Es interesante obser-

var que la oposición mayor a esta convicción provenga precisamente de algunos psicólogos que opinan que los matemáticos y otros científicos, así como muchos artistas, se engañan en la interpretación ingenua de sus experiencias.

En el capítulo 28, a través de unas cuantas especulaciones tal vez un tanto aventuradas, pero no sin fundamento, trataré de apuntar un principio de explicación de los fenómenos experimentados y descritos por grandes matemáticos, que en medida más modesta son también compartidos por prácticamente todos los que se enfrascan con interés en problemas más sencillos.

En el capítulo 29, final de la obra, se apunta hacia formas diferentes de tratar de estimular de modo activo la interacción de las potencialidades subconscientes de nuestro mecanismo mental a las que muy de ordinario no permitimos que se involucren en nuestra labor creativa.

27

¿Actividad subconsciente? Algunos testimonios de grandes matemáticos

Para cualquier matemático que se entrega con entusiasmo a la tarea de resolver los problemas específicos de su área, la importancia del subconsciente es tan evidente que le resulta chocante encontrar entre los psicólogos quienes la nieguen frontalmente.

La obra de R. Weisberg *Creatividad. El genio y otros mitos* (Barcelona, Labor, 1987) constituye un intento de «desmitificación» de lo que él considera una concepción errónea del proceso creativo. Frente a descripciones e intentos de explicación, como los que veremos a continuación, de matemáticos como Poincaré, Hadamard, y otros científicos y artistas, la concepción de Weisberg, en sus propias palabras «carga el énfasis en la dependencia de los actos creativos respecto de la experiencia previa y en la gradual evolución de una respuesta creativa basada en la experiencia pasada. No han de darse grandes saltos de la intuición, sean conscientes o inconscientes. Por el contrario, la acción creadora es lenta y progresiva, o “incremental”, como se dirá en este libro: en ella, la forma habitual de tratar un problema va evolucionando gradualmente hasta convertirse en algo nuevo» (prólogo).

Es verosímil que quienes niegan la realidad de una actividad subconsciente importante en la resolución de problemas quieran con ello expresar su convicción de la imposibilidad de hablar del tema con un mínimo de rigor científico.

Con todo, también hay psicólogos bien acreditados que muy razonablemente optan más bien por no esconder el problema bajo la alfombra. Así se expresan Lindsay y Norman en su *Introducción a la Psicología Cognitiva* (Madrid, Tecnos, 1986, pág. 666), al tratar de los mecanismos del pensamiento:

Los seres humanos son conscientes de sus propias acciones y pensamientos. Esta conciencia o autoconciencia es un aspecto fundamental de la conducta mental humana, pero se entiende poco. Sabemos poco sobre la función de la conciencia, poco de las operaciones que no son conscientes: los procesos del pensamiento subconsciente. Sospechamos que los procesos conscientes son fundamentales para la elección inteligente, para el aprendizaje, para la conducción del organismo. Sospechamos que existen numerosos procesos subconscientes que operan sin esta conducción consciente durante un tiempo, pero que deben buscar periódicamente supervisión y dirección. Todo lo que sabemos sobre el pensamiento consciente y subconsciente es muy especulativo. Sin embargo, el estudio del pensamiento es demasiado importante para dejarlo a un lado. Es un área de gran importancia para la psicología y para todos nosotros. Quizá el tema más importante de la psicología.

En esta quinta parte vamos a examinar brevemente el papel que eso un tanto misterioso que constituye la actividad subconsciente parece jugar en la resolución de problemas. El tema es tan importante que, incluso aunque no se pueda afirmar sobre él nada con rigor, vale la pena intercambiar experiencias con seriedad.

A continuación trataremos de ver desde un punto de vista práctico lo que se puede sugerir razonablemente a fin de favorecer activamente su ayuda. Como en todo el resto de este trabajo, pero aquí mucho más, no trato de realizar una investigación científica que conduzca a una colección de proposiciones que se hayan de considerar fuera de toda duda. Mi intención fundamental es transmitir, de la forma más útil posible,

un conjunto de experiencias derivadas de la observación por muchos años del trabajo propio y de otros muchos alumnos y colegas en la resolución de problemas.

Algunos testimonios de grandes matemáticos

Afortunadamente ha habido algunos matemáticos de primera magnitud que han expresado con claridad su experiencia sobre el tema que nos ocupa. Otros incluso se han adentrado en él mucho más a fondo a fin de dar con su explicación más profunda. Los dos estudios introspectivos más iluminadores ya clásicos han sido escritos por H. Poincaré, en una famosa conferencia en 1908 ante la Sociedad de Psicología de París, muchas veces reproducida (puede verse, por ejemplo, en castellano, «La creación matemática» en Morris Kline (compilador), *Matemáticas en el mundo moderno*, págs. 14-17, Madrid, Blume, 1974) y por J. Hadamard en su famosa obra *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton University Press, 1945) (una edición asequible en Dover, Nueva York, 1954). La lectura de estas obras puede ayudar extraordinariamente a formarse una idea de las vivencias que los más grandes matemáticos y otros muchos más modestos experimentan en sus enfrentamientos con verdaderos retos intelectuales.

A continuación, tomados de estas y otras obras, se presentan unos cuantos testimonios interesantes para nuestra exploración.

El mayor genio de la matemática, Gauss, escribía así refiriéndose en una carta a cierto teorema de teoría de números que había tratado de probar, sin éxito, durante varios años:

Finalmente, hace dos días, lo logré, no por mis penosos esfuerzos, sino por la gracia de Dios. Como tras un repentino resplandor de relámpago, el enigma apareció resuelto.

Yo mismo no puedo decir cuál fue el hilo conductor que conectó lo que yo sabía previamente con lo que hizo mi éxito posible. (De una carta a Olbers (1805) comentada en *Revue des Questions Scientifiques*, octubre 1886, pág. 575. Citado por Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, cap. 1.)

Por su parte, Hamilton, en 1858, describe con las siguientes palabras su hallazgo de los cuaternios, tras quince años de infructuosos esfuerzos:

Mañana será el quince aniversario de los cuaternios. Vinieron a la vida, o a la luz, completamente maduros, el 16 de octubre de 1843, cuando paseaba con la señora Hamilton hacia Dublín, al llegar al puente de Brougham. Allí, y en aquel momento, sentí que el circuito galvánico del pensamiento se cerraba, y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales que ligan i , j , k [los nuevos números que hacen el papel de i de los complejos], exactamente tal como los he usado siempre desde entonces... Sentí que en aquel momento se había resuelto un problema, que se había satisfecho una necesidad intelectual que me había perseguido por lo menos quince años.

En su conferencia ante la Sociedad de Psicología de París, Poincaré, después de relatar pormenorizadamente unas cuantas experiencias muy significativas de su propio trabajo matemático, analiza su experiencia a fondo:

En este momento me fui de Caen, donde vivía entonces, para formar parte de una excursión geológica organizada por la Escuela de Minas. Las peripecias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos; al llegar a Coutances nos subimos en un autobús, para no sé qué paseo. En el momento en que ponía el pie en el escalón, me vino la idea, sin que tuviese relación, me pareció, con lo que había

estado pensando, de que las transformaciones que yo había utilizado para definir las funciones fuchsianas son idénticas a las de la geometría no euclídea. No lo comprobé, no tuve tiempo; después, apenas me senté en el autobús reanudé la conversación, pero de pronto tuve una completa seguridad. Al volver a Caen comprobé el resultado con la mente descansada para tranquilidad de mi conciencia.

[...]

Estos son los hechos. Ahora veamos las reflexiones que nos sugieren. El yo inconsciente o yo subliminal, como se dice, juega un papel esencial en la creación matemática. Esto se deduce de todo lo precedente. Pero ordinariamente el yo subliminal se considera como puramente automático. Ahora bien, hemos visto que el trabajo matemático no es un simple trabajo mecánico que se confiaría a una máquina, por muy perfeccionada que se imagine. No se trata solamente de aplicar reglas y de elaborar el mayor número de combinaciones con unas leyes fijas. Las combinaciones obtenidas de este modo serían extremadamente numerosas, inútiles y emborrazosas. El verdadero trabajo del creador consiste en escoger entre estas combinaciones, a fin de eliminar las inútiles o, sobre todo, no tomarse el trabajo de hacerlas. Las reglas que deben conducir a esta elección son extremadamente sutiles y delicadas. Es casi imposible enunciárselas con un lenguaje preciso. Se sienten más bien que se formulan. En tales condiciones, ¿cómo es posible imaginar una criba capaz de aplicarlas mecánicamente?

Entonces se nos presenta una primera hipótesis. El yo subliminal no es en forma alguna inferior al yo consciente. No es puramente automático, es capaz de discernimiento, posee tacto, delicadeza; sabe escoger, sabe adivinar. ¿Cómo diría? Adivina mejor que el yo consciente, puesto que logra llegar allí donde éste fracasó. En una palabra, ¿no es superior al yo consciente?

Hadamard, por su parte, dedica una gran parte de su libro a explorar el tipo de actividad subconsciente que acompaña al trabajo creativo en matemáticas y en otros campos. La efecti-

vidad del papel del subconsciente y su modo de acción es uno de los objetivos principales de su investigación:

Que esas iluminaciones súbitas que pueden ser llamadas inspiraciones no pueden producirse meramente por azar es ya evidente por lo que hemos dicho: no puede haber duda alguna de la necesaria intervención de algún proceso mental previo desconocido para quien inventa; en otros términos, de un proceso inconsciente. Más aún, después de haber visto, como veremos en muchos lugares en lo que sigue, el inconsciente en acción, apenas puede surgir duda alguna en lo que se refiere a su existencia.

El libro de Hadamard apareció en 1945. En 1946 G. H. Hardy, uno de los más grandes analistas del siglo XX, escribía en *Mathematical Gazette* [vol. 30 (1946), págs. 111-115] una interesante recensión sobre él en la que aportaba al tema elementos nuevos procedentes de su propia experiencia. La recensión de Hardy puede verse reproducida recientemente en *The Mathematical Intelligencer* [vol. 5 (1983), págs. 60-63]. He aquí algunos de sus párrafos relativos a la actividad subconsciente:

Los hechos principales enumerados [en los primeros capítulos de Hadamard, sobre el inconsciente] parecen fuera de toda discusión. Que la actividad inconsciente juega a menudo un papel decisivo en el descubrimiento; que períodos de esfuerzo inefectivo son a menudo seguidos, después de intervalos de descanso o distracción, por momentos de súbita iluminación; que estos destellos de inspiración son solamente explicables como resultado de actividades que el individuo no ha advertido; la evidencia acerca de todo esto parece abrumadora.

[...]

El curso típico de los hechos es más o menos como sigue. Hay un estadio de actividad plenamente deliberada, posiblemente con algunos resultados aunque ciertamente

insatisfactorios [...]. Luego viene un descanso, completo o parcial, impuesta o deliberado, el resultado de otra ocupación o dedicación a otros problemas diferentes, seguido por un momento de iluminación repentina. Luego viene un segundo período de esfuerzo consciente, esta vez con éxito, en el cual las líneas maestras de la solución aparecen claras. Luego, muy probablemente tras una larga espera, el estadio final que Hadamard llama de «precisión» en el cual los resultados son «formalmente escritos» y puestos en orden, un proceso cansino y de segundo orden, pero esencial. Estos cuatro períodos parecen constituir el mínimo, pero por supuesto puede haber más; las experiencias de Poincaré fueron bastante más complicadas y tuvo al menos dos momentos de inspiración inesperada.

[...]

«Inventión es discernimiento, elección» [son palabras de Poincaré] pero ¿dónde y cómo se hace esta elección? Ésta es la cuestión más enigmática, y yo no puedo dejar de percibir que ni Poincaré ni Hadamard en absoluto apuntan claramente hacia una respuesta satisfactoria. Parece claro que nuestras actividades inconscientes han tenido que incluir algún proceso de selección, puesto que la mayor parte de nuestras combinaciones inconscientes nunca se elevan a nuestra conciencia en absoluto...

Otra aportación muy interesante al mismo tema nos la proporciona otro de los grandes analistas de época reciente, J. E. Littlewood. En *The Mathematical Intelligencer* [vol. 1 (1978), págs. 113-119] se publicó una interesante conferencia titulada *The Mathematician's Work of Art* en la que Littlewood glosaba con su humor característico diferentes aspectos psicológicos y prácticos del trabajo del matemático creador.

La incubación es el trabajo del subconsciente durante el tiempo de espera, que puede durar varios años. La iluminación, que puede ocurrir en una fracción de segundo, es la manifestación de la idea creativa en la ciencia. Esto ocurre

casi siempre cuando la mente está en un estado de relajación y suavemente ocupada con asuntos ordinarios.

[...]

La iluminación implica alguna relación misteriosa entre el subconsciente y el consciente, de otro modo tal manifestación no podría darse. ¿Qué es lo que enciende la bombilla en el momento oportuno?

En la obra de Hadamard antes citada aparece una interesante carta de Einstein sobre su modo de trabajo que, aunque en su mayor parte se dedica a describir los tipos de fenómenos que acompañan su trabajo mental, también indica claramente su opinión de que entre la plena conciencia, un «concepto límite», y la inconsciencia existe amplio espacio para otros estados de la mente en su trabajo creativo:

[...]

A) Las palabras o el lenguaje, escritas o habladas, no parecen jugar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades psíquicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son ciertos signos e imágenes, más o menos claras, que pueden ser *voluntariamente* reproducidas y combinadas.

Hay, por supuesto, una cierta conexión entre estos elementos y conceptos lógicos relevantes. Es también claro que el deseo de llegar finalmente a conceptos conectados lógicamente es la base emocional de este juego más bien vago con los elementos antes mencionados. Pero desde un punto de vista psicológico, este juego combinatorio parece ser el rasgo esencial en el pensamiento productivo —antes de que haya ninguna conexión con construcción lógica en palabras o en otros clases de signos que pueda ser comunicada a los otros.

B) Los elementos antes mencionados son, en mi caso, de tipo visual y algunos de tipo muscular. Las palabras convencionales u otros signos han de ser buscados con trabajo solamente en una segunda fase, cuando el juego asociativo

mencionado está suficientemente establecido y puede ser reproducido a voluntad.

C) De acuerdo con lo dicho, el juego con los elementos mencionados se dirige a ser análogo a ciertas conexiones lógicas que uno está buscando.

[...]

E) A mí me parece que lo que usted llama plena conciencia es un caso límite que nunca puede ser alcanzado plenamente. Esto me parece estar conectado con el hecho llamado la estrechez de la conciencia (Enge des Bewusstseins).

Apéndice II de J. Hadamard, *An Essay on The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton Univ. Press, 1945).

En una publicación reciente, *The Emperor's New Mind* (Oxford University Press, 1989), Roger Penrose relata una experiencia muy interesante a propósito del descubrimiento y explicación de cierto aspecto de la teoría de los agujeros negros. Aquí aparece un elemento nuevo, el surgimiento desde la actividad subconsciente y posterior olvido de una luz muy peculiar que vino a resolver un importante problema:

[...]

La experiencia de una idea que viene «como un relámpago», bajo tales circunstancias —junto con un fuerte sentimiento de convicción en lo que se refiere a su validez— no me es desconocida.

Tal vez valga la pena referir un ejemplo particular de esta situación, que tiene un punto curioso de interés adicional. En el otoño de 1964 yo había estado pensando sobre el problema de las singularidades relativas a los agujeros negros [...]. Un colega (Ivor Robinson) había venido de EUA de visita y estábamos teniendo una conversación interesante acerca de un tema totalmente diferente cuando íbamos calle abajo hacia mi despacho en el Birbeck College en Londres. La conversación se detuvo momentáneamente

para cruzar una calle lateral, y comenzó de nuevo en la otra acera. Evidentemente, durante estos pocos momentos, una idea se me ocurrió, pero luego, ¡la conversación que siguió la borró de mi mente!

Más tarde, después de que mi colega se había marchado, volví a mi despacho. Recuerdo haber tenido una extraña sensación de alegría, por algo de lo que no podía dar razón. Comencé a recorrer en mi mente todas las cosas variadas que me habían sucedido durante el día, intentando encontrar qué era lo que había causado esta alegría. Después de eliminar numerosas posibilidades inadecuadas, finalmente me vino a la mente el pensamiento que había tenido al cruzar la calle ¡un pensamiento que me había alegrado momentáneamente al proporcionarme la solución al problema que había estado rumiando en el transcurso de mi cabeza! Aparentemente era el criterio que se necesitaba —lo que yo llamé más tarde una «superficie atrapada»— y entonces no me llevó mucho tiempo esbozar el esquema de una demostración del teorema que había estado buscando (Penrose, 1965). Incluso entonces, pasó algún tiempo antes de que la demostración fuera formulada de una forma completamente rigurosa, pero la idea que había tenido mientras cruzaba la calle había sido la clave. (A veces pienso qué habría ocurrido si alguna otra experiencia de alegría sin trascendencia me hubiera sucedido durante aquel día. ¡Tal vez nunca hubiera recordado la idea de la superficie atrapada!)

La anécdota anterior me lleva a otro tema referente a la inspiración y a la intuición (*insight*), a saber, que los criterios estéticos son enormemente valiosos para formarnos nuestros juicios. En las artes, podría uno afirmar que son los criterios estéticos los que dominan sobre todo. La estética en las artes es un tema muy extenso y los filósofos han dedicado vidas enteras a su estudio. Podría argüirse que en la matemática y en las ciencias tales criterios son meramente incidentales, dominándolo todo el criterio de la *verdad*. Sin embargo, parece imposible separar uno del otro al considerar los temas de la inspiración y la intuición. Mi

impresión es que la fuerte convicción de la *validez* de un relámpago de inspiración (no fiable al cien por cien, debería añadir, pero al menos más fiable que sólo el azar) está conectada muy fuertemente con sus cualidades estéticas. Una idea bella tiene una probabilidad mucho mayor de ser una idea correcta que una idea fea. Ésa al menos ha sido mi propia experiencia, y sentimientos semejantes han sido expresados por otros. Por ejemplo, Hadamard (1945, página 31) escribe:

«... es claro que ningún descubrimiento o invento significativo puede tener lugar sin la *voluntad* de encontrar. Pero con Poincaré vemos algo más, la intervención del sentido de belleza que juega su papel como un *medio* indispensable de encontrar. Hemos alcanzado la doble conclusión siguiente: que la invención es elección; que esta elección se halla gobernada de forma imperativa por el sentido de belleza científica».

Más aún, Dirac (1982), por ejemplo, no se recata de decir que fue su *profundo sentido de belleza* lo que le permitió adivinar su ecuación para el electrón mientras otros la habían buscado en vano.

Por mi parte puedo ciertamente atestiguar acerca de la importancia de las cualidades estéticas en mi propio pensar, por una parte en relación con la *convicción* que uno sentiría con ideas que podrían posiblemente pasar por *inspiradoras* y por otra en lo que se refiere a las conjeturas más rutinarias que habrían de hacerse continuamente, a medida que uno percibe que avanza hacia una meta esperada.

[...]

Me parece claro que la importancia de los criterios estéticos se aplica no sólo a los enjuiciamientos instantáneos de la inspiración, sino también a los enjuiciamientos mucho más frecuentes que continuamente hacemos en el trabajo matemático (o científico). ¡Argumentos rigurosos constituyen ordinariamente el *último paso*! Antes de ellos uno tiene que hacer muchas conjeturas y para éstas las convicciones estéticas son enormemente importantes, siempre sujetas a argumentos lógicos y hechos conocidos.

[...]

¿Cuál es entonces mi visión acerca del papel del inconsciente en el pensamiento relativo a la inspiración? Admito que el tema no está tan claro como me gustaría que estuviera. Ésta es un área en la que el inconsciente parece ciertamente jugar un papel vital, y tengo que convenir con la visión de que los procesos inconscientes son importantes. He de estar de acuerdo también en que no puede ocurrir que la mente inconsciente esté simplemente haciendo emerger ideas al azar. Tiene que haber un proceso de selección impresionantemente poderoso que permita que la mente consciente se deje perturbar solamente por ideas que *tienen alguna probabilidad*.

Yo sugeriría que estos criterios de selección, fundamentalmente *estéticos*, de alguna manera, han sido ya fuertemente influenciados por deseos conscientes (del modo como el sentimiento de fealdad acompañaría los pensamientos matemáticos que son inconsistentes con principios generales ya establecidos).

Las citas podrían multiplicarse. En 1902-1905 la revista *L'Enseignement Mathématique* llevó a cabo y publicó una interesante encuesta sobre los métodos de trabajo de los matemáticos. Entre sus muchas preguntas hay unas cuantas que se refieren directamente a los mecanismos del pensamiento en el descubrimiento matemático y que constituyen una rica fuente de información que aún está por analizar con la profundidad que merecen.

28

Especulando sobre la actividad subconsciente

Las notas que siguen constituyen una descripción breve y osada, pero no infundada, de lo que, en trazos extraordinariamente simplificados, puede tal vez ocurrir en nuestra mente cuando se enfrasca con un problema de cualquier tipo y llega a tener una de esas vivencias que denominamos *inspiración*. Esta descripción ordenada tiene una finalidad práctica, pues la utilizaremos en la sección siguiente con el objeto de tratar de ver cómo podemos propiciar eficazmente la ayuda de la actividad subconsciente en nuestro enfrentamiento creativo con problemas.

1. El mecanismo mental de nuestro pensamiento tiene muchos elementos con distintas funciones, unos de almacenamiento de información, otros de organización y procesamiento de información, que, más o menos, pueden trabajar independientemente.
2. Existe un mecanismo de supervisión que puede atender a la actividad coordinada de unos cuantos de esos procesadores de modo más o menos enfocado, al tiempo que percibe de modo más difuso la actividad de otros. Hay algunos que de ordinario escapan a la percepción y desde luego al control del mecanismo supervisor.
3. Este supervisor es el portador de la conciencia refleja del individuo y de la facultad de autodirigirse hacia

uno u otro punto de su campo de control a fin de coordinar las informaciones que recibe de los diferentes elementos y someter el resultado de esta coordinación a posteriores procesamientos.

4. Mediante intervención neuroquímica o a través de técnicas de entrenamiento es posible neutralizar la acción del supervisor, de modo que la actividad de los diferentes elementos continúe sin su influencia. Las interconexiones entre estos elementos siguen sin embargo abiertas, de modo que la información que cada uno contiene en sus diversas formas de procesamiento puede actuar sobre la que otros elementos poseen.
5. Mediante un cierto esfuerzo continuado el supervisor puede poner en actividad muchos de los elementos del sistema con una dirección de búsqueda común. Es decir, el mecanismo supervisor trata de que cada unidad aporte lo que en ella pueda haber de perteniente en lo que se refiere a información o estructuras de procesamiento que tenga que ver con una cierta situación-problema. Una gran parte del mecanismo cognoscitivo está entonces en actividad y en tensión interactiva de manera que cada elemento pueda captar y procesar lo que los otros puedan ofrecerle.
6. Esta situación puede dar lugar a un engarzamiento de las distintas informaciones que proporcionan los diferentes elementos del sistema, lo que constituye una aportación hacia la solución del problema propuesto.
7. Puede suceder que, incluso después de mucho tiempo y esfuerzo invertidos por el sistema, esta solución no aparezca. El supervisor cesa en su esfuerzo controlador, pero las diferentes unidades del mecanismo cognoscitivo continúan en tensión con las pautas de búsqueda que se les ha proporcionado.

8. Puesto que las conexiones entre los diferentes elementos de almacenamiento de información y de procesamiento permanecen abiertas y las interacciones entre ellos siguen produciéndose, puede suceder que de esta actividad no controlada directamente por el supervisor, que tiene ahora su enfoque dirigido hacia otras tareas, surjan estructuras que parezcan resolver la situación-problema inicialmente propuesta.
9. El supervisor, mediante su atención difusa sobre las diferentes unidades del sistema, puede percibir la presencia de tal constelación de informaciones y ser atraído por ella. Entonces se percata de su valor, tal vez por su belleza, enfoca la atención de los diversos elementos sobre ella y la evalúa con más precisión.
10. O bien tales estructuras combinadas de información permanecen almacenadas en el sistema, no percibidas de momento por el supervisor. Sólo cuando éste decide, posiblemente tras mucho tiempo, volver a realizar un nuevo esfuerzo hacia la resolución del problema poniendo en actividad los diferentes elementos bajo su control, esta constelación útil aparece como saliendo de la nada, como el destello súbito de un relámpago.

Desde el punto de vista tradicional de las cuatro fases del acto creativo descritas por Wallas, *preparación, incubación, iluminación y verificación*, y que de un modo u otro son reconocidas universalmente, es claro que la *preparación* corresponde a lo que se indica en 5, la *incubación* viene descrita en 7 y 8, y la *iluminación* aparece directamente sin incubación, en 6, o bien, tras una incubación, en 9 y 10. La *verificación* es el esfuerzo controlado posterior señalado también en 9.

Consecuencias prácticas

Si las cosas suceden aproximadamente como se ha descrito en el capítulo anterior, ¿podemos tratar de incidir eficazmente sobre nuestros propios procesos mentales para propiciar la ayuda de la actividad subconsciente en nuestra ocupación con problemas?

Cuando muchos psicólogos del conocimiento afirman que aprovechamos tan sólo una parte muy pequeña de nuestra capacidad total apuntan hacia la eficacia inmensamente mayor que nuestro sistema cognoscitivo tendría si pudiésemos lograr que éste encauzara y coordinara toda su actividad, la consciente y la menos consciente, en la dirección adecuada.

Es muy posible que los logros de los grandes genios se deban en buena parte a su eficacia en dirigir todas las potencialidades de su mecanismo mental hacia un objetivo determinado. Cuando Newton, como cuenta su ayudante, se pasó un gran rato mirando atentamente un huevo en su mano izquierda mientras esperaba que se pusiera duro su reloj de bolsillo que hervía furiosamente en el cazo, su atención no estaba *distraída* en el sentido de *dispersa*, sino que estaba profundamente concentrada en un objetivo bien claro, que por supuesto no tenía nada que ver con el huevo. Con razón él mismo solía decir, cuando le preguntaban cómo había llegado a alguna de las muchas ideas geniales que le debemos: «Pensando constantemente sobre ello».

Una de las claves del éxito en la resolución de un problema radica en la *capacidad de concentración*, es decir, en lograr que, en el estadio de preparación señalado en 5 del capítulo anterior, queden involucrados activamente cuantos elementos o unidades de nuestro sistema mental puedan aportar algo, y que entre todos ellos exista una colaboración tan estrecha como sea posible. Parece difícil lograr este objetivo de modo consciente, controlado por el supervisor. Probablemente se puede incidir de dos maneras:

- En primer lugar *eliminando los impedimentos* que, según nuestra propia experiencia, causan una dispersión de nuestra atención, de nuestra capacidad para estar plenamente en lo que hacemos.
- En segundo lugar, y esto es lo más efectivo, mediante la *motivación*, fomentando en nosotros el interés intenso y profundo por los problemas de los que nos ocupamos, que sea capaz de envolver más y más capas, racional, contemplativa, estética, de nuestra propia personalidad. La etapa de preparación descrita en 5, en que conscientemente tratamos de acumular y procesar toda la información que podamos, combinándola y estructurándola en unidades más potentes, constituye un esfuerzo grande de que no se realiza con efectividad si no existe un fuerte entusiasmo inicial, engendrado por la motivación.

Por otra parte, si nuestro dinamismo mental se parece a lo que se sugiere en 1, 2, 3 y 4 de la sección anterior, parece claro que el tipo de trabajo que debemos realizar en nuestra fase de preparación es el que facilite la interacción de la información y de sus diversas formas de procesamiento. Esto refuerza lo que en la cuarta parte ha quedado dicho sobre la importancia de aportar a nuestro proceso de resolución de problemas un *conocimiento bien estructurado*.

El aspecto que más nos interesa ahora para tratar de

propiciar la ayuda de la actividad subconsciente es el de la *incubación*, de la que se espera que surja la *iluminación*.

Aunque, tanto por los testimonios extrínsecos aportados como por nuestra propia experiencia, estemos intelectualmente convencidos de la realidad favorecedora de la actividad subconsciente, en la práctica actuamos muy a menudo como si ésta no existiera. No practicamos una estrategia positiva para estimular esta actividad. Muchas veces ni siquiera le damos oportunidad de que tenga lugar, actuando como si la fase de nuestro trabajo en que nuestro mecanismo supervisor está al mando fuese la única verdaderamente provechosa.

Si la dinámica de nuestro mecanismo mental se parece a grandes rasgos a lo que ha quedado descrito en la sección anterior, es claro que la incubación que favorezca la iluminación puede estimularse del siguiente modo:

- a) La preparación consciente nos debe capacitar:
 - Para reconocer la solución o los elementos que puedan ayudar a la solución.
 - Para activar en nuestra mente las estructuras sencillas a partir de las cuales podamos sentir que pueda surgir una solución.
 - Para actuar con una cierta libertad y flexibilidad que inicie o que al menos deje abierta la mente para vías nuevas, distintas de las que los hábitos propios, los prejuicios, las modas, los paradigmas imperantes, imponen.
 - Para infundir en el espíritu una tensión profunda, un verdadero interés por el problema y su resolución, junto con cierta confianza en nuestras fuerzas.
- b) Un período de relajación y de olvido que permita una mayor libertad autónoma, es decir, de apartamiento de los caminos trillados ya por nuestra actividad consciente, en el que la tensión interna tenga en movimien-

to las configuraciones y constelaciones de información que la fase preparatoria ha dinamizado.

Poincaré señala cómo el estímulo del café le causó un efecto sorprendente en una de sus famosas experiencias creativas. También Littlewood habla del efecto del té y del café. Otros se ayudan del paseo, como Hamilton y Hilbert. Otras drogas más duras tienen efectos devastadores en plazo relativamente corto.

No es fácil sustraer nuestro mecanismo cognoscitivo, a cierto control permanente del supervisor. Las culturas orientales han ideado métodos efectivos para conseguirlo. Hasta hace pocos años estos métodos sonaban entre nosotros a esoterismo extravagante. Hoy día ya van encontrando su lugar incluso en los textos más autorizados de psicología cognoscitiva. P. H. Lindsay y D. A. Norman, en su interesante *Introducción a la psicología cognitiva* (Madrid, Tecnos, 1986, pág. 687), presentan una buena descripción de alguno de ellos:

Los métodos para controlar los estados de la mente son muy antiguos y muy bien conocidos en algunas sociedades. Hasta hace poco tiempo, estas técnicas no eran muy conocidas en la civilización occidental, pero ahora han alcanzado amplia publicidad y práctica. Las técnicas de la meditación religiosa y personal están diseñadas para alterar nuestros estados mentales. El uso de drogas y los estados hipnóticos pueden tener funciones afines.

El medio más común y más eficaz de controlar los propios estados mentales es el empleo de un *mantra*. Básicamente, si queremos desconectar S (el mecanismo supervisor), esa voz central interior de la conciencia, encaramos un problema. S es un mecanismo entrometido, que tiende a estar guiado por los datos de cualquier acontecimiento, externo o interno. La mejor manera de hacerse cargo de S es darle algo que le distraiga. Hagamos que S emplee todos sus recursos en hacer algo irrelevante, y entonces la mente

podrá funcionar libre de la influencia de S. El mantra es precisamente una técnica para conseguirlo.

El diccionario define un mantra como «una fórmula mística de invocación o encantamiento del hinduismo y del budismo Mahayana» (Webster's New Collegiate Dictionary). Hoy en día lo más frecuente es que el mantra sea simplemente una palabra que una persona repite continuamente una y otra vez. Nosotros consideramos el mantra como un recurso para la atención... mantiene ocupada la capacidad atencional de la mente, da a S algo que hacer, y efectivamente elude la naturaleza supervisora, directiva, de los mecanismos conscientes internos.

Las técnicas que en nuestra cultura occidental se han creado para escapar al control del supervisor no se han dirigido a inhibir su acción, sino más bien a desviarla hacia porciones del sistema cognoscitivo distintas de las que se ha ocupado en la fase de preparación. En este sentido, los trucos de muchos de nuestros grandes artistas y científicos han sido extraordinariamente originales. Mozart componía al tiempo que observaba atentamente el rodar de las bolas en su gran mesa de billar. El gran poeta Shelley recibía a la musa jugando con barquitos de papel sumergido en su baño. Brahm's decía que solía tener sus mejores ideas mientras se limpiaba los zapatos. Littlewood afirmaba que la relajada actividad de afeitarse constituía para él una fuente de ideas. Algunas grandes ideas le llegaron practicando el alpinismo, al que era un gran aficionado.

El sueño y el ensueño, fase intermedia entre el sueño y la plena vigilia, constituyen los estados típicos en que el control del supervisor se suprime o se aminora. Para algunos, estos estados son muy fructíferos desde el punto de vista de su creatividad intelectual. John von Neumann, uno de los grandes matemáticos del siglo XX, se iba a menudo a la cama por la noche con un problema en su mente sin resolver y se despertaba a la mañana siguiente capaz de garrapatear la

solución en un cuaderno que tenía en su mesilla de noche. Descartes, en el Colegio de La Flèche, por su mala salud, tenía permiso para pasar una buena parte de la mañana en la cama, dedicado a sus ensañaciones filosóficas particulares. Es muy probable que muchas de las grandes intuiciones de las *Reglas para dirección del ingenio* y del *Discurso del Método* tuvieran su origen en ellas. La idea de Kekulé sobre la estructura anular de la molécula del benceno le vino en un sueño, según él mismo cuenta. Pero, como dice Littlewood, es posible que los actos creativos de gran altura alcanzados en sueños sean muy escasos. «William James parece haber tenido lo que parecían ser ideas vitalmente importantes en sueños, pero siempre se olvidaba de ellas al despertar. Decidió escribir tales sueños, y en la próxima ocasión consiguió hacerlo. A la mañana siguiente pudo leer:

Higamus hogamus, woman is monogamous;
Hogamus higamus, man is polygamous.

No está mal del todo. Tiene a la vez forma y contenido».

La posibilidad de incubación se da cuando no nos dejamos llevar por las presiones que muy ordinariamente tienden a atosigarnos. Es necesario tener ocasión para incubar nuestras ideas *comenzando con tiempo de sobra* nuestro trabajo. Así se evita la fijación funcional, la necesidad de ir por los caminos trillados y seguros. Nos podemos permitir caminar por caminos inciertos a lo largo de los cuales podemos encontrar ideas nuevas y valiosas.

Para algunos el tener pendientes al tiempo varios temas de trabajo ayuda. La dedicación a uno permite la incubación en los otros. Edison habitualmente tenía varios proyectos inacabados en su cabeza, trabajaba concienzudamente en todos ellos, aun estando todos pendientes de resolución. Para otros este modo de proceder representaría una fatal dispersión.

APÉNDICE

El retrato heurístico

Las ventajas de conocerse a sí mismo

Conocerse a fondo a sí mismo es uno de los ideales constantemente inculcados por los filósofos de todos los tiempos. Y no sin razón. Desde el punto de vista que aquí nos ocupa, el conocerme a mí mismo con rigor me proporciona ante todo la posibilidad de utilizar mis propios recursos de la forma más eficaz posible, con la consiguiente satisfacción por el sano ejercicio de mi propia capacidad y porque con ello alcanzaré con seguridad un rendimiento más pleno.

Conocerse a sí mismo con sobriedad es un ejercicio difícil, pero no tiene por qué ser penoso ni acoplejante si no nos dejamos llevar por un pesimismo que nos conduzca a clavar nuestra mirada en nuestros propios defectos y en las proezas que nos parece observar en otros a nuestro alrededor, con una visión totalmente deformadora. Todos los hombres, por el solo hecho de saber que conocemos y por nuestra capacidad de expresarnos en palabras, estamos ya colocados en una meseta a tal altura que las diferencias que existen entre nosotros resultan de muy poca significación. Cada uno de nosotros podemos pensar que somos débiles como un junco, pero «un junco que piensa» y ya por ello portador de una inmensa grandeza.

Si me conozco a fondo a mí mismo en lo que se refiere a

mi capacidad para resolver problemas, sabré cuáles son mis puntos fuertes, aquellas destrezas en las que manifiesto un cierto gusto especial y una señalada capacidad. Esto me proporcionará una pista sobre el tipo de problemas y de actividad heurística en que puedo ocuparme con más confianza y probablemente con más éxito. Y al mismo tiempo sabré en qué puedo ayudar a otros con más eficacia.

Conociéndome con objetividad sabré también de mis defectos, seré capaz de disolver posibles engaños sobre mí mismo y estaré atento a cualquier posibilidad de fallo importante a que mis puntos débiles puedan conducirme. Por otra parte, de este modo, si sé cuáles son mis carencias, podré poner mis manos a la obra con afán para subsanarlas, estando atento a ellas y observando con interés la actividad de quienes pueden enseñarme a proceder más adecuadamente.

Después de los capítulos dedicados a estudiar los posibles bloques mentales, las estrategias de pensamiento, el tipo de conocimiento útil en la resolución de problemas, la actividad subconsciente... ya sabemos algo sobre cómo puede ser la mente humana en su actividad heurística. El camino está bastante allanado para que tratemos de averiguar explícitamente cuáles son los rasgos más característicos de nuestra propia capacidad heurística. Por otra parte la realización de nuestro autorretrato heurístico nos capacitará también para ayudar a otras personas a realizar el suyo propio, con las consiguientes ventajas que ello pueda aportar de cara al autoconocimiento.

Elementos para un retrato heurístico

El mejor método para conseguir un autorretrato heurístico suficientemente fiel en lo que se refiere al funcionamiento concreto de nuestras capacidades de resolución de problemas consiste, a mi parecer, en el examen detenido de un buen

número de protocolos de resolución de problemas suficientemente variados, comparándolos, si es posible, con los realizados por otras personas. De esta forma pueden quedar patentes los rasgos característicos de cada uno.

Los trazos globales de la propia estructura heurística se pueden detectar mediante un autoexamen pormenorizado sobre los diversos aspectos que influyen en nuestros procesos mentales en la resolución de problemas. Este examen constituye una tarea muy personal y nada sencilla, pero tal vez pueda resultar facilitada mediante la lista de aspectos a considerar que presento a continuación de forma orientativa.

Aspectos externos

¿Cuál es el tiempo para mí más propicio para cada uno de los diversos tipos de actividad mental? Yo, por mi parte, prefiero la mañana para pensar por mi cuenta, la tarde me resulta buena para estudiar y documentarme, la noche me resulta inútil para cualquiera de estas dos cosas. Es claro que las preferencias de otros son justamente las opuestas.

¿Qué es lo que favorece en mí la concentración? El silencio, la paz, la tranquilidad, la música (¿qué música?), estar lejos, viajar, contemplar el paisaje, pasear..., ¿o tal vez todo lo contrario? Uno de mis grandes profesores, Germán Ancochea, se iba al café a hacer matemáticas entre el humo y el jaleo. ¿Qué es lo que más me dispersa? Teléfono, chismes, interrupciones...

¿Qué postura física me resulta más estimulante? Sentado, de pie, echado, paseando, corriendo, dentro del baño...

¿Necesito dormir mucho, poco? Mi sueño, mi ensueño, ¿me resultan de alguna ayuda para la resolución de problemas?

¿Hay alguna actividad específica que favorezca en mí la incubación fructuosa de los problemas de que me ocupo?

¿Tienen algo en común las circunstancias en que me parece recibir la inspiración?

Aspectos afectivos

Ante la tarea de resolución de problemas, ¿cuál es mi actitud afectiva inicial? ¿Gusto, disgusto, miedo, angustia, repugnancia, tranquilidad, diversión, indiferencia, prisa, confianza, desaliento...?

¿Qué busco en mi tarea de resolución de problemas? ¿Entretenimiento, ejercicio, cumplimiento de un deber, satisfacción de mi curiosidad, autosuperación, preparación más eficaz...?

¿Me cuesta ponerme en marcha? ¿Ante qué tareas?

¿Soy de esfuerzos prolongados? ¿Mantengo vivo el interés por un problema por largo tiempo?

¿Me canso y me aburro fácilmente o soy capaz de sacrificios y esfuerzos costosos?

¿Soy de intensos altibajos? ¿Fases cíclicas de entusiasmo y repugnancia por el trabajo? ¿Conozco la causa?

Mi estado de ánimo respecto del trabajo ¿es fácilmente influenciable? ¿Tiempo, presión atmosférica, estómago vacío, lleno, mañana, tarde, noche...? ¿Cuáles son mis ritmos?

¿Inclinado al desaliento o más bien constante y pertinaz?

En el trabajo, ¿qué me produce más placer: pensar autónomo, observar, mirar lo que hacen los otros, explorar, contemplar, repetir, repasar, asegurarme, contemplar, no trabajar? ¿Qué es lo que más me cuesta?

¿Siento gusto en iniciar caminos, hastío en proseguirlos, o al revés?

¿Tengo gusto en juzgar y hacer de crítico, disgusto en la propia acción, o al revés?

¿Cómo me debo catalogar en cuanto a mis tendencias: impulsivo, apresurado, sereno, pausado, optimista, pesimista...?

46

El fracaso, ¿me hunde o trato de aprender con él?

¿Qué miedos, ansiedades, repugnancias, suelo experimentar en el transcurso del proceso? Por ejemplo, ¿miedo a examinar a fondo mis conjeturas?, ¿repugnancia ante la tarea de «poner en limpio»?

¿Llego hasta el fin o fácilmente dejo las cosas a medias, un poco chapucadamente? ¿Soy perfeccionista?

¿Tolero bien la crítica? ¿La busco? ¿Me cae gordo fácilmente quien la formula?

¿Me gusta el trabajo en equipo? ¿Me adapto bien? ¿O me gusta más bien trabajar por mi cuenta?

¿Me apetece discutir sobre mis temas de trabajo?

Aspectos cognoscitivos

¿Qué tipos de materias, trabajos, formas de pensar, me resultan más connaturales?

¿Curiosidad? ¿Me intereso por temas ajenos a mi campo?

¿Leo a gusto? ¿En abundancia?

¿Siento atracción por lo que desconozco?

La fase de documentación y almacenamiento de información, ¿me resulta costosa, antipática, o es lo que hago más a gusto?

¿Tiendo a la profundidad o a la amplitud?

¿Tengo gusto por la reflexión?

¿Me gusta concentrarme en una sola cosa o trabajar en varias simultáneamente?

¿Tengo facilidad para la concentración y me defiendo fácilmente de distracciones?

¿Qué tal memoria tengo? ¿Qué tipo de memoria es la mía, visual, analítica, simbólica, relacional?

¿Tengo facilidad para percibir, imaginar, visualizar? ¿Pienso en figuras o prefiero manejar símbolos? ¿Sentido geométrico o analítico?

¿Tengo flexibilidad en el uso de diferentes formas de pensamiento?

¿Tengo sentido estético ante la obra intelectual?

¿Me gusta analizar a fondo y en detalle o prefiero esbozar y construir estructuras globalmente?

¿Prendera en mí el sentido lógico o avanzo a saltos, intuitivamente, dejando aparte la lógica?

¿Qué tipo de representaciones auxiliares suelo utilizar, imágenes concretas, símbolos abstractos, fórmulas, palabras escritas...?

¿Tengo rutinas de acción para los momentos difíciles, de desgana, de abulia, a fin de que me ayuden a salir de ellos?

¿Tengo facilidad para la introspección?

Mi pensamiento ¿anda casi siempre bajo control o a ratos anda vagando y divagando?

¿Favorezco positivamente la actividad del subconsciente?

¿Me procuro activamente su ayuda? ¿Estoy atento a los elementos que me pueda aportar?

¿Tengo tolerancia frente a otras formas de pensamiento incongruentes respecto de los míos o más bien soy rígido frente a ellos?

¿Qué es lo que más me sorprende de la forma de abordar los problemas por otros?

¿Cuáles son mis personajes favoritos, los odiosos? ¿Qué características tienen por las que me resultan así? ¿Quiénes me parece que han conseguido mejor lo que yo busco?

D.T. HUNT, "Desarrolla tu capacidad de aprender", Ediciones Urano, Barcelona (1997).

Apéndice

Actividad eléctrica del cerebro (capítulo 5)

Con el fin de entender estas fluctuaciones y las experiencias resultantes que las fluctuaciones reflejan, hemos incluido una breve descripción de las diferencias en las cuatro mediciones de onda cerebrales.

Beta: 14-30 ciclos/segundo

Percepción externa
Atención y actividad externas
Estados normales de conciencia

Alfa: 7-14 ciclos/segundo

Comienza la reacción de relajación
Mayor creatividad
Comienza la sincronización entre los hemisferios cerebrales en las frecuencias más bajas

Theta: 3-7 ciclos/segundo

Sincronización hemisférica
Integración sensorial cerebral elevada
Experiencia de campo unificado; sensación de «experiencia cumbre»
Capacidad para el aprendizaje óptimo muy alta

Receptividad a las visiones interiores muy alta
Capacidad de recuerdo nítido y de generación de ideas intuitivas muy elevada
Estado intensificado para procesar y almacenar información

Delta: 1-3 ciclos/segundo

Estado de sueño profundo
Como vemos, el objetivo obvio para el aprendizaje rápido es el estado de ondas cerebrales theta. En esta frecuencia no sólo logramos la sincronización de los hemisferios cerebrales sino también mayor agudeza mental, percepción intuitiva y creatividad, además de mayor capacidad de recordar con nitidez. Otros estudios revelan que este estado relajado conduce a un mayor rendimiento en todos los aspectos. En general, la frecuencia de ondas theta es la que ofrece una mayor capacidad tanto en los jóvenes como en los viejos.

REFERENCIAS

- R. ALLEN, "Mega mazes", Mensa Publications, Ebury Press, London (1996).
- Y.S. DUBNOV, "Errores de las demostraciones geométricas", Limusa, México (1973).
- M. DE GUZMAN, "Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos", Ediciones Pirámide, Madrid (1995).
- M. FERNÁNDEZ PÉREZ, "Las tareas de la profesión de enseñar", Siglo 21 Editores, Madrid (1994). (En particular, "Cerebro y aprendizaje" y "Motivación", pág. 257 - 278).
- D. T. HUNT, "Desarrolla tu capacidad de aprender", Ediciones Urano, Barcelona (1997).
- R.B. NELSEN, "Proofs without words. Exercises in visual thinking", Mathematical Association of America, Washington (1993).
- G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas", Trillas, México (1994).
- H. RABUFFETTI, "Temas de álgebra. Lógica", El Ateneo, Buenos Aires (1989).
- D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).
- D.A. TARZIA, "Curso de nivelación de Matemática" (1993) y "Notas de Matemática" (1995), Depto. de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario. "Curso de nivelación de Matemática"; McGraw Hill, Buenos Aires, por aparecer.
- D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", Parte I (23 páginas), Parte II (15 páginas), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1995).
- C. VIRASORO, "Pensar para hacer", A Editores, Buenos Aires (1983).
- Diarios Clarín y La Nación, Buenos Aires.



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)-814990 ; FAX: (041)-810505
E-Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

NOTA TÉCNICA

"PENSAR PARA LA EXCELENCIA CON EL LADO DERECHO DE SU CEREBRO " (*)

Domingo A. TARZIA (Comp.)

Rosario (ARGENTINA)

Abril 1998

(*) Del libro: H. ALDER, "Pensar para la excelencia con el lado derecho de su cerebro", EDAF, Madrid (1995), se presentan las siguientes notas técnicas:

- Test: ¿Dónde encaja usted en una escala de derecho-izquierdo? (pág. 28 – 37);
- El cuadro de la liga sensorial (pág. 44 – 45);
- El poder de los hábitos mentales (pág. 65 – 66);
- Directivo del 2000 (pág. 169 – 181).

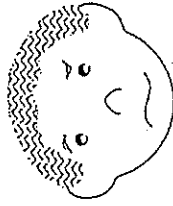
¿Dónde encaja usted en una escala de derecho-izquierdo?

Antes de que empecemos a ejercitar con ahínco nuestro cerebro derecho, quizá le resulte útil evaluar su actual modo de pensamiento. Lo siguiente se basa en un cuestionario que a menudo se emplea en seminarios empresariales. Debería proporcionarle una idea aproximada de si tiende más hacia el lado izquierdo o derecho de su cerebro. Conteste las preguntas rápida e intuitivamente. No piense en puntuar hasta que haya terminado, y no se preocupe de que una respuesta parezca buena o mala. No hay buenas o malas, o correctas e incorrectas.

Marque sólo una letra... la que más encaje con usted, a menos que la pregunta le pida lo contrario.

- (1) En una situación en la que hay que solucionar un problema, usted:
- ¿Da un paseo y medita en las soluciones, y luego las discute?
 - ¿Piensa y escribe todas las alternativas, las discute y tribuye de acuerdo con las prioridades y después escoge la mejor?
 - ¿Recuerda experiencias pasadas que tuvieron éxito y las pone en práctica?
 - ¿Aguarda a ver si la situación se arregla sola?
- (2) Soñar despierto es:
- Una pérdida de tiempo.
 - Divertido y relajante.
 - Una ayuda real para solucionar problemas y para el pensamiento creativo
 - Una herramienta viable para planificar mi futuro.

- (3) Mire rápidamente este dibujo:



¿Estaba sonriendo la cara?

- a) Sí b) No

- (4) Sobre las corazonadas:

- Las tengo con frecuencia y las sigo.
- Tengo fuertes corazonadas pero no les doy mucha fe.
- En ocasiones las tengo pero no les doy mucha fe.
- No dependería de corazonadas para que me ayudaran a tomar decisiones importantes.

- (5) Al pensar en las actividades diarias, ¿qué es más típico de su «estilo»?

- Redacto una lista de todas las cosas que necesito hacer, de gente que he de ver.
- Imagino los lugares a los que iré, la gente a la que veré.
- Dejo que acontezcan.
- Planifico la agenda del día, estableciendo horas apropiadas para cada cosa o actividad.

- (6) ¿Por lo general tiene un lugar para todo, un sistema para hacer las cosas y habilidad para organizar la información y los materiales?

- a) Sí b) No

(7) ¿Le gusta cambiar la distribución de sus muebles o modificar la decoración de su hogar o despacho con frecuencia?

a) Sí b) No

(8) Por favor, marque las actividades con las que disfruta:

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Natación | <input type="checkbox"/> Viajes |
| <input type="checkbox"/> Tenis | <input type="checkbox"/> Ciclismo |
| <input type="checkbox"/> Golf | <input type="checkbox"/> Coleccionismo |
| <input type="checkbox"/> Acampada | <input type="checkbox"/> Escritura |
| <input type="checkbox"/> Esquí | <input type="checkbox"/> Ajedrez |
| <input type="checkbox"/> Pesca | <input type="checkbox"/> Bridge |
| <input type="checkbox"/> Canto | <input type="checkbox"/> Ruleta |
| <input type="checkbox"/> Jardinería | <input type="checkbox"/> Charadas |
| <input type="checkbox"/> Tocar un instrumento | <input type="checkbox"/> Baile |
| <input type="checkbox"/> Mejoras del hogar | <input type="checkbox"/> Paseos |
| <input type="checkbox"/> Costura | <input type="checkbox"/> Correr |
| <input type="checkbox"/> Lectura | <input type="checkbox"/> Abrazos |
| <input type="checkbox"/> Artes/Oficios | <input type="checkbox"/> Besos |
| <input type="checkbox"/> Cocina | <input type="checkbox"/> Tocar |
| <input type="checkbox"/> Fotografía | <input type="checkbox"/> Conversación |
| <input type="checkbox"/> Hacer nada | <input type="checkbox"/> Debates |

(9) ¿Aprende mejor el atletismo y el baile:

- a) ¿Imitando o acostumbrándose a la música?
b) Aprendiendo la secuencia y repitiendo los pasos mentalmente?

(10) ¿Cuando practica un deporte o actúa en público lo hace a menudo mejor que lo que su formación y habilidades naturales garantizan?

a) Sí b) No

(11) ¿Se expresa bien verbalmente?

a) Sí b) No

(12) ¿Está orientado hacia sus metas?

a) Sí b) No

(13) Cuando quiere recordar direcciones, un nombre o una noticia:

- a) ¿Visualiza la información?
b) ¿Escribe notas?
c) ¿Lo verbaliza (se lo repite a sí mismo o en voz alta)?
d) ¿Lo asocia con información previa?

(14) ¿Recuerda las caras con facilidad?

a) Sí b) No

(15) Cuando usa el lenguaje:

- a) ¿Inventa palabras?
b) ¿Crea rimas e incorpora metáforas?
c) ¿Elige términos exactos y precisos?

(16) En una conversación, se siente más cómodo como:

a) ¿Oyente? b) ¿Hablante?

(17) Cuando en una reunión se le pide que improvise, usted:

- a) ¿Prepara un rápido esbozo?
b) ¿Directamente empieza a hablar?
c) ¿Traslada la atención a otra persona o habla lo menos que sea posible?
d) ¿Habla despacio y con cuidado?

- (18) En una discusión, tiende a:
- ¿Hablar hasta establecer su punto?
 - ¿Encuentra a una autoridad que apoye su punto de vista?
 - ¿Simplemente se retrae?
 - ¿Empuja la silla o la mesa, aporrea la mesa, habla más alto... grita?
- (19) ¿Puede precisar con bastante exactitud cuánto tiempo ha pasado sin mirar su reloj?
- Sí
 - No
- (20) Prefiere acontecimientos sociales que:
- ¿Están planeados con antelación?
 - ¿Son espontáneos?
- (21) Al prepararse para una tarea nueva o difícil:
- ¿Se visualiza consiguiéndola de manera efectiva?
 - ¿Recuerda éxitos pasados en situaciones similares?
 - ¿Prepara datos exhaustivos sobre dicha tarea?
- (22) Prefiere trabajar:
- ¿Solo?
 - ¿O en grupo?
- (23) Cuando se trata de «saltarse las reglas» o de alterar la política de la compañía, ¿siente que:
- Las reglas y la política de la empresa están para seguirías?
 - El progreso surge del desafío a la estructura rígida?
 - Las reglas están para que se las rompa?

- (24) En la escuela usted prefería:
- ¿Álgebra?
 - ¿Geometría?
- (25) ¿Cuál de estas posiciones de escritura se parece más a la suya:
- La posición diestra normal?
 - La posición diestra en gancho (los dedos apuntando hacia su pecho)?
 - La posición zurda normal?
 - La posición zurda en gancho (los dedos apuntando hacia su pecho)?
- (26) Cuando toma notas, saca copias:
- ¿Nunca?
 - ¿Con frecuencia?
- (27) Gesticula para:
- Enfatizar su punto de vista?
 - Expresar sus sentimientos?
- (28) ¿Instintivamente siente que un tema es bueno o correcto, o decide sobre la base de la información?
- Siento
 - Decido
- (29) ¿Disfruta corriendo riesgos?
- Sí
 - No
- (30) Después de asistir a un musical, puede:
- Tararear muchas partes de la partitura?
 - Recordar muchas partes de las letras?
- (31) Por favor, sostenga un lápiz perpendicularmente al suelo con el brazo extendido, centrado en su línea de visión y alineado con un marco o puerta. Mantien-

do esa posición, cierra el ojo izquierdo. ¿Dio la impresión de que el lápiz se movía?

- a) Sí b) No

(32) Siéntese en una postura relajada y entrelace las manos cómodamente sobre el regazo. ¿Qué pulgar está encima del otro?

- a) Izquierdo b) Derecho c) Paralelos

(33) Marque las afirmaciones que considera correctas acerca de usted:

- Puedo entender los contratos, los manuales de instrucción y los documentos legales.
- Prefiero trabajar siguiendo diagramas y planos.
- Visualizo con intensidad los personajes, el entorno y la trama de las novelas.
- Prefiero que los amigos llamen por teléfono con antelación.
- No me gusta charlar por teléfono.
- Me resulta satisfactorio planificar y arreglar los detalles de un viaje.
- Postergo realizar llamadas telefónicas.
- Me es fácil encontrar palabras en un diccionario y nombres en una guía telefónica.
- Me encantan los juegos de palabras.
- Tomo muchas notas en las reuniones y conferencias.
- Me paraliza cuando he de manejar cosas mecánicas si estoy sometido al estrés.
- Con frecuencia las ideas me surgen de la nada.

(34) Tengo:

- a) Frecuentes cambios de estado de ánimo.
b) Casi ningún cambio en los estados de ánimo.

(35) Soy:

- a) No muy consciente del lenguaje corporal; prefiero escuchar lo que dice la gente.
- b) Bueno en interpretar el lenguaje corporal.
- c) Bueno en entender lo que dice la gente y también el lenguaje corporal que emplea. →

PUNTUACIÓN

Aquí está la clave del ejercicio de autoevaluación. Marque con un círculo los puntos para cada una de sus respuestas.

- (1) a) 7 (2) a) 1 (3) a) 3
b) 1 b) 5 b) 7
c) 3 c) 7
d) 9 d) 9

- (4) a) 9 (5) a) 1 (6) a) 1
b) 7 b) 7 b) 9
c) 3 c) 9
d) 1 d) 3 (7) a) 9
b) 1

- (8) Natación 9 Viajes 5
Tenis 4 Ciclismo 8
Golf 4 Coleccionismo 1
Acampada 7 Escritura 2
Esquí 7 Ajedrez 2
Pesca 8 Bridge 2
Canto 3 Ruleta 7
Jardinería 5 Charadas 5
Tocar un instrumento 4 Baile 7
Mejoras del hogar 3 Paseos 8
Costura 3 Correr 8
Lectura 3 Abrazos 9

Artes/Oficios	5	Besos	9
Cocina	5	Tocar	9
Fotografía	3	Conversación	4
Hacer Nada	9	Debates	2
(9) a) 9	(10) a) 9	(11) a) 1	
b) 1	b) 1	b) 7	
(12) a) 1	(13) a) 9	(14) a) 7	
b) 9	b) 1	b) 1	
	c) 3		
	d) 5		
(15) a) 9	(16) a) 6	(17) a) 1	
b) 5	b) 3	b) 6	
c) 1		c) 9	
		d) 4	
(18) a) 3	(19) a) 1	(20) a) 1	
b) 1	b) 9	b) 9	
c) 7			
d) 9			
(21) a) 9	(22) a) 3	(23) a) 1	
b) 5	b) 7	b) 5	
c) 1		c) 9	
(24) a) 1	(25) a) 1	(26) a) 1	
b) 9	b) 7	b) 9	
	c) 9		
	d) 3		
(27) a) 2	(28) a) 9	(29) a) 7	
b) 8	b) 1	b) 3	
(30) a) 9	(31) a) 8	(32) a) 1	
b) 1	b) 2	b) 9	
		c) 3	

(33) Contratos	1	Postergar	7
Diagramas	7	Encontrar palabras	1
Visualizar	9	Juegos de palabras	3
Antelación	2	Notas	1
Charlar	3	Paralizar	3
Planificar los viajes	4	De la nada	9
(34) a) 9	(35) a) 1		
b) 1	b) 7		
	c) 5		

Ahora sume la cantidad de puntos que ha obtenido y divida el total por el número de preguntas que ha contestado. (Este último número variará, ya que las preguntas 8 y 33 tienen muchos componentes.) Por ejemplo, si sus puntos totalizan 300 en 40 respuestas, su puntuación final será de 7,5, lo que revela una definitiva tendencia hacia el pensamiento del cerebro derecho.

1	3	5	7	9
Izquierdo				Derecho

Visual	97
Auditiva	93
Movimiento	74
Tacto	70
Gusto	67
Olfato	66
Dolor	54
Temperatura	43

Esta información nos revela mucho. Primero, está claro que se pueden «imaginar» todos los sentidos, aunque para algunos es menos corriente que para otros. Por ende, si tiene alguna dificultad para crear este tipo de pensamientos —o sentidos interiores—, mantenga la confianza de que con un poco de práctica será capaz de crearlos con presteza. Segundo, notará que las sensaciones visuales y auditivas —ver y oír interiormente— acaparan casi toda la imaginación. Así que la mejor manera de potenciar su empleo de la imaginación es primero concentrarse en ver y oír. Con el tiempo y la práctica, los otros sentidos como el olor y el sabor, serán tan fáciles de emplear como los más «populares».

Los efectos físicos del pensamiento

Nuestros cuerpos se ven directamente afectados por los procesos de pensamiento. Pídale a un niño que imagine que es fuerte y valiente, y observe cómo se yergue y saca pecho. A los niños les resulta fácil verse a sí mismos de otra manera, y el cuerpo sencillamente adopta su nueva identidad. Lo mismo sucede con los adultos; si se visualiza con claridad una escena sosegada y agradable, o si se imagina una situación traumática, el cuerpo responde de modo acorde. Se experimentan respuestas corporales reales, para bien o para mal, y éstas afectan nuestra salud. No podemos separar el pensamiento del comportamiento. El uno afecta al otro, pero es en la mente donde nace el comportamiento.

El cuadro de la liga sensorial

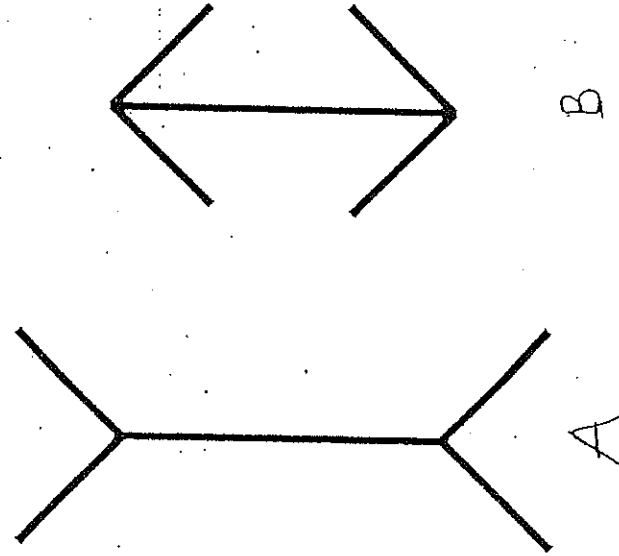
Aunque los sentidos de la imaginación reflejan la totalidad de los cinco sentidos externos, el término «visualización» se emplea por lo general para abarcarlos a todos. Se ha investigado mucho acerca de cómo visualizar. Un estudio típico demostró que el modo más común de imaginación mental era visual, seguido del auditivo. Las sensaciones del tacto resultaron menos dominantes, y las del gusto y el olfato aparecieron aún menos. A los sujetos se les preguntó sobre sus impresiones sensoriales interiores al imaginar algo. Sus respuestas comparadas produjeron los siguientes porcentajes:

El poder de los hábitos mentales

Casi todo el así llamado pensamiento creativo o lateral se ocupa de la ruptura de este modo habitual de pensar, que acepta mensajes a través de los sentidos como si se tratara de un paisaje prístino, inmaculado por la experiencia pasada y libre de cualquier tipo de clasificación. Tal punto de vista holístico es el rasgo principal del pensamiento del cerebro derecho. Es la racionalización, la tendencia a crear patrones lo que corresponde al cerebro izquierdo, y éste frecuentemente domina el pensamiento de los directivos y de las personas profesionalmente entrenadas.

Un ejercicio sencillo ayudará a ilustrar esto. Mire los dos dibujos simples que hay más abajo y decida qué línea vertical es más larga: A o B.

Aunque haya visto antes este tipo de ejercicio óptico, sin duda dirá que A da la impresión de ser más larga que B. De hecho, si toma una medición exacta verá que B es un poco más larga que A. ¿Por qué la línea vertical de la izquierda parece más larga que la de la derecha cuando lo verdadero es lo contrario? Quizá usted



imagina la de la izquierda como la esquina más alejada de una habitación o de una caja, y asume que con el efecto de la distancia y la perspectiva parecerá más pequeña, y su paisaje mental de conocidos patrones de pensamiento (muy equivocadamente) así lo considera. A la inversa, la línea de la derecha quizá es vista como el rincón delantero de un edificio o un cubo, de modo que no se le tiene en cuenta la distancia. De cualquiera de las dos maneras, lo que ve en realidad no es lo que ve (un simple trazo de una línea), sino una percepción existente en su mente que con rapidez se superpone sobre la imagen.

Con el fin de funcionar normalmente, usted ha de asumir mucho sobre el mundo que percibe. Si yo le digo que Bob se encuentra en una habitación, usted asume en el acto que dicho cuarto tiene cuatro paredes, un suelo, un techo y con mucha probabilidad muebles. Al entrar en la habitación no espera tener que comprobar si las paredes son perpendiculares y están en ángulos rectos entre sí. Si constantemente tuviera que inspeccionarlo todo en su entorno, no dispondría de tiempo para hacer nada.

De modo que realizamos todo tipo de asunciones, y ello da como resultado algunos errores. Por ejemplo, si se creara un cuarto especial y distorsionado que fuera más estrecho y poseyera un techo mucho más bajo en el extremo más alejado, al ver a una persona caminar hacia ese extremo usted creerá que se está haciendo más grande. Sin importar lo ridículo que sea esto, la suposición de una habitación recúlnea es tan poderosa que su mente se queda del todo confusa, y puede llegar a creer en algo imposible (que una persona se vuelva más grande), mientras que no creará en algo posible (que el cuarto sea más pequeño en un extremo). Ello se debe a la tendencia del cerebro a crear patrones eficientes con el fin de proporcionar lo que él cree que es una interpretación significativa.

Directivo del 2000

Las empresas no tienen ideas; es la gente quien las tiene. Las personas innovan y consiguen que se logren las cosas, por lo general a *pesar* de la cultura y estructura de las corporaciones. Pero la mayoría de la gente trabaja en el contexto de una organización, sea grande o pequeña, de modo que necesitamos examinar cómo podría cambiar el papel del directivo siguiendo la estela de nuevas formas de pensamiento, avanzando hacia un nuevo tipo de directivo de cerebro completo, el Directivo del 2000.

La eficacia de las empresas empieza con el directivo individual. Usualmente son una o unas pocas personas «especiales» las que explican las notables historias de éxito organizativo. En casi todas las grandes multinacionales es el poder del pensamiento creativo personal y el liderazgo visionario, antes que una alquimia corporativa, una declaración de principios o un programa de cualidad, lo que explican la constante cultura del éxito.

Trabajar dentro de su organización

¿Su nuevo pensamiento de imposibles significará que usted llegará a superar su presente organización? ¿Un cambio al pensamiento del cerebro derecho o en su autoimagen significa reexaminar todo el camino de su carrera? Posiblemente. Pero el creciente interés en el empresario autodidacta que opera dentro de un entorno corporativo y el éxito de algunas compañías en aprovechar el poder creativo interno significa que vivir para establecer su propio negocio es sólo una de las opciones.

En algunos casos la opción del éxito sería mejor tanto para usted como para su organización. Ser una espiga cuadrada en un agujero redondo rara vez aporta felicidad o realización personal. Lo más probable es que lleve lamentaciones y mala salud... lo que no resulta beneficioso para usted o para su empresa. Y el camino cibernético hacia sus metas tal vez le lleve por senderos inesperados. Sin embargo, en otros casos su potenciada eficacia directiva quizá le permita crear un mayor impacto dentro que fuera. A primera vista, ello tenderá a aplicarse más en puestos superiores, donde se puede ejercer una mayor influencia. Pero eso no tiene por qué ser siempre el caso. Un individuo que trabaje creativamente y use su mente de las formas que ya hemos visto seguro que llamará la atención y al cabo será recompensado. Además, bastantes directivos se encuentran mucho más contentos trabajando con otra gente en un entorno corporativo. Para esas personas la vida de un empresario independiente quizá sea demasiado aislada.

Más aún, a menos que usted sea un fanático del trabajo y dueño de una compañía, sin ningún interés personal exterior, entonces es probable que un nuevo modo de pensar también enriquezca su vida social y doméstica... esa vida que tiene aparte de la corporación. Éste es un enfoque holístico al desarrollo de la dirección, en acentuado contraste con los anteriores pensamientos de «recursos humanos». Las compañías iluminadas reconocerán y fomentarán a sus directivos de esta manera más plena, y sin duda se beneficiarán de su aumentada creatividad.

La dirección de personal (como solía llamarse) abarca tanto al individuo como a la organización. De modo que para todas las teorías sobre organización, estructura y cultura hay teorías complementarias concernientes a los aspectos en forma de teorías de motivación. ¿Qué hace que la gente trabaje con más ahínco? ¿Qué hace más feliz a la gente en su trabajo? En el centro se encuentran las teorías de «rol», que tratan sobre los diversos «sombrosos» que llevamos. Su papel como directivo es sólo uno de muchos... quizá usted, por ejemplo, también sea una madre, de vez en cuando un cabeza de turco, y probablemente un vecino.

Todas estas teorías que se basan en lo individual tienen tres defectos importantes. Primero, su meta es entender mejor a la gente desde un punto de vista para mejorar el rendimiento organizativo. Pero tal meta limita gravemente la comprensión; la gente no es *únicamente* recursos corporativos. Segundo, en ellas predomina

minan las perspectivas *behavioristas*. Es más fácil observar a las ratas que entender el pensamiento humano; por ende, las creencias, las actitudes y los sentimientos se han dejado fuera de los límites aceptados del estudio científico. Y tercero, no incorporan el punto de vista *holístico* del individuo como una persona total. Sólo examinan los papeles de la gente dentro de la organización, sin llegar a reconocer la necesidad y el potencial del pensamiento individual y creativo del cerebro derecho.

Todas estas deficiencias son síntomas del estrecho y racional prejuicio del cerebro izquierdo en la sociedad occidental. Las empresas tienen que empezar a darle cabida a la nueva raza de ejecutivos librepensadores, sin importar la estructura presente y la cultura imperante. Los programas de desarrollo de dirección deben incorporar técnicas del cerebro derecho para la solución de problemas, la dirección del tiempo y las responsabilidades directivas.

Darle espacio a la creatividad

El Centro Du Pont para la Creatividad en Carolina del Norte, USA, ha reconocido la necesidad para la creatividad en sus directivos. Algunas de las características que David Tanner ha identificado allí en los directivos están próximas a los rasgos del cerebro derecho que yo he visto en muchos altos directivos británicos:

- Sienten un absoluto descontento con el *status quo*.
- Buscan soluciones alternativas para problemas u oportunidades.
- Tienen mentes preparadas, estando alerta ante las cosas que podrían activar ideas.
- Piensan positivamente, y se esfuerzan por pensar positivamente.

Tanner dice: «Un montón de gente llama alborotadores a las personas que desean cambiar las cosas, pero yo creo que nos hacen falta más alborotadores.»

A lo largo de los años la formación de creatividad ha perdido y recuperado el favor del mundo de los negocios. Alex F. Osborn fue uno de sus tempranos promotores. En 1942 escribió el primer libro serio sobre la creatividad, *How to Think Up*, que en verdad abrió los

ojos de la gente al hecho de que estaba a su alcance el hacer algo deliberado para estimular la creatividad, a saber: entrenar al individuo. Edward de Bono, el creador del Pensamiento Lateral, ha repetido el mensaje con elocuencia. Más recientes desarrollos en la Programación Neurolingüística, a veces llamada la ciencia de la excelencia personal, nos confirman que usted como individuo puede tomar el control de su poder natural y creativo. A la luz de la tecnología del nuevo pensamiento, las improbabilidades actuales se pueden convertir en posibilidades para lograr metas de carrera y de vida. Y los cambios en usted afectarán a su organización.

Como un nuevo tipo de directivo, capaz de manejar cualquier grado de cambio y turbulencia en el entorno, usted es el eslabón entre la excelencia personal y una corporación reinventada, donde la gente es lo primero. Aunque, por su propia naturaleza, la creatividad personal no puede institucionalizarse, y no resulta dócil para los precisos modelos corporativos a los que ya nos hemos acostumbrado, ha de identificarse y comprenderse como un fenómeno... como un proceso sujeto a ser aprendido. Es el sello distintivo del Directivo del 2000 en un entorno corporativo. Es el punto de vista holístico del individuo que se abre a incalculables posibilidades. Empiece a verse a sí mismo como algo más que un recurso institucional, un bien de la corporación. Usted es una persona única con un potencial inimaginable (que usted sabe que significa «imaginable»), realizable y creativo. Utilizando los recursos no aprovechados del hemisferio del cerebro derecho puede empezar a crear su propio y mejor futuro, dentro o fuera de una compañía.

Excelencia personal

Una fibra de excelencia personal, de creatividad humana natural e irreprimitible corre por el núcleo de cualquier logro corporativo u organizativo. Usted no sólo posee el derecho personal al no aprovechado océano de su mente, sino que tiene la capacidad natural de explorar sus profundidades y disfrutar de sus tesoros. Usted es igual a cualquier guru de la dirección que ha tropezado con algunas percepciones iluminadas.

En su libro, *En busca de la excelencia*, Tom Peters y Robert Waterman identificaron dos de las características principales de las empresas con éxito:

- Autonomía y visión empresarial. Los líderes y los innovadores individuales son respetados y animados. Se necesitan aliados: para los productos, las ideas, el cambio. Se fomenta positivamente la asunción de riesgos.
- Los valores. Los valores y las filosofías básicos de una organización tienen mucho más que ver con los logros que los recursos tecnológicos o económicos. Las convicciones mantenidas marcan a las compañías de éxito.

Líderes con visión

Peters y Waterman comenzaron descartando el papel del liderazgo en el éxito corporativo:

Nuestra convicción era que las compañías excelentes llegaron a ser del modo que son debido a una única serie de atributos culturales que las distinguen del resto, y si comprendiéramos lo suficientemente bien esos atributos podríamos hacer algo más que musitar «liderazgo» en respuesta a preguntas como «¿Por qué J & J es tan buena?»

De hecho, averiguaron que asociado casi con todas las compañías excelentes había un líder fuerte (o dos) que parecía ser el máximo responsable en haber conseguido que en primer lugar la compañía fuera excelente. «Muchas de estas empresas... parecen haber adquirido su personalidad básica bajo la tutela de una *persona muy especial*. Además, lo hicieron en una fase bastante temprana de su desarrollo.»

De modo que todo parecía reducirse al liderazgo visionario. Quedaba clara la importancia del individuo. Y luego observaron que las compañías excelentes daban la impresión de haber desarrollado culturas que incorporaban los valores y prácticas de los grandes líderes, y esos valores compartidos podían de ese modo sobrevivir durante décadas tras el fallecimiento del guru original. Por ende, lo que a primera vista parece un rasgo cultural, por lo general se puede rastrear hasta un pensador y líder visionario cuya influencia sobrevive a su papel organizativo. Y estos pensadores visionarios se comportaban y hablaban más como empresarios del

cerebro derecho que como directivos profesionales del cerebro izquierdo.

Por desgracia, *En busca de la excelencia*, aunque reconocía esas contribuciones personales, se centró en los criterios de éxito de las *corporaciones*, como la estrategia, los sistemas y las habilidades, y los hicieron encajar en un modelo preciso. La reciente desaparición de varias de las empresas de «éxito» apoya aún más la idea de que la concentración debería estar en lo personal en vez de en lo organizativo.

Un rasgo de visión personal es la capacidad de conseguir contribuciones extraordinarias de un montón de personas. Y esta capacidad no emana de aplicar un estilo de dirección autoritario o de consenso, o de adoptar una estructura centralizada o descentralizada, ni siquiera de una exhaustiva comprensión de la teoría de la motivación. La capacidad procede de la visión personal, del propósito, del sueño que es lo bastante grande y claro como para ser compartido. Semejante persona es un líder, no porque él o ella dirijan, sino porque la gente tiende a seguirla.

Henry Mintzberg, un nombre familiar en la ciencia de la dirección, expone el caso del cerebro derecho:

Un hecho se repite con frecuencia en toda esta investigación: los procesos clave de la dirección son enormemente complejos y misteriosos (para mí como investigador, al igual que para los directivos que los ejecutan), alimentándose de las informaciones más vagas y utilizando los procesos mentales menos articulados. Estos procesos parecen ser más relacionales y holísticos que ordenados y secuenciales, y más intuitivos que intelectuales; parecen ser más característicos de la actividad del hemisferio derecho (el énfasis está puesto por mí).

Aquí radica la clave para usted y para mí. Estos «grandes» líderes sólo aparecen grandes en percepción. Su grandeza comenzó con una idea loca, un propósito, un embrión imperceptible de una idea, un sueño. Sencillamente, no siguieron el libro de la regla racional.

Al entrevistar a altos ejecutivos en el Reino Unido intenté rastrear rasgos comunes en aquellos que estaban «a la derecha del

centro» en su estilo de pensamiento... es decir, que usaban la intuición, la percepción y la imaginación y eran precavidos con los métodos analíticos. Dio la impresión de que no emergía ningún rasgo en común. Las percepciones intuitivas, por ejemplo, surgirían de distintos modos y en diferentes momentos. Algunos ejecutivos siempre compartirían las ideas con sus colegas, mientras que otros confiarían en su juicio sin pasar por un proceso de consenso. Otros verificarían exhaustivamente su juicio del cerebro derecho con análisis y apoyo... que otros despreciaban abiertamente como algo carente de valor. Unos tomarían decisiones instantáneas mientras otros le concederían a sus sensaciones abundante tiempo para clarificarse. Pero un rasgo del cerebro derecho era corriente a todos ellos: la capacidad de imaginar el futuro, diferentes escenarios. Y ésta es la cualidad visionaria tan vital para el liderazgo corporativo.

Como ya hemos visto, esta habilidad de visualización no es un talento hereditario ni alguna astuta magia reservada para gente especial. Es el modo en que pensamos de manera natural cuando empleamos nuestra imaginación; cuando le damos al suprimido cerebro derecho su libertad de creación. También hemos visto que usted puede reaprender cualquier habilidad de pensamiento perdida... puede *convertirse* en un visionario, en un líder capaz de ver adónde van usted y su organización.

En su libro *Re-inventing the Corporation*, John Naisbitt y Patricia Aburdene identificaron dos elementos cruciales para el cambio social: nuevos valores y necesidad económica. Muchos valores cambiaron en los años sesenta, y las teorías de personal y dirección reflejaron la fluctuación general hacia la importancia del individuo. Pero estas teorías apenas examinaron la vida cotidiana de la comunidad de negocios, y en especial las cada vez más crecientes corporaciones multinacionales. La Teoría Y de Douglas McGregor, que en efecto dijo que la gente se comportaría mejor y sería más productiva si se la trataba con respeto, estuvo muy adelantada a su tiempo. Naisbitt establece el punto de que ha hecho falta más necesidad económica reciente a la vez que los cambios de valores de los sesenta para iniciar el verdadero proceso del cambio. Las jerarquías corporativas se hallaban tan atrincheradas y sordas al cambio como cualquier institución social. Ahora, al fin, el cambio está teniendo lugar, desde las raíces del propio individuo, de los directivos autodesarrollados, en vez de como un

producto de racionalización o declaración de principios estructurados.

Lo malo de esto es que no podemos modelar un instinto corporativo y colectivo. Las empresas no tienen percepciones... la gente sí. Sin embargo, las buenas noticias son que la creatividad e innovación individuales están sujetas al aprendizaje, y es posible cultivar estas características naturales pero suprimidas dentro de la corporación a cualquier nivel. Sólo el menospreciado salto intuitivo puede igualar los complejos problemas a los que nos enfrentamos. La búsqueda de la excelencia corporativa se ha convertido en la búsqueda de la excelencia personal. Y ésta se ha convertido en la búsqueda del directivo del cerebro derecho del mañana.

Un nuevo tipo de directivo

El Directivo del 2000 será capaz de ver desde otras perspectivas nuevas sin perder el punto de vista racional del cerebro izquierdo. Es decir, él o ella tendrán un punto de vista equilibrado, holístico o de múltiples facetas respecto de lo que está sucediendo... una manera de pensar que aproveche la totalidad del cerebro. Harold Leavitt de la Universidad de Stanford, USA, ve el proceso de dirección como un flujo interactivo de tres variables:

- Búsqueda de caminos.
- Toma de decisiones.
- Reglamentación.

El problema con el modelo racional del cerebro izquierdo es que sólo enfoca el elemento central: la toma de decisiones.

Leavitt clasificó varias ocupaciones en las tres categorías. La gente que cae en la categoría de la toma de decisiones incluye a analistas de sistemas, ingenieros, licenciados en administración de empresas, estadísticos y —tome nota— directivos profesionales; extraños compañeros de cama, pero parecidos en su prejuicio hacia el enfoque racional del cerebro izquierdo. La reglamentación es la «gente» del cerebro derecho que está al final del proceso, que incluye la venta. De manera similar, la función de búsqueda de caminos es un proceso esencialmente estético, intuitivo, del cerebro dere-

cho, de diseño, ajeno a nuestra educación y formación en la dirección. De hecho, necesitamos *combinar* todos estos elementos del proceso de dirección en vez de adoptarlos y abandonarlos según dicte la moda teórica. Y por lo menos para la siguiente década debemos alejarnos de la parte del proceso de toma de decisiones más predominantemente racional, sólo para compensar el equilibrio.

Como un buscador de caminos usted verá adónde quiere ir e inspirará a otros a que le acompañen. Como un gestor tendrá que «vender» lo que es patentemente obvio y está analíticamente probado. En ambos papeles necesitará llevar gente con usted. A las personas no les interesan los hijos de los demás, sólo los propios. Tienen que creer en algo: por libre elección antes que por una declaración de principios corporativa que les ha sido entregada desde arriba. Y lo mismo le sucede a sus colegas directivos. La gente no le da apoyo a un análisis o a una hoja de cálculo seguros. Sigue a una persona. De forma que, si bien no está muerto, sí hay que dejar que el modelo racional que excluía la visión e iniciativa personales repose un tiempo.

Ésta es una píldora amarga para un directivo que siempre ha abrazado el método científico. Después de todo, han hecho falta muchos años para conseguir el término «ciencia de la dirección». Pero la ciencia en sí misma empieza a tensarse en las costuras de su modelo racional. El típico artículo científico reproduce poco de los falsos comienzos, saltos intuitivos, cabos sueltos y accidentes felices con los que todos los científicos están familiarizados. En el peor de los casos, debido a nuestras diferentes percepciones personales (a las que ningún científico es inmune), pueden, adrede o sin saberlo, distorsionar la misma «verdad objetiva» que afirman sostener. El pensamiento estrecho y del cerebro izquierdo ya no es un refugio inexpugnable. Las cosas ya no acontecen de acuerdo con un plan, y no se las puede reducir a pequeños y pulcros modelos o teorías. De modo que necesitamos un nuevo tipo de directivo: un líder con la suficiente creatividad que esté a la altura del ritmo del cambio, apto a plantear nuevas preguntas en vez de acumular viejas respuestas.

En el nuevo clásico *On Becoming a Leader*, los ingredientes de Warren Bennis para un líder moderno incluyen:

- Una visión guiadora.
- Pasión.
- Integridad.

- Confianza.
- Curiosidad y osadía.

Éstos no son los típicos rasgos de libro de texto de la dirección tradicional. ¿Dónde están el control y la planificación, dónde el análisis y la toma de decisiones racional, y dónde está el «plazo de entrega»?

El directivo del mañana será un líder, si no en el viejo sentido jerárquico, sí en ideas e influencia. Pero sea cual fuere el título, el nuevo papel del directivo poco a poco se está tornando claro. Las distinciones que establece Bennis entre los directivos y los líderes sencillamente ayudan a identificar al Directivo del 2000.

Evalúese como líder

La lista de Bennis que se transcribe a continuación muestra las habilidades del cerebro izquierdo empleadas tradicionalmente por los directivos y las cualidades del cerebro derecho asociadas con los líderes. Tal vez desee emplear la lista para evaluarse a sí mismo como líder/directivo:

- El directivo administra; el líder innova.
- El directivo se centra en sistemas y estructuras; el líder se centra en la gente.
- El directivo tiene un punto de vista de corto alcance; el líder tiene una perspectiva a largo plazo.
- El directivo tiene el ojo puesto en el plazo de entrega; el líder tiene el ojo puesto en el horizonte.
- El directivo imita; el líder crea.
- El directivo acepta el *status quo*; el líder lo desafía.
- El directivo es el clásico buen soldado; el líder es independiente.

Entonces, para convertirse en un verdadero directivo, usted ha de convertirse en sí mismo, y expresar estas cualidades de liderazgo del cerebro derecho. Sin importar qué resultados obtuviera de la lista de Bennis, el cambio se halla al alcance de su poder.

Hace tiempo que es necesario un nuevo tipo de líder/directivo. Un repaso histórico superficial del conocimiento y la práctica en la

dirección de las últimas décadas nos muestra que la dirección profesional jamás ha alcanzado su mayoría de edad. Hemos acumulado un puñado de teorías, una sustituyendo despacio a la otra a medida que cambiaba la moda empresarial. Todavía nos quedan por colocar las distintas partes del rompecabezas.

El directivo de los nueve minutos

Hizo falta que Henry Mintzberg, después de una rigurosa investigación, nos dijera lo que ya sabíamos; que lo que ponían los libros de texto no pasaba en la realidad. Los directivos no «analizaban, planificaban, decidían y supervisaban» analíticamente. A cambio, eran muy humanos, reactivos, productos de lucha contra el fuego del cambio en el en apariencia ingobernable mundo de los negocios. En vez de dedicarle grandes dosis de tiempo a tareas importantes, tal como indicaban los libros de dirección del tiempo, la media que un directivo le dedicaba a cualquier asunto eran *nueve minutos*. Lo que los directivos *deberían* hacer se hallaba a años luz de lo que en verdad *hacían*. Ahí se acaba el mito de que los directivos profesionales bien formados eran capaces de administrar cualquier cosa, que la toma de decisiones fría y analítica era el camino a la excelencia; que lo que el cerebro izquierdo *pensaba* que podía hacer terminaba haciéndolo en realidad.

Ahora todo esto es bien conocido, y la culpa se ha repartido de manera bien amplia. Tom Peters lanza un terrible ataque contra el mundo empresarial estadounidense en su éxito de ventas, *Thriving on Chaos*. Ningún observador europeo afirmaría que el Reino Unido está libre de una similar enfermedad empresarial, aunque los acontecimientos económicos a ambos lados del Atlántico sugieren causas distintas. Las facultades empresariales han sido machacadas. Un artículo del *New York Times* señaló como parte del problema las licencias en administración de empresas por su tradicional inclinación hacia los números y el análisis. Los diagnósticos más precisos parecen ser aquellos que identifican el dominio del cerebro izquierdo, una obsesiva preocupación por los números y el análisis a expensas de la visión, la imaginación y la capacidad de innovar para cambiar el entorno.

Los líderes del mundo de los negocios con un buen historial de logros expresan sus opiniones:

«A los así llamados directivos profesionales les falta perspectiva.»

«... necesitan una visión más amplia.»

«A la mayoría de los altos directivos les falta intuición...»

«Casi todos los ejecutivos son incapaces de tener pensamientos originales debido a que son incapaces de escapar de la tiranía del raciocinio.»

Muchos eminentes pensadores y practicantes empresariales empiezan a contar la misma historia, e incluso las facultades empresariales se están apartando de las licenciaturas teóricas y acercándose al aprendizaje basado en la organización y la acción. Todo esto presagia un nuevo tipo de directivo.

El futuro gran cambio

Thomas Khun, identificando los principales avances en la ciencia, alude al «patrón de cambio». Tal cambio nos proporcionó las teorías de la relatividad en la física y de la tectónica de placas en la geología. Tarde o temprano, la ortodoxia de la racionalidad ha de ser sustituida por algo por completo nuevo y diferente. Y ello empieza con el modo en que pensamos.

En el contexto de lo que ha estado ocurriendo a nuestro alrededor en algunas ramas de la ciencia y la tecnología, ¿cuánto ha avanzado la dirección de empresas? Hemos sido centralizados y luego descentralizados al ritmo de un lento péndulo. Hemos pasado por «lo grande es hermoso», cuando gobernaba la economía de las leyes de escalas, a los cultos de «cínete a tu tarea» que surgieron después de las catástrofes de la diversificación. Pero ¿dónde está el salto en la dirección de empresas que se compare con la mecánica cuántica en la física o con el chip de silicio en la industria de la información y las comunicaciones?

La verdad es que los progresos en la teoría y en la práctica de la dirección no han mantenido el ritmo con los asombrosos cambios que han tenido lugar a nuestro alrededor. Lo que aún es más preocupante, cualquier progreso importante no ha surgido del

interior de las filas de los directivos, ni siquiera de las facultades empresariales, sino que han sido reacciones a eventos externos.

Hace unos veinticinco años, Jay Forrester escribió sobre un «Nuevo Diseño Corporativo». Su notable trabajo predijo muchos de los cambios que hemos visto en los últimos años. Además, sin enfocar los temas que nos ocupan desde un ángulo psicológico, dio por accidente con la necesidad de un pensamiento de cerebro derecho en la dirección de empresas. «En la tecnología», dijo, «esperamos experimentos osados que pongan a prueba ideas y consigan nuevos conocimientos que conduzcan a progresos importantes. Pero en cuestiones de organización social, por lo general sólo proponemos modificaciones tímidas de práctica convencional y nos acobardamos ante los experimentos y la innovación atrevidos. ¿Por qué?»

Forrester no respondió su penetrante pregunta, pero sí describió su Nuevo Diseño Corporativo. Vio la estructura jerárquica en la que todos tenían un jefe y un subordinado como corruptora del espíritu humano. Basándose en gran cantidad de pruebas políticas, económicas y psicológicas, expuso el «efecto embrutecedor que la organización autoritaria tenía sobre la iniciativa y la innovación.» Imaginó una estructura de relaciones en constante cambio, libremente negociada por el individuo. Está claro que la creatividad individual puede ser la base de una potente cultura corporativa en vez de sembrar las semillas de la anarquía. Y algunas organizaciones ya están aprovechando la visión personal para conseguir sus fines corporativos.

Semana a semana se ven señales de la aparición de un nuevo tipo de directivo empresarial. Un papel tan especial no está reservado a los genéticamente afortunados ni a unos pocos bendecidos. Es para el directivo corriente que ha aprendido a pensar de una manera nueva, que ha aprendido a invocar rutinariamente poderes de percepción y creatividad que parecen de los dioses, cuyo mundo interior y subjetivo es capaz de concebir realidades objetivas y de darles vida en contra de todas las desventajas existentes. Esta persona se halla bien formada profesionalmente, tiene los pies asentados con firmeza en el suelo y utiliza la totalidad de sus poderes del cerebro derecho cuando la ocasión lo requiere; sin embargo, inequívocamente se lo identifica como el *directivo del cerebro derecho*.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)-814990 ; FAX: (041)-810505
E-Mail: tarzia@uafce.edu.ar

POSGRADO EN DIRECCIÓN DE EMPRESAS PDG'98

CURSO : MATEMÁTICA APLICADA

**"LÓGICA, NÚMEROS, PROPORCIONES, ECUACIONES
Y FUNCIONES APLICADAS A LA ECONOMÍA
Y LA ADMINISTRACIÓN. PROBLEMAS,
TRABAJOS PRÁCTICOS Y CASOS"**

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Abril 1998

PLAN A DESARROLLAR

En el presente módulo se presentan:

- etapas en la resolución de problemas [Po] (p. 3 – 4);
- actividades sobre la resolución de problemas y juegos matemáticos [AR, AB] (P. 5 – 24);
- estrategias en la resolución de problemas [AR, AB] (p. 25 – 30);
- se plantean problemas, juegos, trabajos prácticos y casos no clásicos sobre los temas [AA, AR, AB, BePiSa, Fa, Ga, Ha, Gu, Kr, Po, Sa, So, Ta1, Ta2]:
 - Lógica y Conjuntos (p. 31 – 38);
 - Números Reales, Proporciones (Porcentajes), Ecuaciones y Funciones Reales (p. 39 – 58);
 - Trabajo Práctico Especial: "Aplicaciones de los Números y de las Funciones Reales a Problemas de la Economía y de la Administración" (p. 59 – 67).
- las referencias básicas de la bibliografía utilizada (p. 68).
- Complemento sobre lógica y juegos matemáticos (a partir de p. 69).

Para resolver
un problema
se necesita:

I Comprender el problema

II Concebir un plan

Determinar la relación entre los datos y la incógnita.

De no encontrarse una relación inmediata, puede considerarse problemas auxiliares.

Obtener finalmente un **plan** de solución.

III Ejecución del plan

IV Examinar la solución obtenida

Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

ACTIVIDAD 1:

LECTURA

SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y JUEGOS.

Para desarrollar esta actividad no tienes que construir ni manipular ningún material, solo debes leer con atención lo que sigue y reflexionar sobre la lectura ya que en las próximas actividades deberás recordar lo que aquí se dice.

¿QUÉ ES UN PROBLEMA O UN JUEGO MATEMÁTICO?

Es una situación que implica un propósito u objetivo que hay que conseguir, y que es aceptada como problema por alguien. Sin esa aceptación no hay problema. Hay obstáculos para alcanzar ese propósito, y requiere deliberación, ya que el que lo afronta no conoce ningún algoritmo o procedimiento para resolverlo.

Un problema debe representar un reto adecuado a las capacidades de quien intenta resolverlo. Además debe tener interés en sí mismo, estimular el deseo de proponerlo a otras personas; no debe ser un problema con trampa o un acertijo, ni dejar bloqueado inicialmente a quien lo ha de resolver.

No confundas problema con ejercicio; estos son cuestiones que de un golpe de vista se ve en qué consisten y cuál es el medio para resolverlas. A la hora de resolver un ejercicio se suele tener a mano una receta que facilita su solución y en general la resolución de un ejercicio exige poco tiempo, situaciones que no suelen darse ante un problema o juego.

¿QUÉ ES RESOLVER UN PROBLEMA O JUEGO?

La resolución de un problema o juego es un proceso de acontecimientos que nos lleva a recorrer diferentes etapas en un viaje: aceptar el desafío, formular las preguntas adecuadas a cada caso, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución. Llevará consigo el uso de la heurística (el arte del descubrimiento), pero no de una manera predecible, porque si el método, (que no existe), pudiera ser predicho de antemano, se convertiría en un algoritmo pasando de problema a mero ejercicio.

Todo esto comporta, para cada uno de los problemas a resolver, una inmersión en el mundo particular del problema, poniendo de manifiesto las técnicas, habilidades, estrategias y actitudes personales de cada individuo que aborda el problema.

La resolución de problemas es un proceso, no un procedimiento paso a paso; es fundamentalmente un viaje, no un destino ("... *no hay camino, se hace camino al andar.*"). Este viaje queda plasmado en ir cubriendo las siguientes etapas: deseo de acercarse al problema, aceptar el desafío, correr un riesgo, hallar la respuesta, comprender una pregunta, descubrir nuevos conocimientos o crear una nueva solución.

¿QUIÉN ES UN BUEN RESOLUTOR DE PROBLEMAS?

El que tiene deseo de afrontarlo (**yo quiero**), acepta el desafío con entusiasmo (**yo puedo**), está en posesión del equipamiento de técnicas y estrategias (heurística) matemáticas oportunas (**estoy dispuesto a aprenderlas**), y tiene talento para ello (aunque el talento es fundamental para llegar lejos en el viaje, no lo es para disfrutar de él). Y por fin, el que practica las virtudes de la paciencia y la perseverancia.

¿QUÉ SE APRENDE RESOLVIENDO PROBLEMAS?

Se aprende fundamentalmente, a entender el funcionamiento de nuestro propio razonamiento, a dominar nuestros estados de ánimo y a aumentar la confianza en nosotros mismos, nuestra autoestima.

¿CUÁL ES LA MEJOR FORMA DE RESOLVER PROBLEMAS?

La única forma es resolviendo problemas. Cada problema afrontado, con o sin éxito, nos enseña a resolver el siguiente. De alguna manera se aprende a aprender, por eso es interesante esta actividad. Pero recuerda que ésta, como todo arte, es una actividad que requiere fe (en que **puedes**), coraje (en que **quieres**), humildad (porque **no lo sabes todo**) y disciplina (estás dispuesto a **esforzarte por seguir aprendiendo**).

REGLA DE ORO: LO QUE IMPORTA ES EL CAMINO

Siempre debes tener en cuenta que lo que importa es el camino. No pongas la mira en el éxito, sino en el proceso. Es el proceso el que te enseña. Un problema resuelto es un problema muerto, pero si aún se te resiste, vive en ti como problema.

BLOQUEOS Y DESBLOQUEOS

Dijimos anteriormente que un problema constituye un auténtico reto. Sabemos, más o menos, a dónde queremos llegar, pero ignoramos el camino. Ante esta situación caben actitudes positivas como confianza, tranquilidad, disposición de aprender, curiosidad, gusto por el reto, etc. y otras negativas o bloqueos que pueden obstaculizar nuestro avance como, miedo a lo desconocido, nerviosismo, prisa por acabar o cierta desazón ante la prueba.

En la tabla siguiente puedes ver los tipos de bloqueos que nos pueden afectar y algunas pautas para reflexionar sobre ellos e intentar superarlos.

BLOQUEOS DE ORIGEN	PAUTAS PARA SUPERAR LOS BLOQUEOS
--------------------	----------------------------------

<p style="text-align: center;">AFECTIVO</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ Apatía, abulia, pereza por el comienzo. ▶ Miedos al fracaso, a la equivocación, al ridículo. ▶ Ansiedades. ▶ Repugnancias. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Piensa en las distintas formas de comenzar tu tarea. Escoge una y comienza. ◆ El inicio puede tener carácter provisional. ◆ Los fallos y equivocaciones nos enseñan sobre las formas adecuadas de proceder. ◆ Aminorar la hiperactividad cuando nos percatamos de estar empujados a ella. ◆ Actúa ocasionalmente contra la tendencia que te arrastra.
--	---

<p style="text-align: center;">COGNOSCITIVO</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ Dificultades en la percepción del problema. ▶ Incapacidad de desglosar el problema. ▶ Visión estereotipada. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Examinar cómo otros se enfrentan con actividades parecidas y comparar procedimientos. ◆ Tratar de descomponer en partes más sencillas. Establecer prioridades. ◆ Permanecer abierto a lo extraño.
--	---

<p style="text-align: center;">CULTURALES Y AMBIENTALES</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ La sabiduría popular dice: "Busca la respuesta correcta". "Esto no es lógico". "Hay que ser práctico". 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ No te contentes con la primera respuesta, busca varias respuestas. ◆ Déjate llevar por ideas imaginativas y por tu fantasía. ◆ Cultiva, en lo posible, la actitud lógica. ◆ Juega con tus problemas.
--	---

AUTOEXAMEN SOBRE TU MANERA DE PENSAR

La resolución de problemas nos debe llevar a entender el funcionamiento de nuestro propio razonamiento, a dominar nuestros estados de ánimo y a aumentar la confianza en nosotros mismos. En definitiva, nos ayuda a conocernos mejor a nosotros mismos. El conocerte a ti mismo, en este ámbito, te proporcionará la posibilidad de utilizar tus recursos de la forma más eficaz posible y alcanzar con seguridad un conocimiento más pleno.

Lee con atención, reflexiona detenidamente y escribe con cuidado y orden las respuestas a las siguientes cuestiones:

1. Cuando te enfrentas a un problema, ¿con qué papel de los siguientes te identificas más?:

investigador	detective	profesor	conductor de coches
explorador	actor	juez	científico
negociante	matemático	constructor	el más listo de la clase

Explica brevemente tu elección.

2. Cuando te enfrentas a un problema, ¿con qué estado de ánimo te identificas más?:

optimista	pesimista	desanimado	indiferente
vigilante	derrotado	crítico	disgustado
angustiado	aburrido	divertido	tranquilo

Explica brevemente por qué.

3. ¿Qué es lo que más te ayuda a concentrarte? El silencio, la paz, la tranquilidad, la música, viajar, pasear, contemplar el paisaje, etc. Explica por qué.

4. Si no te sale un problema, ¿qué prefieres hacer: continuar a pesar de todo, olvidarte de él por un rato, abandonarlo definitivamente, seguir pensando en él en casa. Explica por qué.

5. A la vista de la tabla de bloqueos, ¿de qué tipo son los bloqueos que encuentras al resolver un problema? Explica por qué.

6. ¿Qué buscas en la resolución de problemas? Entretenimiento, ejercicio, cumplimiento de un deber, satisfacer mi curiosidad, autosuperación, preparación más eficaz, etc. Explica por qué.

7. ¿Cómo eres respecto al trabajo? Me cuesta ponerme en marcha, soy de esfuerzos prolongados, me canso y me aburro fácilmente, soy de intensos altibajos. ¿Conoces la causa?

8. En el trabajo, ¿qué te produce más satisfacción: pensar autónomo, observar, mirar como lo hacen los otros, explorar, repetir, repasar, asegurarse, no trabajar?
¿Qué es lo que más te cuesta?

9. ¿Qué tipos de problemas son los que más te gustan?

10. Tu pensamiento, ¿anda casi siempre bajo control o a ratos anda vagando y divagando?

ACTIVIDAD 2: MODELOS Y PROTOCOLOS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Recuerda que en la actividad anterior la respuesta a la cuestión ¿cuál es la mejor forma de resolver problemas?, era que el único camino posible es resolviendo problemas. Esto puede parecer un contrasentido, pero la realidad nos muestra que es así.

Esta situación puede resultar descorazonadora para alguien que comienza a introducirse en este ámbito. Para salir de este círculo vicioso te diremos que en la resolución de problemas podemos servirnos de guías o **modelos** que nos faciliten el camino que debemos recorrer a lo largo de todo el proceso de resolución de un problema.

Recuerda que para que mejores el hábito de pensar sería conveniente que nunca olvidases estos tres principios básicos:

- ▶ Tener un modelo que nos sirva de guía en el pensamiento y la acción.
- ▶ Practicar el pensar, tratando de ajustarlo a dicho modelo.
- ▶ Poner en práctica una forma de examinar, en cualquier momento, nuestro proceso de pensamiento y resolución, ya que siempre resulta más interesante el camino recorrido que el final del viaje o resultado del problema.

Antes de explicarte el modelo que puedes seguir y la forma de expresión escrita de lo que vayas pensando y sintiendo, puedes observar cómo hemos resuelto, trabajando en grupo, los problemas que siguen.

Queremos poner de manifiesto que estos protocolos no deben leerse como un solucionario de problemas o ejercicios al uso; en ellos debe contemplarse la realidad que normalmente aparece cuando, individual o colectivamente, intentamos la resolución de un problema.

En los protocolos, ligeramente retocados para hacer más fácil su lectura, se encontrarán entre otros aspectos: los bloqueos, los caminos erróneos, las opiniones individuales de agrado o desagrado respecto al tipo de problema, las reflexiones individuales o colectivas referidas a aspectos particulares del problema, a las fases del modelo de resolución utilizado, etc.

FICHAS DE DOMINÓ

	5	1	4	6	0	3	3	5
Se han colocado, al azar, las fichas de un dominó sobre una mesa y se han fotografiado.	6	5	4	6	2	2	4	0
La exposición no fue correcta; aunque se podían distinguir los números de las fichas, no se podía distinguir la posición de cada ficha individual.	4	5	4	5	0	0	2	5
¿Puedes reconstruir las fichas?	6	2	1	3	3	6	3	0
	4	2	3	5	0	1	6	6
	0	1	4	1	4	1	5	6

FASES DE FAMILIARIZACIÓN Y BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS:

2 1 3 2 0 3 2 1

El grupo no tiene dificultades respecto al enunciado del problema, y pasa a la búsqueda de estrategias que pueden resolverlo.

Aparecen las siguientes ideas:

- 1) De forma ordenada marcamos un número (por ejemplo, el 5) y fijamos todas las fichas donde aparece.
- 2) Buscar, en primer lugar, las fichas dobles y continuar con la opción i).
- 3) Analizar las posibilidades que se pueden ofrecer en las esquinas.
- 4) Se construye una tabla con todas las fichas del dominó y se van tachando las fichas encontradas que tengan posibilidad única de aparición en el cuadro dado.

FASE DE DESARROLLO DE LA ESTRATEGIA:

Pequeña discusión sobre el enunciado que se concluye con:

- Las fichas sólo se pueden colocar en horizontal y en vertical.
- Se cae en la cuenta de que, dado que el dominó tiene 28 fichas, el número de dígitos del cuadro debe ser 56. Así ocurre.

Se inicia la resolución a partir de la estrategia ii) (fichas dobles).

Aparecen las fichas

5
5

 y

0	0
---	---

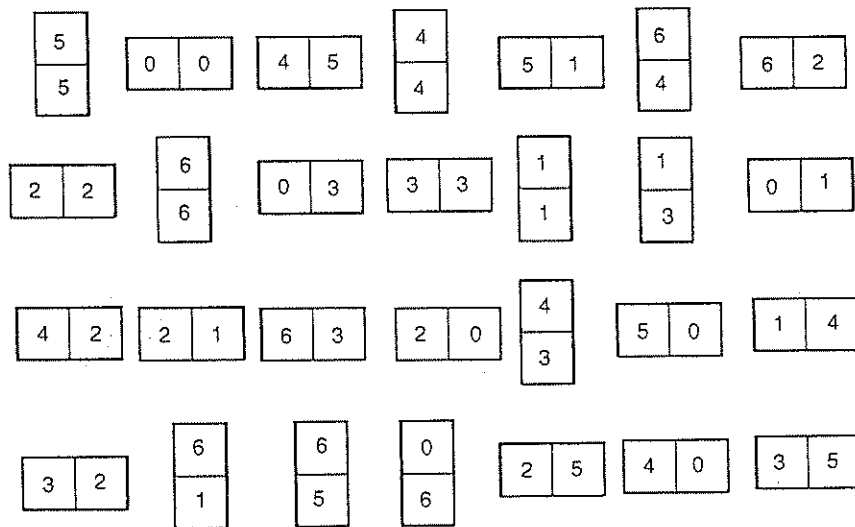
 como posibilidades únicas y no hay continuación.

Se va a desarrollar la idea 3 (esquinas), la cual no produce resultados después de un análisis en cada una de ellas.

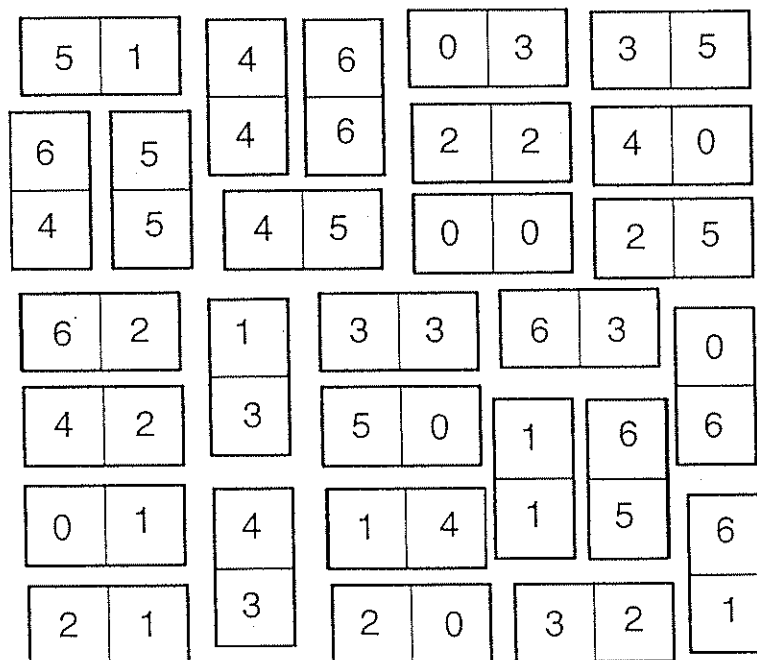
La opción 1 también se abandona.

Llegados aquí y ante el fracaso de todo lo anterior, se pone en marcha la estrategia 4.

Se pone en práctica esta idea y el orden de aparición de las fichas es el de la figura siguiente (a la vez, se van tachando las fichas de la tabla que contiene todas las fichas del dominó):



quedando el cuadro:



FASE DE REVISIÓN Y AMPLIACIÓN:

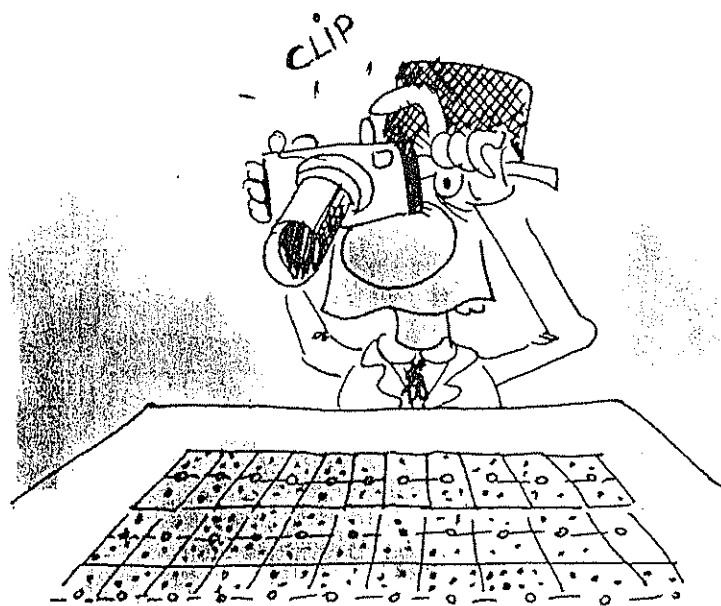
El grupo reflexiona sobre la resolución y concluye que la idea de sistematizar construyendo la tabla con todas las fichas del dominó es la idea clave que permite seguir adelante y solucionar el problema.

Entre las posibles ampliaciones podemos encontrar:

A) Un problema análogo puede plantearse para el siguiente cuadro de fichas del dominó:

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

B) ¿Podrías colocar las fichas del dominó de tal manera que se dé una única solución para un diagrama similar con todas las fichas? ¿Y para un conjunto más reducido de fichas?



UN MODELO PARA TRABAJAR CON PROBLEMAS: EL MODELO DE GUZMÁN

Habrás observado, en la lectura de los protocolos de los problemas anteriores, que en todos ellos hemos seguido un mismo esquema de trabajo. Este esquema corresponde al modelo propuesto por **Miguel de Guzmán** en sus libros *Para pensar mejor* y *Aventuras Matemáticas*, Labor-MEC.

Un modelo es una guía que nos facilita el camino que debemos recorrer a lo largo de todo el proceso de resolución de un problema. La finalidad de todo modelo es la de adquirir una colección de hábitos mentales que nos ayuden eficazmente en el manejo de los problemas.

Este modelo consta de cuatro fases, que revisaremos con más detenimiento en la actividad posterior, a saber:

- I. Fase 1: **Familiarización con el problema.**
- II. Fase 2: **Búsqueda de estrategias.**
- III. Fase 3: **Llevar adelante la estrategia.**
- IV. Fase 4: **Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.**

En cada una de las fases las pautas a seguir son:

Al comienzo, en la **familiarización con el problema**, debemos actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Hay que conseguir tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones, incógnitas, etc. En resumen, **antes de hacer, trata de entender.**

Una vez que hemos entendido el problema pasamos a **buscar las estrategias** que nos permiten resolverlo. En esta fase no iniciamos el ataque del problema sino que vamos apuntando todas las ideas que nos surjan relacionadas con el problema. Es conveniente pensar y disponer de más de una estrategia o camino a desarrollar en la fase posterior.

Tras acumular varias opciones de resolución, es el momento de **llevar adelante la estrategia** elegida. La llevamos adelante trabajando con confianza y sin apresuramientos. Conviene no echarse atrás ante la primera dificultad que surja, ni continuar con la estrategia si las cosas se complican demasiado. En el caso de no acertar con el camino correcto, es el momento de volver a la fase anterior y reiniciar el proceso. Seguimos de esta forma hasta cerciorarnos de haber llegado a la solución.

Por último, queda la fase más importante del problema, la de **revisión del proceso y sacar consecuencias de él**. En esta fase, que no puede faltar hayamos resuelto el problema o no, debemos reflexionar sobre todos los incidentes del camino seguido, sobre si es posible extender las ideas que hemos tenido a otras situaciones, sobre el problema en sí y sobre nuestros estados de ánimo a lo largo de todo el proceso recorrido.

En la resolución de un problema o juego puedes seguir estos pasos:

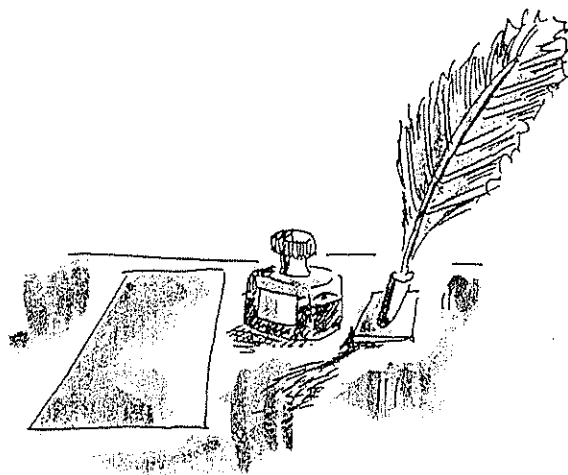
<p style="text-align: center;">I</p> <p style="text-align: center;">FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA</p>	<ul style="list-style-type: none"> * Antes de hacer, trata de entender. * Tómate el tiempo necesario. * Actúa sin prisas y con tranquilidad. * Imagínate los elementos. * Juega con los elementos del problema. * Pon en claro la situación de partida, la de llegada y lo que debes lograr. * Busca información que te pueda ayudar. * Encára la situación con gusto e interés.
<p style="text-align: center;">II</p> <p style="text-align: center;">BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS</p>	<ul style="list-style-type: none"> * Busca y anota las ideas que se te ocurran. * No desarrolles las ideas hasta que no poseas varias. * Estas estrategias te pueden ayudar: <ul style="list-style-type: none"> - Empezar por lo fácil. - Experimentar y buscar regularidades, pautas. - Hacer esquemas, figuras, diagramas. - Modificar el problema. - Escoger un lenguaje, una notación apropiada. - Buscar semejanzas con otros juegos y problemas. - Explorar la simetría de la situación. - Suponer el problema resuelto. - Suponer que no ¿dónde nos lleva? - Piensa en técnicas generales: inducción, principio del palomar, proceso diagonal, etc.
<p style="text-align: center;">III</p> <p style="text-align: center;">LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA</p>	<ul style="list-style-type: none"> * Lleva adelante las ideas de la etapa anterior. * Procura no mezclarlas, de una en una. * Trabaja con tenacidad y decisión en cada idea. * Trabaja con flexibilidad en las situaciones que se compliquen demasiado. * Cuando consideres que has llegado al final, observa a fondo la solución que obtienes.
<p style="text-align: center;">IV</p> <p style="text-align: center;">REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS</p>	<ul style="list-style-type: none"> * Examina con detenimiento y profundidad el camino que has seguido. * ¿Cómo has llegado a la solución? Si no lo has resuelto ¿por qué no has llegado a la solución? * Trata de entender que las cosas han marchado y por qué han marchado. * Busca un modo más sencillo u otro modo de resolverlo. * Intenta trasladar el método seguido a otras situaciones. * Reflexiona sobre tus estados de ánimo y tu proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

EL PROTOCOLO DE UN PROBLEMA

Cuando leemos y estudiamos la resolución de un problema efectuado por otro, en general nos encontramos con una secuencia de pasos ordenados, clasificados y lógicos que nos llevan desde el enunciado hasta la solución o soluciones. Esta solución nada nos dice de los procesos de pensamiento ni de los estados de ánimo por los que ha pasado el resolutor del problema.

Cuando intentamos resolver un problema individualmente o en grupo ocurren muchas cosas interesantes. Habitualmente escribimos nuestros cálculos, esquemas y diagramas que nos ayudan en la resolución, pero hay otros fenómenos interesantes que suelen pasar desapercibidos.

El borrador de nuestros intentos sucesivos de resolución no es el protocolo de un problema. Tampoco lo es la solución en limpio que podamos elaborar de nuestro trabajo.



El protocolo del proceso de resolución de un problema debería ser capaz de reproducir cuanto ha pasado por nuestra mente a lo largo de todo el proceso, en lo que se refiere a lo que realizamos, pensamos y a los sentimientos por los que hemos ido pasando.

El hecho de sentarnos con calma, papel y un bolígrafo ante todo un problema, para registrar por escrito todo el proceso de resolución del problema nos debe ayudar en las situaciones siguientes:

- ▶ A superar el peligro de que empieces y luego abandones un problema.
- ▶ Para que no olvides las buenas ideas que te surjan de repente.
- ▶ Para que cuando desees o necesites repasar de nuevo el problema te resulte más sencillo hacerlo.
- ▶ Para que no te quedes parado o atascado, sin saber qué hacer. Al escribir, te obligas a estar activo y concentrado, y el cerebro aprovecha este cauce para deslizar intuiciones y nuevas ideas.
- ▶ Para conseguir que no abandones. La huida debe ser hacia adelante. El simple hecho de emborronar una hoja con esquemas, dibujos, gráficos, etc., puede dar lugar a alguna idea útil.
- ▶ Para que puedas controlar en todo momento, al tenerlo delante, el proceso de resolución de un problema.

ACTIVIDAD 3:

FASES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y JUEGOS

En las actividades anteriores habrás podido observar cómo en la resolución de un problema o juego hemos seguido un plan de acción que llamamos modelo de resolución. Éste puede decirse y efectuarse en etapas o fases que hemos denominado:

- Fase 1: Familiarización con el problema.
- Fase 2: Búsqueda de estrategias.
- Fase 3: Llevar adelante la estrategia.
- Fase 4: Revisar el proceso y sacar consecuencias.

En esta actividad vamos a revisar con detenimiento cada una de estas fases.

FASE DE FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA

Antes de ofrecerte unas sugerencias que puedes tener en cuenta para desarrollar esta fase de la resolución de un problema, observa lo que hemos hecho con el siguiente problema.

LAS PESAS. Calcula el juego de cuatro pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza con dos platos cualquier cantidad entera de uno hasta cuarenta kilos.

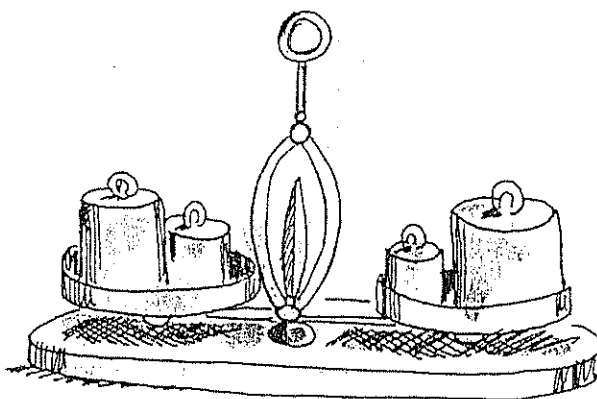
Leyendo el problema con detenimiento, varias veces, hasta comprenderlo con precisión, lo primero que nos llama la atención es, si cuatro no serán pocas pesas para tantas pesadas. Si es así debo aprovecharlas muy bien.

Otra cuestión importante es, ¿cómo puedo pesar? Los objetos a pesar los colocamos en un plato y las pesas en el otro. Quizás tenga que hacerlo por "diferencia": colocando objeto y pesas en un plato y solo pesas en el otro plato de la balanza.

Al tener sólo cuatro pesas parece que debemos utilizar el segundo procedimiento para pesar.

Hasta este punto ya sabemos del problema: lo que nos piden (pesar de 1 a 40), los datos que ofrece (4 pesas), cómo podemos pesar (pesadas por diferencias). A partir de aquí debemos pensar en el procedimiento que vamos a utilizar para resolverlo.

Antes te ofrecemos algunas pautas o sugerencias que puedes poner en práctica en la fase de familiarización con el enunciado cuando te enfrentes a cualquier problema.



PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE FAMILIARIZACIÓN CON EL ENUNCIADO

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Adopta una disposición cómoda que te permita trabajar largo tiempo si es necesario.
- Usa siempre lápiz y papel para anotar todo lo que vayas pensando y haciendo.
- Dispón del tiempo que necesites.
- Actúa con confianza, tranquilidad y curiosidad ante lo desconocido.
- Ten en cuenta que: "*lo importante es seguir preguntando siempre*".
- Aunque actúes por pasos o fases procura no perder nunca la visión unitaria de todo el proceso.
- Los expertos permanecen abiertos a la utilización de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

- Al leer el problema, ¿qué es lo primero que te ha llamado la atención?
- Manipula elementos si es necesario.
- Actúa con disposición de aprender y gusto por el reto a lo desconocido.
- Intenta superar la pereza ante todo inicio de cualquier actividad.
- Evita el miedo a la equivocación y al ridículo.
- Escribe con tus palabras este problema, de forma que sea más fácil de entender.
- No te asustes ante la aparente magnitud del problema. Trata de descomponerlo en partes más sencillas.
- Busca las situaciones de partida, de llegada y lo que hay que lograr.
- No pases a la siguiente fase hasta que no te hayas familiarizado a fondo con el problema.
- No olvides que lo que importa es el camino.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- ¿De qué trata el problema? ¿Te ha recordado la lectura algún hecho, problema o situación anterior?
- ¿Comprendes el significado de todas las palabras del enunciado?, ¿cuáles no?
- ¿Has analizado, palabra por palabra, cada una de las frases del enunciado, para ver la relación que hay entre ellas?
- ¿Qué es lo que pide hallar el problema? ¿Pide una cosa o pide varias?
- ¿Qué datos te dan para encontrar la solución? ¿Hay datos relacionados?
- ¿Has separado las distintas relaciones que ligan los datos?
- ¿Qué necesitas saber de Matemáticas para resolver este problema?
- ¿Por dónde empiezo?
- ¿Qué debo hacer?, ¿qué gano haciendo esto?

FASE DE BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS

Continuando con el problema de las pesas, es la hora de buscar procedimientos que permitan solucionar el problema.

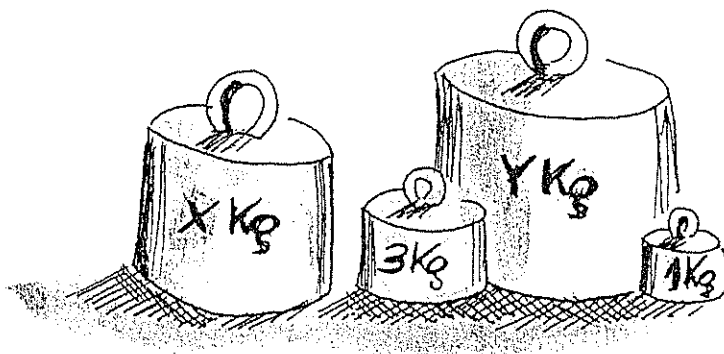
Comenzamos realizando un listado de posibles caminos a seguir.

1. Hacer el problema más sencillo, particularizando para situaciones como: ¿Cuántas pesas necesitas para pesar un Kg? ¿Y para 1 y 2 Kg? ¿Y para 1, 2 y 3 Kg?, y así sucesivamente.
2. Experimentar con los casos fáciles y si las cosas funcionan seguir adelante. No debo olvidar escribir los resultados de manera ordenada para tener a la vista los resultados parciales conseguidos.

Antes de llevar adelante alguna de estas ideas vamos a ver qué ocurre en los casos sencillos. Organizamos los resultados en una tabla:

Para pesar (Kg)	Necesitamos pesas de (Kg)
1	1
1 y 2	1 y 2 ó 1 y 3 (-1)
1, 2 y 3	1 y 2 (+1) ó 1 y 3 (-1)
1, 2, 3 y 4	1 y 3 (+1)
1, 2, 3, 4 y 5	1, 3 y X
1, 2, 3, 4, 5 y 6	1, 3 y X
1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7	1, 3 y X

En las experiencias de las pesadas con 1, 2, 3 y 4 observamos que la mejor opción es disponer de pesas de 1 Kg y 3 Kg ya que ofrecen más posibilidades que las pesas de 1 Kg y 2 Kg. No debemos olvidar que "tenemos que aprovechar las pesas al máximo".



Llegados aquí podemos dar por finalizada esta fase y disponernos a pasar a la fase siguiente. En la página que sigue hemos resumido y juntado unas cuantas sugerencias que puedes aprovechar para desarrollar esta etapa en la resolución de cualquier problema.

PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Evita las prisas y el nerviosismo por seguir adelante.
- Pon en juego todos tus recursos.
- Apunta con claridad todas las ideas que tengas.
- Actúa con confianza y curiosidad.
- Lo importante es perseverar en las situaciones, sin olvidar la flexibilidad.
- Toma el tiempo que creas conveniente.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

- Practica la "tormenta de ideas" (brainstorming) a través de las reglas siguientes:
 - * Aplazamiento del juicio: no evalúes aún las ideas que se te ocurran.
 - * Espontaneidad de ideas: apunta todas las ideas, aún las que parezcan ridículas.
 - * Cantidad conduce a calidad: no te quedes con la primera idea, busca varias.
 - * Perfeccionamiento de ideas: revisa y perfila las ideas que tienes apuntadas.
- Evita el miedo a la equivocación y al ridículo.
- No pases a la siguiente fase si no posees varias ideas que te permitan seguir adelante.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- Observa la lista siguiente, puede proporcionarte ideas para tu problema:
 - * Empieza por lo fácil: simplifica o busca casos particulares.
 - * Experimenta e intenta buscar regularidades y pautas. Actúa a través de ensayo y error.
 - * Organiza la información ayudándote de dibujos, figuras, esquemas y diagramas.
 - * Modifica el problema: reformula y busca metas parciales.
 - * Busca un lenguaje o notación adecuada que te facilite el desarrollo del problema.
 - * Busca semejanzas o parecidos con otros juegos o problemas similares.
 - * Analiza posibles simetrías y casos extremos.
 - * Suponer el problema resuelto y trabajar marcha atrás puede resultar, a veces, más fácil.
 - * Suponer que no se cumplen las condiciones del problema, ¿dónde nos lleva?
 - * Utiliza técnicas generales matemáticas: método de inducción, principio del palomar, etc.
- Procura tener siempre en cuenta las siguientes cuestiones: ¿Qué me dice este problema?, ¿qué me pregunta?, ¿por dónde empiezo?, ¿qué sé de lo que trata este problema?, ¿qué debo hacer?, ¿qué gano haciendo esto?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿he considerado todas las nociones esenciales de este problema?
- Antes de pasar a la siguiente fase, procura disponer de una respuesta clara a las preguntas: ¿Qué camino has elegido?, ¿por qué?

FASE DE LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA

Volviendo de nuevo al problema de LAS PESAS, vamos a llevar adelante el procedimiento que habíamos apuntado y comenzado en la fase anterior.

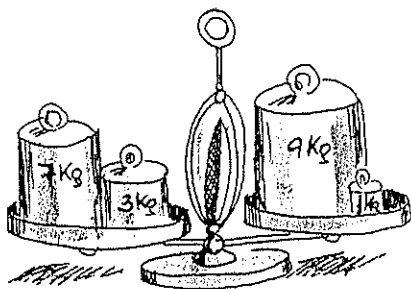
Ya teníamos realizadas las pesadas para 1, 2, 3 y 4 Kg procediendo con las pesas de 1 y 3 Kg, así: $1=1$, $2=3-1$, $3=3$, $4=3+1$

Estamos en la situación de pesar entre 1 y 5 Kg, 1 y 6 Kg, 1 y 7 Kg y 1 y 8 Kg con las pesas de 1, 3 y X Kg. Teniendo que aprovechar las pesas al máximo, ¿cómo debe ser X? Conviene que X sea lo más grande posible para poder aprovecharla a tope por diferencias.

¿Cómo de grande podrá ser X? ¡Ya está!: $5=X-3-1$. De donde $X=9$.

¿Será $X=9$? Para ello continuamos realizando pesadas y obtenemos:

$5=9-3-1$	$6=9-3$	$7=9+1-3$	$8=9-1$
$9=9$	$10=9+1$	$11=9+3-1$	$12=9+3$
$13=9+1+3$	$14=?$	$15=?$	$16=?$



Necesitamos otra pesa para pesar a partir de 14 Kg. Tenemos las pesas 1, 3 y 9.
¿Cuál será la siguiente? ¿Qué sucesión es 1, 3, 9, ...?

Son las potencias de tres: 3^0 , 3^1 , 3^2 , ... La próxima pesa, ¿será $3^3=27$?

Para comprobarlo debemos intentar hacer las pesadas a partir de 14 Kg. Obtenemos:

$14=27-9-3-1$	$15=27-9-3$	$16=27-9-3+1$	$17=27-9-1$
$18=27-9$	$19=27-9+1$	$20=27-9-1+3$	$21=27-9+3$
$22=27-9+3+1$	$23=27-3-1$	$24=27-3$	$25=27-3+1$
$26=27-1$	$27=27$	$28=27+1$	$29=27+3-1$
$30=27+3$	$31=27+3+1$	$32=27+9-3-1$	$33=27+9-1$
$34=27+9-3+1$	$35=27+9-1$	$36=27+9$	$37=27+9+1$
$38=27+9+3-1$	$39=27+9+3$	$40=27+9+3+1$	

¡Lo hemos conseguido! Hemos pesado desde 1 Kg hasta 40 Kg utilizando una balanza de dos platos y las pesas de 1, 3, 9 y 27 Kg.

En la página siguiente se describen sugerencias que puedes utilizar en otros problemas para llevar adelante la estrategia.

PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Procura tener siempre a la vista una lista con las estrategias que has ideado poner en práctica en la fase anterior.
- No te desanimas ante la primera dificultad que te surja, tienes otros caminos.
- Trabaja ordenadamente y sin apresuramientos.
- Las ideas que se te ocurran relacionadas con las estrategias, llévalas a la lista que tienes de la fase anterior.
- Estas ideas que te pueden surgir en esta fase, no deben desviar tu atención sobre el desarrollo de la estrategia que estás efectuando.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

- Procura trabajar con decisión y confianza sobre la estrategia que hayas elegido.
- Si ninguna de las estrategias conduce al éxito, vuelve a buscar nuevas estrategias o modifica las que hayas puesto en práctica.
- No debes contentarte con soluciones a medias.
- Indica con símbolos propios las situaciones resbaladizas, delicadas, de ideas brillantes, cuando estás atascado, etc.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- Si en la ejecución de tu plan aparecen dificultades, no vuelvas atrás hasta que no veas tu idea invalidada o destruida. Trata de resolver pequeñas dificultades que siempre pueden surgir.
- No te lles, cuando tropieces con una dificultad vuelve al principio de la situación, reordena las ideas, corrige los errores y prueba de nuevo.
- Si llegas a una situación muy complicada prueba otra cosa; piensa que resolver el problema puede ser cuestión de buscar otro camino más adecuado.
- No olvides en toda esta fase preguntarte si lo que haces es correcto y si puedes justificarlo.
- Debes estar seguro que has llegado a la solución, en caso contrario vuelve a la fase anterior en busca de mejores ideas.
- Comprueba uno a uno todos los pasos que te han llevado a la solución.

FASE DE REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS

Ya hemos resuelto el problema y es ahora el momento más adecuado de sacar el jugo al trabajo que hemos ido realizando en las fases anteriores.

Para ello podemos preguntarnos sobre algunos de los aspectos que han ido surgiendo, a saber:

- ¿Es correcta la respuesta?

Parece ser que no ofrece dudas ya que hemos conseguido, una a una, realizar las pesadas que nos pedía el problema.

- ¿Puedo pesar más cantidades con estas cuatro pesas?

Por lo observado en la ejecución del problema y debido al aprovechamiento máximo que hemos hecho de ellas, se necesitan más pesas de la sucesión $1=3^0$, $3=3^1$, $9=3^2$, $27=3^3$, ... para poder pesar otras cantidades mayores de 40 Kg.

- ¡Qué curioso lo obtenido!, con las potencias de tres y con las operaciones de sumar y restar puedo generar todas las de los números naturales:

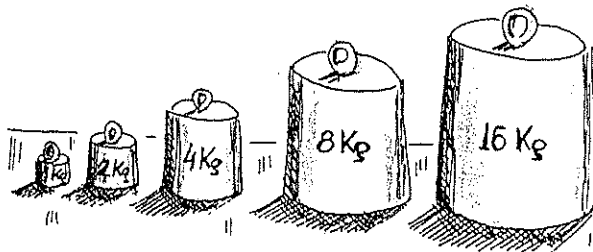
$$1=3^0, 2=3^1-3^0, 3=3^1, 4=3^1+3^0, 5=3^2-3^1-3^0, \dots$$

- ¿Será consecuencia de algún resultado más profundo?

Podemos encontrar una explicación en el sistema de numeración ternario (o de base 3), donde todo número natural puede expresarse utilizando las cifras 0, 1 y 2. En nuestro problema se han sustituido las cifras 0, 1 y 2 por 0, 1 y -1.

- ¿Funcionará con las potencias de algún otro número?

Dejamos al lector que investigue estas nuevas situaciones.



Ahora hemos llegado a un punto donde:

- el problema nos parece precioso,
- el problema se convierte en una investigación,
- el problema no termina nunca. ¡Qué maravilla!

En la página siguiente encontrarás sugerencias que pueden servirte para desarrollar la fase de revisión del proceso y de ampliación de resultados.

PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Has dado por concluido el trabajo sobre el problema; no debe importarte si no lo has resuelto.
- Revisa y aprende de todos los pasos dados, los erróneos y los válidos.
- Esta fase puede ser muy importante y provechosa, ten en cuenta todas las sugerencias y lleva adelante las que estén de acuerdo con tu problema.
- Invierte el tiempo que necesites en analizar el proceso seguido y en ampliar las situaciones del problema.
- Reconsidera, comprueba y discute tu solución.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

- Lee de nuevo el enunciado y comprueba que lo que te pedían es lo que has calculado.
- Escribe otro enunciado que te conduzca a la misma solución.
- Sacar jugo de todo lo que te haya ocurrido a lo largo de la resolución.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- El resultado que has obtenido, ¿tiene sentido?, ¿puede haber otro resultado o solución?
- ¿Acompañas a la solución una explicación literal que indica lo que has hallado?
- ¿Serías capaz de explicar el problema a otra persona? Inténtalo.
- ¿Puedes obtener el resultado de forma diferente?
- ¿Puedes utilizar el resultado o el procedimiento que te ha llevado a la solución en algún otro problema o situación?
- Si varías los datos, ¿dónde te conduce?
- Si varías parte o todo el enunciado, ¿dónde te conduce?
- Es el momento de escribir un protocolo con todas las incidencias que te hayan ocurrido a lo largo de todo el proceso de resolución del problema.

ACTIVIDAD 4: ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y JUEGOS

En esta actividad vamos a revisar, de forma detenida, aquellas estrategias que enunciamos en la actividad anterior, correspondientes a la fase de búsqueda de estrategias. Seguiremos el procedimiento utilizado en las otras actividades; para cada estrategia resolveremos un problema y posteriormente te damos algunas sugerencias sobre la mejor manera de llevar adelante dicha estrategia. En los problemas resueltos no desarrollamos todo el protocolo, sino que nos centramos en la ejemplificación de la estrategia.



Debes tener en cuenta que muy pocos problemas se resuelven utilizando una única estrategia, ya que, en general, necesitarás en la resolución de un problema tener en cuenta las pautas y sugerencias combinadas de más de una estrategia.

Estrategias en la resolución de problemas

- Empiece por lo fácil, simplifique o particularice;
- Experimente (ensayo y error) y busque regularidades;
- Organización y codificación;
- Modificación del problema;
- Analogía y semejanza;
- Exploración: casos límites, simetría (esta estrategia suele ir asociada a otras como es la experimentación).

SIMPLIFICAR. PARTICULARIZAR

Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a considerar un conjunto más pequeño (o incluso un sólo objeto) contenido en el conjunto dado.

Puede afectar a los datos, las incógnitas, los objetivos, etc. y su aplicación a unos u otros dependerá del tipo de problema a resolver.

Puede utilizarse en múltiples situaciones y ayuda a adquirir confianza y en los atascos, además de permitirnos, manipulando, entrar en harina.

La particularización puede hacerse al azar para entender el significado del problema o de forma sistemática para preparar el terreno hacia objetivos más ambiciosos.

Se utiliza en la técnica de demostración lógica denominada "contraejemplo": basta encontrar una sola excepción para refutar de forma irrevocable lo que pretende ser una regla o una afirmación de carácter general.

Acude a esta estrategia cuando no poseas ninguna idea que te haga progresar, ya que en múltiples ocasiones te permitirá lograr algún avance.

EXPERIMENTAR (ENSAYO Y ERROR). BUSCAR REGULARIDADES

Las propiedades o situaciones generales de un conjunto de números, figuras, objetos en general se pueden intuir cuando observamos la presencia de ellas en casos particulares. Por tanto, la forma de averiguar si una propiedad es común a varios elementos consiste en experimentar con alguno de ellos.

La experimentación y la observación han sido las bases fundamentales de los descubrimientos en todas las ciencias naturales, también en Matemáticas.

La experimentación conduce a patrones o reglas generales cuyas conclusiones nunca podemos asegurar que sean ciertas. Estas conclusiones pueden ser aplicadas a todos o a la mayoría de los objetos parecidos a los que hemos observado.

La experimentación suele ir asociada a la técnica que se denomina "ensayo y error", que consiste en realizar los siguiente pasos:

- ▶ Elegir un valor (resultado, operación o propiedad) posible.
- ▶ Llevar a cabo con este valor las condiciones indicadas por el problema.
- ▶ Probar si hemos alcanzado el objetivo buscado.

Si la respuesta del último paso no es positiva, se repite todo el proceso hasta alcanzar el objetivo buscado.

En la utilización del ensayo y error es conveniente contrastar cada respuesta para ver si estamos más cerca o más lejos del objetivo pretendido.

ORGANIZACIÓN Y CODIFICACIÓN

La organización, en general, consiste en adoptar un enfoque sistemático del problema. Suele ser de gran ayuda enfocar el problema en términos de tres componentes fundamentales: antecedentes (origen y datos), el objetivo y las operaciones que pueden realizarse en el ámbito del problema.

Las técnicas asociadas a la organización pasan por realizar símbolos apropiados, croquis, gráficos, figuras, diagramas o esquemas. Estos símbolos o dibujos pueden servir de ayuda en cualquier ámbito y no solo en geometría.

Una buena organización suele ir asociada con la elección de una notación o código que organice la búsqueda de posibles caminos hacia la solución.

Las diferentes notaciones y códigos nos conducen a utilizar un determinado lenguaje. Los lenguajes que resultan útiles en la resolución de problemas son: el lenguaje de la lógica, el de las matemáticas (geométrico, algebraico, analítico, probabilístico, etc.), el analógico (modelos, manipulaciones, etc.) y el lenguaje pictórico (figuras, esquemas, diagramas, etc.)

MODIFICAR EL PROBLEMA

Si pretendemos romper un manojo de lápices por la mitad es probable que encontremos serias dificultades de hacerlo; sin embargo si rompemos cada lápiz por separado, el objetivo resultará fácil de alcanzar.

La analogía anterior sirve para describir esta estrategia que consiste en dividir el problema de forma consciente y sistemática en partes más pequeñas y resolver, por separado, cada una de las partes.

Esta estrategia puede llevarse a cabo siguiendo los pasos siguientes:

1. Descomponer el problema en subproblemas, teniendo en cuenta las relaciones entre estas partes como parte del problema total.
2. Resolver los subproblemas.
3. Combinar los resultados hasta completar la solución del problema global.

Hay que tener en cuenta que la definición de subobjetivos válidos no es suficiente para resolver el problema. En numerosas ocasiones hay que utilizar otras estrategias para solucionar los subobjetivos.

ANALOGÍA. SEMEJANZA

La analogía ocupa todo nuestro modo de pensar, tanto en nuestras conversaciones cotidianas y nuestras conclusiones más sencillas como en los medios de expresión artísticos y en las más profundas relaciones científicas.

En la práctica debemos buscar semejanzas (parecidos, relaciones, similitudes) en el "archivo" de nuestras experiencias con situaciones, problemas y juegos que hayamos resuelto.

Ante cualquier situación nueva debemos preguntarnos: ¿A qué nos recuerda? ¿Es como aquella otra? ¿Se parece al problema o juego aquél?

La búsqueda de situaciones análogas o semejantes y su posterior puesta en práctica será más fácil cuanto mayor sea nuestra experiencia en la resolución de problemas y juegos.

EXPLORACIÓN: SIMETRÍA Y CASOS LÍMITES

Son muchos los problemas y juegos que se resuelven o facilitan su resolución teniendo en cuenta la simetría y los casos límites que presentan de forma explícita o velada.

La simetría comprende dos acepciones, la geométrica, más reconocible y usual y otra lógica más general y menos difundida que la anterior.

En general, decimos que un todo es simétrico si se compone de partes intercambiables. Así en un cuadro son fácilmente reconocibles las simetrías axiales y central, lo mismo ocurre en un cubo de seis caras, del mismo modo que la expresión $ab + bc + ac$ es simétrica ya que podemos intercambiar dos letras cualesquiera sin modificar toda la expresión.

TRABAJAR MARCHA ATRÁS

Existen situaciones donde el camino es más sencillo de recorrer si lo hacemos desde el final al comienzo. Esta idea es la que puede describir esta estrategia que también podríamos denominar *como considerar el problema resuelto*.

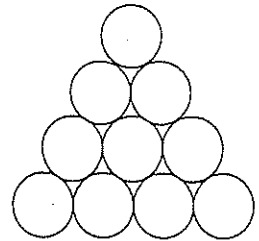
La utilizaremos en los casos en los que conocemos el objetivo o resultado final y el problema o juego consiste en determinar la secuencia correcta de operaciones que nos llevará desde el estado inicial hasta el objetivo.

Al imaginar el problema resuelto, ya que este es el punto de partida para poder aplicar esta estrategia, aparecen los datos y las relaciones más próximos a los que buscamos y más fácilmente encontramos el camino desde donde nos encontramos a donde queremos llegar.

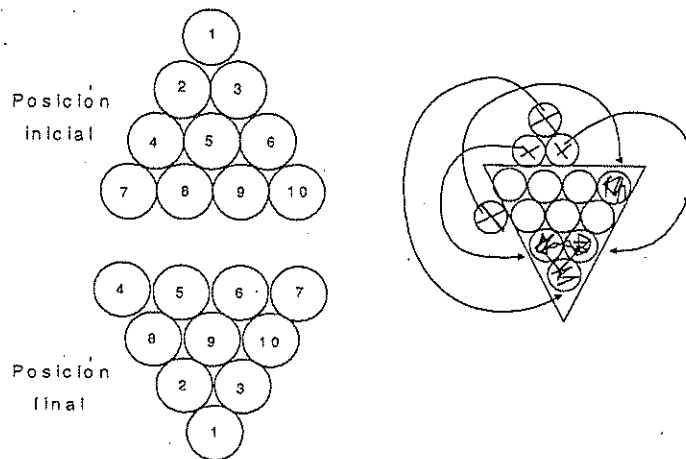
TRABAJAR MARCHA ATRÁS

Observa la resolución del siguiente problema.

UN TRIÁNGULO CON MONEDAS. Se tiene un triángulo formado por diez monedas iguales. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que hay que cambiar de sitio para que el triángulo quede en posición invertida?

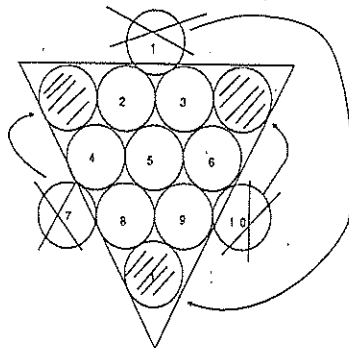


Manipulando o dibujando las monedas, nos movemos entre las posiciones que llamamos "posición inicial" o posición de partida y "posición final" o resultado del problema:



Tras la manipulación se ve claramente que cambiando 4 monedas se puede invertir la figura.

Consideramos si sería posible invertirla moviendo solamente 3 monedas. Manipulando monedas entre la posición final y la inicial llegamos a la solución que puede verse en la siguiente figura.



Efectivamente, cambiando de lugar tres monedas, se puede invertir la figura.

TÉCNICAS GENERALES MATEMÁTICAS

Te presentamos, de manera abreviada, algunas de las técnicas generales que se utilizan en la resolución de problemas y juegos. La aparente sencillez de alguna de ellas puede servir para demostrar resultados matemáticos profundos, que de otra forma sería muy dificultosa su demostración. En alguno de los problemas y juegos propuestos podrás utilizarlos.

SUPÓN QUE NO ... (REDUCCIÓN AL ABSURDO O CONTRADICCIÓN)

Es una manera de razonar para demostrar que una situación, P , determinada es verdadera. Suponemos que no lo es, es decir que se verifica $\text{no-}P$. Deducimos consecuencias correctas de $\text{no-}P$ y nos encontramos con una que supone un absurdo, que no se tiene de pie. Por tanto, nuestro punto de partida $\text{no-}P$ es falso, es decir P es verdadero.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Es uno de los métodos más habituales de demostración matemática, donde aparecen situaciones asociadas a los números naturales. La idea de este procedimiento está asociada con ascender por la escalera de infinitos peldaños. Si puedes asegurarte el ascender a uno de los primeros peldaños y una vez situado en uno cualquiera de los peldaños, subir al siguiente, entonces puedes recorrer todos los peldaños de la escalera.

Si deseas demostrar una propiedad $P(n)$ que esté asociada a los números naturales, entonces debes probar:

- 1º El número 1 (tal vez el 4 o el 14) tiene la propiedad $P(n)$.
- 2º Si el número k tiene la propiedad $P(n)$, entonces el número $k+1$ tiene la propiedad $P(n)$.

PRINCIPIO DEL PALOMAR DE DIRICHLET

Es una estrategia poco conocida que se utiliza sobre todo en problemas de conteo o enumeración y se basa en la siguiente idea: *"Si 11 palomas se meten en 10 palomares, necesariamente en algún hueco debe de haber más de una paloma"*.

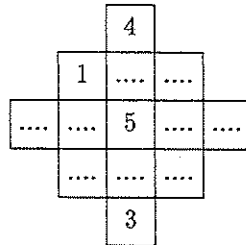
El principio del palomar dice: *"Si m objetos ocupan n cajones y $m > n$, entonces hay al menos un cajón que tiene dos o más objetos"*. Esta idea tan sencilla tiene aplicaciones interesantes, sorprendentes y profundas.

I. PROBLEMAS SOBRE LOGICA Y CONJUNTOS

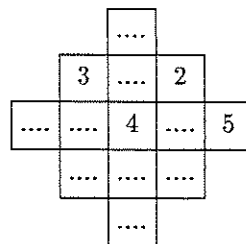
I.1. PROBLEMAS SOBRE LOGICA

1) Complete los cuadrados con los cinco dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 de manera que no se repitan en ninguna de las franjas horizontales, verticales y oblicuas.

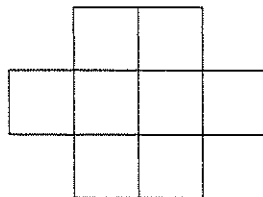
(i)



(ii)



2) Consecutivos lejos. En las 8 casillas de la siguiente figura



se trata de colocar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de modo que no resulten dos números consecutivos cerca ni en diagonal, ni en horizontal, ni en vertical. ¿ La solución es única ?

3) Las mujeres de Napoleón. Dicen que el primer marido de la segunda mujer de Napoleón y el segundo marido de la primera mujer de Napoleón eran la misma persona. Suena extraño. ¿ Podrá ser verdad ?

4) Se aprueba estudiando. Si alguien que estudia mucho aprueba siempre el examen, y si Juan estudió mucho, entonces ¿ cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas ? :

- (a) solamente Juan aprobó el examen; (b) Juan aprueba el examen;
(c) Juan estudió mucho más que cualquier otro; (d) Todos aprobaron el examen.

5) Lógica de pertenencia. Todo argentino es americano. Todo salteño es argentino. Ningún americano es asiático. Entonces ¿ cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas ? :

- (a) Ningún salteño es americano; (b) Todo americano es salteño;
(c) Todos los americanos son argentinos; (D) Ningún salteño es asiático.

6) ¿ Se casarán los novios?. Cuando su novia le preguntó si se iban a casar, el joven le respondió: "No

estaría mintiendo si te dijera que no puedo no decirte que es imposible negarte que si creo que es verdadero que no deja de ser falso que no vayamos a casarnos. ¿Podría ayudar a la desconcertada y atribulada novia, y decirle si su pretendiente quiere contraer matrimonio o no con ella?

7) Los trillizos Pérez: Los trillizos Pérez tienen la molesta costumbre siguiente: Cada vez que se les hace una pregunta, dos de ellos dicen la verdad y el otro la mentira acerca de la respuesta.

Se les preguntó cuál de los tres había nacido primero y contestaron lo siguiente:

Perico: "Pepe nació primero";

Pepe: "Yo no soy el mayor";

Pablo: "Perico nació primero".

Entonces, ¿cuál de los tres nació primero?

8) Cinco corredores y dos mentirosos: Al finalizar una carrera escuchamos estas declaraciones de los participantes:

Antonio: "Yo no he llegado último";

Bernardo: "Carlos ha llegado tercero";

Carlos: "Antonio ha llegado inmediatamente detrás de Ernesto";

Daniel: "Ernesto ha llegado en segundo lugar";

Ernesto: "Daniel no ha ganado al carrera";

Por alguna razón extraña, los dos primeros clasificados han mentido y los otros tres no. ¿Cuál ha sido el orden de llegada de los cinco corredores?

9) ¿Cuántos primos puede tener Juan, de acuerdo al siguiente diálogo, si se sabe que uno solo de los chicos dice la verdad?

José dice: Juan tiene por lo menos 6 primos;

Alberto corrige: No, tiene menos de 6;

Pablo agrega: Tal vez tengas razón, pero lo que yo sé, es que tiene más de 1 primo.

10) (i) Si con \tilde{P} se indica la negación de P, se solicita explicitar las siguientes expresiones:

(a) $(\forall x : x > 2) \tilde{}$;

(b) $(\exists x : x \leq 8) \tilde{}$.

(ii) Analice la siguiente proposición:

$$\forall x : (x^2 \geq x)$$

y demuestre que es falsa si el dominio de la proposición es el conjunto de los números reales; en cambio es verdadera en el conjunto de los números naturales y enteros.

11) Demostrar por contradicción que si X y Y son números reales tales que

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0, \quad X + Y = 0,$$

entonces $X = 0$ y $Y = 0$.

12) Demuestre por contradicción que en una fiesta de n personas ($n \geq 2$) existen por lo menos dos personas que tienen el mismo número de amigos en la fiesta;

13) El trío municipal: Los señores Pablo, Fernando y Carlos son los tres candidatos que obtuvieron la mayor cantidad de votos en las últimas elecciones municipales de Villalinda. El resultado fue muy ajustado: el que quedó a la cabeza aventaja al segundo en un voto, éste aventaja al tercero en un voto. Los tres practican deportes diferentes (atletismo, natación y fútbol) y tienen un vino favorito (clarete, tinto y blanco).

Se tienen las siguientes informaciones:

- (a) El señor Carlos, gran aficionado al tinto, aventajó a Fernando por un sólo voto;
- (b) El aficionado al blanco, que no soporta el fútbol, obtuvo un voto más que el bebedor de clarete;
- (c) El señor Pablo adora la natación.

Se necesita saber para cada candidato su clasificación, su deporte y su vino preferido.

I.2. PROBLEMAS PARA PENSAR SOBRE LOGICA

1) Se tiene una fuente de agua y se dispone sólo de dos recipientes, de 4 y 9 litros. Indique un procedimiento para que uno de los recipientes contenga 6 litros de agua.

2) Se tiene una fuente de agua y se dispone sólo de dos recipientes, de 7 y 11 litros. Indique un procedimiento para que uno de los recipientes contenga 6 litros de agua.

Definición: Un cuadrado se dice mágico respecto de la operación suma (producto) cuando la suma (producto) de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

3) Cuadrados mágicos respecto de la suma:

(i) Complete los siguientes cuadrados mágicos con los números del 1 al 9 con constante 15. ¿La solución es única ?

a)

8
.....	5
.....

b)

.....
.....	1
2

(ii) ¿Es posible construir un cuadrado mágico con los nueve números siguientes : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ?

4) Cuadrados mágicos respecto del producto:

(i) Complete el siguiente cuadrado mágico .

3
.....	6
.....	1	12

5) Oráculo. El oráculo era legendario por la veracidad de sus vaticinios, pero en realidad predecía correctamente durante dos años, y al año siguiente fallaba siempre, y luego el ciclo recomenzaba. Un

mago visitó el lugar, y oráculo le dijo: "Lo que digas ahora será mentira". El mago respondió: "El año que viene dirás una verdad". Al año siguiente el mago volvió a consultar el oráculo, y se reprodujo el mismo diálogo. ¿Puede usted decirnos si el mago mintió alguna vez?

6) Convención de Espías. En la última convención nacional de espías y afines se encontraban 001, 002, 003, 004, bajo los nombres de Alvarez, Benítez, Chavez y Diéguez (no necesariamente en ese orden). Cada uno, obviamente, conocía su propio número, pero no el de los demás, hasta que la chica del stand de la KGB le informó a Chavez que Benítez tenía un número menor que el de Alvarez. Entonces Chavez dijo: "Si alguien me dijera que Estévez tiene un número más alto que el mío, sabría todos los números". Si Estévez tiene un número más alto que Chavez, ¿Cuál es la identidad de cada espía?

7) Travesía del río. Veinte hombres y dos chicos desean cruzar un río, utilizando una pequeña canoa que sólo puede transportar a un hombre o a los dos chicos. ¿Cuántas veces debe este bote cruzar el río para llevar a cabo el objetivo?

8) Una fiesta reúne a 40 personas. Uno de los presentes comenta que seguramente hay allí dos personas que tienen la misma cantidad de parientes entre los invitados. Otro le responde que eso sería una gran casualidad y que no lo cree muy probable. Sin embargo, tiene razón el primero. ¿Por qué?

Ayuda: Utilice el método por contradicción.

Principio de los Casilleros o Principio del Palomar: Si $n + 1$ ó más objetos se distribuyen o se clasifican en n categorías, entonces alguna categoría deberá contener por lo menos dos objetos.

Si bien es un hecho matemático sencillo (simplemente expresa que una función de un conjunto de $n+1$ ó más elementos en otro de n elementos no puede ser inyectiva), permite a veces sacar conclusiones bastante interesantes. Por ejemplo, ¿es obvio para Ud. que si durante una noche un teatro o un cine tiene colmada su capacidad de 370 localidades, entonces se encuentran presentes al menos dos personas que cumplen años el mismo día? El principio anterior puede refinarse para obtener resultados más útiles y precisos.

9) Una cierta cantidad de equipos de fútbol han disputado un torneo, por el sistema de todos contra todos. Pruebe que al menos dos de ellos han empatado la misma cantidad de partidos.

10) Si elegimos seis personas al azar en una reunión, entonces debe haber 3 de ellas que se conocen todas entre sí o bien tres de ellas todas extrañas entre sí.

11) Para organizar diversas actividades culturales y deportivas, los 10 integrantes de la comisión directiva de un club deben agruparse en 10 subcomisiones. Si el presidente no puede formar parte de ninguna de ellas, concluya que debe haber dos subcomisiones con el mismo número de miembros.

TRABAJO PRACTICO 1: Un grupo de rock. Juan Ciruelo, Jorge Cerczo y Javi Manzano decidieron formar un grupo de rock: "Las Tres Frutas". Tenían unas voces estupendas, pero además cada uno de ellos sabía tocar la guitarra o la bandurria, o tal vez, las dos cosas.

Se sabe que si es verdad que Ciruelo y Manzano saben tocar la guitarra, entonces también lo sabe hacer Cerezo. Si Cerezo no sabe tocar la guitarra, entonces Manzano sí que sabe. Pero si Manzano sabe tocar la bandurria entonces Ciruelo no sabe. También se sabe que uno de los dos, Ciruelo o Cerezo, pero no los dos simultáneamente, sabe tocar la guitarra.

Se sabe también que solo uno de los tres sabe tocar la bandurria y la guitarra. ¿Quién es?

TRABAJO PRACTICO 2: Lógica con preguntas con respuestas SI -- NO.

Una isla se encuentra habitada por dos tipos de personas: las personas sinceras y las personas mentirosas. Cuando se les realiza una pregunta que se responde con SI ó NO, la persona sincera dice siempre la verdad, mientras que la persona mentirosa siempre miente. Por otro lado, ambas personas no pueden distinguirse por ningún método visual.

¿Qué pregunta podría realizarse a cualquier persona que se encuentra en la isla para determinar si es una persona sincera o bien una persona mentirosa?

Analice las siguientes preguntas:

- (i) ¿Es usted una persona sincera?
- (ii) ¿Es usted una persona mentirosa?
- (iii) Si usted fuese una persona sincera entonces cómo respondería a la pregunta ¿Es usted una persona mentirosa?
- (iv) Si usted fuese una persona mentirosa entonces cómo respondería a la pregunta ¿Es usted una persona sincera?

TRABAJO PRACTICO 3: Lógica en el cruce de un río.

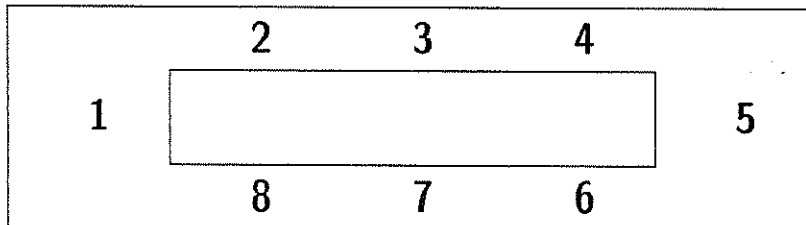
Hay dos matrimonios que necesitan cruzar un río. Poseen un pequeño bote que permite llevar solamente a dos personas por vez. Los esposos son bastante celosos. Una mujer no puede permanecer (sea en la tierra o en el bote) con un hombre excepto que su esposo esté también presente.

- (i) ¿Cómo pueden estas cuatro personas cruzar el río?;
- (ii) ¿Cuál es el número mínimo de viajes posible para que las cuatro personas crucen el río?;
- (iii) ¿Suponga ahora que hay tres matrimonios sujetos a las mismas reglas anteriores. ¿En cuántos viajes pueden las seis personas cruzar el río?

CASO 1: Reunión de Directorio. Es una simple reunión de directorio. Bah, no tan simple, ya va a ver... Deben votar por mayoría simple (más del 50% de las acciones) la venta de la empresa. Una decisión, sin dudas importantísima. Se tienen las siguientes informaciones:

- Entre todos los presentes suman el 100% de las acciones. Nadie tiene idéntico porcentaje que otro, ninguno tiene centésimos (todos números enteros) y entre el que menos tiene y el que más, la diferencia es del 7%.
- En las cabeceras están sentados Martínez y Sánchez.
- Vázquez no está del mismo lado que Giménez. Entre ambos suman el 23%.
- Estando del mismo lado de la mesa, Alvarez y Domínguez, no están uno al lado del otro.
- Henríquez tiene un porcentaje menor que Domínguez.
- Martínez y Sánchez suman el 21%, y Martínez tiene un 6% menos que aquel que se sienta a su izquierda.
- Henríquez está sentado al lado Giménez, del mismo lado de la mesa.
- El que está a la izquierda de Sánchez tiene el 15% y el que está enfrente a este último tiene el 9%.
- Domínguez está sentado justo frente a Fernández pero Vázquez no está sentado justo enfrente a Giménez.
- Martínez tiene a su derecha a Domínguez.
- Suponiendo que Martínez está sentado en la posición 1 del cuadro, los votos finales se repartieron de la siguiente manera:
 - los ubicados en las posiciones 1, 3, 5 y 8 votaron por la afirmativa;
 - los sentados en las posiciones 2, 4, 6 y 7 votaron por la negativa.

La pregunta es, finalmente, ¿Qué se hizo?



I.3. PROBLEMAS SOBRE CONJUNTOS

1) En un club de 2200 socios, $\frac{2}{5}$ de los socios practican natación, $\frac{1}{4}$ practica tenis y $\frac{3}{10}$ practica rugby.

- (i) ¿Qué parte del total de socios no practica deportes?
- (ii) ¿Qué porcentaje del total de socios practica algún deporte?
- (iii) ¿Cuál es el deporte que agrupa más socios?
- (iv) ¿Cuántos socios practican natación y tenis?

2) Encuesta azúcar – edulcorante. El equipo de Javier realizó una encuesta para determinar cuántas personas utilizan azúcar y cuántas utilizan edulcorante. El informe dice:

• Número de personas encuestadas	600
• Número de personas que utilizan azúcar	352
• Número de personas que utilizan edulcorante	318
• Número de personas que utilizan ambos (azúcar y edulcorante)	168
• Número de personas que no utilizan ni azúcar ni edulcorante	100

- (i) Después de analizarlo Javier detectó que era inexacto. ¿Puede explicar por qué?
- (ii) Cómo se podría cambiar el número de personas que no utilizan ni azúcar ni edulcorante para que el informe sea exacto. Calcule en dicho caso, el correspondiente porcentaje de cada ítem.

3) Simultaneidad. 25 personas están cursando economía, matemática o ambas. Si 20 están anotadas en economía y 18 están anotadas en matemática, ¿cuántas personas están anotadas tanto en historia como en matemática?

4) Televisión por cable y videocasetas. En el pueblo $\frac{1}{5}$ de los hogares están equipados con televisión por cable. Si $\frac{1}{10}$ de los hogares, incluyendo $\frac{1}{3}$ de aquellos que tienen televisión por cable, tienen videocasetas, ¿Qué fracción de hogares no tienen ni televisión por cable ni videocasetas?

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| (a) $\frac{23}{30}$; | (b) $\frac{11}{15}$; | (c) $\frac{7}{10}$; |
| (d) $\frac{1}{6}$; | (e) $\frac{2}{15}$. | |

5) Mitines Electorales: Se está próximo a las elecciones municipales y los anteriores líderes municipales han organizado cada uno un mitín electoral. Las estimaciones sobre las participaciones dan los resultados siguientes:

- 130 personas participaron en la reunión organizada por Pablo, 165 en la de Fernando y 65 en la de Carlos.
- En total, se han desplazado 200 personas de las cuales 30 participaron en los 3 mitines.

Se necesita conocer:

- (i) ¿Cuántos participaron en un solo mitín? ;
- (ii) ¿Cuántos participaron en dos mitines? ;
- (iii) Si hubo 50 personas que fueron a la reuniones organizadas por Pablo y por Fernando, y hubo 45 personas en la reuniones organizadas por Pablo y por Carlos, entonces determine la cantidad de personas que fueron solamente a la reunión organizada por Carlos.

II. PROBLEMAS CON NUMEROS REALES, PROPORCIONES (PORCENTAJES), ECUACIONES Y FUNCIONES REALES

II.1. PROBLEMAS CON NUMEROS REALES

1) Ahorro por estacionamiento. Un estacionamiento alquila sus espacios a \$30 por semana ó a \$90 por mes. ¿Cuánto ahorrará una persona en un año si alquila por mes en lugar de hacerlo por semana?

- (a) \$420 ; (b) \$480 ; (c) \$660 ;
(d) \$720 ; (e) \$780 .

2) La edad de la familia. Hace exactamente dos años, las edades sumadas de los integrantes de la familia Pérez daba como resultado 62. Ahora, las edades suman 67. ¿Puede indicar cuántas personas componen la familia Pérez?

3) En la heladería. Juan le comentó a Roberto: Ayer fui con mi novia a la heladería, y decidimos pedir un helado de un solo gusto para cada uno. Contamos todas las combinaciones de gustos que podíamos hacer entre los dos, pero ahora no recuerdo si eran 78, 81 u 86.

Su amigo Roberto le contestó: Con lo que dijiste ya puedo saber cuántas posibles combinaciones había, y también cuántos gustos distintos hay en esa heladería.

¿Podría explicar el razonamiento de Roberto?

4) Encuentre los números I. Complete las siguientes operaciones:

(i)

$$\begin{array}{r} 8 \quad \dots \quad 3 \quad \dots \\ - \quad \dots \quad 2 \quad \dots \quad 1 \\ \hline 3 \quad 4 \quad 6 \quad 5 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 9 \\ X \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \quad 7 \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \quad 4 \quad 8 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{r} \dots, 1 \quad \dots \\ \times \quad \dots, \dots \quad 7 \\ \hline 4 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad 8 \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{r} 7 \quad 5 \quad \dots \quad \dots \\ 3 \quad 4 \quad 9 \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 \quad 8 \end{array}$$

5) Encuentre los números II. En cada uno de los siguientes problemas encuentre todas las soluciones:

(i) Utilizando solamente una vez las cifras 1, 3, 4, 5 y 8, complete la siguiente operación:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 9 & & 7 & & \dots & & 6 \\
 + & & 1 & & \dots & & 5 & & \dots \\
 \hline
 & 1 & & 1 & & \dots & & 1 & & \dots
 \end{array}$$

(ii) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 6 & & \dots & & \dots & & 1 \\
 + & & 7 & & 9 & & 7 & & \dots \\
 \hline
 & 1 & & 4 & & \dots & & 9 & & \dots
 \end{array}$$

6) Suma con letras. (i) Cada letra utilizada (A, P, R, S) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & R & A & S \\
 + & & & P & A & R \\
 \hline
 & & A & S & S & A
 \end{array}$$

(ii) Cada letra utilizada (A, B) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$AB + BA = 99.$$

Definición.— Se llama sucesión geométrica, a todo conjunto de números dados en un cierto orden, tal que, el cociente entre dos números sucesivos se mantiene constante. Dicha constante r se la denomina razón.

Si el primer término es a , entonces la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica es:

$$(A) \quad S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

está dada por ($r \neq 1$)

$$(B) \quad S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

7) Sucesión geométrica. Demuestre la validez de la expresión (B) por los dos siguientes métodos :

(i) multiplique (A) por r y réstele (A) ; (ii) por el principio de inducción completa.

8) El mendigo y el avaro. Un mendigo pide hospitalidad a un avaro haciéndole la siguiente proposición: "Yo pagaré \$ 10 por el primer día, \$ 20 por el segundo día, \$ 30 por el tercer día, y así sucesivamente; en cambio, usted me dará \$ 0,01 por el primer día, \$ 0,02 por el segundo día, \$ 0,04 por el tercer día, y así sucesivamente". El avaro consideró esta proposición y consistió en este arreglo por 30 días, pensando que era un buen negocio. ¿Sabrías decir quién salió perjudicado en este contrato ?

9) Tamaño de los televisores. El tamaño de los televisores se mide en pulgadas e indica la medida de la diagonal de la pantalla, que tiene forma rectangular. Las dimensiones de la pantalla están en la relación 3 a 4. Calcule en cm las dimensiones de los televisores de 26 y 20 pulgadas (1 pulgada = 2,54 cm).

10) Carreras de batracios. Los verdaderos apostadores juegan su dinero en cualquier competencia: galgos, caballos, una riña de gallos o, en este caso, una carrera entre un sapo y una rana. El sapo avanzaba 15 cm en cada salto; la rana sólo 9 cm, pero era más rápida. Los dos salieron del mismo lugar y terminaron su último salto exactamente en la meta. No sabemos quién ganó, pero sí que la rana dió 4 saltos más que su contrincante.

(i) ¿Cuánto medía la pista?

(ii) ¿Cuántos saltos dieron cada uno?

11) Naipes. Alberto, Beatriz, Carlos y Diana jugaban a las cartas. El juego consistía en repartir un mazo completo de 48 cartas españolas (cada palo tiene todos los números del 1 al 12) entre los jugadores. Luego se sumaban los puntos de las cartas que tenía cada uno; el ganador era el de mayor puntaje. Resultó que Beatriz tenía el doble que Alberto, que Carlos tenía el doble que Beatriz, y que Diana tenía el triple que Beatriz. Sin discutir lo divertido del juego, ¿Puede calcular qué cartas tenía Alberto?

12) La Isla Lejana. El primero sobre el barco en avistar la isla fue el vigía. "Está a 54 kilómetros!", dijo. Su compañero lo corrigió: "No, está más lejos, como a ...", pero el viento se llevó sus últimas palabras. Otro del grupo, opinó que estaba a 57 km, y el Capitán que estaba a 59 km. Si uno de ellos calculó mal la distancia por 1 km, otro por 2, otro por 3 y otro por 4, ¿a qué distancia estaba la isla?

13) Números capicúas. ¿ Los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11 ?

14) Adivinando la edad. El profesor pide a los alumnos que escriban la edad de una persona en la calculadora, la multipliquen por 10, sumen 20, multipliquen por 10 y sumen 165. Luego toma la calculadora y resta 365. El resultado, quitando los dos ceros de la derecha es la edad tecleada.

15) Los números fieles.

- El 10: Tome un número, multiplíquelo por 6, sume 48, multiplique por 5, sume 60, divida entre 30 y reste el número inicial.

- El 23: Tome un número, súmele 25, multiplique por 2, reste 4, divida entre 2 y reste el número inicial.

- El 60: Tome un número, súmele 10, multiplique por 2, sume 100, divida entre 2 y reste el número inicial.

- El anillo: Tome un número, multiplíquelo por 2, sume 4, multiplique por 5, sume 12, multiplique por 10, reste 320 y divida por 100.

- Otro anillo: Tome un número, multiplíquelo por 3, sume 30, multiplique por 5, sume 600, divida entre 15 y reste 50.

¿Puede justificar los resultados?

16) ¿Recuerda el número?. Piense un número de dos cifras. Tecléelo en su calculadora. Multiplíquelo por 3 y luego por 3367, ó bien multiplíquelo por 7 y luego por 1443. ¿Recuerda qué número había pensado? ¿Puede justificar lo que sucede?

17) Jugando con los números. Piense un número de dos cifras. Multiplique la cifra de las decenas por 5, sume 3, multiplique por 2, sumele ahora la cifra de las unidades, reste 6. ¿Qué obtiene? ¿Puede justificarlo?

18) Adivinando la edad. Le voy a adivinar la edad de sus padres. Teclee en su calculadora la mayor de las dos edades. Multiplíquela por 5, sume 36, multiplique por 20, sume la edad del más joven. El profesor toma la calculadora y le resta 720. En la pantalla queda un número de cuatro cifras, las dos de la izquierda son la edad mayor y las dos de la derecha son la edad menor.

19) La fecha de nacimiento. Escriba en la calculadora el día, seguido del mes de su nacimiento, formando un número de 4 cifras. Multiplíquelo por dos, súmele 5, multiplíquelo por 50 y finalmente súmele las dos últimas cifras de su año de nacimiento. Se le pide la calculadora y se resta 250. En la pantalla aparece su fecha de nacimiento en la forma dd-mm-aa.

20) Las cuatro cifras. Elija dos números de dos cifras. Teclee uno de ellos en su calculadora. Súmele ese número incrementado en una unidad, multiplíquelo por 50, súmele 72 y súmele el otro número. Se le pide la calculadora y se resta 122. En la pantalla aparece un número de cuatro cifras, las dos primeras de uno de los números y las dos últimas del otro.

21) Las siete cifras. Teclee en su calculadora un número de 7 cifras. Súmele 25, multiplíquelo por 2, réstele 4, divídalo entre 2. Se toma la calculadora y se resta 23 quedando el número inicial.

22) Número natural. Si n es un número natural y $n = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{77k}$ ¿Cuál de los siguientes números podría ser el valor de k ?

- (a) 22 ; (b) 26 ; (c) 35 ;
(d) 54 ; (e) 60 .

23) Cantidad de folletos sobrantes. Un editor imprimió en total 5000 folletos, repartió algunos pero aún le queda más de 2000. Puede embalarlos en cajas de 45 folletos sin que le sobre ninguno, también puede usar cajas de 40 ó de 50 folletos sin que le sobre. ¿Cuál es el número de folletos que todavía tiene?

24) Números. Tome un número de tres cifras, con todas sus cifras desiguales, por ejemplo 523. Dele vuelta, 325. Reste el menor del mayor $523 - 325 = 198$. Ahora invierta el número 198 y sume los dos últimos números obtenidos $198 + 891 = 1089$. Haga lo mismo con otros números de tres cifras. ¿Qué observa? ¿Puede justificar el resultado?

25) Pesadas. Una jarra pesa igual que una botella y un vaso. Una botella pesa lo mismo que un vaso y un plato. Dos jarras pesan lo mismo que tres platos. ¿Cuántos vasos pesarán lo mismo que una botella?

II.2. PROBLEMAS SOBRE PROPORCIONES

1) Angulo entre agujas. ¿Qué angulo forman las agujas del reloj a las 12:35 hs?

2) Empresa constructora. (i) En una empresa constructora de caminos se informa que 20 obreros pavimentaron 30 Km de un camino en 12 días. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

No. de Km del camino a pavimentar	No. de días utilizados	No. de obreros empleados
30	12	20
18	8
40	32
....	16	15

(ii) Si se representan con c , d y x el número de Km del camino a pavimentar, el número de días utilizados y el número de obreros empleados respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

3) Días en un hotel. (i) En un hotel se informa que 20 pasajeros en 3 días pagaron \$1800. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

No. de pasajeros	No. de días	Pago (en \$)
20	3	1800
15	2
40	6000
....	4	1200

(ii) Si se representan con p , d y x el número de pasajeros, el número de días y el pago (en \$) respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

4) Costo de una mezcla. Si 6 kg de nueces que cuestan \$ 3,60 por kg se mezclan con 2 kg de nueces que cuestan \$ 4,80 por kg, ¿cuál es el costo por kg de la mezcla?

5) Litros a agregar. ¿Cuántos litros de una solución que es 15 % salada deben ser agregados a 5 litros de una solución que es 8 % salada para que la solución resultante sea 10 % salada?

6) Dos máquinas en producción. Si la máquina X puede producir 1.000 unidades de un producto en 4 hs. y la máquina Y puede producir 1.000 unidades del mismo producto en 5 hs. ¿Cuánto tiempo tardarán las máquinas X e Y para producir 1.000 unidades si trabajan juntas a dichos niveles de producción?

II.3. PROBLEMAS CON PORCENTAJES

1) Precio original. Un cierto comprador pagó \$ 24 por un vestido. Si ese precio representa un 25% de descuento sobre el precio original del vestido, ¿Cuál es el precio original del vestido?

2) Descuento aplicado. El precio de un ítem es descontado en un 20% y luego a este precio reducido se le aplica otro descuento adicional del 30%. ¿Cuál es el descuento global aplicado?

3) Obtención de un beneficio. Una cierta mercadería le cuesta a un comerciante \$ 30 .¿A qué precio debería el comerciante vender la mercadería para obtener un beneficio del 50% sobre el costo de la mercadería?

4) Porcentaje en compra-venta. (i) Un comerciante compra mercaderías que luego vende aplicándoles un porcentaje de ganancia. Complete la siguiente tabla:

Precio de compra (\$)	Precio de venta (\$)	Ganancia (en %)
30	36
....	88	10
45	15
....	39,60	20

(ii) Si se representan con C, V y g el precio de compra de una mercadería, el precio de venta de una mercadería y el porcentaje de ganancia respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

5) Descuentos en un supermercado. (i) En un supermercado se realizan descuentos sobre los precios de los diferentes artículos. Complete la siguiente tabla:

Precio de los artículos (\$)	Suma a pagar luego del descuento (\$)	Descuento (en %)
....	40	20
50	15
60	48

(ii) Si se representan con C, P y d el precio del artículo antes del descuento, el precio del artículo a pagar luego del descuento y el porcentaje de descuento respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

6) Porcentaje de aumento. Complete las siguientes tablas e indique si existe una sola forma para realizarla:

(i) (La tabla indica el precio de un artículo luego de un aumento, en función del precio del artículo y del porcentaje de aumento) .

precio	120
% aumento			
15	793,5
.....	147,6	42
.....	50
40	60

(ii) (La tabla indica el precio de un artículo luego de un descuento, en función del precio del artículo y del porcentaje de descuento).

precio	100	300
% descuento			
5	420
.....	270
.....	50
17

7) Intermediarios. ¿Qué porcentaje de aumento tiene el precio de un artículo que pasa por las manos de tres intermediarios, cada uno de los cuales vende el producto un 50% más caro de lo que le costó?

8) Aumentos y descuentos. Si el dueño de un negocio ordena subir un 25% el precio original de sus zapatillas en vidriera, para luego ofrecer a los compradores una rebaja sobre este último precio, de un 20% más un 10%. ¿Con qué porcentaje vende respecto al precio original?

- (i) Con una rebaja de un 5% ;
- (ii) Con una rebaja de un 10% ;
- (iii) Con una rebaja de un 12,5% ;
- (iv) Con un aumento de un 10% .

9) Tasas de interés real, nominal e inflación. Si la tasa de interés real es del 5%. Si se supone que la tasa de interés nominal y el de la inflación esperada aumenten un 20%, entonces la tasa de interés real:

- (a) aumenta ;
- (b) disminuye ;
- (c) permanece invariable ;
- (d) es del 6% ;
- (e) ninguna de las respuestas precedentes.

10) El truco del comerciante. Un comerciante descubrió un truco genial: Si quería vender a un precio determinado, lo aumentaba un 15% y así hacía al cliente un 15% de descuento cuando venía a comprar.

- (i) ¿Qué opina de la actitud del comerciante?
- (ii) ¿Se beneficia o se perjudica el comerciante?
- (iii) Para obtener lo que deseaba el comerciante ¿Cuánto debería ser el porcentaje de incremento?

11) Repartiendo los gastos de la excursión. Se ha dividido los gastos de la excursión entre los 15 alumnos que asistieron. Posteriormente, resulta que los dos profesores también pagan. ¿Qué porcentaje se ahorran los alumnos?

12) Los intermediarios y los precios. Siempre se comenta la incidencia que sobre los precios finales tienen los intermediarios. Es muy fácil matematizar estos comentarios.

(i) ¿Qué ocurre con el precio de un artículo que pasa por las manos de tres intermediarios, cada uno de los cuales vende el producto un 50% más caro de lo que le costó?

(ii) Si un artículo pasa por las manos de dos intermediarios, ¿Qué porcentaje de aumento debe aplicarse para que el precio final se duplique?

13) Los empleados de una empresa. Este año hay 252 empleados en una empresa, lo que representa un aumento del 12 % respecto del año pasado. ¿Cuántos empleados había el año pasado?

14) Chicos y chicas en el colegio. El año pasado un 40% de los alumnos eran chicos. El número total de alumnos ha aumentado en un 15 %, pero los chicos sólo han aumentado un 10%. ¿Qué parte del alumnado es masculino este año?

II.4. PROBLEMAS CON ECUACIONES E INECUACIONES

1) Números del 1 al 9. Escriba los números del 1 al 9, en la tabla de 3 filas y 3 columnas siguiente:

....
....
....

de manera que se satisfagan las sumas indicadas:

20		25

15
15
....

....
12
....

....	11	18

....
22
....

2) Problemas con ecuaciones de primer grado. Resuelva los siguientes problemas que se conducen a ecuaciones de primer grado :

- Halle tres números de manera que la suma de los tres sea 54, que el segundo sea el doble del primero y el tercero sea el triplo del segundo ;
- Una persona compra una mercadería pagando \$30 por adelantado y 12 cuotas fijas por un valor igual a $1/15$ del precio total. Cuánto cuesta la mercadería ?
- Si hoy el precio de una mercadería es de \$ 1.210,= , cuál fue el precio exactamente 2 años antes si se considera un incremento en los precios del 10% anual durante ambos años ?
- Un vendedor de frutas compró una cierta cantidad de manzanas a razón de 3 kilos por \$ 0,50 y vendió todo el lote a razón de 4 kilos por \$ 1,= . Cuántos kilos compró el comerciante si la ganancia obtenida fue de \$ 10,= .

3) Papas fritas. En un bar, una hamburguesa y ensalada cuestan \$ 3,95 , y una hamburguesa y papas fritas cuestan \$ 4,40. Si las papas fritas cuestan el doble que la ensalada, ¿cuánto cuestan las papas fritas?

- (a) \$ 0,30 ; (b) \$ 0,45 ; (c) \$ 0,60 ;
 (d) \$ 0,75 ; (e) \$ 0,90 .

4) Problemas con sistemas de ecuaciones de primer grado. Resuelva los siguientes problemas que se conducen a un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas :

- En un edificio, las puertas tienen 4 cristales y las ventanas tienen 6 cristales. Si se cuentan 30 aberturas y 172 cristales, cuántas puertas y ventanas hay ? ;
- Halle el número de pesos que tienen Luis y José, sabiendo que :
 - si Luis da \$ 20 a José, éste tendrá el doble de lo que le queda a Luis ,
 - si José da \$ 20 a Luis, éste tendrá el triple de lo que le queda a José.
- El empresario de un teatro decide contribuir a una obra benéfica con 60 centavos por cada entrada de mayores y con 40 por las de niños. Asisten 400 personas y el importe que dona es de \$ 234. ¿A cuántas entradas de mayores y cuántas de niños corresponden?.

II.5. PROBLEMAS PARA PENSAR CON NUMEROS REALES Y ECUACIONES

1) Ratones de laboratorio. Fue un día agitado el que pasaron los 35 ratones (19 blancos y 16 negros) de la jaula de un laboratorio. Un científico extrajo nueve ratones y les inyectó un líquido experimental. El líquido (un futuro producto contra las canas) actuó sobre los ratones inyectados: volvió blancos a los negros y negros a los blancos. Cuando el científico volvió para comprobar los resultados, en la jaula había 16 ratones blancos y 19 ratones negros. Sabiendo esto, ¿puede indicar cuántos ratones blancos fueron inyectados?

2) Descifrar un número con mínimas preguntas. Averigüe un número telefónico de a lo más 5 cifras, con la mínima cantidad de preguntas que sólo admiten las respuestas "sí" o "no".

3) Un juego para dos. Dos jugadores dicen alternativamente un número del 1 al 5. El primer jugador que alcance 31, sumando todos los números que dice cada uno, gana. ¿Qué número conviene decir, si se juega primero?

4) El monje en la montaña. Un monje decide subir desde su casa a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale a las 9 hs. de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 9 hs. de la mañana, emprende el camino de regreso a su casa por el mismo sendero. Al ir bajando se pregunta: ¿Habrás algún punto en el camino en el que hoy esté a la misma hora que ayer?

5) Las pesas. Calcula el juego de cuatro pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza con dos platos cualquier cantidad entera de uno hasta cuarenta kilos.

6) Mercado Negro. En la República de Bangaminga, el intercambio monetario es más bien caótico. Y no por su política económica, sino porque los únicos billetes que poseen son de 11, 13, 31, 33, 42, 44 y 46 bangamangos (moneda local). Con esas salvajes cifras, ¿podría pagar exactamente 100 bangamangos? (Puede usar más de un billete de una determinada clase). Analice si lo puede hacer con sólo dos billetes, con tres billetes, etc.

7) ¿Quién no sabe contar? Sobre un tablero de ajedrez alguien contó una vez, 204 cuadrados diferentes. ¿Estará en lo cierto? ¿Cuántos rectángulos se pueden contar?

8) Equipo de basket. Un equipo de basquet, que ha jugado las $\frac{2}{3}$ partes de sus partidos, tiene un record de 17 victorias y 3 derrotas. ¿Cuál es el mayor número de partidos, entre los que le queda por jugar, que el equipo puede perder y aún así ganar como mínimo los $\frac{3}{4}$ de todos los partidos?

(a) 7 ;

(b) 6 ;

(c) 5 ;

(d) 4 ;

(e) 3 .

9) Sobre el número 2. Cierta número termina en 2. Cambiando de lugar esta cifra y poniéndola al principio, resulta un número que es el doble del número inicial. ¿Qué número es el inicial?

10) Un criado sabio. Un señor tenía sus mejores botellas de vino dispuestas en la bodega de la manera indicada en la figura. Desconfiaba de su criado y todas las noches, antes de acostarse, bajaba al sótano y las contaba sumando el número de botellas que había en los tres compartimentos de cada uno de los cuatro lados. Si la suma era de 21 botellas en cada uno de los cuatro lados, descansaba feliz.

El criado, por su parte, sabedor de la estratagema y del bajo concepto que de él tenía el señor, decidió robarle botellas. Y lo consiguió !!. Le robaba unas cuantas y redistribuía las restantes de modo que no perturbase los sueños del amo.

¿Cuántas botellas, como máximo, pudo robar? ¿Cómo quedó dispuesta la bodega?

6	9	6
9	0	9
6	9	6

(Posición inicial de las botellas en la bodega)

11) Se elige un número de dos cifras AB con $A \neq B$. Se invierten sus cifras BA. Se resta el menor del mayor y se suman las cifras del resultado. Demuestre que siempre se obtiene el mismo resultado final. ¿Cuál es?

12) ¿Cuál es la menor de las siguientes fracciones

$$\frac{5}{x}, \quad \frac{x+1}{5}, \quad \frac{5}{x-1}, \quad \frac{x}{5}, \quad \frac{5}{x+1},$$

si $x > 5$?

13) (i) Para numerar las páginas de un libro se usaron 495 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro ?

(ii) ¿ Idem a la parte (i), si se hubiesen utilizado 6725 cifras ?

(iii) ¿ Idem a la (i), si se hubiesen utilizado 2.989 cifras ?

14) (i) Julián lleva un canasto con manzanas. Encuentra a tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que le dió al primero más dos; y al tercero la mitad de lo que le dió al segundo más dos. ¿ Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?

(ii) Al día siguiente lleva otro canasto con manzanas. Encuentra a sus tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que le quedan más dos; y al tercero la mitad de las sobrantes más dos. ¿ Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?

15) a) La mamá de Juan le lee 5 páginas de un libro por noche. Antes de comenzar a leerle, desde la segunda noche, la madre relee la última página para recordar en qué habían quedado. Si el libro tiene 97 páginas, ¿en cuántos días terminará el libro?.

b) Si la mamá le leyó otro libro durante todo el mes de enero de 1998, ¿cuántas páginas tenía el libro?

16) Jaimito generoso. Jaimito sale de casa con un montón de caramelos y vuelve sin ninguno. Su madre le pregunta qué ha hecho con los caramelos.

- A cada amigo que me encontré le di la mitad de caramelos que llevaba más uno.
- ¿Con cuántos amigos te encontraste?
- Con seis.

¿Con cuántos caramelos salió Jaimito?

17) Vacas lecheras. Cuatro vacas negras y tres vacas marrones dan tanta leche en cinco días como tres vacas negras y cinco marrones en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la mejor lechera, la negra o la marrón?

18) Una sogá larga. Imagine una sogá larga que ciñe ajustadamente a la Tierra por la circunferencia del ecuador. Ahora imagine que a esa sogá se le agrega un metro de largo, y se eleva de la superficie terrestre a igual altura en todo el contorno. Dicha altura, ¿alcanza para que pase una mano entre la sogá y el suelo?

19) El faro. El farero sube todos los días la larga escalera hasta la luz que está en lo alto. El lunes sube de a un peldaño por vez, el martes de a dos y así hasta el sábado cuando sube de a seis peldaños por vez. Todos estos llega justo hasta la linterna. Pero el día domingo, al subir los escalones de a siete, le falta uno para llegar ahí. ¿Cuántos escalones tiene el faro?

20) La liebre y el galgo. Una liebre perseguida por un galgo lleva a éste 60 saltos de ventaja; la liebre da 9 saltos, mientras el galgo da 6, pero 3 saltos del galgo equivalen a 7 de la liebre. ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar a la liebre?

21) ¿Qué hora es? Preguntada una persona por la hora, contestó: "Lo que queda del día es igual a siete veces la quinta parte de las horas que han transcurrido". ¿Qué hora es?

TRABAJO PRACTICO 1: Sistemas monetarios. (i) Se tienen numerosas monedas de 5 y de 8 centavos.

(a) ¿Cuáles de las siguientes cantidades (en centavos)

11, 14, 17, 23, 26, 27, 28, 42, 76, 951, 13632

pueden ser obtenidas utilizando dichas monedas?

(b) Haga una lista completa de las cantidades entre 1 y 99 centavos que no pueden ser obtenidas utilizando dichas monedas.

(ii) Repita el problema anterior (parte (i)) si se tienen dos monedas de:

(a) 5 y 2 centavos ;

(b) 5 y 3 centavos ;

(c) 5 y 4 centavos.

TRABAJO PRACTICO 2: Metegol lógico. Tres amigos, Juan, Pedro y Carlos, jugaron un torneo triangular de metegol, es decir que cada uno jugó dos partidos (todos contra todos) y hubo tres partidos en total. Se recuerda que una ficha de metegol da siete bolas. Al final del torneo resultó que Juan y Pedro hicieron 5 y 6 goles respectivamente. Entonces:

(i) ¿Cuántos goles hizo Carlos?

(ii) ¿Cuántos goles recibió, en su arco, cada uno de los tres jugadores?

(iii) Si se sabe que Pedro perdió los dos partidos jugados, determine los resultados de los tres partidos.

(iv) Si no se hubiese sabido que Pedro perdió los dos partidos (según (iii)), ¿cuántas soluciones posibles sobre los resultados de los tres partidos se tendría? Además, ¿Pedro hubiese ganado algún partido?

TRABAJO PRACTICO 3: Cuadrangular de fútbol. Determine los resultados de cada partido si la posición final de un cuadrangular de fútbol es la dada por la siguiente tabla en la cual se tienen en cuenta que:

(a) J, G, E y P representan la cantidad de partidos jugados, ganados, empatados y perdidos respectivamente;

(b) GF y GC representan la cantidad de goles a favor y en contra respectivamente;

(c) El puntaje es la suma de los puntos obtenidos en el torneo a razón de 2, 1 y 0 puntos por partido ganado, empatado y perdido respectivamente.

Resultados							
Equipos	J	G	E	P	GF	GC	PUNTAJE
A	3	3	0	0	7	2	6
B	3	2	0	1	3	3	4
C	3	0	1	2	3	6	1
D	3	0	1	2	0	2	1

II.6. PROBLEMAS PARA PENSAR CON PROPORCIONES Y PORCENTAJES

1) Verde y rojo. Había tres latas: una con un litro de pintura verde, otra con un litro de pintura roja y otra más pequeña, vacía. El pintor llenó la lata pequeña con pintura verde, y luego pasó el contenido de la lata pequeña hacia la lata roja y mezcló los colores. Con esta mezcla llenó otra vez la lata pequeña, y volcó el contenido ésta en la lata de pintura verde. ¿Quedó más pintura verde en la lata roja que pintura roja en la lata verde? ¿Es al revés? ¿O quedó la misma cantidad?

TRABAJO PRACTICO 1: Respuesta correcta — Método incorrecto. Usted probablemente esté familiarizado con este tipo de problemas: El costo de un libro aumentó de \$ 13.50 a \$ 14.58. Encuentre el porcentaje de aumento del costo.

Un método equivocado es restar $14.58 - 13.50 = 1.08$ y entonces considerar a 1.08 como el factor correspondiente a un 8% de aumento.

El método correcto es, por supuesto, el dado por:

$$\frac{\text{nuevo costo}}{\text{viejo costo}} = \frac{14.58}{13.50} = 1.08, \text{ que corresponde a un 8\% de incremento.}$$

¿ Puede encontrar otros ejemplos en los cuales el método incorrecto y el método correcto den la misma respuesta?

Bien, se supone que el costo aumenta de \$ x a \$ y (donde x e y son números reales con dos decimales). Los métodos coincidirán si se tiene

$$\frac{y}{x} = y - x .$$

es decir $y = xy - y^2$, con lo cual se obtiene que $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Ahora sean $X = 100x$, $Y = 100y$, por lo cual X e Y serán ambos números enteros. Entonces se deduce:

$$\frac{Y}{100} = \frac{\left(\frac{X}{100}\right)^2}{\frac{X}{100} - 1}$$

con lo cual se tiene que:

$$Y = \frac{X^2}{X-100} = X + 100 + \frac{10000}{X-100}$$

Se sigue que, como Y debe ser entero, entonces necesariamente $X - 100$ debe ser uno de los divisores de 10000. Por lo tanto, eligiendo uno de esos divisores, X e Y quedan determinados.

¿ Puede hallar todos los x , y posibles ?

TRABAJO PRACTICO 2: Concesionaria de autos. Una concesionaria de autos vendió en el año 1991 cuatro veces más autos grandes que pequeños y en el año 1992 vendió tres veces más autos pequeños que grandes . Se supone que el precio promedio de venta de los autos pequeños es de \$ 5.000 y el de los autos grandes es de \$ 8.000 . Se solicita que responda a los siguientes casos :

(i) Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si, en ambos años, se vendieron el mismo número de autos ;

(ii) Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si el número de autos que se vendieron en el año 1992 es ocho quintos de los que se vendieron en el año 1991 ;

(iii) Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si se vendieron 1000 autos en el año 1992 y 800 autos en el año 1991 .

(Ayuda : Plantee un sistema de ecuaciones que incluya todos los casos contemplados, suponiendo que :

G_2 (G_1) es el número de autos grandes vendidos en el año 1992 (1991) ;

P_2 (P_1) es el número de autos pequeños vendidos en el año 1992 (1991) ;

N_2 (N_1) es el número de autos vendidos en el año 1992 (1991) ;

V_2 (V_1) es la venta (en pesos) de autos vendidos en el año 1992 (1991) .

Deduzca que se tiene la relación

$$\frac{V_2}{V_1} = a \frac{N_2}{N_1} , \text{ con } a \text{ un número real a determinar,}$$

y luego obtenga la solución para todos los casos planteados).

II.7. PROBLEMAS PARA PENSAR CON VELOCIDAD, ESPACIO Y TIEMPO

1) El footing de Pepe y Pablo. Pepe y Pablo hacen footing desde A hasta B. Pepe corre la mitad de la distancia y camina la otra mitad. Pablo corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad. Los dos corren a la misma velocidad y los dos caminan a la misma velocidad. ¿Quién llega antes? ¿La respuesta depende de la distancia de A a B ?

2) El ciclista playero. Un ciclista va desde un pueblo a al playa cuesta abajo a una velocidad de 30 km/h. A la vuelta, cuesta arriba, va a 10 km/h. ¿Cuál es la velocidad media del ciclista en el trayecto de ida y vuelta ?

3) Promedio de velocidades. Un viaje en colectivo de 450 km debería haber tomado una hora menos, si el promedio de velocidad del viaje, V , hubiera sido 5 km por hora mayor. ¿Cuál es, en km por hora, el promedio de velocidad V del viaje ?

(a) 10 ;

(b) 40 ;

(c) 45 ;

(d) 50 ;

(e) 55 .

4) Velocidad promedio. En un viaje de 400 km un auto viaja la mitad de la distancia a 80 km por hora y la otra mitad a 100 km por hora. ¿Cuál es la velocidad promedio de dicho auto ?

5) Peligro en el puente. Un señor llegó hasta un puente ferroviario y empezó a correr por él. Cuando había recorrido $3/8$ del puente oyó el silbato de un tren. Calculó inmediatamente: si retrocedo al comienzo llego exactamente en el momento en el que el tren entra al puente, corriendo a mi velocidad de 10 km/h, y si corro al final a esta velocidad llego allá al mismo tiempo que el tren. ¿A qué velocidad marcha ese tren?

6) Camino del hogar. Todos los días la señora Pérez espera a su marido en la estación del tren y le lleva a casa en su automovil. Un día el señor Pérez se adelanta una hora en llegar a la estación. Decide caminar hacia su casa por el camino que su mujer siempre sigue. Ella lo encuentra en el camino y lo lleva a su casa el resto del trayecto. Si hubiera esperado en la estación, ella habría llegado exactamente a tiempo, como de ordinario. Tal como sucedió, el señor Pérez llegó a casa veinte minutos más temprano que de ordinario. ¿Cuánto tiempo caminó el marido?

7) Problema de móviles. Un tren sale de Rosario hacia Buenos Aires a 70 km/h. Simultáneamente otro tren sale de Buenos Aires hacia Rosario a 60 km/h. Cuando se encuentran, ¿cuál estará más cerca de Rosario?

II.8. ECUACIONES E INECUACIONES CON PARAMETROS

1) Ecuaciones de primer grado con parámetros I. Resuelva las siguientes ecuaciones literales de primer grado en la incógnita x ($m, a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad 7x - 3m = 0; & \text{(ii)} \quad 3(x - m) - \frac{m}{2} = 2(2m - x); \\ \text{(iii)} \quad 2b(x - a) + ab = 3b(x + a); & \text{(iv)} \quad \frac{3x - 2a}{3} + 6b = x + 5b - \frac{2a}{3}; \end{array}$$

2) Ecuaciones de primer grado con parámetros II. Considere la ecuación:

$$2m(x - 1) = (m - 5)(x + 2).$$

- (i) Determine el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que la ecuación admita la solución $x = 3$;
- (ii) Indique si es posible elegir $m \in \mathbb{R}$ de manera que la ecuación admita como solución a un dado número real α ;
- (iii) Resuelva la ecuación en \mathbb{R} .

3) Sistemas de ecuaciones de primer grado con parámetros I. Resuelva los siguientes sistemas paramétricos ($a, b \in \mathbb{R}$) de primer grado con dos incógnitas (x, y):

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \begin{cases} x + y = 2a \\ 2x + ay = 2a^2 \end{cases} & ; \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} ax - 3y = a \\ x + ay = 1 \end{cases} \\ \\ \text{(iii)} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \end{cases} & ; \quad \text{(iv)} \quad \begin{cases} x + y = 2a \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \\ \\ \text{(v)} \quad \begin{cases} 2bx + 3ay = 5ab \\ 3bx - 4ay = -ab \end{cases} & \end{array}$$

4) Ecuaciones de segundo grado con parámetros I. (a) (i) Halle los valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que la ecuación $\frac{m}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = 0$ tenga sus raíces iguales.

(ii) Calcule además dicha raíz doble para cada valor de m hallado.

(b) Idem para la ecuación $mx^2 + 6x + \frac{1}{2} = 0$.

5) Ecuaciones de segundo grado con parámetros II. Determine el o los valores del parámetro m real de manera que:

(i) la ecuación $mx^2 + 4x + (m + 2) = 0$ tenga una única solución;

(ii) la suma de las raíces de la ecuación $m^5x^2 + (m - 1)x + 2m = 0$ sea cero.

6) Ecuaciones de segundo grado con parámetros III. Considere la ecuación

$$(m + 5)x^2 - (2m + 3)x + m - 1 = 0, \text{ con parámetro } m \in \mathbb{R}.$$

(i) ¿Para qué valores de m la ecuación tiene una raíz doble? Calcule, además, dicha raíz;

(ii) Para qué valores de m la ecuación de segundo grado tiene dos raíces distintas;

(iii) Para qué valores de m la ecuación de segundo grado no tiene raíces reales.

- 7) Ecuaciones de segundo grado con parámetros IV. (i) ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ la siguiente ecuación de segundo grado tiene raíces de distintos signos : $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$?;
- (ii) ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen raíces positivas o raíces negativas? :
- (a) $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$; (b) $3x^2 - 5x + m + 7 = 0$;
- (iii) Determine el valor del parámetro real m para que una de las raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - mx + m - 1 = 0$ sea el doble de la otra. Halle, además, las dos raíces.

8) Inecuaciones de primer grado con parámetros.

(i) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

(a) $4x + m \leq (m + 1)x - 2$; (b) $mx - m + 1 > 4 - x$;

(ii) Verifique que la inecuación

$$\frac{3x - 2}{m} - m < x ,$$

con parámetro real $m \in \mathbb{R}$, tiene como conjunto de solución S al conjunto dado por:

- (i) $S = \left(\frac{m^2 + 2}{3 - m}, +\infty\right)$ cuando $m < 0$; (ii) La inecuación no está definida cuando $m = 0$;
- (iii) $S = \left(-\infty, \frac{m^2 + 2}{3 - m}\right)$ cuando $0 < m < 3$; (iv) $S = \mathbb{R}$ cuando $m = 3$;
- (v) $S = \left(\frac{m^2 + 2}{3 - m}, +\infty\right)$ cuando $m > 3$.

9) Inecuaciones de segundo grado con parámetros I. Resuelva y discuta en \mathbb{R} (en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$) las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita :

- (i) $x^2 - (m - 2)x + 3(m - 5) \leq 0$; (ii) $mx^2 - 2(m + 2)x + m + 7 > 0$;
- (iii) $mx^2 - (2m + 1)x + m > 0$.

Respuestas 9):

(i) $m = 8 : S = \{3\}$ $m < 8 : S = [m - 5, 3]$ $m > 8 : S = [3, m - 5]$

(ii) $m = 0 : S = \left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$ $m < 0 : S = \left(\frac{m + 2 - \sqrt{4 - 3m}}{m}, \frac{m + 2 + \sqrt{4 - 3m}}{m}\right)$

$0 < m < \frac{4}{3} : S = \left(-\infty, \frac{m + 2 - \sqrt{4 - 3m}}{m}\right) \cup \left(\frac{m + 2 - \sqrt{4 - 3m}}{m}, +\infty\right)$

$m > \frac{4}{3} : S = \mathbb{R}$ $m = \frac{4}{3} : S = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$

(iii) $m = 0 : S = (-\infty, 0)$

$\frac{1}{4} < m < 0 : S = \left(\frac{2m + 1 - \sqrt{4m + 1}}{2m}, \frac{2m + 1 + \sqrt{4m + 1}}{2m}\right)$

$$0 < m : S = \left(-\infty, \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2m} \right) \cup \left(\frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2m}, +\infty \right)$$

$$m \leq -\frac{1}{4} : S = \emptyset .$$

10) Inecuaciones de segundo grado con parámetros II. Resuelva en \mathbb{R} (en función del parámetro m) las siguientes inecuaciones:

(i) $x^2 + 4x - m < 0$;

(ii) $(m-1)x^2 - 2mx + (m+4) \geq 0$;

(iii) $x^2 + mx + m - 1 \leq 0$;

(iv) $x^2 + (m+1)x - m^2 > 0$;

(v) $x^2 + 4x - m < 0$;

(vi) $mx^2 + 2mx + (m+2) \geq 0$.

II.9. PROBLEMAS CON FUNCIONES

1) Interpolación. Dados n puntos del plano determine la interpolación lineal correspondiente, es decir, la poligonal (con sus respectivas leyes por sub-intervalos) que une dichos puntos en forma continua:

(i) $n = 5$: $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,-1)$, $P_4 = (3,2)$ $P_5 = (4,3)$

(ii) $n = 4$: $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (2,4)$, $P_3 = (4,4)$, $P_4 = (6,5)$

(iii) Según la siguiente tabla de valores:

x	y
-1	2
0	1
1	3
2	4

2) Gráfica de valores absolutos I. Grafique las siguientes funciones reales :

(i) $f_1(x) = 2x - 1$; (ii) $f_2(x) = -\frac{x}{2} + 3$;

(iii) $f_3(x) = 4 - 2|x|$; (iv) $f_4(x) = x + |x|$;

(v) $f_5(x) = 2|x - 3| + |x - 2|$; (vi) $f_6(x) = |x + 3|$;

3) Gráfica e inecuaciones con valores absolutos I. Sea la función real definida por la siguiente ley :

$$f(x) = |x + 3| - \left| \frac{x - 2}{2} \right|.$$

(i) Halle una expresión equivalente (distinguiendo varios casos, si fuese necesario) a la dada ley que no contenga las barras de valor absoluto ;

(ii) Realice la gráfica de la función real f ;

(iii) Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 8$;

(iv) Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 1 + 2x$.

4) Gráfica e inecuaciones con valores absolutos II. Resuelva analítica y gráficamente, en \mathbb{R} , las siguientes inecuaciones (represente gráficamente el conjunto de soluciones en la recta real):

(i) $|x - 4| < |x + 1|$; (ii) $x \leq |x + 2|$;

(iii) $|x + 2| \leq 3|x|$; (iv) $|x + 2| \leq 2$,

(defina, si lo considera conveniente, alguna función real auxiliar).

Trabajo Práctico Especial

"Aplicaciones de los Números y de las Funciones Reales a Problemas de la Economía y de la Administración"

1) Etiqueta. Un fabricante mayorista vende a un comerciante minorista un determinado producto al valor de \$30 la unidad. El fabricante le ofrece colocar una etiqueta de precio a cada producto (para conveniencia del minorista en períodos de estabilidad económica). Se necesita conocer el precio que se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio de venta al público en 20%, en una oferta promocional, y obtener una utilidad del 12% sobre el costo del producto. Calcule además el porcentaje de la ganancia que obtiene el comerciante minorista en los días que no efectúa la promoción.

(Ayuda: plantee una ecuación de primer grado para el precio p marcado en la etiqueta).

(ii) Idem para el caso en que el comerciante minorista compre el producto al valor de \$ C (C es un valor positivo cualquiera y representa el caso de estudio que debe realizar el minorista para efectuar la promoción de sus numerosos productos que tiene en venta) (Es un problema real que se plantea como un problema paramétrico).

(iii) Puede usted generalizar el problema anterior obteniendo una fórmula si el costo es \$ C , la reducción es del $i > 0$ (porcentaje) y la utilidad es del $j > 0$ (porcentaje).

(Ayuda. se tiene en cuenta, por ejemplo, que $i = 0,20$ para un 20%).

2) Inversión en dos empresas. Una persona invirtió un total de \$ 10.000 en dos empresas A y B. Al final del primer año las empresas A y B produjeron rendimientos del 6% y del 5% respectivamente sobre las inversiones originales.

(i) ¿Cómo se distribuyó la cantidad original, si el total que se ganó fue de \$ 570? (Ayuda: plantee una ecuación de primer grado para la cantidad (en pesos) que se invirtió al 6%).

(ii) Qué explicación daría usted si lo que se ganó es de 470 \$ o de 610 \$?

(iii) ¿Puede usted generalizar el ítem (i) para porcentajes de rendimientos i y j para las empresas A y B respectivamente, y ganancia G al final del primer año? ¿Qué condición necesaria debe verificar G para que exista solución al problema planteado?

3) Alquiler de departamentos. Una empresa de bienes raíces es propietaria de un conjunto de 70 departamentos. Se puede alquilar cada departamento a \$ 250 por mes, obteniendo, de este modo, una renta total mensual de $70 \times 250 = \$ 17.500$.

Por otro lado, por cada 10 \$ que se aumente al valor del alquiler mensual se tendrán 2 departamentos desocupados sin posibilidad de alquilarlos.

(i) ¿Cuánto se debe cobrar por el alquiler de cada departamento si la empresa desea obtener una renta mensual de \$ 17.980?

(Ayuda. — Método 1: Sea $x > 250$ el valor (en \$) del alquiler que se cobrará por cada departamento, entonces:

(a) el número total de departamentos alquilados será de $m = 70 - 2 \left(\frac{x - 250}{10} \right)$;

(b) x satisface la ecuación $17980 = mx$, es decir la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 600x + 89900 = 0.$$

Método 2 : Sea n el número de aumentos de \$ 10 por el alquiler de los departamentos. Entonces n satisface la ecuación de segundo grado siguiente

$$17980 = (250 + 10n)(70 - 2n),$$

cuyas soluciones son $n = 4$ y $n = 6$.

Interprete los dos métodos y saque conclusiones).

4) Productos a vender. El costo de mano de obra y materiales de un producto es de \$ 5 por unidad para el fabricante. Además, los costos fijos (los que se tienen en un determinado período independiente de la cantidad que se fabrique) son de \$ 20.000. Si el precio de venta del producto es \$ 7, se necesita saber cuántos deben venderse para que la Compañía obtenga utilidades.

(Ayuda: deduzca y resuelva una inecuación de primer grado en q (número de productos a venderse) utilizando el hecho que: utilidades = ingresos totales - costos totales > 0).

¿ Puede Ud. generalizar este problema?

5) Ecuación de demanda. Si la demanda semanal de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de \$ 58 por unidad, y de 200 unidades cuando el precio es de \$ 51 por unidad, halle la ecuación de demanda (precio p en función de la cantidad q), suponiendo que es lineal.

6) Maximizar ingresos. (i) La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1000 - 2q$, donde p es el precio (en pesos) por unidad cuando existe una demanda semanal q por parte de los consumidores. Se solicita que obtenga el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y que determine, además, dichos ingresos.

(Ayuda : ingresos totales = precio unitario por la cantidad).

(ii) Un fabricante tiene una demanda semanal de 50 unidades de un producto cuando el precio es de \$ 80 por unidad, y de 40 unidades cuando el precio es de \$ 100 por unidad. Suponiendo que la ecuación de demanda ($p = p(q)$) es una recta, halle el nivel de producción que maximiza los ingresos totales y determine, además, dichos ingresos.

7) Punto de equilibrio con ecuaciones lineales. Sea $p = 0,08q + 50$ la ecuación de oferta para cierto fabricante y se supone que la ecuación de demanda para su producto es $p = -0,07q + 65$.

(i) Determine los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio.

(ii) Si se carga un impuesto de \$ 1,50 al fabricante, ¿cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?

(iii) Determine, además, los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio después de aplicarse el impuesto.

8) Punto de equilibrio con ecuaciones no lineales. Encuentre el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y de demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$, y, $p = \frac{8.000}{q}$ respectivamente.

9) Compra de sellos postales. Una secretaria debe comprar sellos postales de \$1 y \$2 por un total que no supere los \$100. Ella desea, además, que el número de los de \$1 sea más de 10 y al menos el doble de los de \$2. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

(Ayuda : Plantee un sistema de desigualdades para las variables x = número de sellos postales de \$1, y = número de sellos postales de \$2).

10) Venta de dos radios. En un negocio se venden radios de dos marcas A y B. Según la demanda de los clientes es necesario almacenar al menos el doble de los aparatos A respecto a los aparatos B y se deben tener a la mano al menos 20 de la marca A y 10 de la marca B. Si no se tiene espacio para más de 100 aparatos en el negocio, encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

11) Dos cuentas de ahorro. Una persona desea invertir \$10.000 en dos cuentas de ahorro distintas. Desea tener al menos \$2.000 en cada una y que la cantidad que haya en una sea al menos el triple de lo que haya en la otra. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

12) Inversión a interés compuesto. (i) Sea una cantidad de dinero C_0 (capital inicial) que se invierte a interés compuesto (al final de cada período los intereses devengados se acumulan al capital inicial y se reinvierten) a un interés simple del i por ciento por un período (por ejemplo: semestral, trimestral, mensual, etc.). Entonces, el capital al final de $n \in \mathbb{N}$ períodos está dado por la fórmula exponencial:

$$C(n) = C_0 (1 + i)^n .$$

Realice una gráfica en el plano de la sucesión $(C(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) Si se invierten \$10.000 al 12% anual y los intereses se acumulan mensualmente, ¿determine cuál será el capital después de 1, 3, 6 y 12 meses? Además, ¿cuánto dinero habrá que invertir para tener \$15.000 al final del primer año?

13) TRABAJO PRACTICO 1: Descuentos en fotocopias. En un comercio donde se realizan fotocopias, los precios al público están dispuestos según la siguiente tabla:

Precio de cada fotocopia (en centavos)	Número de fotocopias
5.00	1 a 9
4.40	10 a 49
4.30	50 a 99
4.10	100 a 999
4.00	más de 1000 .

(i) Determine la función real (mejor dicho : sucesión real) f definida como el precio del trabajo realizado, en función de la cantidad $n \in \mathbb{N}$ de fotocopias demandadas. Realice, además, una gráfica de la función real hallada, uniendo los puntos del plano mediante segmentos de rectas.

(ii) Analice y saque conclusiones de la siguiente situación real : si usted hace 9 fotocopias entonces el trabajo le costará \$ 0.45 ; en cambio, si realiza 10 fotocopias le costará \$ 0.44, es decir \$ 0.01 menos. ¿Qué haría usted, si fuese el comerciante, para evitar que una persona le haga una o varias copias extras y pague aún menos ?

(iii) Analice y saque conclusiones también para los casos de 49 y 50 fotocopias; 99 y 100 fotocopias, y 999 y 1000 fotocopias.

(iv) Proponga una función real adecuada para los intereses del comerciante y sin perjudicar al cliente, pero beneficiándolo por mayor cantidad al superar 9, 49, 99 y 999 fotocopias.

(v) Encuentre otros hechos de la realidad en los cuales el análisis anterior pueda aplicarse.

14) Costo de un producto. Si un comprador adquiere un determinado producto a \$ P ($P > 0$) y sabe que el comerciante recarga el $i\%$ como margen de venta (es lo que se agrega al costo para obtener el precio de venta al público) se desea saber a que valor el comerciante adquirió el producto, en los siguientes casos :

(a) $P = \$ 1000$, $i = 1\%$, 5% , 10% ;

(b) $P = \$ 1100$, $i = 1\%$, 5% , 10% .

(Ayuda: plantee una ecuación de primer grado tomando como incógnita el valor de compra del producto por parte del comerciante).

15) Cotización de una acción. Una empresa que cotiza en la Bolsa de Comercio tuvo los siguientes valores, por acción, en las fechas indicadas:

Día	Valor de una acción (en \$)
5/2	4,93
11/3	4,05
17/5	4,96

(i) ¿Cuál es el porcentaje de disminución del valor de una acción al pasar del 5/2 al 11/3 ?;

(ii) ¿Cuál es el porcentaje de aumento del valor de la acción al pasar del 11/3 al 17/5 ?;

(iii) Determine que sucedió con el valor de la acción al pasar del 5/2 al 17/5 , y determine, ¿cuál es el porcentaje correspondiente ?

16) Descuento en farmacias. Una farmacia atiende a personas afiliadas a una obra social que paga el 50 % del valor de los medicamentos, quedando el resto a cargo del afiliado. Si la farmacia hace un 10 % de descuento extra sobre lo que el cliente paga, ¿Cuál es el porcentaje del valor del medicamento que pagará el afiliado?

17) Pago en efectivo. Una persona paga \$121 con una tarjeta de crédito por la compra de un artefacto. Sabiendo que la tarjeta incluye un 10 % , calcule el precio por pago en efectivo de dicho artefacto.

18) TRABAJO PRACTICO 2: Descuento e IVA. (i) ¿Qué prefiere, que le hagan el descuento del 10% antes o después de pagar el 21% de IVA?

(ii) Sea "a" el porcentaje de IVA, y sea "b" el porcentaje de descuento. Generalice la parte (i).

(iii) Si el vendedor le dice al cliente: "La ley me obliga a cargar el IVA, pero le voy a hacer un

descuento del modo que pague lo mismo que si no le cobrara el IVA". ¿Qué tanto por ciento de descuento debería hacerle? Si el IVA fuese del 21 % ó del 16% ¿Cuál sería dicho descuento?

19) TRABAJO PRACTICO 3: Opciones para aumentar los sueldos. El dueño de una empresa propone a sus empleados dos opciones :

- (a) Aumentar los sueldos el 5 % ;
- (b) Aumentar los sueldos un monto fijo de \$ 100 .

¿ A partir de que salario se debe elegir la primera opción?. ¿ y la segunda opción? .

20) TRABAJO PRACTICO 4: Alquiler de videos. Un negocio para alquilar videos propone a sus clientes tres posibilidades :

- (a) P_1 : \$ 24 de abono anual más \$ 1,5 por cassette alquilado ;
 - (b) P_2 : \$ 12 de abono anual más \$ 2 por cassette alquilado ;
 - (c) P_3 : sin abono anual, pero \$ 3 por cassette alquilado.
- (i) ¿Cuál es la posibilidad más económica para alquilar, por año, 10 cassettes?, para 20?, para 30? ;
 - (ii) (a) Expresar para cada posibilidad el precio a pagar en función del número x de cassettes alquilados;
 - (b) Representar gráficamente estas tres posibilidades de alquiler en un mismo plano cartesiano ;
 - (c) Un cliente, habiendo elegido la P_1 ha gastado en el año \$ 51. ¿ Ha hecho una buena elección? ;
 - (d) Otro cliente ha gastado \$ 53 en el año. ¿ Es esto posible? ; ¿ Habrá algún error cometido por el dueño del negocio? ;
- (iii) ¿Cuál es la posibilidad más ventajosa para elegir según el número de cassettes alquilados?

21) TRABAJO PRACTICO 5: Abonos de transporte. Una compañía de transporte propone a sus clientes las tres posibilidades siguientes :

- (a) P_1 : Comprar en cada viaje, un boleto donde el precio es proporcional al kilometraje, a razón de \$ 0,30 por kilómetro ;
- (b) P_2 : Comprar un abono anual de \$600, que permite viajar durante todo el año a razón de \$ 0,15 por kilómetro ;
- (c) P_3 : Comprar un abono anual de \$ 1500, que permite recorrer hasta 5000 km ; a partir de los 5000 Km, todo Km suplementario costará \$ 0,10 por kilómetro.

Una persona recorre anualmente "x" Km con esta compañía. Se definen las funciones $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i = 1, 2, 3$) , correspondiente a la posibilidad P_i , que a "x" asocia el costo en \$ de los viajes anuales de esta persona.

- (i) Escriba la ley correspondiente para f_1, f_2 y f_3 ;
- (ii) Representelas gráficamente en un mismo plano cartesiano ;
- (iii) Utilizando sus representaciones gráficas, determine qué posibilidad es la más conveniente si la persona recorrerá 3000 Km por año, 6500 Km por año, 9000 Km por año.
- (iv) ¿Cuál es la posibilidad más económica en función del número de kilómetros recorridos en un año?. ¿Cuál es la función que a "x" asocia el gasto mínimo para una persona?.

22) Consumo de electricidad. En 1995, la familia López tuvo un consumo de electricidad promedio por bimestre de \$37. En el bimestre enero-febrero sólo pagaron el básico de \$18 ya que estuvieron de

vacaciones. En el bimestre julio-agosto gastaron un 10 % más que en los otros cuatro bimestres, en los que el consumo fue el mismo. ¿Cuánto gastaron en el bimestre julio-agosto ? ¿Y en el bimestre setiembre-octubre ?

23) TRABAJO PRACTICO 6: Descuentos en una AFJP. Una AFJP de la Argentina descuenta, de los salarios nominales de sus afiliados, los siguientes importes según la fecha en que se realice el aporte mensual correspondiente:

(Op.1) Hasta diciembre de 1995 descontaba el 2,6 % del sueldo más \$ 5 de cuota fija por mes;

(Op.2) A partir de enero de 1996 descuenta el 2,3 % del sueldo más \$ 8 de cuota fija por mes.

Se solicita responder a las siguientes preguntas:

(i) ¿A partir de qué salario conviene la segunda opción? ;

(ii) ¿la segunda opción beneficia a los afiliados si el promedio de los salarios nominales de los afiliados a la AFJP es de \$ 2.000 ?

24) Trabajo conjunto. (i) Juan puede hacer un trabajo en 5 días y en cambio José puede hacerlo en 3 días. ¿En qué tiempo lo harán trabajando conjuntamente?; (ii) Juan puede hacer un trabajo en 3 días, José en 4 días y Pablo en 6 días. ¿En qué tiempo harán la obra trabajando conjuntamente?

25) TRABAJO PRACTICO 7: Descuentos y ganancias con parámetro. Sea $C \in \mathbb{R}^+$ el costo de una determinada mercadería.

(i)Cuál debe ser el valor de venta para que el comerciante en una futura promoción, con un descuento del 10 % , gane un 20 % sobre el costo ? ;

(ii) Dar el valor de venta para un costo de \$ 6 y de \$ 9 ;

(iii) Indicar además, el porcentaje de ganancia cuando no se efectúa la promoción.

(Es un problema real que se plantea como un problema paramétrico).

26) Metro tramposo. Un vendedor de telas gana el 30 % sobre el precio de costo. Pero un día descubre un metro defectuoso que hace aumentar sus beneficios al 33 %. ¿Cuánto mide en realidad el metro tramposo ?

27) Dinero en el banco. (i) Se colocan X pesos en el banco a interés compuesto anual del 5%. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse ese capital?

(ii) Si se coloca dinero en el Banco a interés compuesto y al cabo de 7 años se ha duplicado el capital, ¿A qué interés se lo ha colocado ?

28) Pagando los impuestos. En un país se paga, por el impuesto a las ganancias, un tanto por ciento igual a la cantidad de miles de pesos que se gana en el año. Así, si una persona gana \$ 1.000, paga un impuesto del 1% y si gana \$ 25.000, paga el 25% de esa cantidad. ¿Cuál desearía que fuese su sueldo?

29) Activo financiero y valor actual. Si el precio de un activo financiero es superior a su valor actual, ¿qué le conviene hacer al operador?

30) Conveniencia sobre dos activos financieros. En el mercado existen dos activos financieros, A y B. Se sabe que A rinde 100 este año y 200 el año próximo. En cambio, B rinde 50 este año y 300 el año próximo (se supone que el rendimiento se recibe al final del año). Analice que activo será preferido por un operador, en función de la tasa de interés anual i del mercado. Por ejemplo, A será preferido a B si la tasa de interés anual i del mercado (en el segundo año) es:

- (a) $i < 50\%$;
- (b) $i = 0$;
- (c) $i > 100\%$;
- (d) $i > 10\%$;
- (e) ninguna de las respuestas precedentes.

31) Tasas equivalentes. (i) ¿Cuál es la tasa de interés semestral equivalente a una capitalización anual del 12%?

(ii) ¿Cuál es la tasa de interés cuatrimestral equivalente a una capitalización anual del 12%?

(iii) Si un año tiene n períodos, ¿cuál es la tasa de interés de un período equivalente a una capitalización anual del 12%?

(iv) Si un año tiene n períodos, ¿cuál es la tasa de interés de un período equivalente a una capitalización anual del $i\%$?

32) TRABAJO PRACTICO 8: Promociones en un supermercado. El dueño de un supermercado ofrece las siguientes promociones:

(P_1) Los días lunes, para toda compra superior o igual a \$40, se descuenta un importe fijo de \$15.

(P_2) Los días martes se descuenta el 10% sobre el importe de la compra.

Una persona gasta " x " \$ en la compra del supermercado. Se definen las funciones $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i = 1, 2$) correspondiente a la promoción P_i , que a " x " asocia el gasto en \$ de la compra.

(i) Escriba la ley correspondiente para f_1 y f_2 .

(ii) Representelas gráficamente en un mismo gráfico cartesiano.

(iii) Utilizando sus representaciones gráficas responda que día le conviene ir al supermercado si la persona piensa gastar \$140, \$160 y \$150.

33) TRABAJO PRACTICO 9: Flujo de caja actualizado después del pago de impuestos. ¿Puede una política de amortización de una inversión hacer posible obtener un flujo de caja neto (flujo de caja actualizado después de pagar impuestos) que sea negativo o positivo? Analice el siguiente caso:

(i) Sea un proyecto de inversión con costo inicial \$ 100.000 sin gastos de explotación y sin valor residual que asegura recibir durante 4 años las rentas anuales de \$ 40.000, \$ 50.000, \$ 45.000 y \$ 39.000. Se considera durante todo el período una tasa de interés del 14% anual. Se supone que el impuesto anual a pagar representa el 50% de los beneficios contables del año, es decir después de la deducción de la amortización correspondiente.

Se consideran dos políticas diferentes de amortización:

(I) el amortizamiento es lineal, es decir \$ 25.000 por año;

(II) el amortizamiento es decreciente: \$ 31.000 el primer año, \$ 27.000 el segundo, luego \$ 23.000 y \$ 19.000 respectivamente.

Definiciones. 1) El flujo de caja (o flujo de fondos) de un año es la diferencia entre las entradas y las salidas de dinero durante todo el año. Para un determinado año, el flujo de fondos está dado por:

$$F = R - D - I$$

donde

F: flujo de fondos ;

R: renta entrada ;

D: gastos de exportación ;

I : inversiones.

2) El flujo de caja actualizado es la suma de los valores actuales de los flujos de caja durante toda la vida del proyecto realizado o a realizar.

Observación. Para comparar adecuadamente las inversiones, es deseable tomar en cuenta los impuestos a pagar por año. Por ende, lo que se busca es de maximizar el flujo de caja actualizado después de pagar los impuestos (llamado *flujo de caja neto*).

Se solicita que calcule el flujo de caja neto.

(ii) Analice el problema anterior si el impuesto a pagar es del 33%.

Ayuda. Realice un cuadro para cada política de amortización en el cual se aprecien las columnas de: Año, Flujo de caja, Amortización, Impuesto, Flujo de caja después de pagar el impuesto, Valor actual de \$1, Flujo de caja neto.

Respuestas Trabajo Práctico Especial

1) (i) $p=42$ (iii) $p = \frac{c(1+j)}{(1-i)}$

2) (i) $a=7.000$ $b=3.000$ (ii) no es posible
(iii) $c_j \leq G \leq C_i$ con $i \geq j$

3) (i) $x_1=310$ con $m_1=58$, $x_2=290$ con $m_2=62$

Generalización : si se pretende $m x \geq 17.980$ entonces $x \in (290, 310)$
La máxima ganancia (18.000) se obtiene para $x=300$ ($m=60$)

4) $q > 10.000$;

Generalización : $q > \frac{c_F}{P_V - P_C}$

donde

c_F : costo fijo ;

p_C : precio de compra ;

p_V : precio de venta

5) $p = -\frac{7}{100}q + 65$;

6) (i) $q=250$, $I(250)=125.000$

7) (i) $I=5.800$

(ii) $p=58,7$

(iii) $I=5.283$

8) $p=20$, $q=400$

12) (ii) $C(1)=10.100$; $C(3)=10.303$; $C(6)=10.615,2$; $C(12)=11.268,3$;
 $C_0=13.311,679$

14) (a) 990,099 952,38 909,09
(b) 1089,11 1047,62 1000

En general, x viene dado por la siguiente expresión : $x = \frac{P}{1+i}$.

15) (i) 17,85 % , (ii) 22,47 % , (iii) 0,61% ;

16) 45 % .

17) \$ 110 ;

18) (i) Es indistinto.

19) (i) Cuando el sueldo es mayor a \$ 2000.
(ii) Cuando el sueldo es inferior a \$ 2000.

20) (i-ii) $f_1(x)=0,30x$, $f_2(x)=600 + 0,15x$,

$$f_3(x) = \begin{cases} 1500 & \text{si } x \leq 5000 \\ 1500 + 0,10(x - 5000) & \text{si } x \geq 5000 \end{cases}$$

(iii) Si recorre 3000 km por año conviene la posibilidad P_1 ;

Si recorre 6500 km por año conviene la posibilidad P_2 ;

Si recorre 9000 km por año conviene la posibilidad P_3 .

(iv) Hasta 4000 km conviene la posibilidad P_1 ; de 4000 a 8000 km conviene P_2 y a partir de 8000 km conviene P_3 .

23) (i) \$ 1.000 ;

(ii) Si, en general, la segunda opción beneficia a los afiliados.

25) $\frac{4}{3}C$

BIBLIOGRAFÍA

- [AA] A. ALVAREZ ALVAREZ, "Uso de la calculadora en el aula", Narcea – MEC, Madrid (1995).
- [AR] J.A. ARGUELLES RODRIGUEZ, "Matemática recreativa y otros juegos de ingenio", Akal, Madrid (1994).
- [AB] J.L. ANTON BOZAL et al., "Taller de matemáticas" Narcea – MEC, Madrid (1994).
- [BePiSa] M.E. BECKER – N. PIETROCOLA – C. SANCHEZ, "Notas de combinatoria", Red Olímpica, Buenos Aires (1996).
- [Fa] E. FAVRO, "Mathématiques financières et calcul d'optimisation", Dunod, Paris (1991).
- [Ga] A. GARDINER, "Discovering Mathematics. The art of investigation", Oxford Univ. Press, Oxford (1998).
- [Ha] E.F. HAEUSSLER – R.S. PAUL, "Matemática para administración y economía", Grupo Editorial Iberoamericano, México (1992).
- [Gu] M. DE GUZMAN, "Para pensar mejor", Pirámide, Madrid (1995)
- [Kr] S.G. KRANTZ, "Techniques of problem solving", American Math. Soc., Providence (1997).
- [Po] G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas", Trillas, México (1994).
- [Sa] L.A. SANTALÓ, "Matemática. Iniciación a la creatividad", Vol. 1 (1993), 2 (1993) y 3 (1995), Kapelusz, Buenos Aires.
- [So] D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).
- [Ta1] D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", Parte I (23 páginas), Parte II (15 páginas), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1995).
- [Ta2] D.A. TARZIA, "Curso de nivelación en Matemática", McGraw-Hill, Santiago de Chile, Por aparecer.

Revistas:

- "Laberintos", Ediciones de Mente, Buenos Aires (1996).
- "Batalla Naval", Ediciones de Mente, Buenos Aires (1992/1993).
- "Cruzadas", Zugarto Ediciones, Madrid.
- "Enigmas de oro", Ediciones de Mente, Buenos Aires.
- "Enigmas. Juegos de lógica", Ediciones de Mente, Buenos Aires.
- "Jeux de logique", Keesing France, Levallois-Perret.
- "La Nación", Diario La Nación, Buenos Aires.
- "Les placés de sport cérébral", Keesing France, Levallois-Perret.
- "Nombres flechas", Keesing France, Levallois-Perret.
- "Nombres placés", Keesing France, Levallois-Perret.
- "Viva" y "Juegos de verano", Diario Clarín, Buenos Aires.

COMPLEMENTO SOBRE LOGICA

Y JUEGOS MATEMATICOS

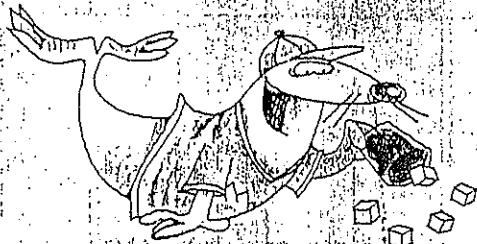
TODOS LOS DADOS

Este cuadro fue realizado con 36 dados: Cada línea o columna contiene los dados del 1 al 6 sin repetir ninguno, o sea que siempre suman 21, y presentan siempre el mismo dibujo para la misma cantidad de puntos (el que le mostramos al pie de estas líneas).

Las caras coloreadas en azul son definitivas. Si hay caras que muestran un solo punto en el centro y no están coloreadas de azul, indican que allí sólo puede aparecer un as, un tres o un cinco.

Finalmente, le mostramos cuál es la suma de puntos que aparece en las distintas diagonales, con tres, cuatro, cinco o seis dados, de uno y otro lado.

Con todos estos datos, usted puede descubrir qué dado hay en cada lugar exactamente.

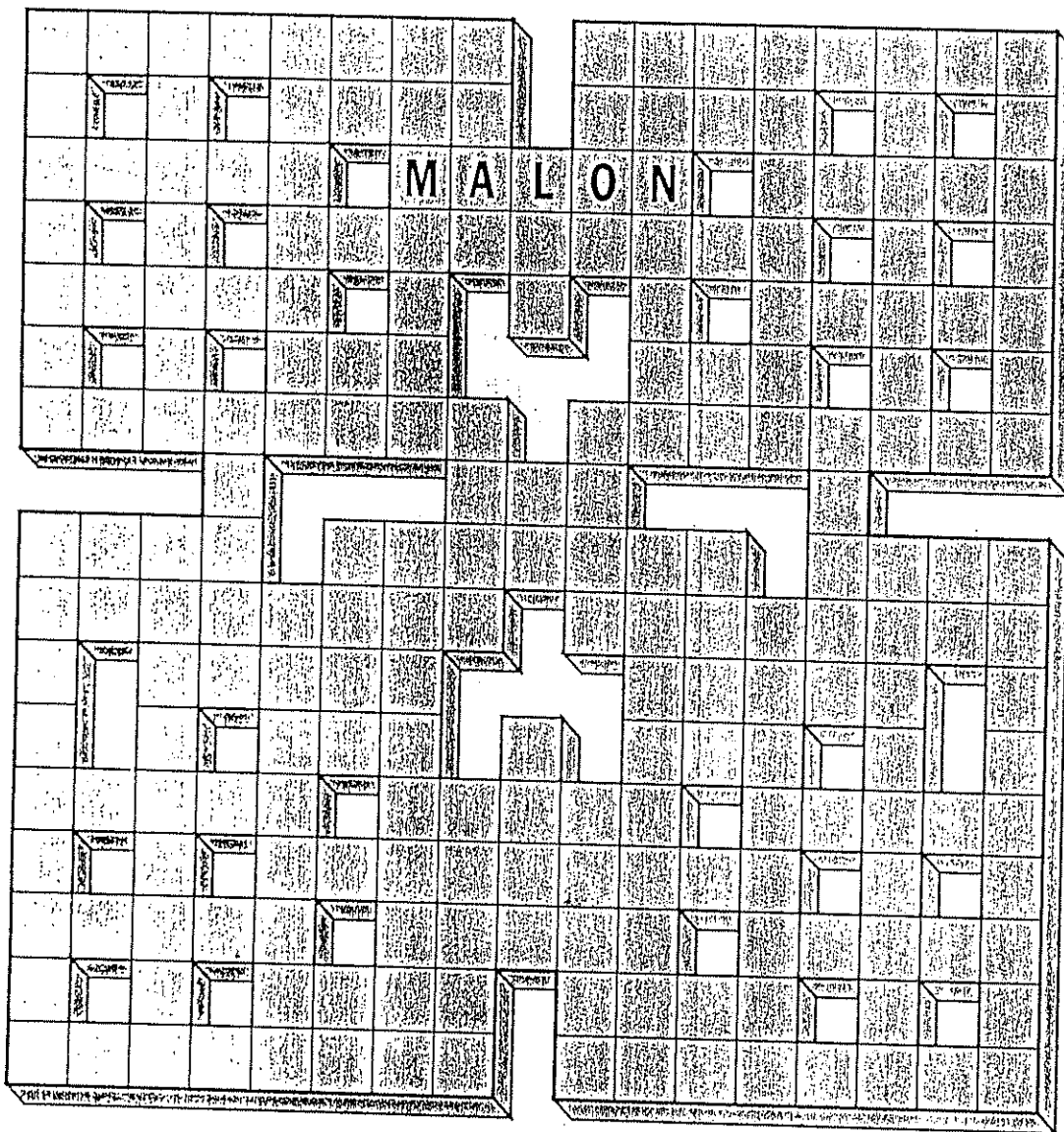


			9	13	18	22
			↗	↗	↗	↗
			↘	↘	↘	↘
			8	17	15	15

ACOMODO



Inserte en el diagrama todas las palabras que listamos al pie, separadas por cantidad de letras y ordenadas alfabéticamente. Hay un "MALON" de ayuda, por lo que cuídese de las flechas...



DE 2 LETRAS

AM - AN - AR - BA - EL - OC - OD - TA - TU.

DE 3 LETRAS

ATA - DAR - LID - OBI - OSE - RED.

DE 4 LETRAS

ABAD - ACAB - ACAL - ADEN - AÑOS - BARI - BETA - DRIL - ENOC - NIDO - ODER - OLAF - RIAS.

DE 5 LETRAS

ARABE - BEBEN - COMEN - DEDAL - ERROR - EVADE - MALON - MAMAN - MAZDA - NIDAL - NORTE - ORINA - RARAS - RISCO - RODAR - SOLON - TORDO.

DE 7 LETRAS

AVENIDA - COBARDE - MACERAD - MANERAS - RAMADAN - REBASAR - SINTOMA - TAMIZAR - VINAGRE.

DE 8 LETRAS

ALEMANAS - AMENACEN - AMOLARAN - DELETREA - DONOSURA - ENASTARA - EVOCARAS - LEÑADORA - MAREMOTO - RESONASE.

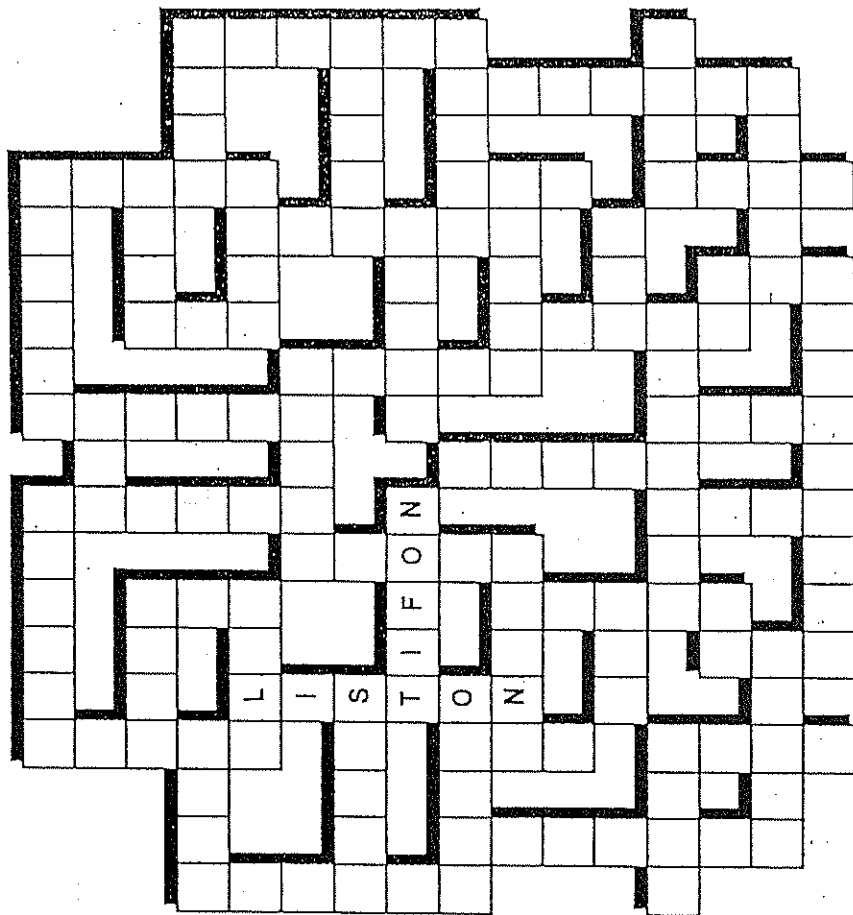
DE 9 LETRAS

ASEVERABA - BALANCEAR - DESOLASEN - EDIFICARA - IONIZARIA - REMEDARAS - SARRACENA - VENIDERAS.

MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

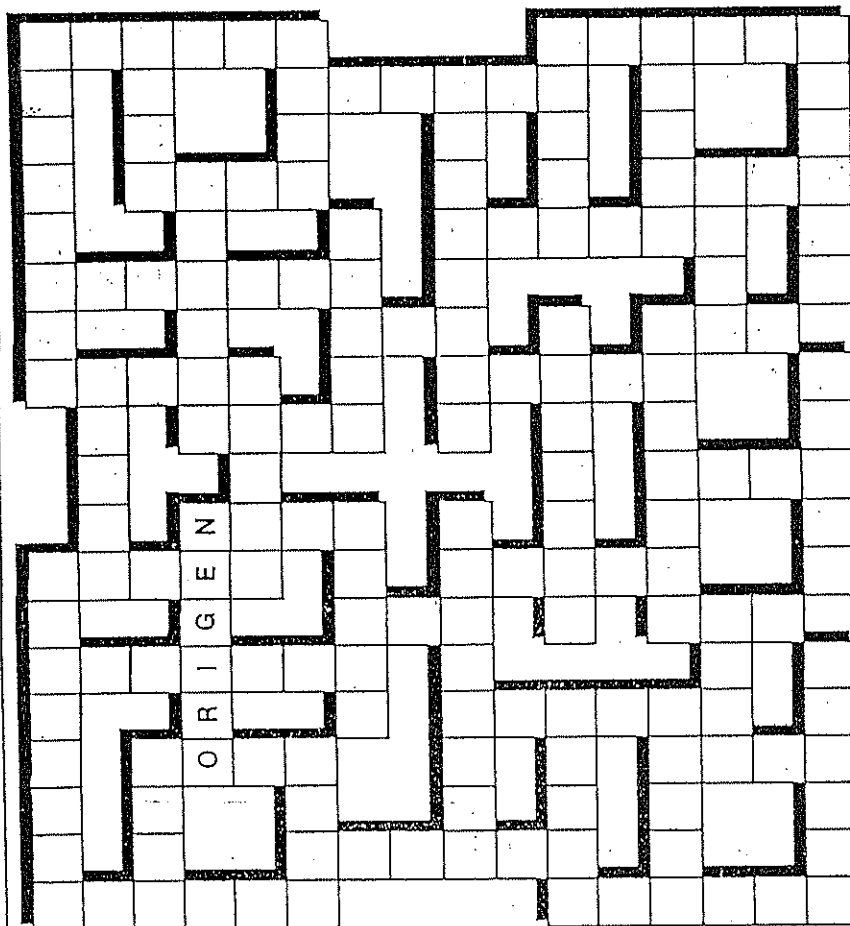
- 9 Letras Baladi Anade Tesis Ello Cia
- Alimentos Bistec Bueno Tifón Imán Epi
- 7 Letras Colega Carie Trote Lava Evo
- Detalle Listón Cielo Mani Gen
- Montaje Mesias Envés Rape Nos
- Oración 4 Letras Alim Simo Sam
- 5 Letras Orate Baúl Sos
- 6 Letras Abuso Rumor 3 Letras 2 Letras
- Aceite Alell Salón Asa Ar
- Avance Amigo Selva Bus Os



MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

- 8 Letras Soltura Origen Olmo
- Insomnio Platea Paté
- 6 Letras Pueblo Piel
- Borrón Rareza Prez
- Brecha Siervo Eses
- Estaño Retor Icor 3 Letras
- 7 Letras Estilo Sobre Loma Bar
- Apósito Lector Brete Mies Geo
- Bromuro Nómima Envés Nomo Oir
- Nazismo Obleas Gesta Nota Roi



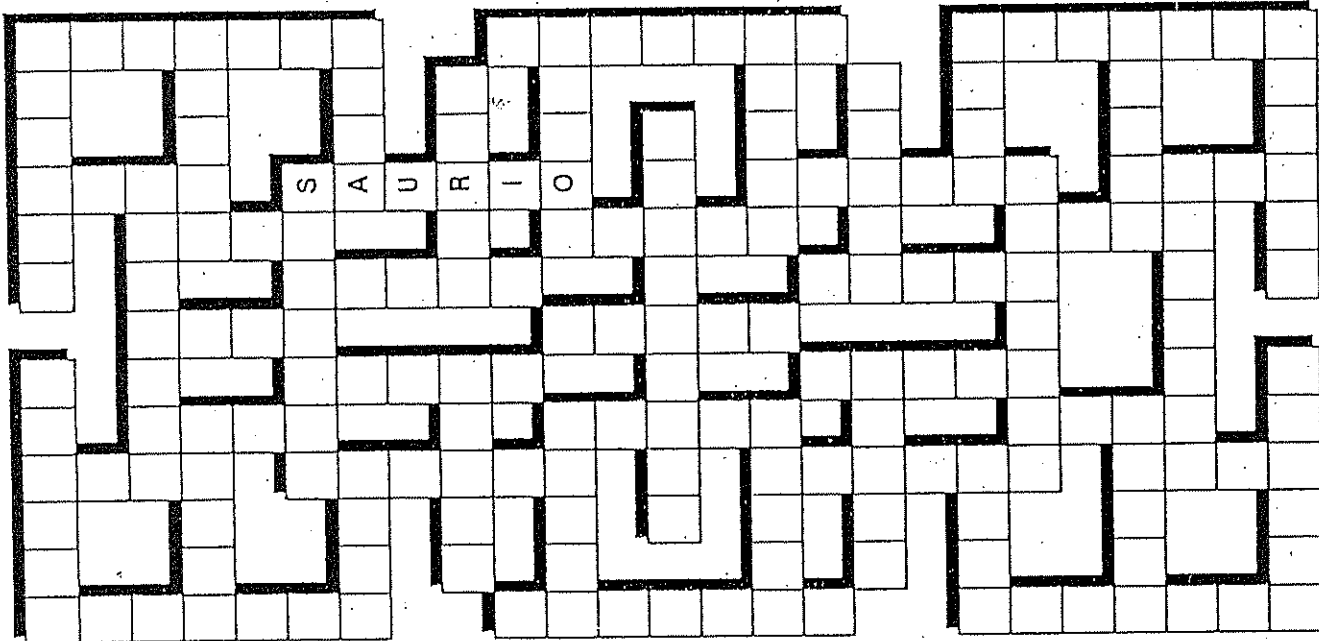
72

MONTAÑAS DE CRUZADAS

16

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

- 9 Letras Ardid
- Trampolín Arpia
- Borde
- 7 Letras Carie
- Amistad Elite
- Bonanza Feliz
- Epopeya Folio
- Establo Fósil
- Lotería Garra
- Lozanía Litro
- Noventa Mitra
- Pesetas Orden
- Pletina Señor
- Sanidad Taiga
- Talón
- 6 Letras Agrado
- 4 Letras Ceniza Adán
- Empeño Alta
- Germen Buda
- Jornal Dial
- Pintor Eter
- Rienda Inca
- Saurio Isla
- Onda
- 5 Letras Abaco Orbi
- Paté
- Abecé Pote
- Alero Real
- Anejo Yema

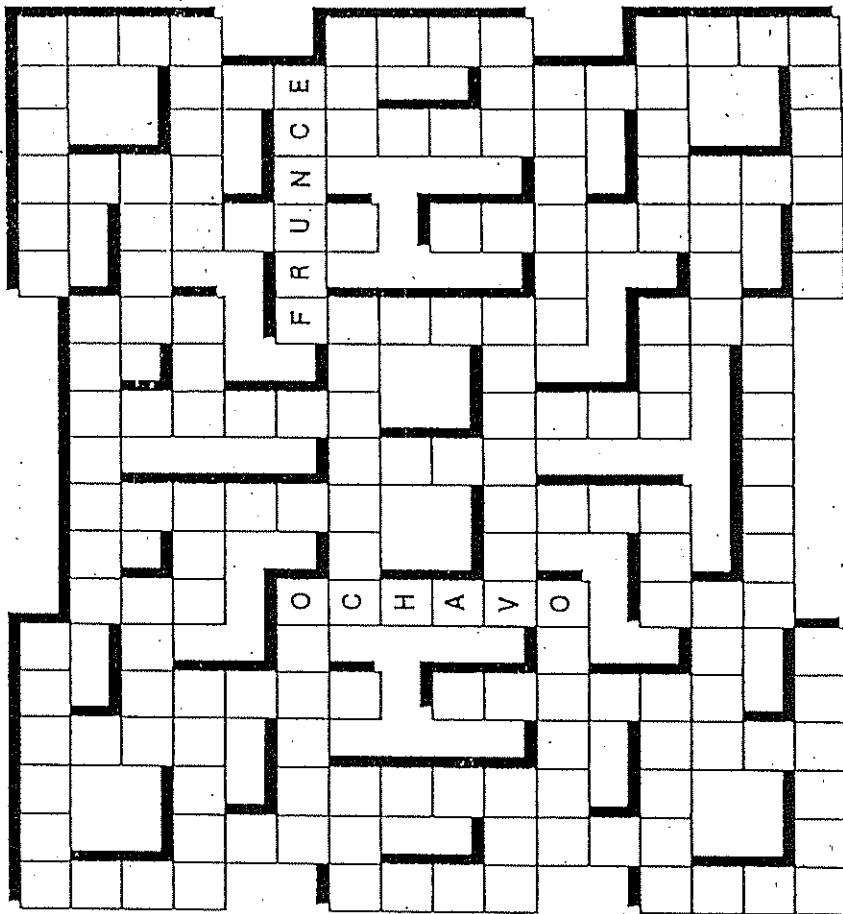


MONTAÑAS DE CRUZADAS

17

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

- 7 Letras Fiebre
- Arcabuz Frunce
- Chavala Jornal
- Fomento Muesca
- Vicario Novata
- Ochavo
- 6 Letras Pamela
- Camada Remate
- Crisis Remesa
- Estilo Salero
- Factor Sandía
- Trineo
- 5 Letras Ajuar
- Album Ardid
- Calor
- Labio
- Tizón
- 4 Letras Amén
- Asta
- Auto
- Crio Chic
- Idea Indi
- Irán
- Jaén
- Jota
- Maná
- Nasa
- Nomo
- Otra
- Raso Rico
- Saga Sari
- Test
- Unir
- Veta
- 3 Letras
- Eta
- Evo
- Fin
- Ira
- Noé
- Oll
- Olp
- Paz
- Rai
- Ras
- Una
- Vil

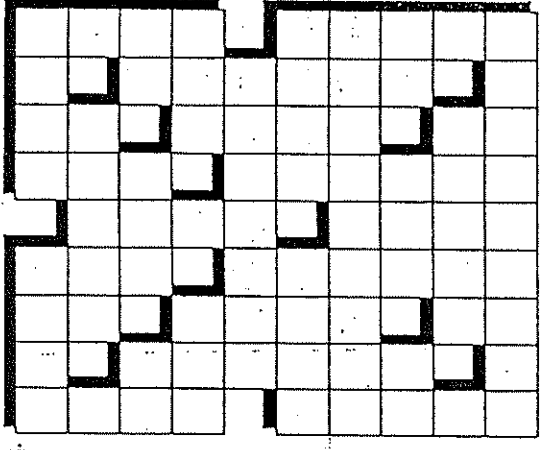


MONTAÑAS DE CRUZADAS

19

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

- 9 Letras: Ovina, Ave, Entresijo, Saldo, Falladora
- 4 Letras: Aare, Adán, Arel, Mal
- 7 Letras: Armazón, Deca, Dote, Inca, Mono, Niel, Oleo, Unos
- 6 Letras: Canora, Italas, Mollar, Zudras
- 5 Letras: Caras, Ofoue
- 3 Letras: Ana
- 2 Letras: Al, Ce, Co, Ct, Da, Os, Si, Ti

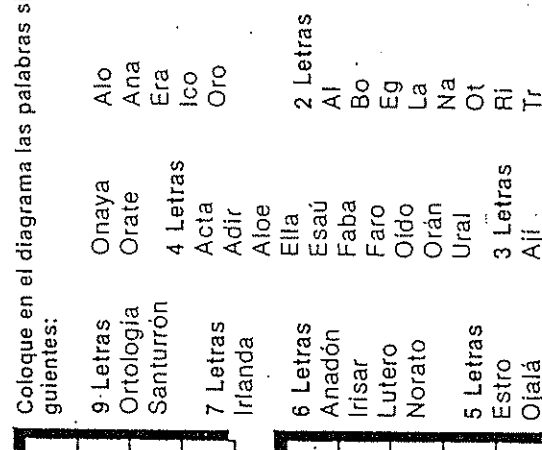


MONTAÑAS DE CRUZADAS

20

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

- 9 Letras: Onaya, Orate, Santurrón
- 7 Letras: Irlanda, Acta, Adir, Aloe
- 6 Letras: Ella, Esau, Faba, Faro, Oido, Orán
- 5 Letras: Estro, Ojalá
- 4 Letras: Ural
- 3 Letras: Aji
- 2 Letras: Al, Bo, Eg, La, Na, Ot, Ri, Tr

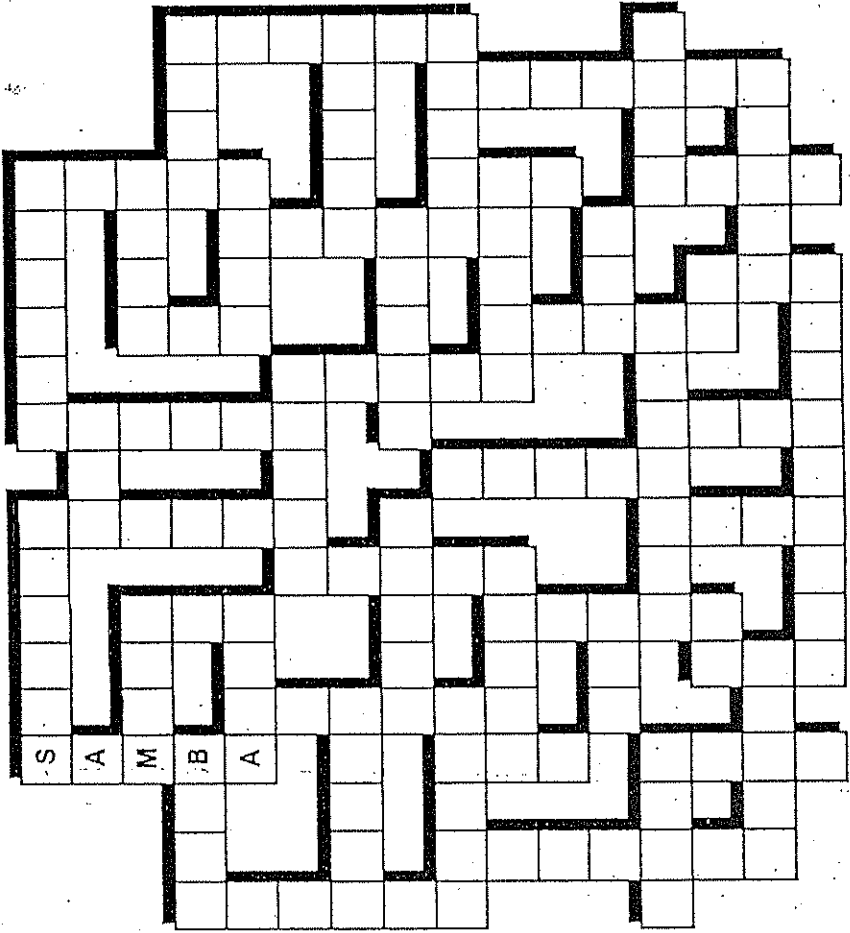


MONTAÑAS DE CRUZADAS

18

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

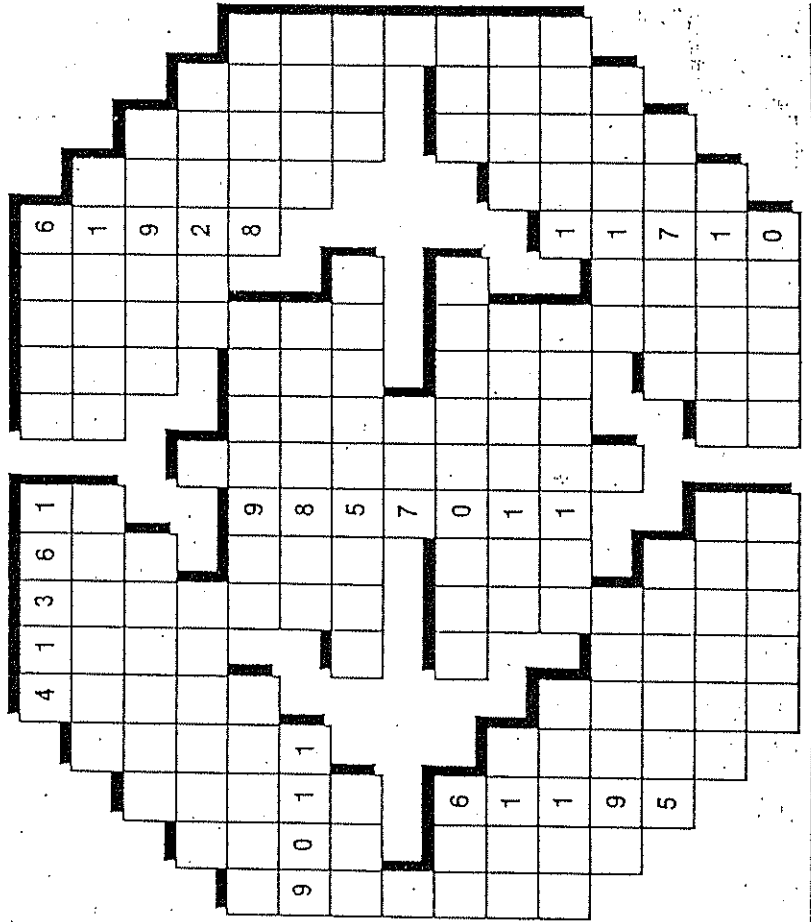
- 9 Letras: Miofia, Morral, Nocivo, Osario, Sermón, Toisón
- 7 Letras: Invicta, Ligamen, Vegetal
- 6 Letras: Callima, Masaje
- 5 Letras: Abasi, Aleli, Arena
- 4 Letras: Amor, Beta, Boda, Cate, Club
- 3 Letras: Era, Las
- 2 Letras: Er, Lo
- 1 Letra: Ltd, Mis, Oca, Oms, Oír, Oso, Red



MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama los siguientes dígitos:

- 9 Dígitos 7927644 673662 32575 89419 8321 650
- 391024176 7987658 721959 33758 90221 9011 696
- 676510095 8213172 867708 41361 9173 717
- 917112430 9687162 914517 45016 4 Dígitos 763
- 9857011 922414 51726 1893 3 Dígitos 811
- 958713 57236 2753 127
- 7 Dígitos 1607451 6 Dígitos 61195 3102 132
- 2307419 100971 5 Dígitos 61928 4572 197
- 3776577 266718 11710 72193 5219 220
- 4619289 312992 15717 77456 5722 354 13
- 5691162 352136 18719 79106 6717 476 26
- 5918467 491277 21430 81652 7637 563 72
- 6314599 505615 21612 88907 7724 611 92

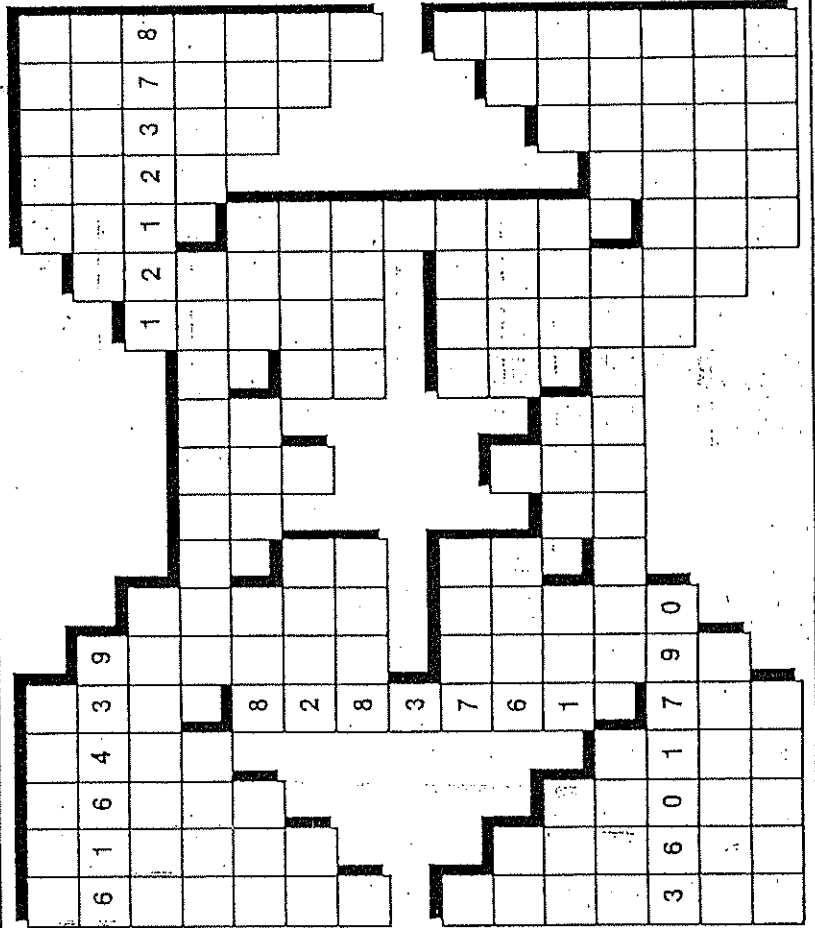


MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama los siguientes dígitos:

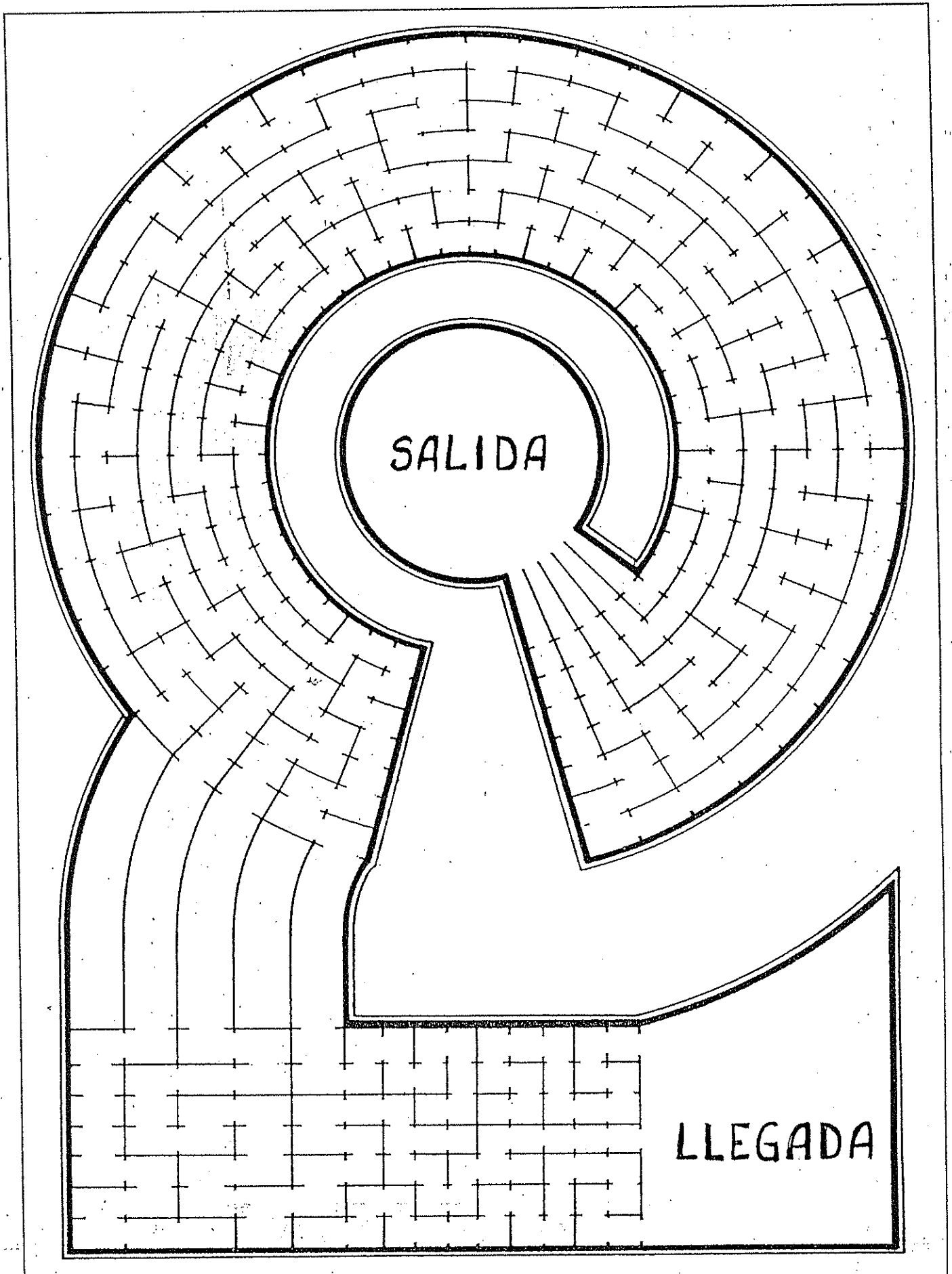
990

- 9 Dígitos 8283761 735221 56281 4983 137 2 Dígitos
- 745608123 9901280 887502 66344 5678 232 10
- 965817003 959210 77055 5976 296 11
- 6 Dígitos 84543 6124 301 13
- 7 Dígitos 138904 5 Dígitos 6127 441 26
- 1212378 179358 10987 4 Dígitos 7236 487 32
- 2725452 213791 12643 1456 7489 587 42
- 3601790 289634 24756 1859 7672 634 45
- 3624343 307581 26789 2185 8090 723 50
- 4586791 417902 32740 2521 827 67
- 5986709 523456 34536 3453 3 Dígitos 881 68
- 6129123 545609 42635 3760 123 890 73
- 7355378 616439 46924 4412 124 949 81



75

LABERINTO





4

AMEN
ANET
ANNA
ARES
BREL
DITO
EDEN
IGOR
LIEU
LOTI
LUTH
ONDE

ORAN
RARE
REPU
RISE
RUER
SOIE
TANT
TIEN
TUNE
UNAU
VAUD

5

ANIME
AVARE
GRANT
HETRE
ORSEC
REVER
TABAC
TETER

6

BETAIF

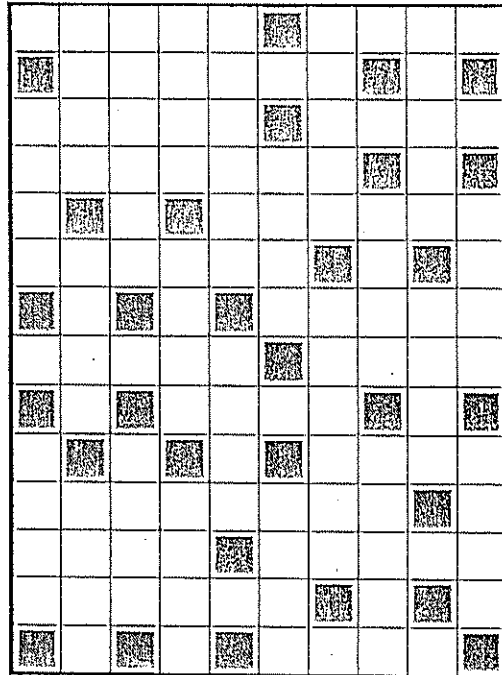
CHRONO
ETUVER
MENHIR
NUCLEE
TALBOT
UDERZO

7

ANATOLE

8

NOUREIEV



4

AMAS
AVAL
BAHT
DARD
ERNE
EVRY
FANE
GREC
INCA
IRUN
JANE
KENT

MOAB
NAZE
NERF
PEZE
RIOM
ROSI
SLOW
SMOG
SPOT
TRUC
TSAR

5

BASTA
BUTOR
DRAIN
ENJEU
MECHE
MICRO
RANCI
SALUT

6

ATTIFE

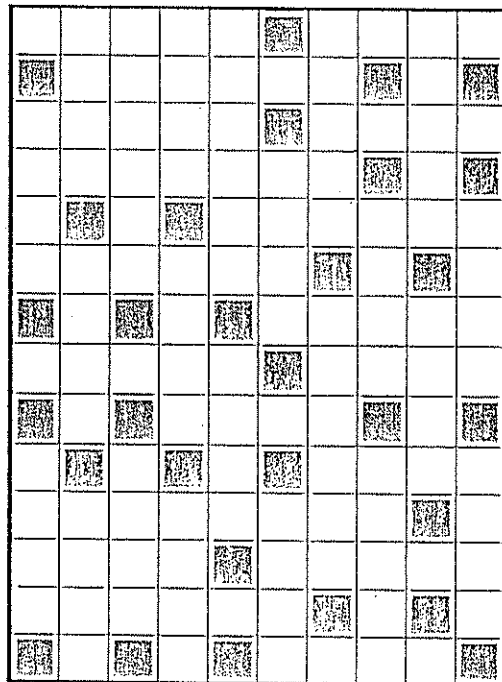
FAUTIF
REBATI
SALANT
THERMO
TITRER
VARTAN

7

PLACIDE

8

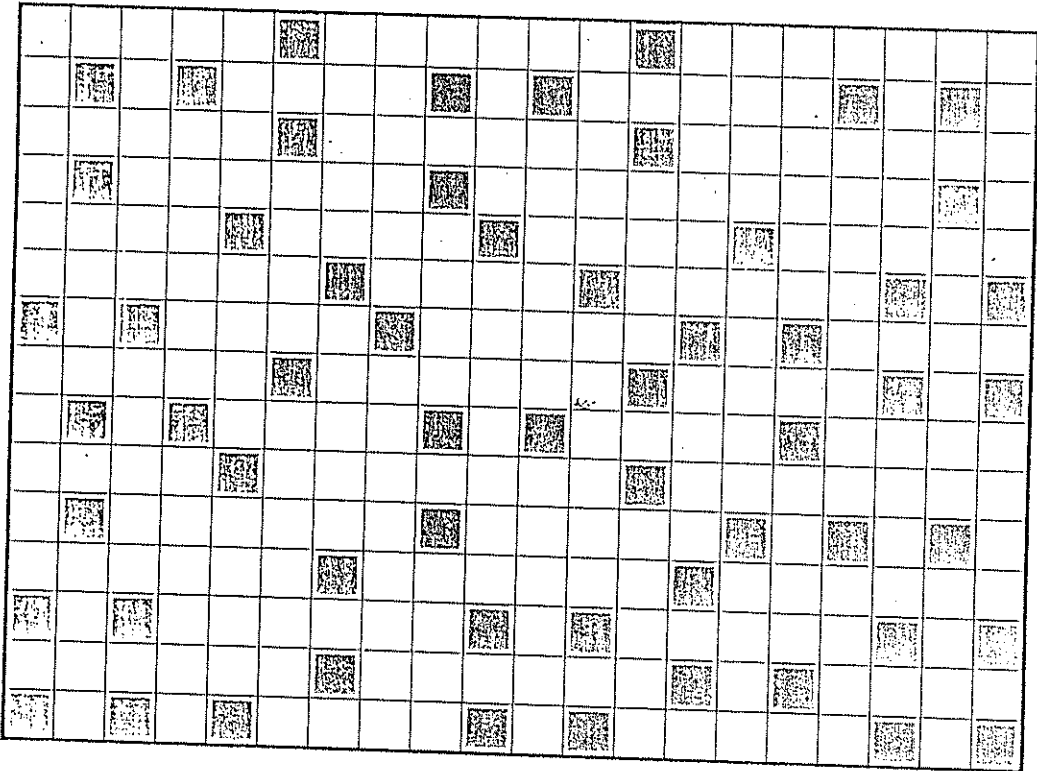
EBENISTE



4	HEUR	SMOG	CELUI	NOUER	CHELEM	SUCOIR
	INDE	SOIR	CHERE	OISIF	CREVEE	TANREC
AGIO	INDU	TARA	COUIC	SYMPA	DACIER	TOREER
AZUR	INFO	UNIR	CREPU	TOMEE	GLOTTE	TUNNEL
BELE	INNE	UPAS	EBENE		HUBERT	
CAFE	LAOS	UVAL	FERME	6	IVETTE	7
CEDE	LOTI	VOEU	FERRE		MACULA	
DAIM	LOUP	ZOOM	FUGUE	ADAGIO	MENTHE	ALLEGRO
ELBE	MALI		HAREM	AGENDA	MENTOR	ANIMALE
EMEU	OGRE	5	HEROS	AMALFI	POINTU	CHARNUE
EPAR	PAPA		LAIDE	AMERRI	RALANT	DETACHE
FADE	PERI	AGLAE	MOIRA	AVERTI	REPORT	ELAGUEE
HELA	RETS	BENIN	NIVAL	CERISE	REUSSI	NABUCCO

8
GUENILLE
LIBRAIRE

9
SUREVALUE





4

LIME
MISE
AGEE
ALFA
APIC
APTE
AVEC
CASE
ECRU
GUAI
HAIE
IGOR
ISSU

URNE
VTOL
5

AGLAE
AIRER
ALOES
APURE
AUTEL
ELTON
HALER
LENDL

MAMAN
NAPPA
NUAGE
OBTUS
ODEUR
PACHA
PLACE
SEPIA
TROUE
6

AILIER

ALINEA
AMEDEE
ANKARA
ARMANT
AUTRUI
BERNEE
CANTAL
CHRONO
ECLOSE
ECUEIL
ESSAIM
GRAPPA
IGUANE

ITALIE
LACANT
NIABLE
OMNIUM
PEDALO
POLICE
REITRE
RENARD
RENOVI
RONALD
SETTER
SIMILI
SNOBEE

TOISER

8

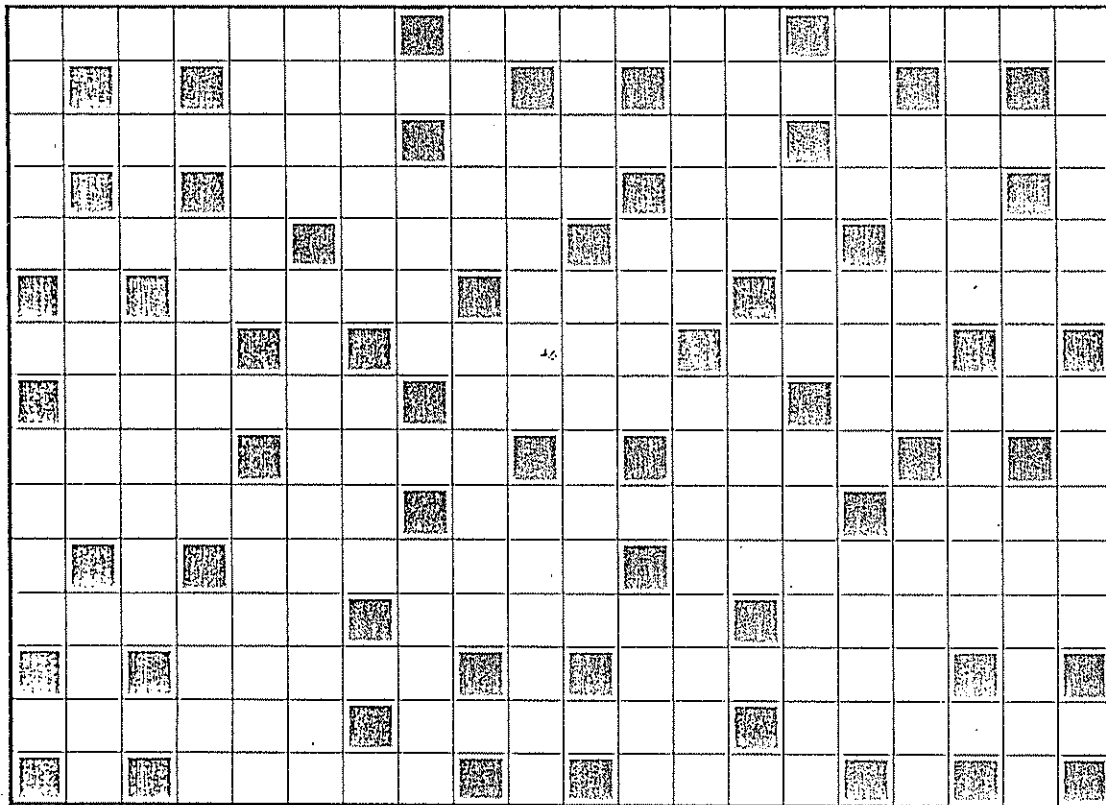
ENGRENER
RELACHER

7

ANTIGUA
CALIBRE
NIAGARA
NUANCEE
OCEANIE
PATERNE
PATRICK
TELETEL

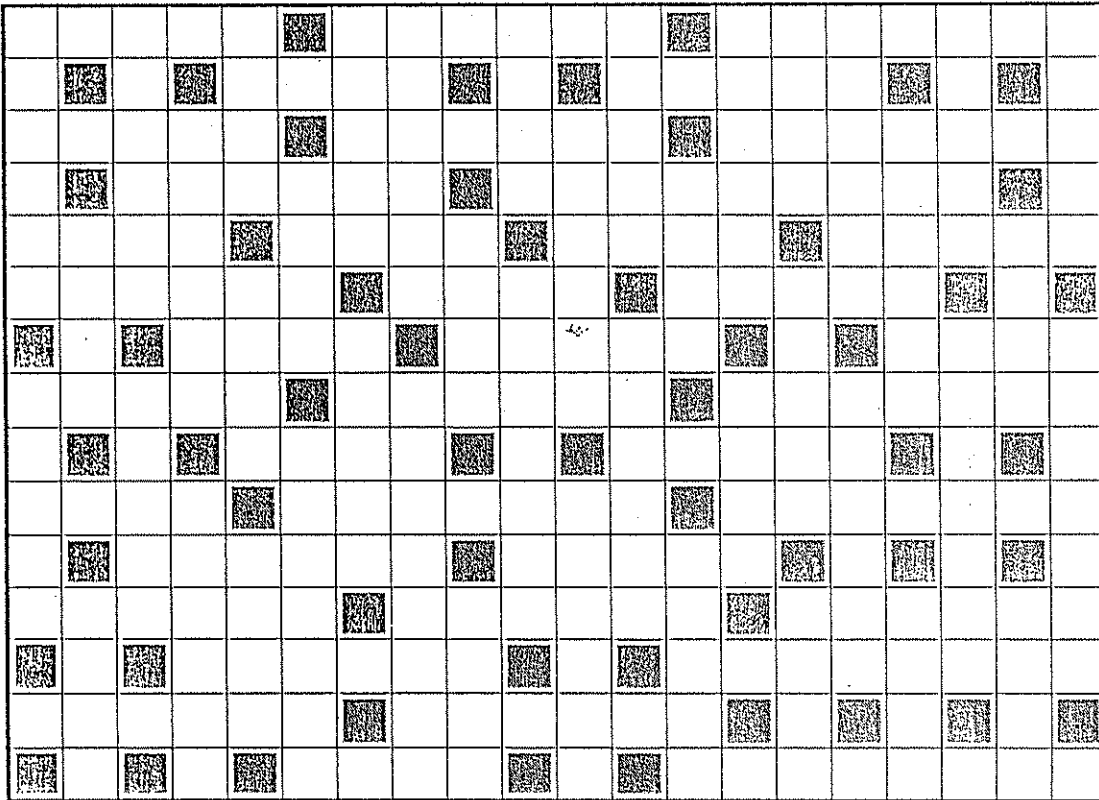
10

MELANCOLIE

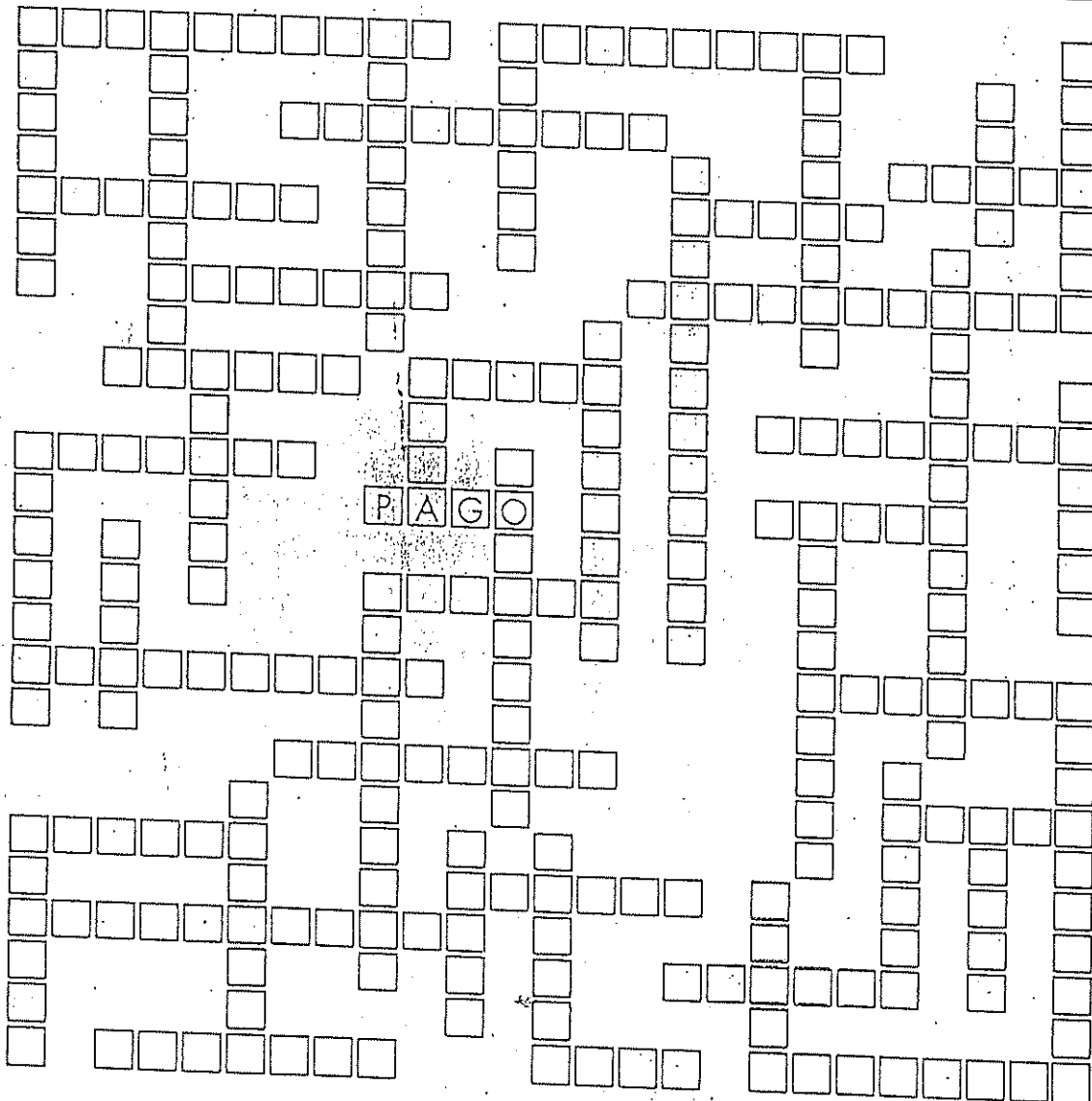




4	ETAT	TURF	MATCH	6	DEPERI	7	8			
	FIAT	VETO	MIAMI		LEONIN					
	ABER	KIVU	ROCHA		MOBILE			ARTABAN	ARGENTIN	
	AGEE	LALA	SAULE		ALESEE			PESETA	GUETTEUR	
	ALBE	LENA	SISSI		ANHELE			PETREL	DECLARE	MONOPOLE
	ALEA	LIEU	AGACE		ATHENA			PHRASE	ESTEREL	
	ALLE	LUNE	ALAMO		BRANDO			RETORS	EVEREST	
	ALMA	MATH	ALLEU		CACTUS			SHERPA	LIBERIA	
	ANET	OLAV	ASTER		CARUSO			SIRENE	PARBLEU	9
	AUTO	RAIE	CASSE		CASTRO			SMALAH	SAMOVAR	
BEAT	SALI	ECUME	CHASSE	SURNOM	SENSASS					
DELA	SEUL	KAFKA	CHEVAL	SURVOL						
EMEU	STAR	KOALA	CLAPIR	TASSEE						



LA CONTABILIDAD



Cuenta
Débito
Diario
Margen
Nómina
Pasivo
Socios

7 letras

Balance
Capital
Compras
Crédito
Efectos
Factura
Ingreso
Morosos
Pérdida

8 letras

Clientes
Comisión
Deudores
Impuesto
Registro
Reservas

9 letras

Beneficio
Comilente
Dividendo
Ejercicio
Impagados

10 letras

Accionista
Acreedores
Inventario
Patrimonio

11 letras

Mercaderías
Proveedores

12 letras

Amortización
Comisionista

4 letras

Aval
Caja
Debe
Pago

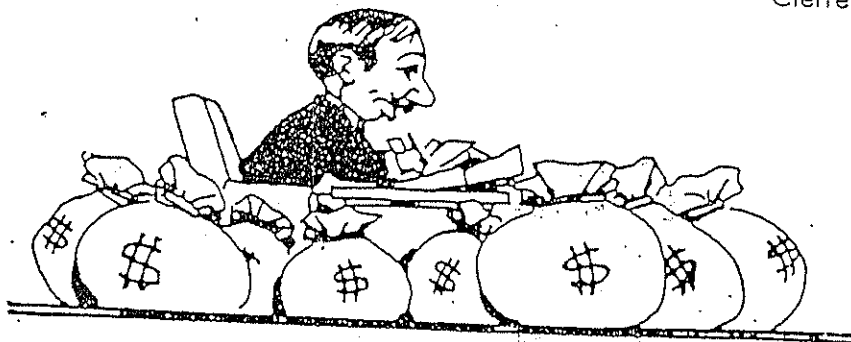
5 letras

Abono
Banco
Cargo
Cobro

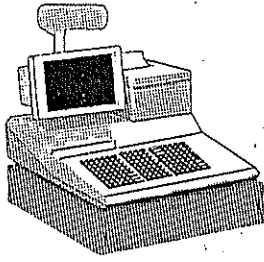
Coste
Gasto
Haber
Mayor
Saldo

6 letras

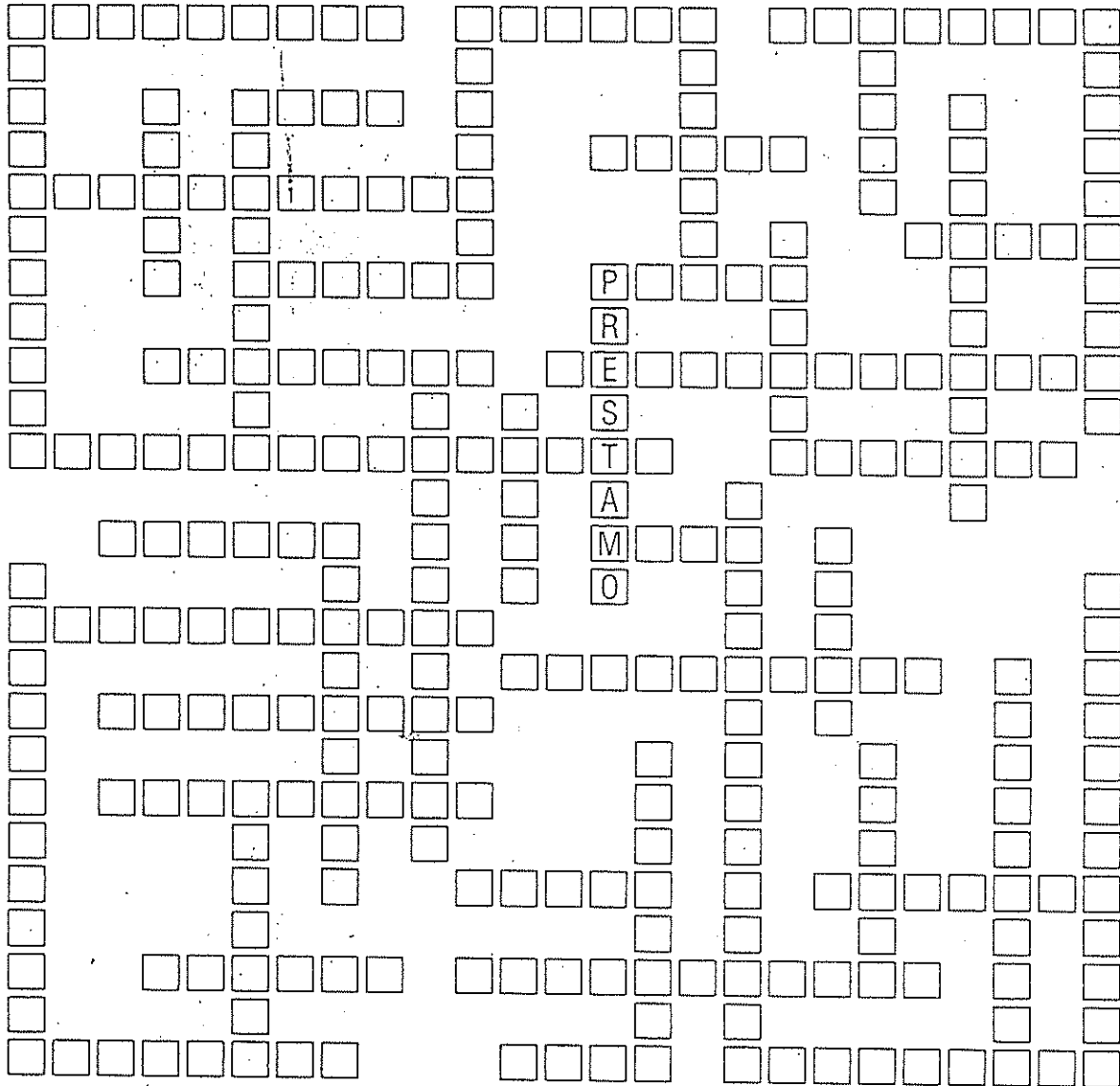
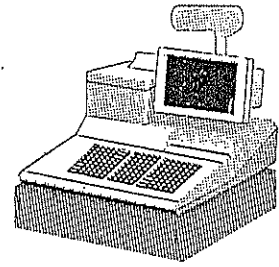
Activo
Apunte
Cambio
Cierre



4

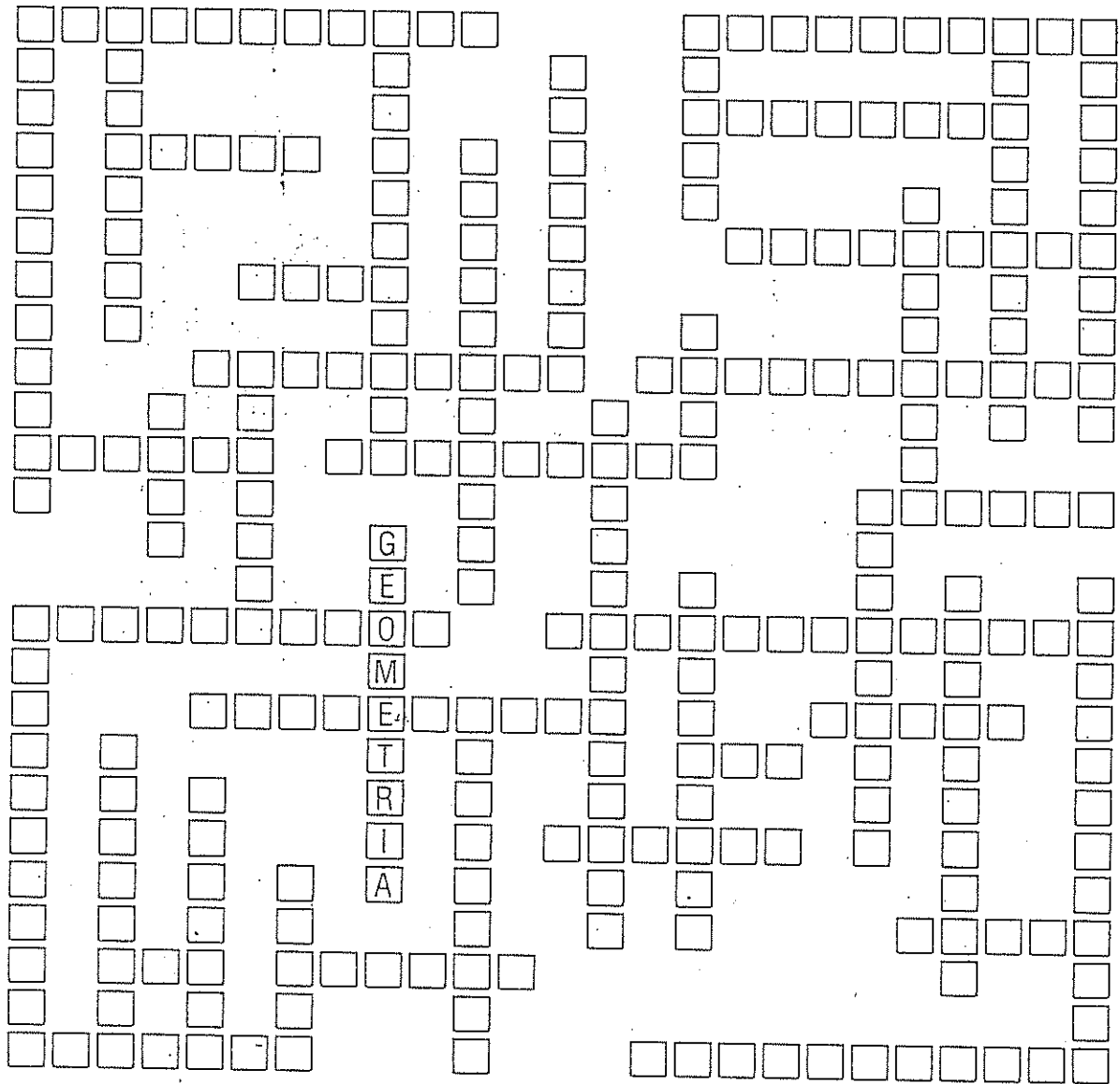


Comercio



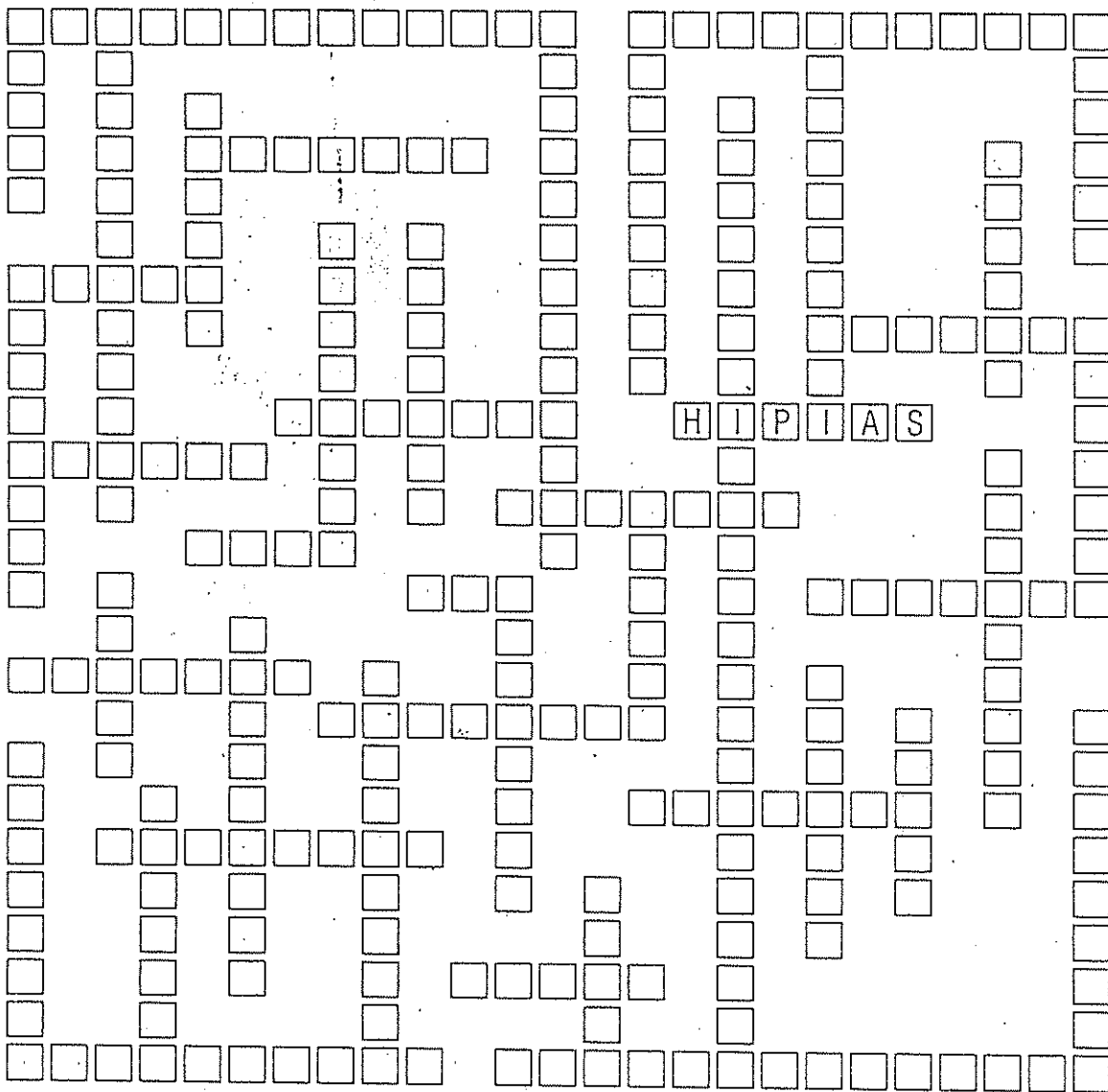
- | | | | | |
|---------|-----------|--------------|----------------|--------------------|
| 4 Aval | 5 Vendí | 7 Pérdida | 9 Numulario | 11 Negociación |
| Mora | 6 Agente | Reventa | Principal | 12 Comisionista |
| Puja | Boleta | 8 Agiotage | Solvencia | Contracambio |
| 5 Banco | Cédula | Factoría | 10 Aceptación | Letra abierta |
| Carta | Factor | Hipoteca | Exportador | 13 Levantamiento |
| Cupón | Oferta | Memorial | Negociador | 14 Capitalización |
| Glose | Pliego | Préstamo | Subalterno | 15 Establecimiento |
| Plaza | 7 Agencia | 9 Al contado | 11 Adquisición | |
| Renta | Balanza | Dividendo | Dependiente | |
| Tanto | Carpeta | Marchante | Exportación | |

Matemáticas...



- | | | | | |
|---------|------------|-------------|----------------|------------------|
| 3 Eje | 5 Sordo | 8 Facultad | 9 Postulado | 11 Congruencia |
| Tri | 6 Ángulo | Inscrito | Resultado | Discontinuo |
| 4 Cono | Cordal | Pirámide | 10 Asimétrico | Integración |
| Huso | Sagita | Rodadura | Cuadrático | Prismatoide |
| Suma | Unidad | 9 Cardioide | Desviación | Trescientos |
| 5 Curva | 7 Apotema | Cósecante | Ecuatorial | 12 Combinatoria |
| Igual | Función | Enunciado | Oscilación | Proporcional |
| Nonio | Ordinal | Geometría | Superficie | 13 Paralelogramo |
| Radio | 8 Cuaterno | Inflexión | 11 Agrimensura | Veintiseiseno |

...y matemáticos



- | | | | |
|----------|-----------|--------------|--------------------------------|
| 3 Lie | 6 Moivre | 7 Plucker | 9 Kronecker |
| 4 Pappo | Proclo | Russell | Peurbach |
| 5 Apell | Staudt | Tolomeo | 10 Beldomandi |
| Borel | 7 Alhacen | 8 Antifono | Tartaoglia |
| Hooke | Cremona | Backluno | Torricelli |
| Nonio | Dositeo | Clairaut | 11 Aristoxenos |
| Theon | Fourier | Einstein | 12 Caratheodory |
| Wolff | Gerbert | Lebesgue | 13 Alberto Durero |
| 6 Bachet | Hilbert | Mercator | Nicolás de Cusa |
| Fermat | Lambert | 9 Arya Bátha | 14 Adelardo de Bath |
| Hippias | Menecmo | Descartes | 23 Mohamed Ibn Musa Abu Djefar |

TÉRMINOS ESTADÍSTICOS

4 letras

Tasa

5 letras

Censo
Error
Media
Razón
Tabla

6 letras

Ajuste
Escala
Índice
Puntos
Sondeo

7 letras

Gráfico
Mediana
Muestra

8 letras

Análisis
Curlosis
Diagrama
Encuesta
Muestreo
Promedio
Varianza

9 letras

Asimetría
Atributos
Intervalo
Población
Recorrido
Regresión
Tendencia
Variables

10 letras

Coordenada
Decremento
Dispersión
Histograma
Inferencia
Puntuación
Tabulación

11 letras

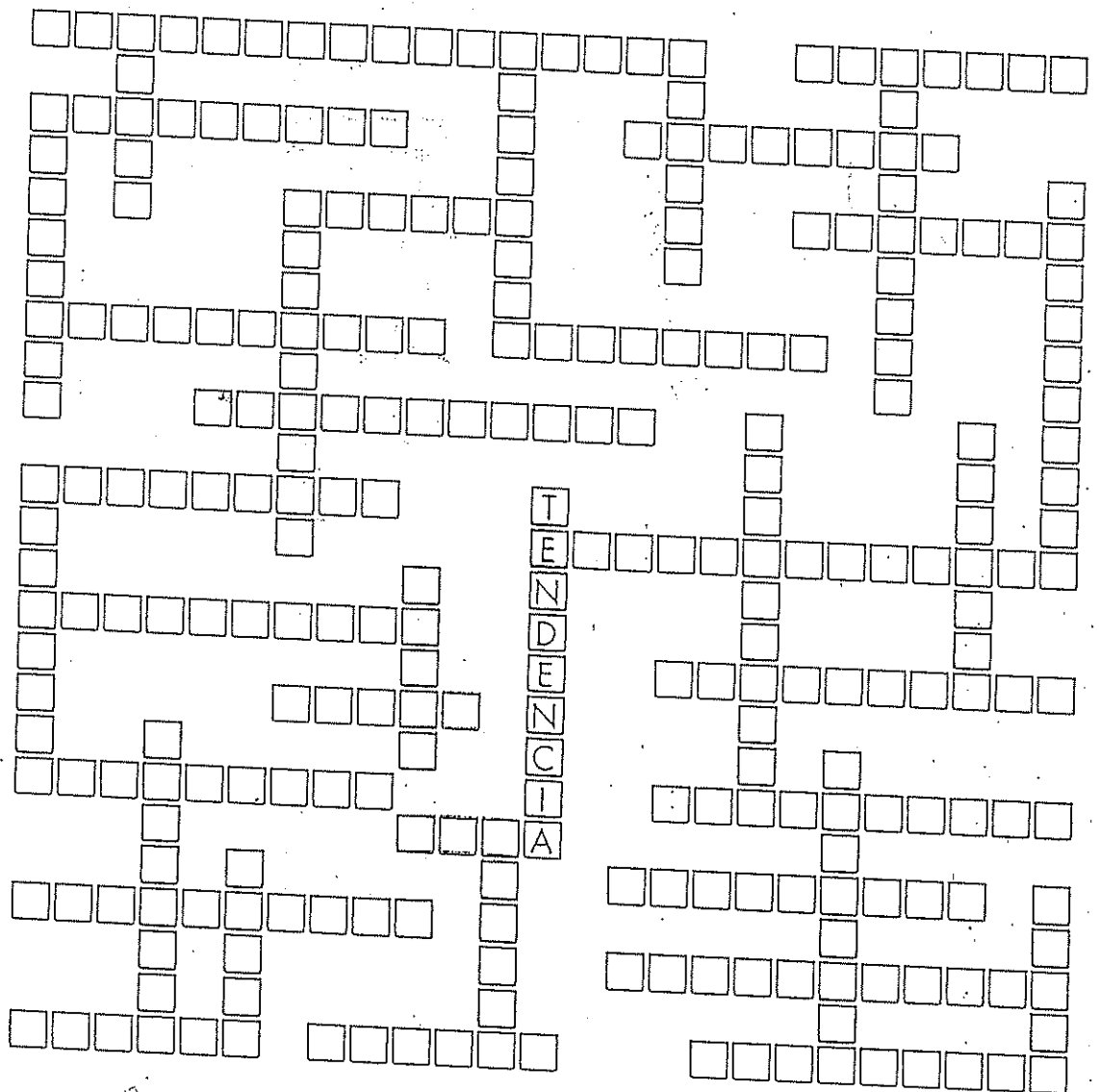
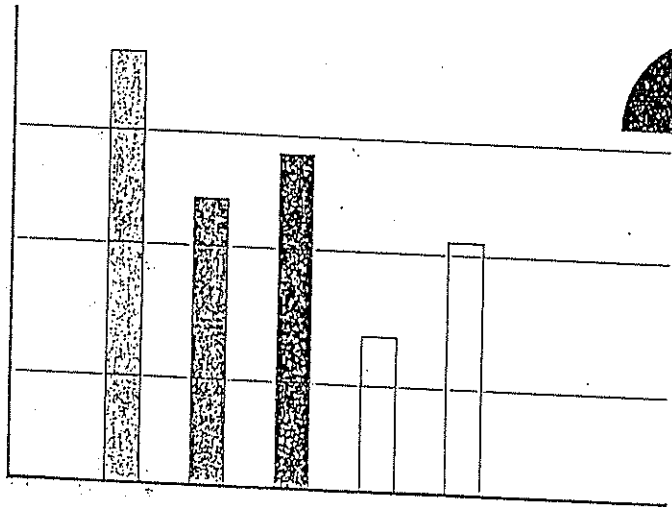
Covariación
Ponderación

13 letras

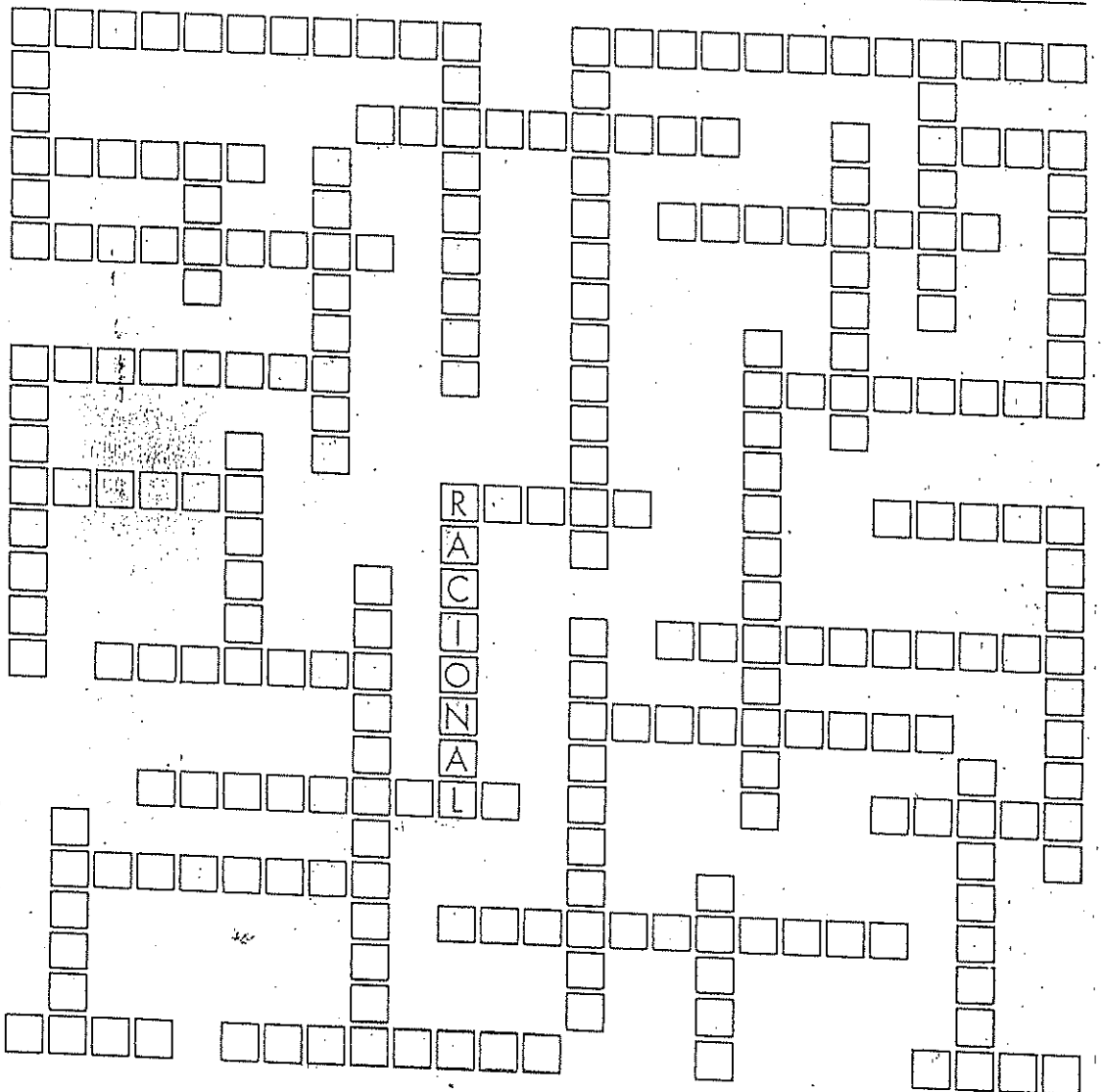
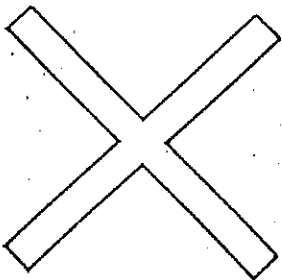
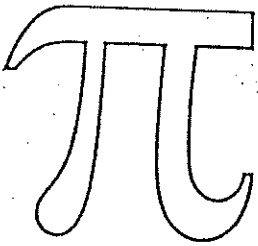
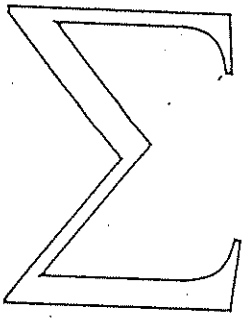
Extrapolación

16 letras

Interdependencia



CÁLCULO



4 letras

Raíz
Real
Seno
Suma

5 letras

Grado
Razón
Resta
Valor

6 letras

Coseno
Entero
Límite
Módulo
Número

7 letras

Abscisa
Álgebra
Monomio

8 letras

Integral
Minuendo
Ordenada
Parábola
Potencia
Problema
Producto
Racional
Tangente
Trinomio

9 letras

Exponente
Expresión
Hipérbola
Logaritmo
Numerador
Operación

10 letras

Cotangente
Multinomio

11 letras

Coficiente
Permutación

12 letras

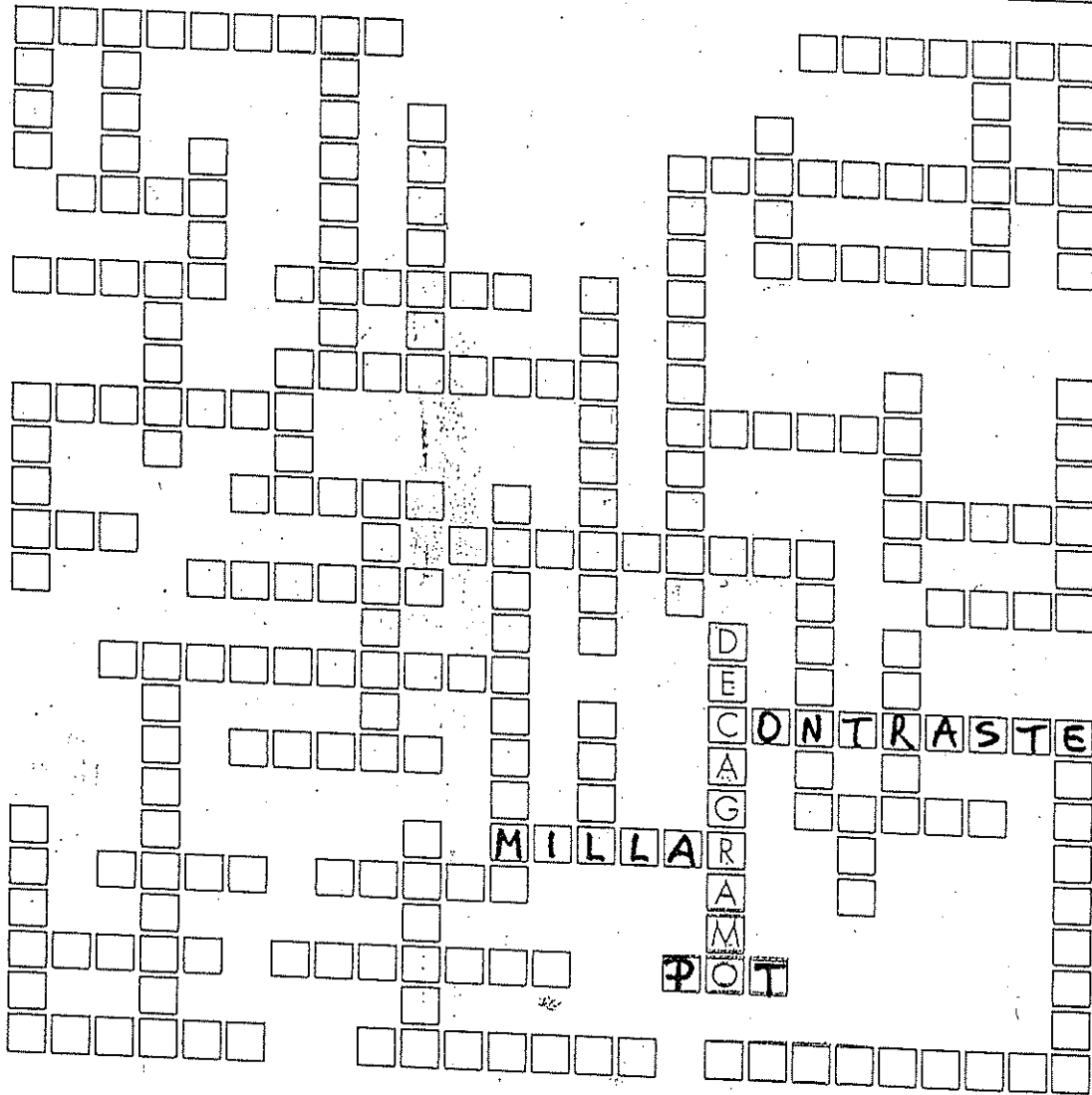
Combinatoria
Determinante
Probabilidad

13 letras

Discriminante

PESOS

Quilo
Salma
Tomín



6 letras

Adarme
Alcoba
Arrate
Arroba
Carobo
Dinero
Docena
Dracma
Millar
Ochava
Támara

7 letras

Arienzo
Arrelde
Coclear
Condryn
Deslara
Quilate
Silicua

8 letras

Tonelada

9 letras

Contraste
Cuarterón
Cuartilla
Decagramo
Decigramo
Escrúpulo
Kilogramo
Miligramo

10 letras

Centigramo
Específico
Hectogramo
Quilogramo

11 letras

Centipondio

3 letras

Bes
Mas
Pot

Fajo
Kilo
Neto
Onza
Pico
Tael

Tara

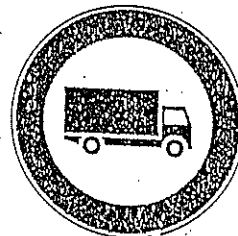
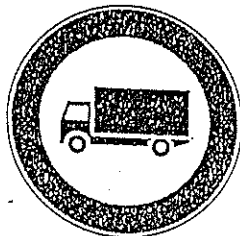
5 letras

Aureo
Bruto
Cahíz

Carga
Gramo
Grano
Libra
Marco
Óbolo

4 letras

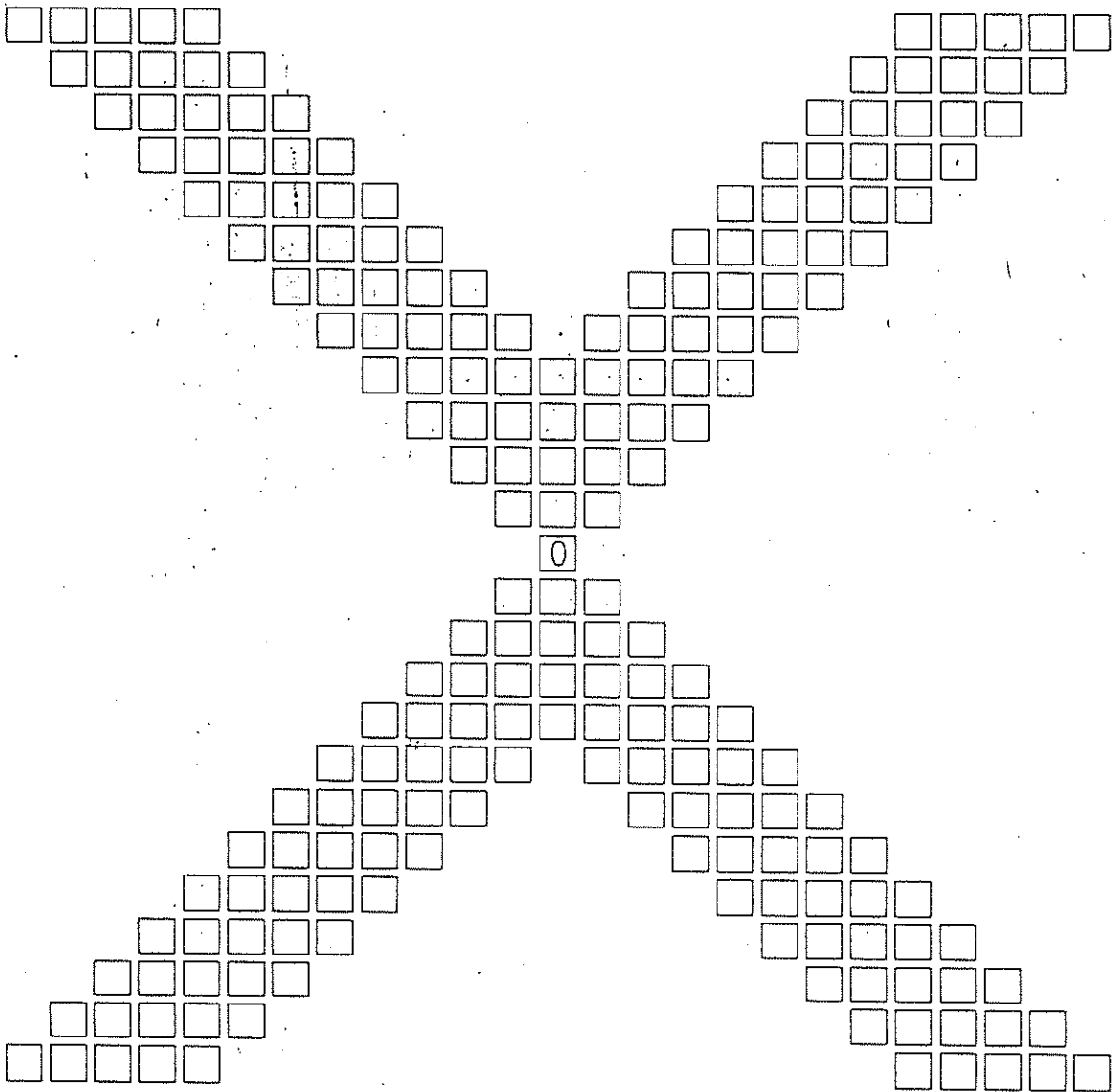
Cate



Existen 3 palabras de 9 letras que comienzan con C pero sólo una "CONTRASTE" cuya última letra "E" es la primera de otra palabra de 9 letras

13

en X



- | | | | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| <u>3 L.</u> | Anet | Ajera | Badén | Egeno | lhram | Ocaña | Salta | Zanja |
| | Alá | Aten | Alijo | Banjo | Emana | Largo | Odesa | Suene |
| | Alí | Toen | Anexo | Barco | Erizo | Liana | Odian | Tabla |
| | Ama | | Arado | Barón | Eroga | Magog | Ónice | Tatúo |
| | Efe | <u>5 L.</u> | Árida | Berna | Galán | Marea | Osado | Teide |
| | Púa | Acata | Ática | Bidón | Gaudí | Midas | Otras | Total |
| | Rad | Adega | Átona | Canje | Gudea | Milán | Óxido | Tubas |
| | | Adela | Añojo | Claro | Gulag | Miren | Porra | Vaina |
| | <u>4 L.</u> | Ágata | Baasa | Degas | Harén | Naama | Ranat | Vanda |
| | Abel | Aguan | Babel | Egara | Huida | Nuera | Saína | Zaire |
| | | | | | | | | <u>7 L.</u> |
| | | | | | | | | América |
| | | | | | | | | Egineta |
| | | | | | | | | <u>9 L.</u> |
| | | | | | | | | Amazónica |
| | | | | | | | | Gramófono |
| | | | | | | | | Inauguren |

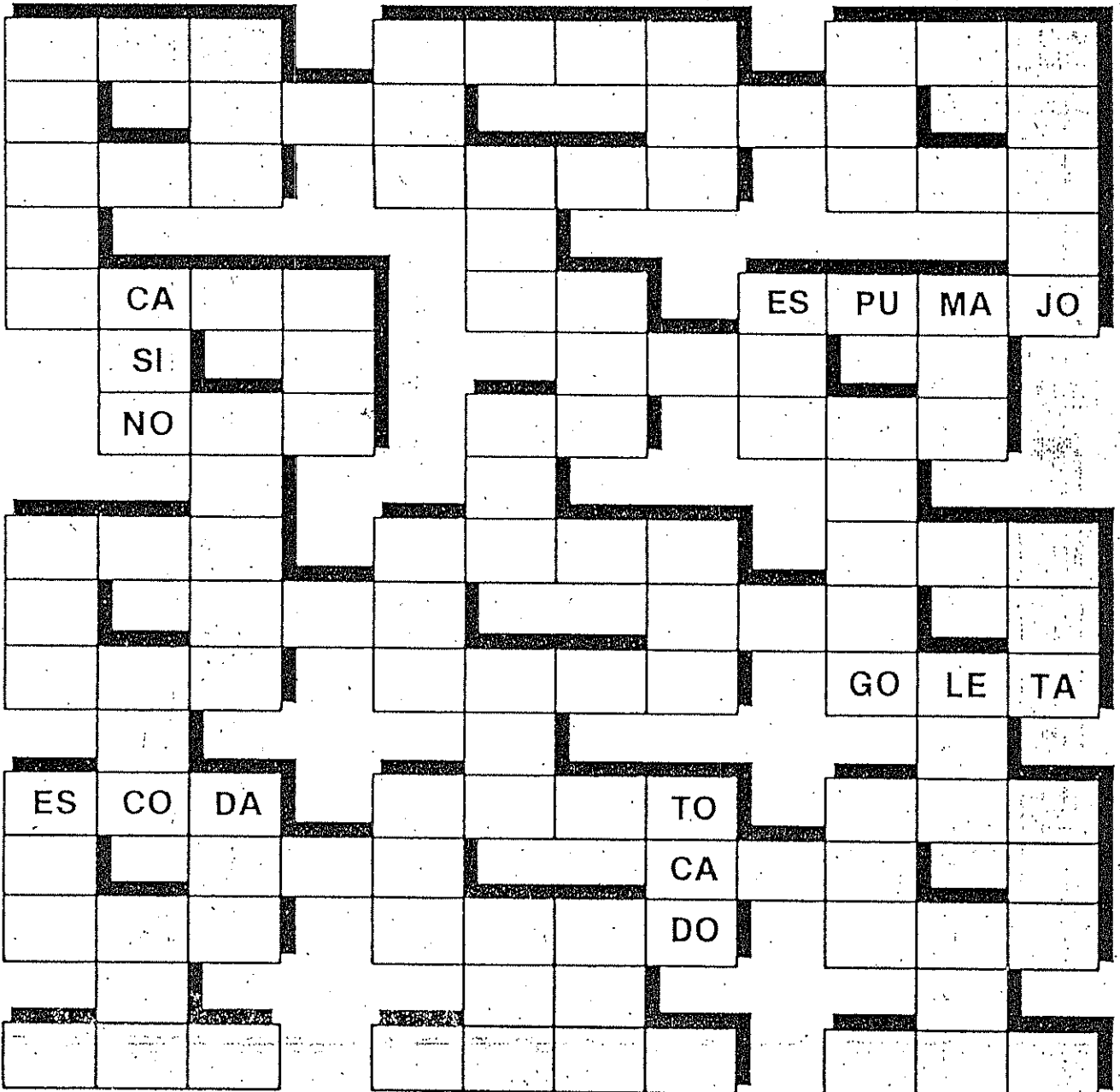
Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

5 Sílabas

- Modosito
- Camilo
- Dativo
- Locura
- Perolo
- Típico
- Caracolejo
- Motonave
- Camino
- Demora
- Lógico
- Rabino
- Tirado
- Lexicólogo
- Nacarado
- Cáñamo
- Devota
- Málaga
- Ratero
- Tisana
- Recogedero
- Rocadero
- Casino
- Dórico
- Mazazo
- Redoma
- Tocado
- Vegetativo
- Sobadera
- Cícero
- Escoda
- Mérito
- Rémora
- Velada
- Sometido
- Comida
- Esteta
- Mocoso
- Ribete
- Veleta

4 Sílabas

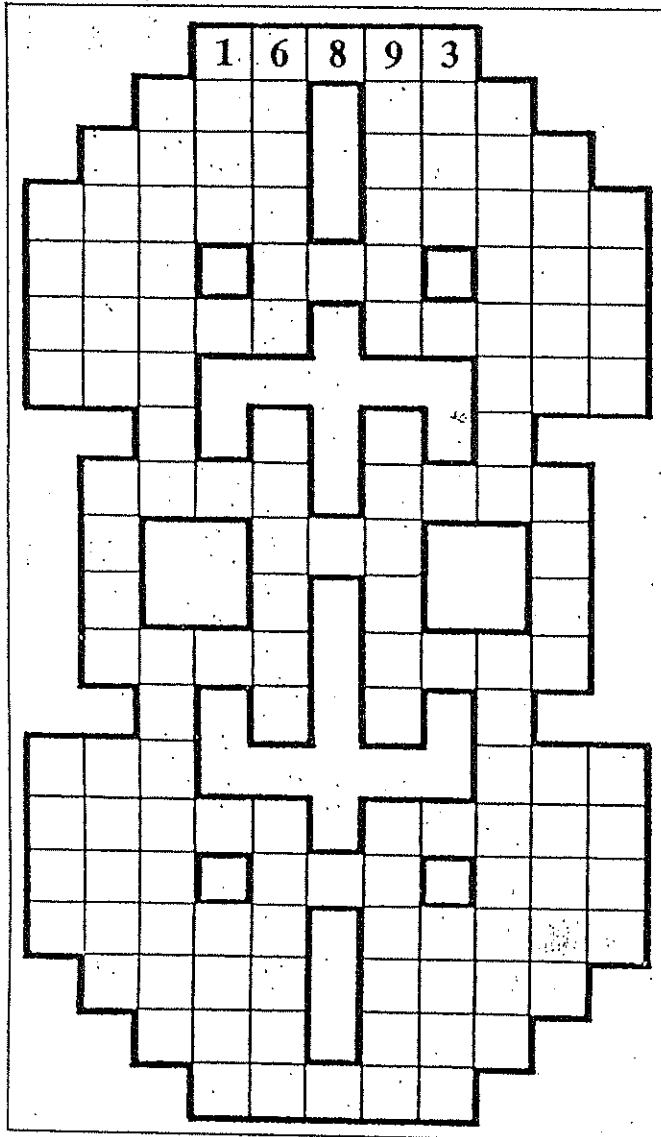
- Corajina
- Corona
- Estilo
- Modoso
- Rodela
- 2 Sílabas**
- Curado
- Género
- Nácara
- Talega
- Lama
- Batido
- Dádora
- Goleta
- Nacido
- Tanino
- Nota
- Mocetona
- Bizaza
- Damita
- Larice
- Novela
- Tarima
- Risa



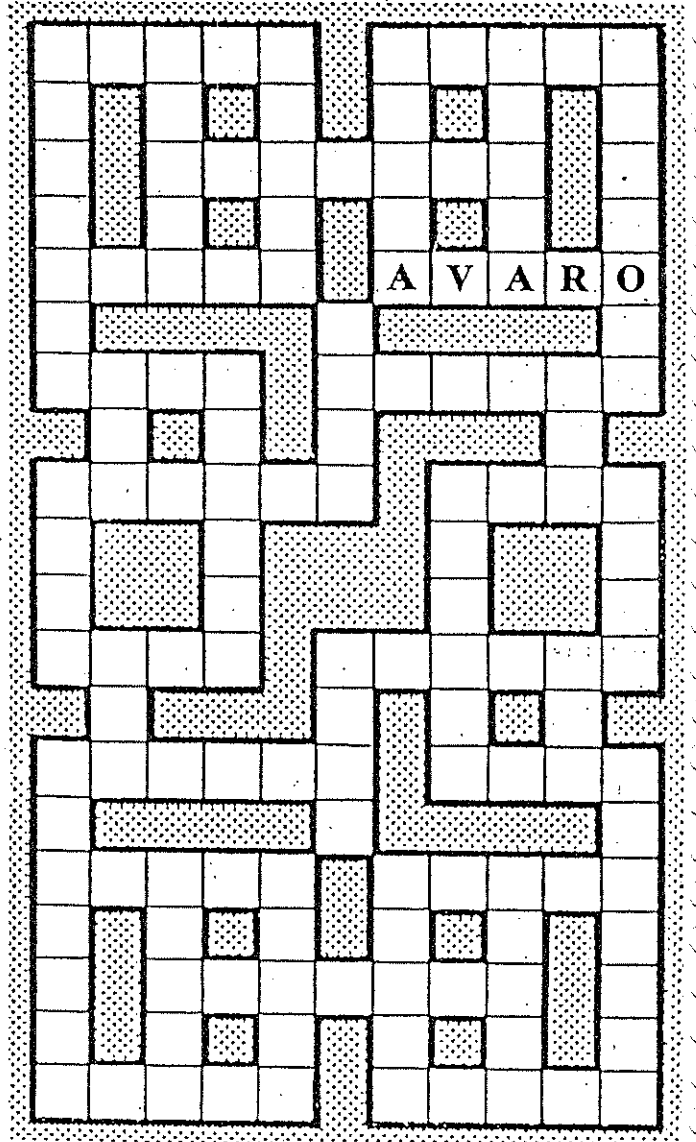
33 CRUZADAS 30

Coloque en el diagrama los siguientes números:

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 3 DIGITOS | 4 DIGITOS | 9317 | 96525 |
| 076 | 0250 | 9650 | |
| 214 | 0347 | | 6 DIGITOS |
| 298 | 0623 | | 145267 |
| 352 | 0914 | 5 DIGITOS | 12790 |
| 417 | 1276 | 16495 | 648703 |
| 489 | 2371 | 16893 | 891732 |
| 508 | 2378 | 20913 | 945046 |
| 541 | 2396 | 25801 | 950169 |
| 563 | 2681 | 30249 | 965242 |
| 694 | 3147 | 35467 | 8 DIGITOS |
| 721 | 3186 | 49523 | 31735785 |
| 730 | 3692 | 52746 | 35821492 |
| 824 | 3924 | 72043 | 40985729 |
| 973 | 4932 | 72561 | 83419702 |
| 981 | 8234 | 90264 | ◆ ◆ |
| | 8542 | 95821 | |



33 CRUZADAS 31



Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3 LETRAS | TRES | NURSE | 7 LETRAS |
| AVE | | RENOS | AMATEUR |
| COZ | 5 LETRAS | RIGOR | GRISONA |
| HOZ | ARADO | TELON | LAMENTO |
| MAR | ASTIL | TROPA | NOVICIA |
| | AVARO | | SINCERO |
| 4 LETRAS | BANDA | 6 LETRAS | TRIPODE |
| ACTO | BATAN | AZIMUT | ◆ ◆ |
| AMAT | BROMA | CLICHE | ◆ ◆ |
| HITO | BUFET | HILVAN | ◆ ◆ |
| OCHO | CIRCE | PIOLET | |
| OJEN | ELITE | TIEMPO | |
| PAZO | FLAMA | TRUENO | |
| TENA | LIMAS | | |

Ensamble numérico

Inserte en el esquema los números que se dan, de forma que se crucen correctamente.

3 cifras: 123 - 519 - 750 - 909

4 cifras: 2567 - 4283 - 4287 - 4756

5 cifras: 21346 - 25347 - 34543 - 34907 - 56412 - 71094 - 80243

6 cifras: 247186 - 275268 - 298713 - 410982 - 516728 - 534172 - 542167 - 874429 - 976542

7 cifras: 1253678 - 1874592 - 3211245 - 3257984 - 3286715 - 4978703 - 6720543 - 6725431

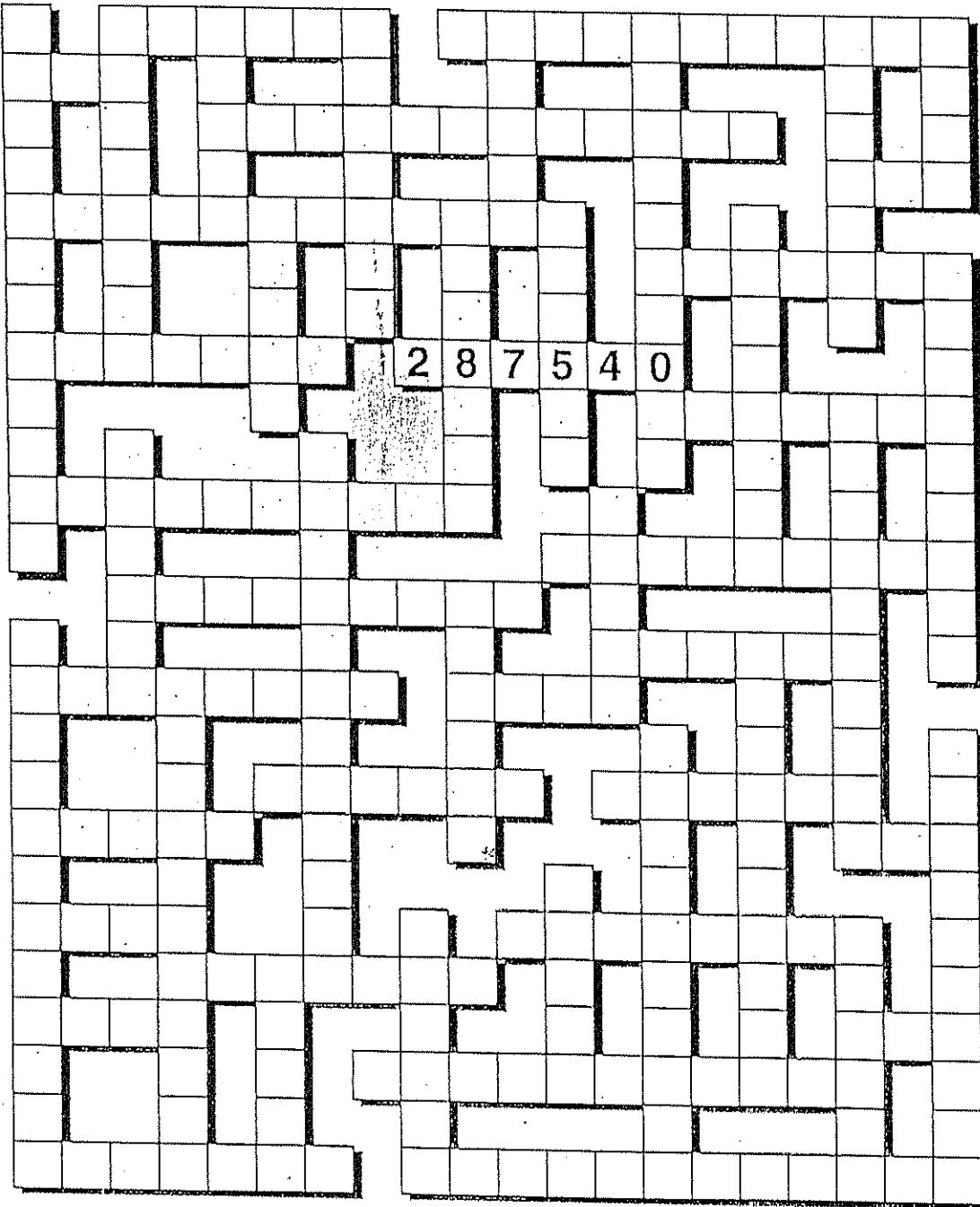
8 cifras: 22243871 - 24610432 - 29651307 - 82205714

9 cifras: 112245672 - 123456789 - 185439211

10 cifras: 2413199478 - 2903561039 - 4701239871 - 4936854213 - 9786021377 - 9971854438

11 cifras: 15742865304 - 21793546822 - 4820576711

12 cifras: 241567218010 - 291876431005 - 493785213340 - 627835422411 - 669718503821 - 891337675429



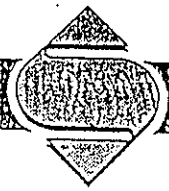
COMMENT RESOUDRE UN PROBLEME DE NOMBRES PLACES ?

Vous allez reconstituer une grille de nombres dont nous vous donnons la liste mais pas la place ! Pour chaque grille, un **NOMBRE DE DÉPART** vous est donné, déjà placé au bon endroit, ici **45730**, inscrit horizontalement à la 1¹e ligne. Il est biffé dans la liste. «4», chiffre du nombre de départ, est le 3^e d'un nombre de 6 chiffres à placer verticalement. Voyons la liste des nombres de 6 chiffres: seul **724195** répond à cette condition. Nous pouvons le placer dans la grille. A vous de poursuivre les deductions Bon amusement!

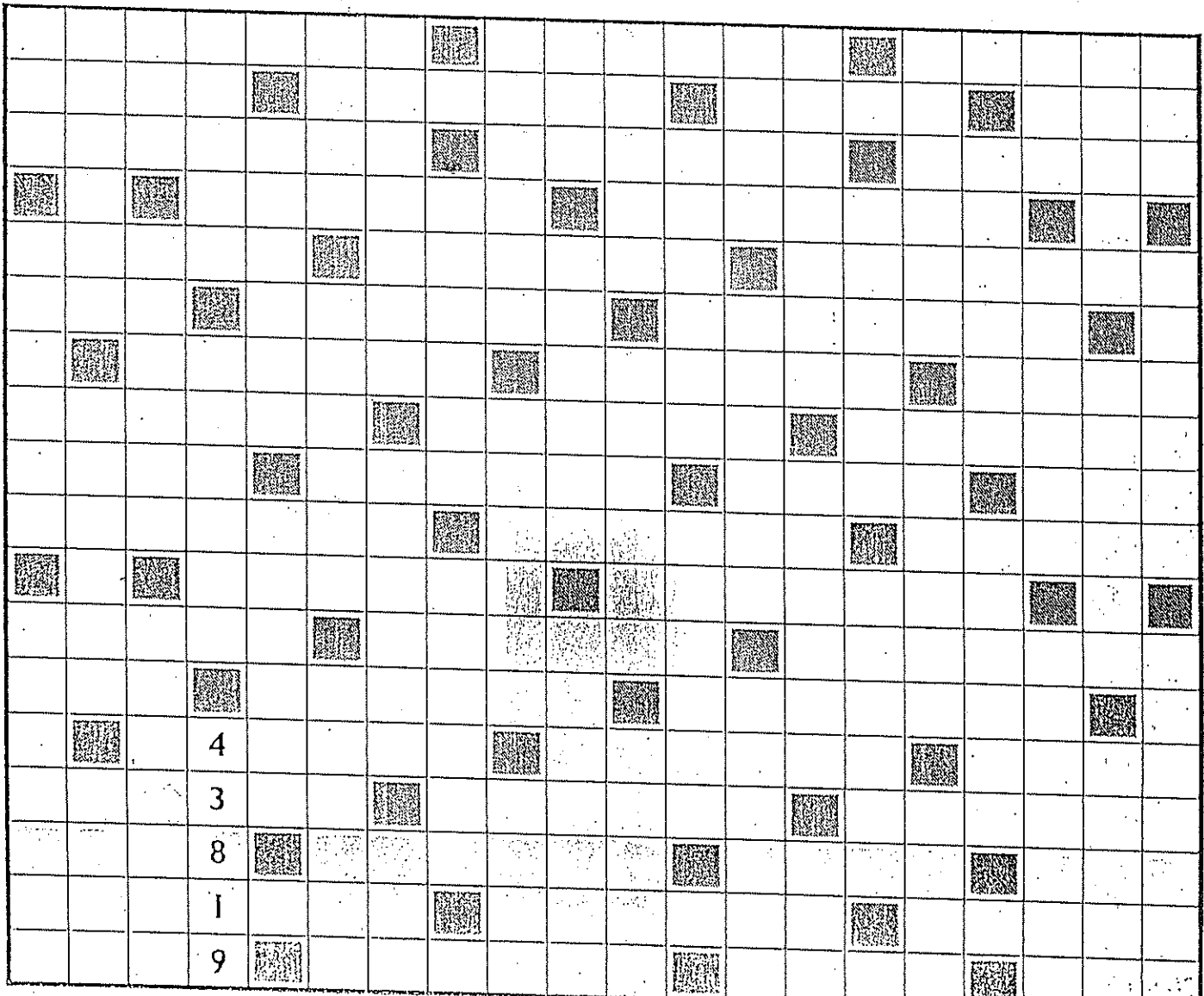
- 3**
- 187 45730 660899
- 211 46247 669442
- 213 53114 ~~724195~~
- 324 60024 757165
- 430 65417 757454
- 515 71600 758420
- 551 80681 799350
- 658 86365 827570
- 662 91950 831764 *-
- 977 98797 872278

- 4**
- 2224 133492 897792
- 3323 135062 907966
- 4916 201188 941503
- 6948 343874 943410
- 7801 385747 988412
- 8843 387463 **7**
- 453496 4478916
- 486473 4929226

- 5**
- 13023 489811 5146359
- 22116 501784 6410053
- 26141 506735 7844733
- 31910 536159 8126130
- 39199 557375 9080168
- 587108



3	4	8644	71970	292597	552764	727358	983474	5520483
121	2512	8739	92937	322396	576133	767709	987691	7212426
161	3236			361932	581824	798683		8578682
216	3536	5	6	369198	586058	806952	7	9052387
290	3549	23737	124975	425661	587471	809170	1948265	9181989
400	4538	24312	180637	426755	588498	810869	2210966	9816831
440	4647	27198	199206	426876	588836	842126	2343540	9840162
469	5835	27650	205897	457710	602355	857289	3194711	
659	6067	30269	222812	495909	632537	878899	3273658	
693	6155	33778	264165	508300	646588	889420	3695228	
700	6357	38069	268669	525723	650994	929042	4359093	
702	7279	43819	269144	525939	662279	951912	4512832	
730	8135	50509	276924	526526	674477	956274	4923794	
779	8138	57968	277521	546443	713887	982835	5493497	



INDOMINO

INSTRUCCIONES

Con las 28 fichas de un juego completo de dominó construimos los cincuenta y dos tableros distintos de este juego.

Cada tablero representa a un "indominó" independiente. Los valores de las fichas aparecen escritos con números en vez de con los clásicos puntitos de los juegos de dominó.

3	6	6	1	1	4	0
5	2	1	4	2	5	4
3	2	3	3	4	6	3
4	5	5	6	1	0	4
2	6	5	1	2	0	4
6	3	0	0	5	0	2
4	0	1	6	5	1	1
0	2	3	2	3	6	5

Deduzca, para cada tablero, dónde está ubicada cada una de las 28 fichas. Tenga en cuenta que las mismas pueden ocupar una posición horizontal o vertical, encastrándose entre ellas, a manera de mosaico.

A medida que vaya determinando la ubicación de las fichas, puede ir tachándolas en la lista que figura a la derecha de cada tablero, donde aparece la totalidad de las fichas a usar.

Como ayuda, cada esquema cuenta con alguna ficha ya ubicada o alguna línea de límite entre una ficha y otra.

Obviamente no debe usar una ficha dos veces ni tampoco le deben quedar fichas sin usar.

0 0						
0 1	1 1					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

COMO RESOLVERLO

El juego se resuelve por búsqueda sistemática y atajos sagaces.

Si, por ejemplo, 3 y 5 son vecinos en un único sitio del tablero, allí tendrá determinada la ficha 3-5. Si hay varias colocaciones posibles para una ficha, su determinación se hará como consecuencia de otros hallazgos.

En el caso del ejemplo aparece ya ubicada la ficha 4-0. Este invalida las otras ubicaciones 4-0 que pudieran existir. Por lo tanto, allí podremos ubicar líneas de límite de fichas. Esto nos brinda dos ubicaciones obligatorias: la de la ficha 0-2 del extremo inferior izquierdo y la 4-6, adyacente a ésta. Y seguidamente

podemos marcar las ubicaciones prohibidas de estas fichas ya halladas. Luego encontraremos las fichas que tienen una única posibilidad de ubicación. En este caso: 2-2, 3-3, 4-4 y 6-6. Ahora volvimos a obtener algunas posiciones obligadas: 3-5, 3-4, 2-6, 5-5, 1-4, 1-1, 1-2 y 5-6.

3	6	6	1	1	4	0
5	2	1	4	2	5	4
3	2	3	3	4	6	3
4	5	5	6	1	0	4
2	6	5	1	2	0	4
6	3	0	0	5	0	2
4	0	1	6	5	1	1
0	2	3	2	3	6	5

A partir de aquí, ya quedan muy pocas ubicaciones que deducir. ¿Se anima a terminarlo solo?

3	6	6	1	1	4	0
5	2	1	4	2	5	4
3	2	3	3	4	6	3
4	5	5	6	1	0	4
2	6	5	1	2	0	4
6	3	0	0	5	0	2
4	0	1	6	5	1	1
0	2	3	2	3	6	5

0 0						
0 1	1 1					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

1

1	4	5	5	4	6	0
2	0	1	5	3	5	3
1	3	1	2	5	1	0
6	0	3	6	0	6	4
4	2	3	6	2	3	4
5	6	2	2	4	0	2
6	0	5	6	5	1	3
2	0	3	1	4	1	4

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

2

3	0	1	4	1	4	5
6	6	3	3	5	5	6
2	1	2	6	1	1	1
3	6	5	2	5	4	4
0	1	0	2	0	3	0
2	6	6	4	0	3	2
3	5	4	2	3	1	2
6	4	4	0	5	0	5

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

3

1	0	2	6	5	5	3
2	5	4	5	6	4	3
3	4	3	6	0	0	2
5	6	2	4	5	6	2
3	0	1	0	3	2	1
0	1	5	4	0	5	1
3	4	6	3	4	2	0
1	2	6	1	4	1	6

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

4

1	6	2	5	6	0	6
4	4	6	4	3	0	4
0	4	2	1	4	5	2
6	1	0	6	5	3	0
3	2	6	0	3	3	4
5	1	6	4	1	1	1
0	2	5	2	3	5	0
5	5	3	1	3	2	2

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

5

0	1	6	6	2	6	5
2	4	5	1	0	2	6
1	1	4	4	1	1	4
5	0	1	3	6	2	5
1	4	0	0	3	3	6
6	0	2	4	5	3	2
3	3	2	3	0	6	3
5	2	0	4	5	5	4

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2 5	3	5	4	5	5	5			
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

6

1	6	1	0	4	3	5
0	6	4	3	1	5	5
6	3	5	6	2	1	1
6	6	0	4	2	5	4
2	6	0	4	5	3	0
4	6	3	0	4	1	5
2	2	3	2	1	1	2
2	0	3	3	0	4	5

0	0											
0	1	1	1									
0	2	1	2	2	2							
0	3	1	3	2	3	3	3					
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4			
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	
0	6	1	6	2	6	3	6	4 6	5	6	6	6

7

1	0	1	6	0	5	4
4	3	3	3	1	3	5
2	4	3	6	0	6	4
3	5	6	3	5	2	6
0	4	2	3	5	0	1
2	5	2	6	1	4	4
1	5	1	6	5	6	0
0	2	1	4	2	2	0

0	0											
0	1	1	1									
0	2	1	2	2	2							
0	3	1	3	2	3	3	3					
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4			
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	
0	6	1 6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

8

0	2	4	5	4	5	1
3	3	0	2	3	1	6
5	1	0	1	1	4	2
6	1	5	3	0	2	5
6	1	3	2	0	0	6
4	2	6	4	4	5	4
6	0	5	6	3	5	0
1	6	3	3	2	2	4

0	0											
0	1	1	1									
0	2	1	2	2	2							
0	3	1	3	2	3	3	3					
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4			
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	
0	6	1 6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

9

0	1	4	6	6	0	2
0	3	6	4	3	6	4
5	1	2	3	5	5	6
2	3	5	1	6	0	2
1	3	6	3	1	5	1
4	0	1	1	2	5	0
2	6	4	5	4	5	3
0	3	2	2	4	0	4

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

10

0	3	2	4	0	3	4
1	2	2	6	5	1	5
2	4	1	3	2	5	6
6	6	5	2	4	4	6
3	5	0	5	1	0	1
4	2	2	4	1	6	1
3	0	0	6	5	5	1
6	0	3	3	0	4	3

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

11

1	2	4	3	4	3	4
6	1	0	4	0	3	0
2	4	6	4	5	4	6
5	1	3	2	3	2	3
1	5	3	6	2	1	0
2	3	1	0	2	5	6
6	5	1	0	6	6	4
1	0	5	5	2	0	5

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

12

4	4	0	2	4	0	5
2	4	5	3	6	5	2
3	1	0	1	3	0	6
1	5	6	4	1	6	5
6	1	6	2	3	0	6
1	4	5	3	4	5	4
2	0	3	1	1	5	2
3	3	6	2	0	0	2

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6



49

1	1	1	0	1	1	3
5	2	2	3	3	5	6
6	0	4	5	6	4	6
3	6	3	6	2	6	5
3	0	4	1	4	0	2
3	3	0	2	4	5	4
5	2	2	5	4	5	0
2	1	4	0	6	1	0

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3 4	4	4					
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

50

4	4	1	0	0	5	0
3	1	6	5	0	2	2
1	6	2	2	2	0	4
5	6	3	5	6	3	5
1	4	3	4	6	1	3
1	1	3	6	0	0	2
4	3	5	5	0	4	6
4	6	3	5	2	2	1

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2 3	3	3	3						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4	4			
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	5	
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

51

3	3	0	5	6	4	0
4	1	3	1	2	4	6
6	0	2	5	4	0	0
2	0	1	3	2	5	1
3	5	1	5	6	6	2
4	6	3	2	3	1	3
5	5	2	0	4	0	4
6	4	2	1	5	6	1

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3	3					
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4	4			
0	5	1	5	2	5	3 5	4	5	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

52

3	0	3	1	0	2	1
1	4	2	3	6	5	6
1	6	4	6	4	2	0
2	6	0	3	4	3	5
5	3	2	4	5	3	5
4	5	3	5	0	1	4
5	1	0	1	6	2	2
0	0	2	6	4	1	6

0	0												
0	1	1	1										
0	2	1	2	2	2								
0	3	1	3	2	3	3	3	3					
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4	4			
0	5	1	5	2	5	3 5	4	5	5	5	5		
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

CLASIFICACIONES

INSTRUCCIONES

Cada esquema representa los resultados de seis encuentros de un cuadrangular de fútbol.

Deduzca los resultados de esos seis encuentros, cuyas tablas de posiciones aparecen seguidamente.

Tenga presente el significado de cada columna: **G**, partidos ganados; **E**, partidos empatados; **P**, partidos perdidos; **F**, goles a favor; y **C**, goles en contra. Cada partido da

2 puntos al ganador, 0 al derrotado y 1 punto a cada uno si es empate.

Ayúdese con los pequeños esquemas de la derecha para ir anotando las soluciones.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	3	0	6
B	1	1	1	1	1	3
C	0	2	1	0	1	2
D	0	1	2	0	2	1

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

COMO RESOLVERLO

Para empezar a resolver este juego, es importante tener claro que cada cuadrangular (es decir, cada esquema) encierra los resultados de seis encuentros, ya que cada equipo se enfrentó con los otros tres.

Los encuentros serán, por lo tanto, A-B, A-C, A-D, B-C, B-D y C-D. Esta es, justamente, la representación que aparece en el cuadro auxiliar a la derecha de cada esquema.

En el juego del ejemplo, podríamos comenzar fijándonos que A ganó los tres encuentros que disputó. Además, tiene sólo tres goles a favor, por lo que en cada encuentro metió un gol. Es decir que el resultado de los partidos en que jugó A fue 1-0.

	B	C	D
A	1	0	0
D	0	/	/
C	0	/	

Esto ya nos da el partido perdido de B y de C y uno de los dos que perdió D. Si prestamos atención ahora a los goles en contra, vamos a notar que con lo deducido hasta ahora, ni B ni C tuvieron otros, mientras que D tuvo dos, por lo que falta ubicar uno. Pero con esto ya obtenemos otros dos resultados, ya que C tampoco tuvo goles a favor:

	B	C	D
A	1	0	0
D	0	0	/
C	0	0	/

Para deducir ahora el resultado del partido que nos quedará (B-D), debemos fijarnos nuevamente en los puntajes: según la tabla de posiciones, B ganó un partido, empató otro y perdió otro. Por lo tanto, en el caso que nos ocupa ahora B le ganó a D (que perdió dos y empató uno y hasta ahora sólo llevaba uno perdido y uno empatado). Volviendo a la tabla de posiciones, B tuvo un gol a favor y uno en contra. Y como hasta ahora B tiene un gol en contra y ninguno a favor, obviamente el resultado del partido B-D es 1-0. Para comprobarlo, podemos corroborar que el puntaje del equipo D también haya quedado acorde a la tabla de posiciones: ningún gol a favor y dos goles en contra. ¡Bingo!

¿Nos siguió? De ser así, considérese ya lo suficientemente preparado para enfrentar las Clasificaciones que lo esperan.

	B	C	D
A	1	0	0
D	0	0	1
C	0	0	1

53

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	1	1	1	4	2	3
C	0	2	1	2	3	2
D	0	2	1	1	4	2

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

54

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	0	1	5	5	4
B	1	1	1	3	1	3
C	1	1	1	2	2	3
D	0	2	1	1	3	2

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

55

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	2	1	4
B	1	1	1	3	1	3
C	0	3	0	0	0	3
D	0	2	1	1	4	2

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

56

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	1	5
B	1	1	1	1	2	3
C	1	0	2	3	2	2
D	0	2	1	1	4	2

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

57

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	0	5
B	2	1	0	3	1	5
C	1	0	2	3	6	2
D	0	0	3	3	6	0

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

58

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	1	1	1	3	1	3
C	1	1	1	4	1	3
D	0	1	2	0	7	1

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

59

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	0	3	0	1	1	3
C	0	2	1	2	3	2
D	0	2	1	1	2	2

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

60

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	2	0	1	2	1	4
C	1	1	1	1	1	3
D	0	0	3	0	3	0

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

61

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	3	1	4
B	1	1	1	4	3	3
C	0	3	0	0	0	3
D	0	2	1	0	3	2

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

62

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	6	1	5
B	2	0	1	2	1	4
C	0	2	1	1	2	2
D	0	1	2	0	5	1

	B	C	D
A	/	/	/
D	/	/	
C	/		

63

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	3	1	5
B	1	1	1	3	2	3
C	0	3	0	2	2	3
D	0	1	2	0	3	1

	B	C	D
A			
D			
C			

64

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	4	0	6
B	2	0	1	2	1	4
C	1	0	2	1	3	2
D	0	0	3	0	3	0

	B	C	D
A			
D			
C			

65

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	5	0	6
B	2	0	1	6	3	4
C	0	1	2	0	4	1
D	0	1	2	0	4	1

	B	C	D
A			
D			
C			

66

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	3	1	5
B	2	0	1	3	2	4
C	1	1	1	6	6	3
D	0	0	3	3	6	0

	B	C	D
A			
D			
C			

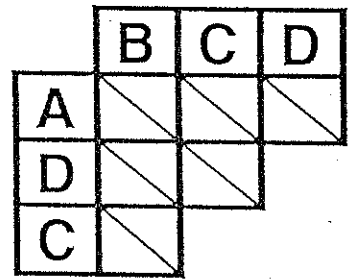
67

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	0	5
B	2	0	1	2	1	4
C	1	0	2	1	4	2
D	0	1	2	0	2	1

	B	C	D
A			
D			
C			

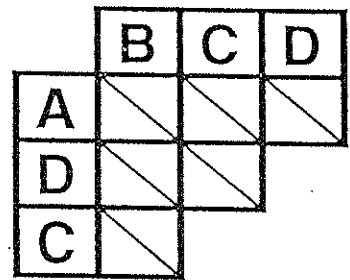
103

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	6	2	6
B	1	1	1	2	2	3
C	1	0	2	2	4	2
D	0	1	2	0	2	1



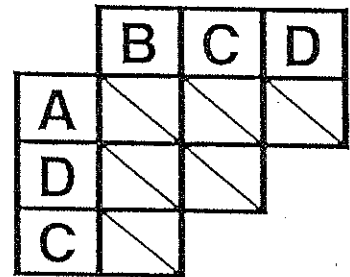
104

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	1	0	4
B	1	1	1	3	3	3
C	1	1	1	3	2	3
D	0	2	1	2	4	2



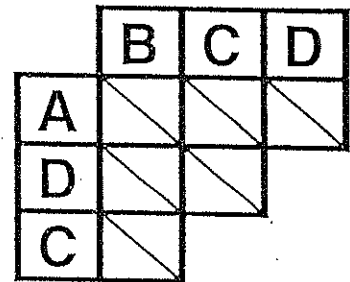
105

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	0	1	2	2	4
B	2	0	1	6	4	4
C	1	1	1	4	2	3
D	0	1	2	0	4	1



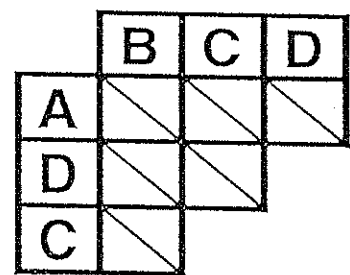
106

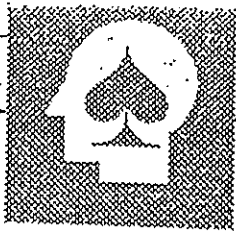
Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	1	5
B	2	0	1	5	3	4
C	1	0	2	2	5	2
D	0	1	2	0	2	1



107

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	3	1	4
B	1	1	1	3	2	3
C	1	1	1	1	1	3
D	1	0	2	1	4	2



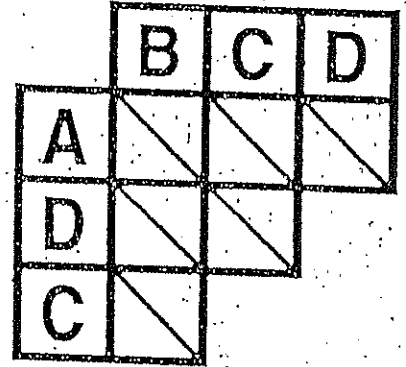


CLASIFICACIONES

Deduzca los resultados de los seis encuentros de cada uno de los cuadrangulares de fútbol cuyas tablas de posiciones aparecen seguidamente. Recuerde: G, partidos ganados; E, partidos empatados; P, partidos perdidos; F, goles a favor; y C, goles en contra. Cada partido da 2 puntos al ganador, 0 al derrotado y 1 punto a cada uno si es empate. Ayúdese con los pequeños esquemas de la derecha para anotar las soluciones.

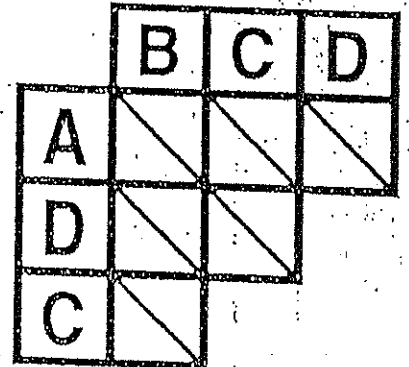
1.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	7	1	5
B	1	2	0	2	1	4
C	1	0	2	1	5	2
D	0	1	2	0	3	1



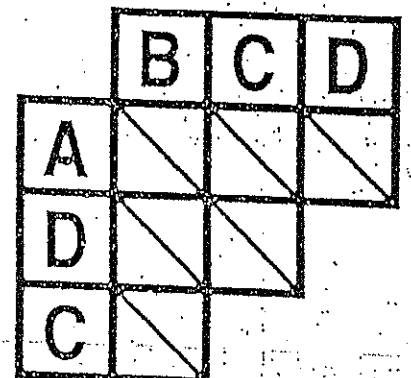
2.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	3	0	5
B	1	2	0	5	1	4
C	0	2	1	1	3	2
D	0	1	2	0	5	1

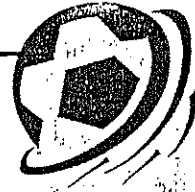


3.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	1	0	4
B	1	2	0	1	0	4
C	1	0	2	1	2	2
D	0	2	1	0	1	2



Clasificaciones



Deduzca los resultados de los seis encuentros de cada uno de los cuadrangulares de fútbol cuyas tablas de posiciones aparecen seguidamente. Recuerde: **G**, partidos ganados; **E**, partidos empatados; **P**, partidos per-

dididos; **F**, goles a favor; y **C**, goles en contra. Cada partido da 2 puntos al ganador, 0 al derrotado y 1 punto a cada uno si es empate. Ayúdese con los pequeños esquemas de la derecha para anotar las soluciones.

1.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	0	1	3	3	4
B	1	2	0	3	1	4
C	1	1	1	3	1	3
D	0	1	2	0	4	1

A : B	<input type="text"/>	<input type="text"/>		B : C	<input type="text"/>	<input type="text"/>
A : C	<input type="text"/>	<input type="text"/>		B : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>
A : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>		C : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>

2.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	5	0	6
B	2	0	1	3	2	4
C	1	0	2	2	5	2
D	0	0	3	0	3	0

A : B	<input type="text"/>	<input type="text"/>		B : C	<input type="text"/>	<input type="text"/>
A : C	<input type="text"/>	<input type="text"/>		B : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>
A : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>		C : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>

3.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	6	2	5
B	2	0	1	2	1	4
C	1	1	1	3	3	3
D	0	0	3	2	7	0

A : B	<input type="text"/>	<input type="text"/>		B : C	<input type="text"/>	<input type="text"/>
A : C	<input type="text"/>	<input type="text"/>		B : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>
A : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>		C : D	<input type="text"/>	<input type="text"/>

EL SABUESO

INSTRUCCIONES

Un buen sabueso ha recorrido esmeradamente cada uno de los campos cuadrículados que conforman este juego. Al día siguiente llega usted y sólo encuentra algunos rastros dispersos.

Reconstruya exactamente los recorridos del sabueso sabiendo que:

1) Cada tablero contiene un recorrido diferente e independiente de los demás.

2) El sabueso ha avanzado a lo largo de números consecutivos, pasando de una casilla a otra vecina, en horizontal o en vertical (nunca en diagonal).

3) Cada recorrido empieza en un número que puede estar entre 1 y 25, y es algo que

también usted deberá descubrir (los números que aparecen en las cuadrículas como pistas no son necesariamente el inicio o el final del recorrido).

4) El sabueso no ha dejado casillas sin visitar; es decir, ha recorrido todo el tablero.

		50	15		
	19				
					36
		28			

COMO RESOLVERLO

Una buena manera de empezar a resolver este juego es fijarse, dentro de los números-pista que aparecen, cuál es el par que menos diferencia numérica tiene.

En este caso, el 15 y el 19. El recorrido a hacer entre ambos números puede ser uno de estos dos:

A					
		50	15		
			16		
	19	18	17		
					36
		28			

B					
		50	15		
		17	16		
	19	18			
					36
		28			

Nuestro próximo paso será dibujar el camino desde el 19 hasta el 28, y de ahí, hasta el 36. En este momento podremos deducir cuál de nuestras dos opciones anteriores es la correcta. Si lo hacemos partiendo de la opción A, el esquema quedaría así:

		50	15		
21	20		16		
22	19	18	17		
23	26	27	30	31	36
24	25	28	29		

La casilla libre entre el 20 y el 16 podría

ocuparse con el 51, pero no podríamos completar el camino desde el 31 al 36 sin dejar casillas vacías. Esto nos permite deducir que la opción B era la correcta.

Siguiendo con la idea de encontrar el camino hacia el número más cercano e intentando no dejar casillas vacías y aisladas, llegamos desde el 28 hasta el 36.

Para que la casilla del extremo inferior derecho no quede vacía, allí deberemos ubicar obligatoriamente al 35. Volvemos a tener una sola manera de hacerlo:

		50	15		
21	20	17	16		
22	19	18	31	32	
23	26	27	30	35	36
24	25	28	29	34	35

De aquí en más sólo nos resta completar las casillas restantes con el recorrido de números que va desde el 36 hasta el 50.

En este caso, como las casillas que quedan suman trece (exactamente los números necesarios para ir del 36 al 50), no deberemos seguir el camino más allá del 50 ni tampoco empezar el recorrido antes del 15, cosa que sí puede suceder en alguno de los juegos.

¿Se anima a completarlo solo?

108

			6		
	11		1		
	14		36		
	21		27		

109

		25	10	5	
				12	
				21	
		40			

110

	37	34			
				29	24
42	19				
7	18				

111

			14		
5		11	28		
		36	29		19
40					

112

	40	27			
			7		
	42				
		11			
			13		

113

				8	
	32	1	6		
		36	19		

114

12					5
25					18
26					19
39					32
40					

115

					19
	38				
			41		
		43			
				32	
9	28				

116

	1			10	
	18			5	
	19			22	

117

		3	6		
	27			8	
	38	25	16		

118

			27		
		25		35	
	7				31
1		9			

119

11					46
13	20	33	30	27	44

120

					46
			14		
	11				
19					

121

		36			
		31		7	
		30	1	8	
		21		15	

122

	35	38	19	18	
				7	
	30	31	42	9	

123

20	35			30	29
19	14			39	44
			9		

124

					31
	10		34		
					45
			14		
		18			

125

	5				
17					
28					23
30		40			

168

			24		
	1				
			27	36	
		5			

169

	7			16	
		19	26		
				30	
			42		

170

13					
			21		
			28		
48			45		
			42		

171

		11			28
	33			46	
15					
		42			
	36				
				22	

172

26					
	1				
				5	
					13
					36

173

		42			
		7			
	13	12			
	18	19			

LA AMENAZA

INSTRUCCIONES

En cada tablero, las letras J, K, L, M y N representan a un rey, una dama, una torre, un alfil y un caballo de ajedrez, aunque no necesariamente en este orden. Obviamente en cada tablero la representación es distinta, aunque por casualidad se puede llegar a repetir en algún caso.

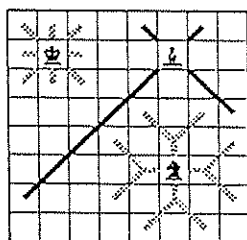
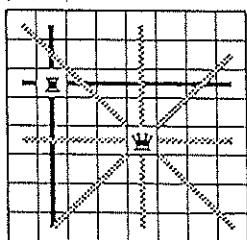
Los números en los tableros indican cuántas de esas piezas amenazan a la casilla que contiene al número.

Decubra, para cada tablero, qué pieza es cada letra.

Para poder resolver este juego no es necesario que sepa jugar al ajedrez. Tan solo debe conocer cuál es el movimiento de cada una de las piezas que participan: la torre se

mueve el número de casillas que quiera pero sólo en horizontal y vertical; el rey lo hace hacia cualquier dirección pero sólo de a una casilla por vez; la dama lo hace también en cualquier dirección y todas las casillas que desee; el alfil se mueve sólo en diagonal, el número de casillas que quiera y el caballo se mueve en forma de L, hacia cualquier lado. El caballo es la única pieza que puede saltar por sobre las demás. Esto es importante para tener en cuenta, ya que una dama, por ejemplo, no puede amenazar a una casilla si en la mitad del recorrido hay otra ficha ubicada. Los números, en cambio, no obstaculizan, ya que son sólo datos, no fichas.

Para más claridad, aquí van dos esquemas con los movimientos señalados:



COMO RESOLVERLO

Tomemos un juego de ejemplo:

			J			
		1	2			
		K				
	L					
		M				
			0	3		
				N		

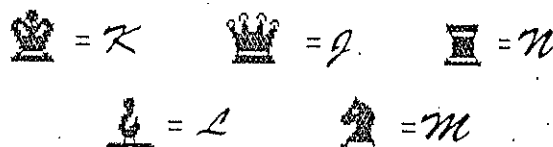
Para empezar a resolverlo, es importante considerar el 0 que allí figura. Significa que ni la M ni la N son rey, dama ni alfil (ya que, de lo contrario, estarían amenazando a esa casilla y no figuraría con un 0); por lo que entre ellas está la torre y el caballo.

Para que la casilla que tiene el número 3 esté amenazada por tres piezas, hay que fijarse qué piezas pueden hacerlo. Las úni-

cas que están en condiciones de amenazar son la N, la J y la M. Esta última para hacerlo debe ser necesariamente el caballo. Por lo tanto la N representa a la torre. Ahora nos resta deducir a qué fichas representan las tres letras restantes. La J necesita amenazar tanto a la casilla que contiene el número 2 como a la del número 3. La única figura que puede hacerlo es la dama.

Ahora resta encontrar las fichas que representan la K y la L. Si la K fuera el alfil, la casilla con el 1 no estaría amenazada por ninguna ficha. Por lo tanto, la K es el rey y, por descarte, la L es el alfil.

Y ésta es, finalmente, la solución correcta:



Podrá encontrar varios caminos para llegar al mismo resultado. Pero la solución siempre es única.






174

		0				J	
			K		L		
		M		N			
				0		0	

 =  =  =
 =  =

175

		1					
				0		J	
			K		L		
		M		N			
				0			
			0				

 =  =  =
 =  =






176

J	K		1				0
L	M						
	0						N
							0

 =  =  =
 =  =






177

J		K					
			1				
L		M	0				N
			1				

 =  =  =
 =  =






178

				2			
		0	J	K			
		L	M	N			
		1					

 =  = 
 =  =

179

			J		K		
	L		M		N	0	
			3				

 =  = 
 =  =






180

	J		0			1	
K		L					
	M	1					N

 =  = 
 =  =






181

		J		0	0	0	
K				L			M
		N					
				1			

 =  = 
 =  =






182

				J		
			0	0		
		K				L
						0
				M		
N						

 =  =  =
 =  =






183

				J			
						2	
		0	K		L		
	0			M			
N							

 =  =  =
 =  =






184

		0		J			
			K	0		0	
	L					M	
		N					
		0					

 =  =  =
 =  =






185

				J			
			K			L	
				2			
0	M	0		2			
		N					

 =  =  =
 =  =






230

		J			
K				L	
		0			
		M	2		
		N			

 =  = 
 =  =






231

			J			
	K			L	0	
			M	1	0	
0			N			

 =  = 
 =  =






232

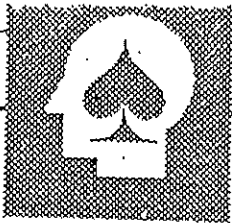
				J	2	
K	3		L	M		
			0			
			N			
		1				

 =  = 
 =  =

233

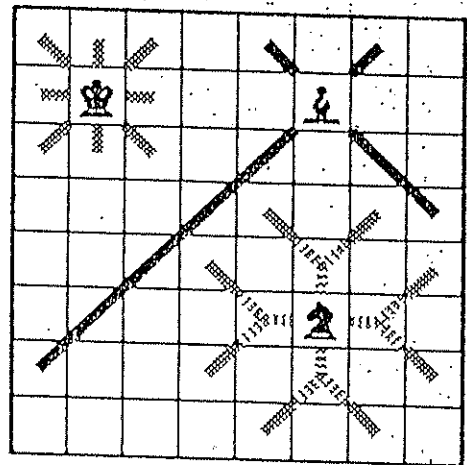
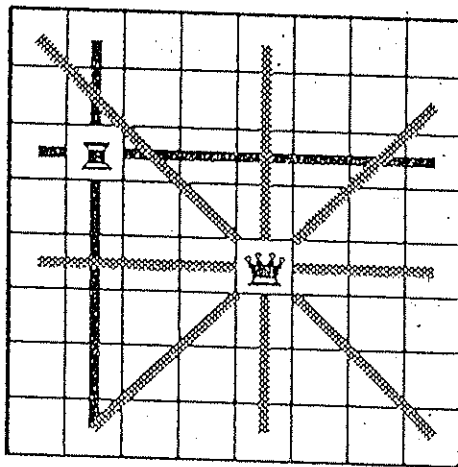
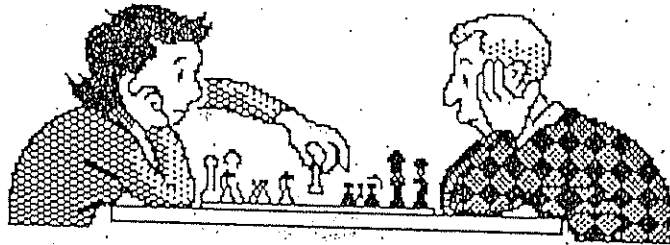
	0				2	
				J		
	K			L	M	
				N		
			1			
					0	

 =  = 
 =  =



LA AMENAZA

En cada tablero, las letras J, K, L, M y N representan un rey, una dama, una torre, un alfil y un caballo de ajedrez, aunque no necesariamente en este orden. Los números indican cuántas de tales piezas amenazan esa casilla. Descubra, para cada tablero, qué pieza es cada letra. En los esquemas superiores aparecen, para quienes los ignoran, los movimientos de cada ficha de ajedrez.

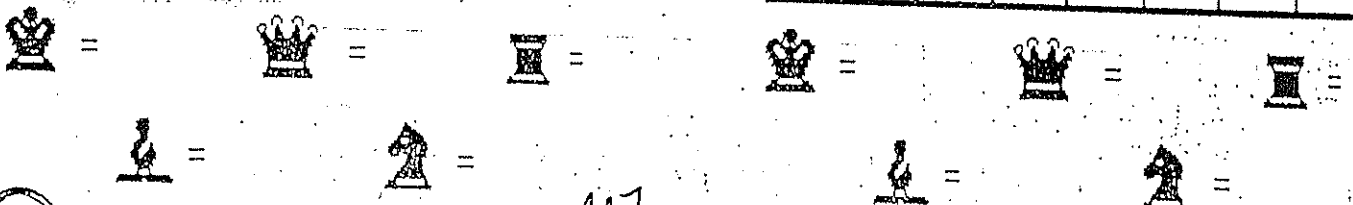


A

		J		
			0	
	K	L	M	
			1	
			1	
		N		

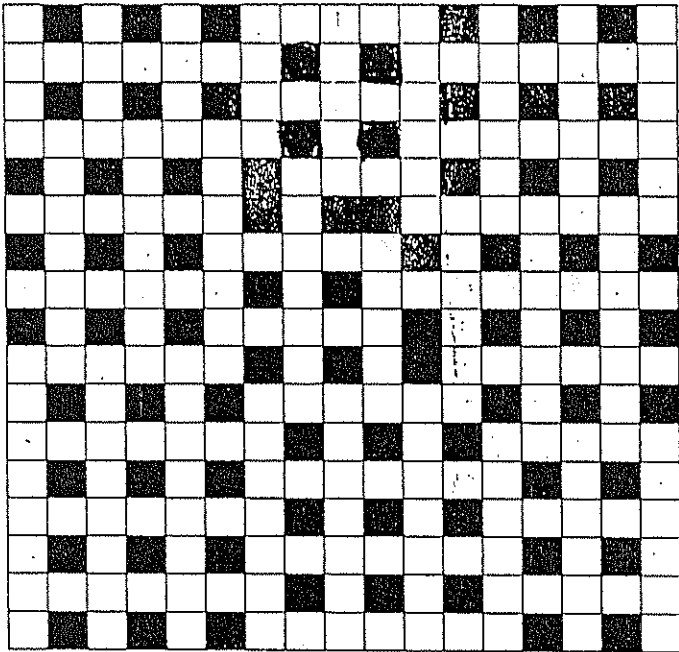
B

		J		
	K	L	0	M
			2	
		N	2	



CRUZEX

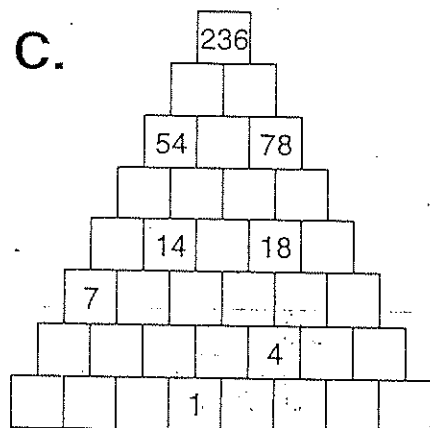
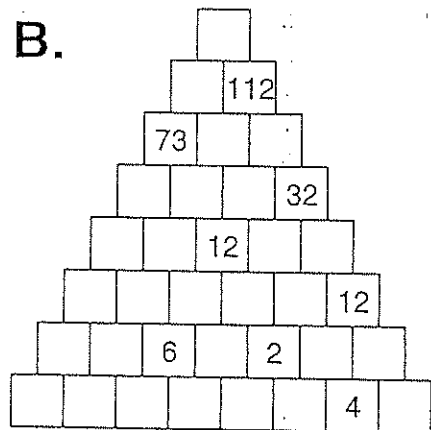
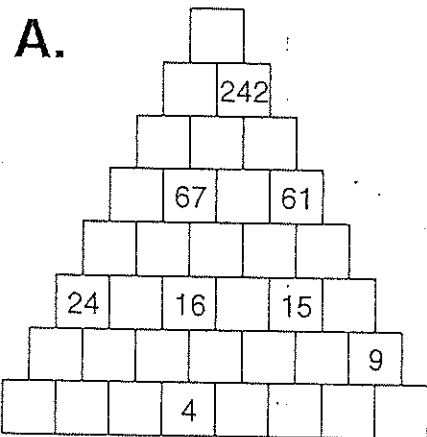
Acomode las palabras de la lista en el diagrama, de manera que se crucen correctamente.

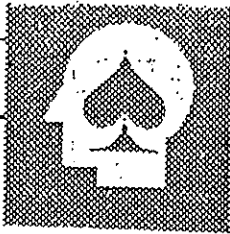


- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|---------|-----------------|
| 4 Letras | Isipo | Fauños | Coronar | Rulerós |
| Caos | Olivo | Impuso | Escapar | Sonetos |
| Foca | Ovalo | Iterar | Evasivo | |
| Galo | Ubeda | Mártir | Fístula | 8 Letras |
| Odre | | Osiris | Ladeada | Centella |
| Tren | 6 Letras | Torsos | Narciso | Normando |
| | Atañor | | Narigón | Oníricas |
| 5 Letras | Ballet | 7 Letras | Numeral | Princesa |
| Abuso | Canoas | Abrigar | Obrarán | |
| Ansia | Carbón | Andorra | Obsesos | |
| Apodo | Condón | Aptitud | Océanos | |
| Chile | Cráter | Cábalas | Plátano | |
| Frisa | Epocas | Cartago | Romería | |

PIRAMIDES NUMERICAS

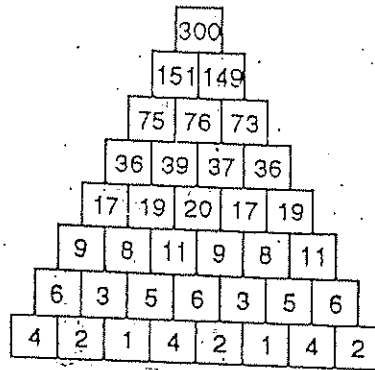
Complete las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga la suma de los dos números de las casillas inferiores. Como datos se dan, en cada caso, algunos números ya indicados.



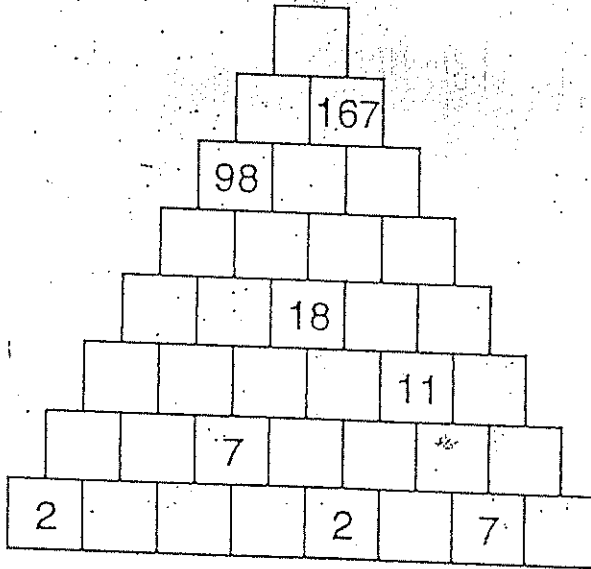


PIRAMIDES NUMERICAS

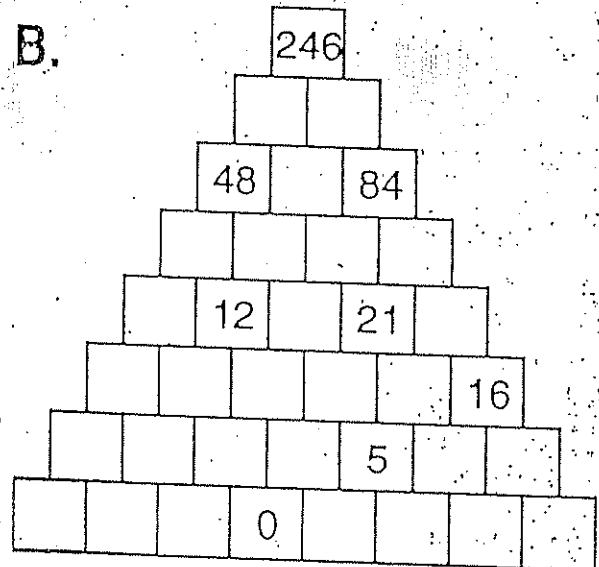
Complete las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga las sumas de los dos números de las casillas inferiores. Como datos se dan, en cada caso, algunos números ya indicados; y como ejemplo, una pirámide ya resuelta.



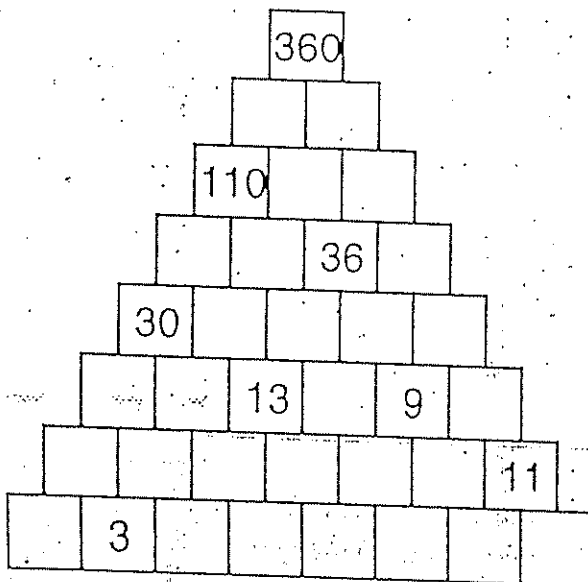
A.



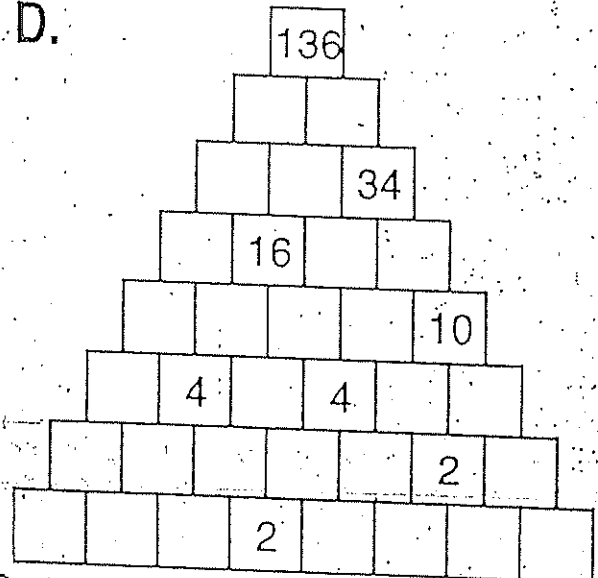
B.

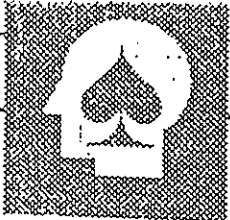


C.



D.

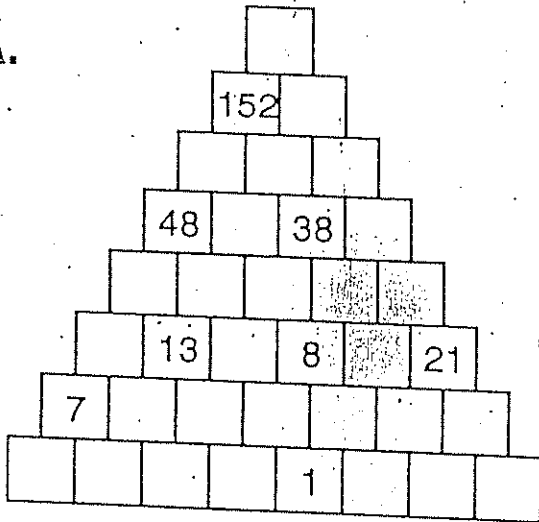




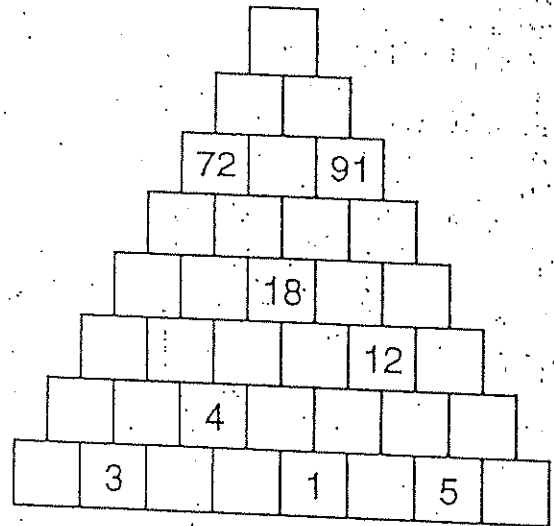
PIRAMIDES NUMERICAS

Complete las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga las sumas de los dos números de las casillas inferiores. Como datos se dan, en cada caso, algunos números ya indicados.

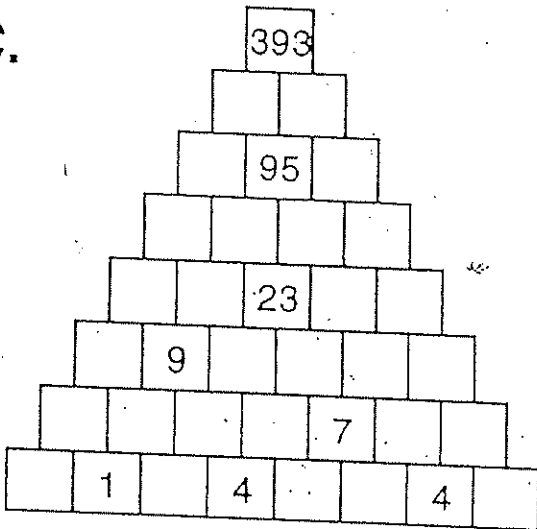
A.



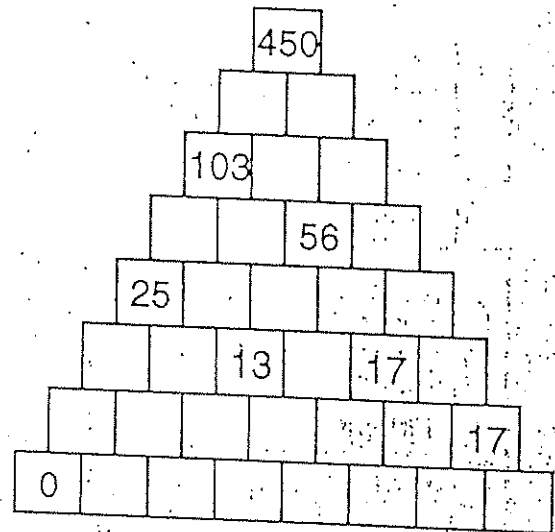
B.



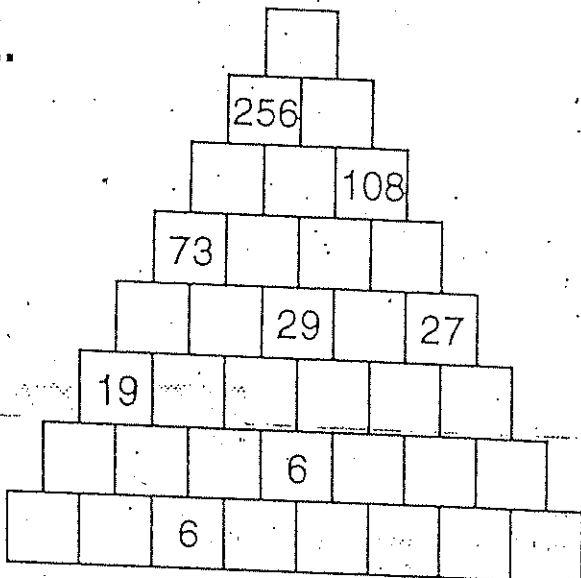
C.



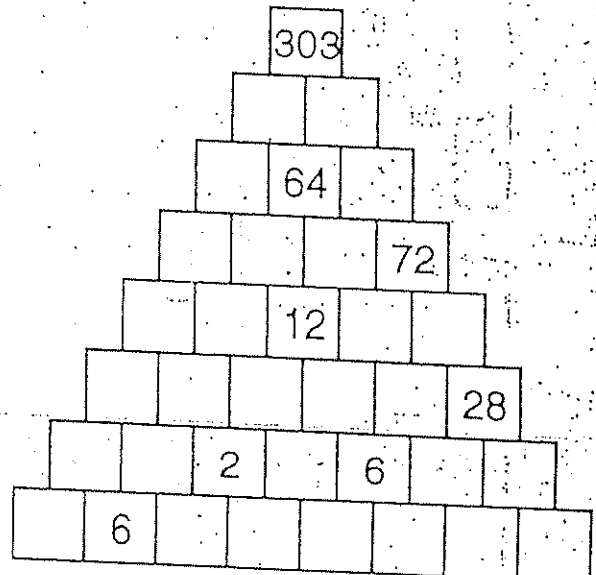
D.

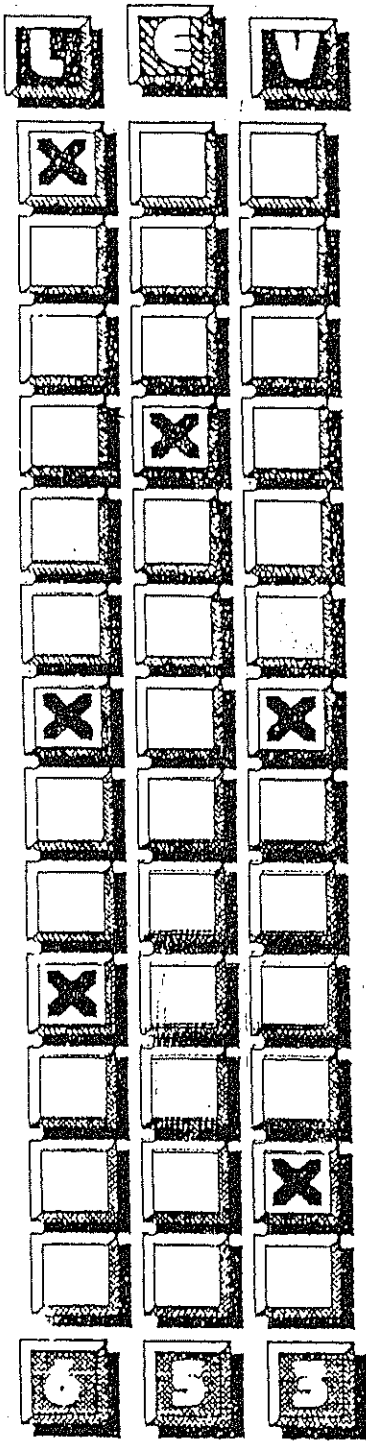


E.



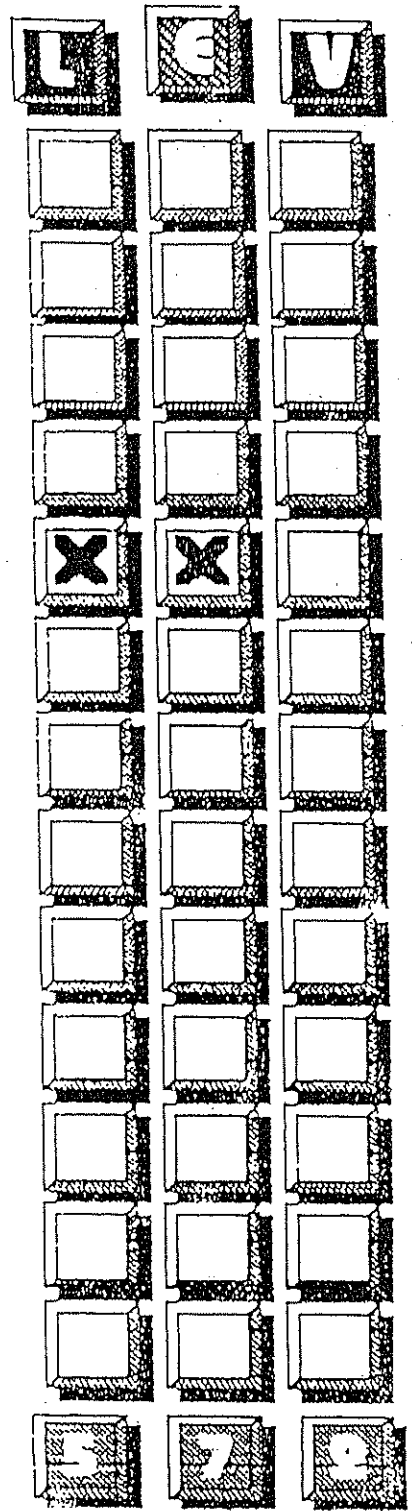
F.





Pronóstico matemático

Esta puede ser una tarjeta ganadora, siempre que se complete sin que haya dos cruces seguidas en la misma columna. Al pie se indica la cantidad de cruces.



Pronóstico matemático

En esta boleta de Prode los pronósticos dependen de una condición: no debe haber dos cruces seguidas en la misma columna. Al pie se indica la cantidad de cruces.

L	E	V
X		
	X	
	X	X
	X	
X		
5	5	4

Pronóstico matemático

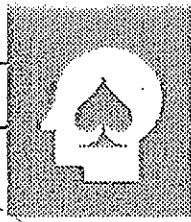
En esta boleta de Pro- de se sabe cuántos loca- les, empates y visitan- tes resultan. Debe com- pletarse de modo que no haya dos cruces se- guidas en la misma co- lumna.



L	E	V
X		
X		X
	X	
4	4	6

Pronóstico matemático

En esta boleta se conocen las sumas de cruces, pero hay una sola manera de completarla de modo que no haya dos seguidas en la misma columna. Los números abajo indican la suma de ca- da columna.



BATALLA NAVAL

En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota, y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.). Además, al pie de cada columna y al costado derecho de cada fila, se indica con números cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor de cada barco hay agua.

A

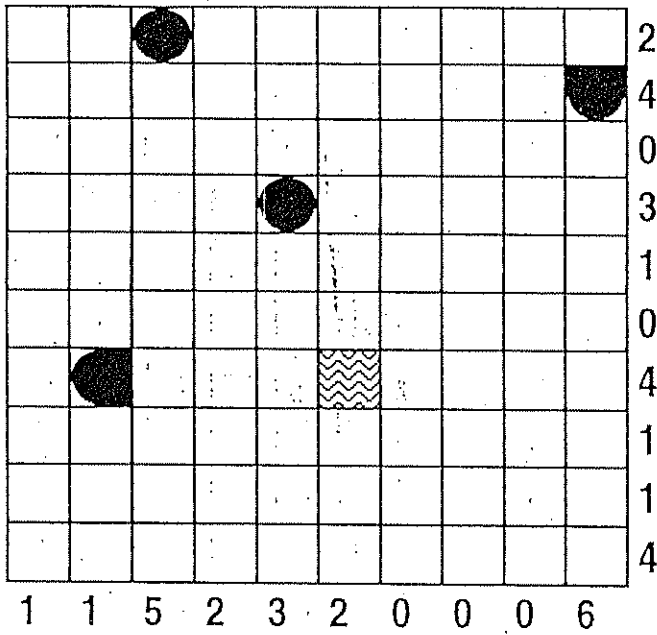
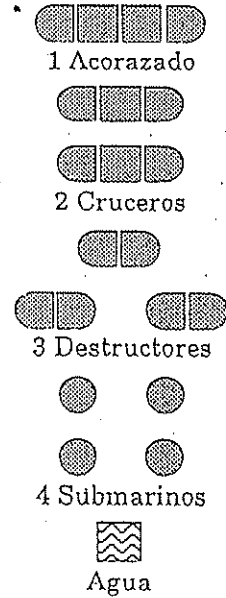


Figura 1



B

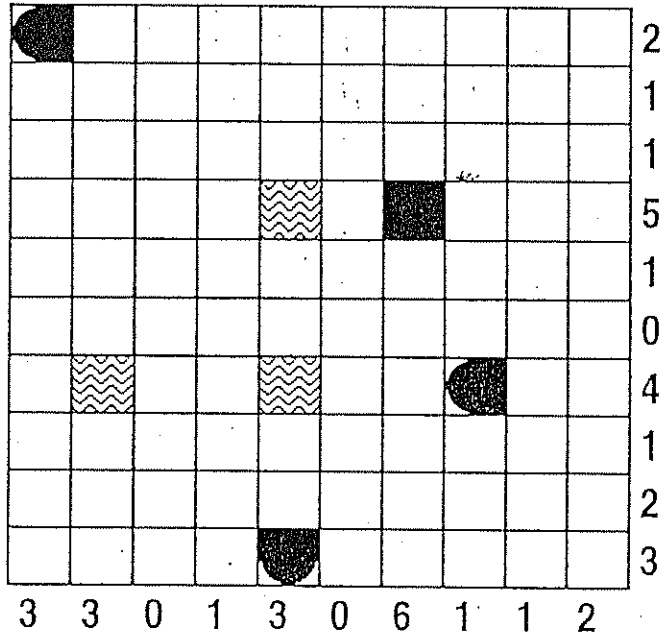
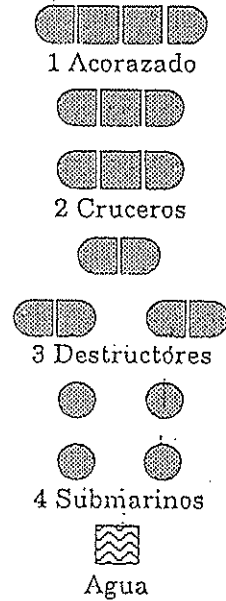
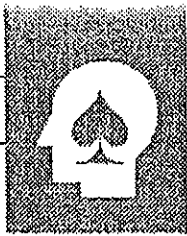


Figura 2





BATALLA NAVAL

En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota, y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.). Además, al pie de cada columna y al costado derecho de cada fila, se indica con números cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor de cada barco hay agua.

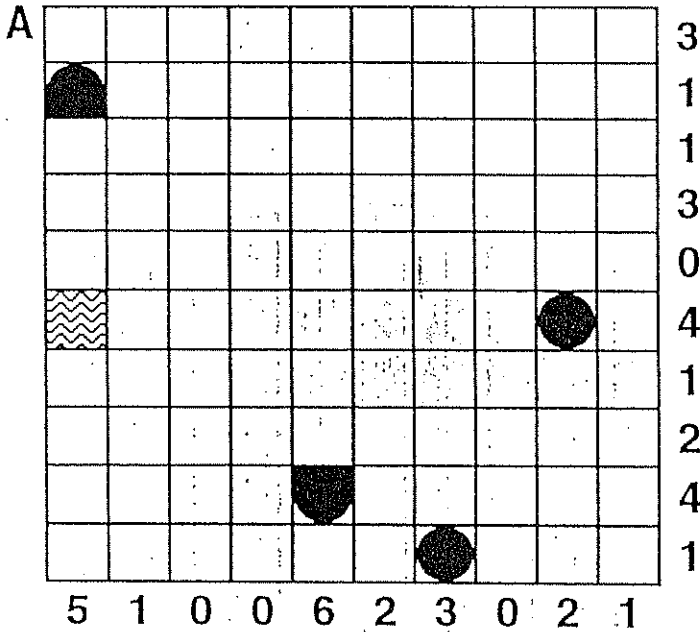


Figura 1

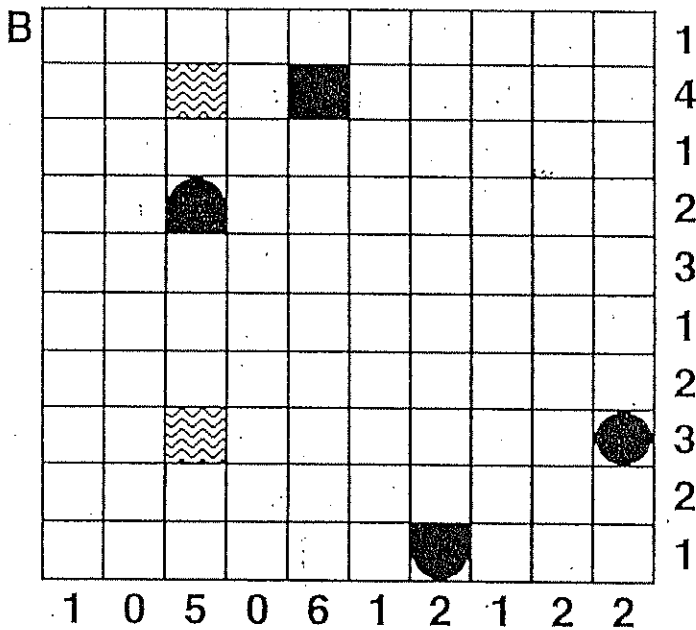
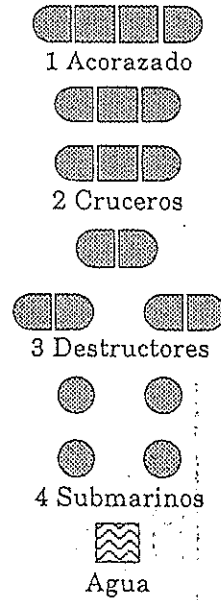
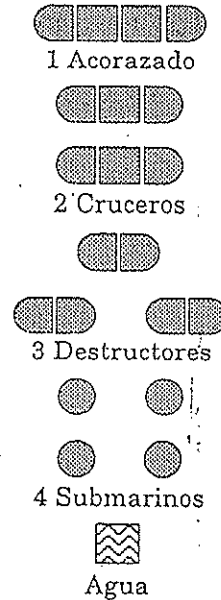
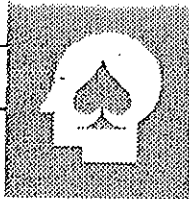


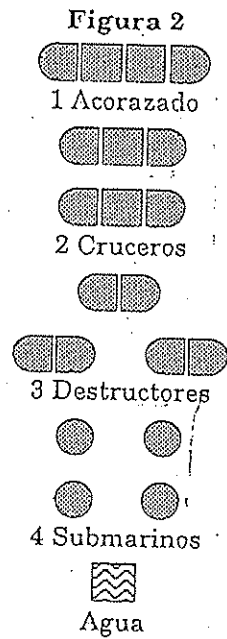
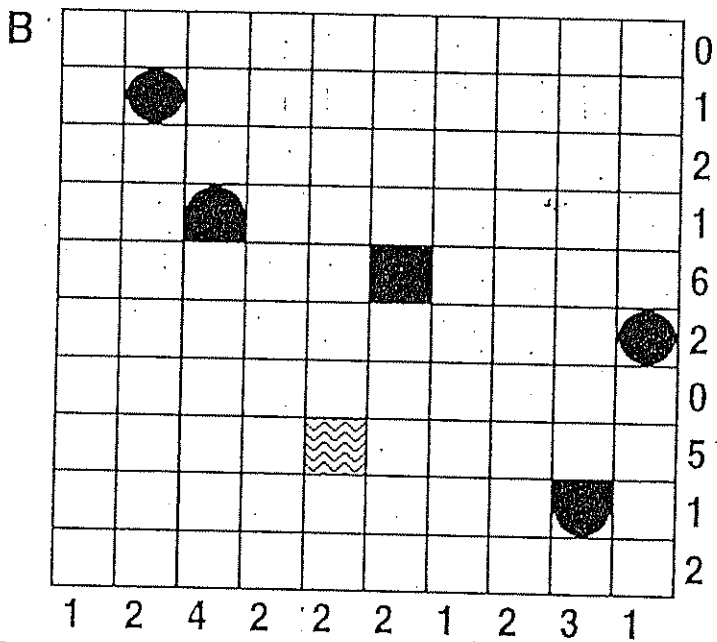
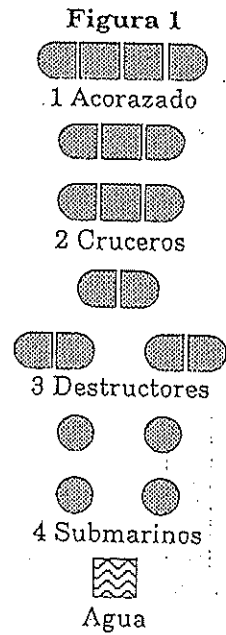
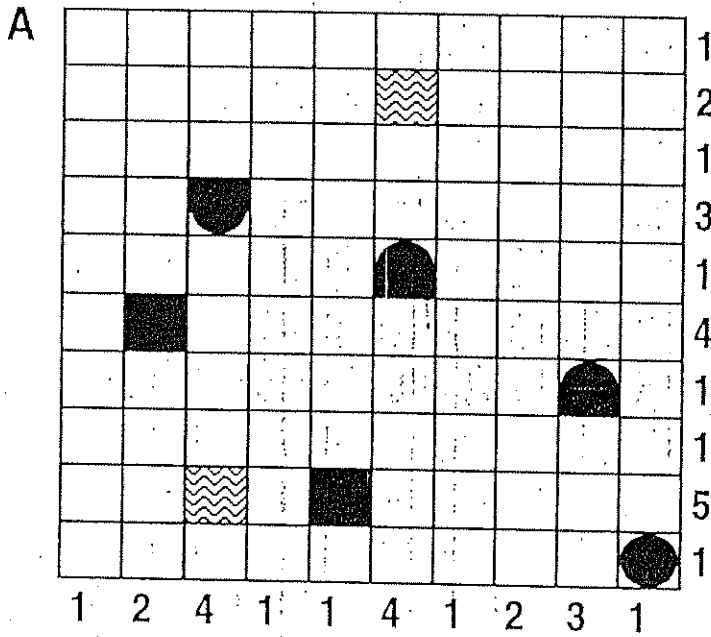
Figura 2





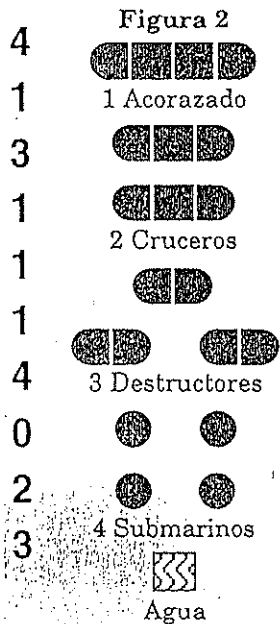
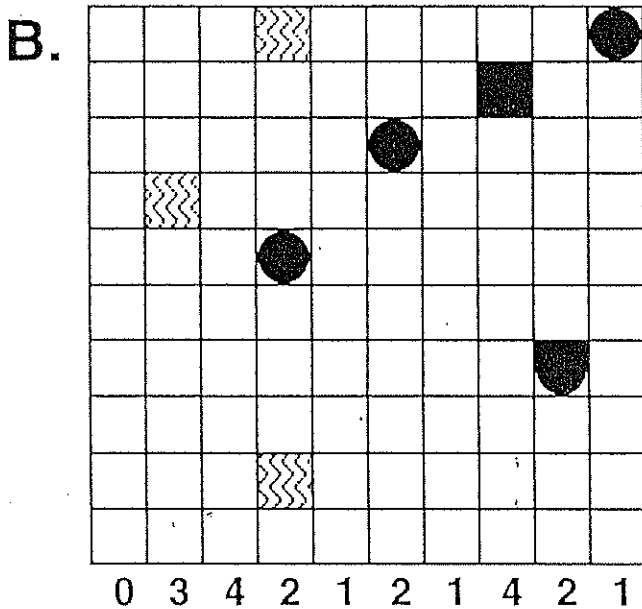
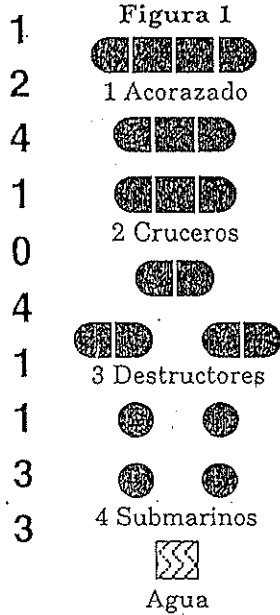
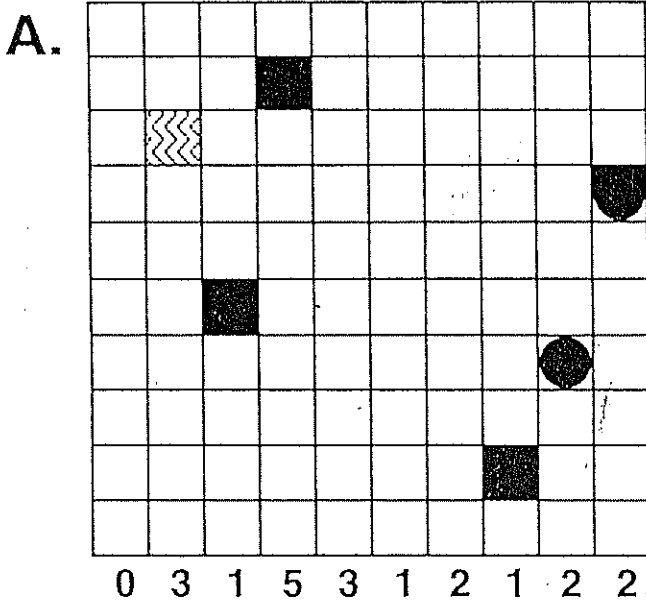
BATALLA NAVAL

En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota, y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.). Además, al pie de cada columna y al costado derecho de cada fila, se indica con números cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor de cada barco hay agua.



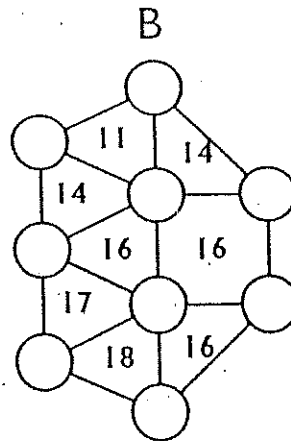
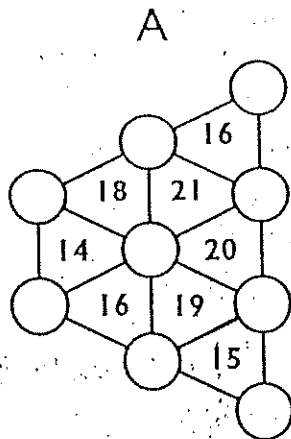
BATALLA NAVAL

En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. En cada uno se dan algunos de los cuadros invadidos por la flota, y otros que sólo tienen agua. Además, al pie de cada columna y al costado de cada hilera, se indica cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la ubicación de la flota. Tenga en cuenta que los barcos en ningún caso se tocan entre sí.



Figuras mágicas

En cada caso, ubique en los círculos los números del 1 al 9; sin repetirlos, para que los vértices de cada región sumen lo que en el centro de la región se indica.

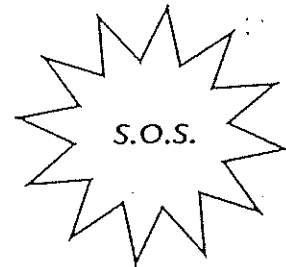


Cripto-aritmética

En cada caso, sustituya cada letra por un dígito distinto para llegar a una correcta suma numérica. Cuando una letra se repite deberá repetir el dígito correspondiente. Cada suma tiene un código propio.

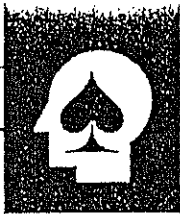
A. Cantado. Use los dígitos del 1 al 8.

$$\begin{array}{r}
 \quad V \quad O \quad Z \\
 + \quad V \quad O \quad Z \\
 \hline
 C \quad O \quad R \quad O
 \end{array}$$



B. Encerrado. Use los dígitos del 1 al 9 para obtener la CARCEL más grande posible.

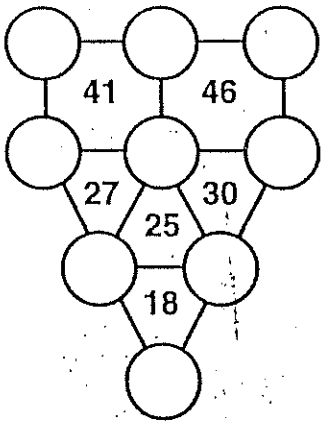
$$\begin{array}{r}
 \quad P \quad R \quad E \quad S \quad O \\
 + \quad R \quad E \quad J \quad A \quad S \\
 \hline
 C \quad A \quad R \quad C \quad E \quad L
 \end{array}$$



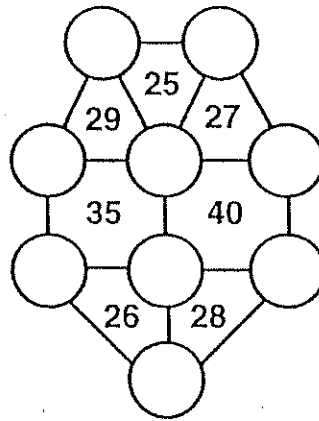
FIGURAS MAGICAS

En cada caso, ubique en los círculos los números del 5 al 13, sin repetirlos, para que los vértices de cada región sumen lo que en el centro de la región se indica.

A



B



CRIPTOARITMETICA

En cada caso, sustituya cada letra por un dígito distinto para llegar a una correcta suma numérica. Tenga en cuenta que una letra que se repite obliga a repetir el dígito correspondiente, y que cada suma tiene un código propio.

A. Aritmético. Use los dígitos del 3 al 9.

$$\begin{array}{r} + \quad \text{NON} \\ \quad \text{NON} \\ \hline \text{PAR} \end{array}$$

B. Para bailar. Use los dígitos del 0 al 9.

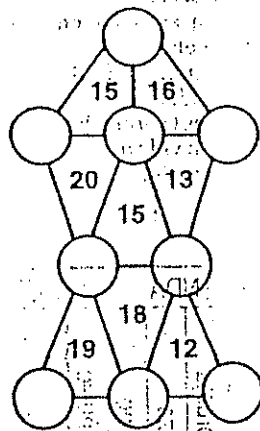
$$\begin{array}{r} \quad \text{V A L S E S} \\ + \quad \quad \quad \text{E N} \\ \hline \quad \text{V I E N A} \\ \hline \text{S T R A U S S} \end{array}$$



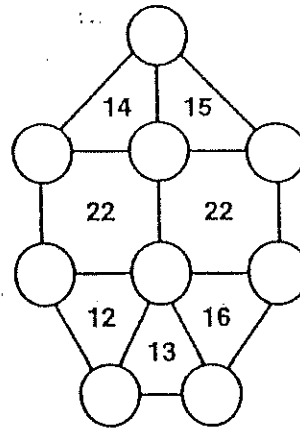
FIGURAS MAGICAS

En cada caso, ubique en los círculos los números del 1 al 9, sin repetirlos, para que los vértices de cada región sumen lo que en el centro de la región se indica.

A



B



CRIPTOARITMETICA

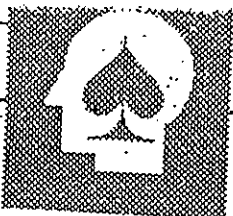
En cada caso, sustituya cada letra por un dígito distinto para llegar a una correcta suma numérica. Tenga en cuenta que una letra que se repite obliga a repetir el dígito correspondiente, y que cada suma tiene un código propio

A. Gramatical. Use los dígitos del 2 al 8.

$$\begin{array}{r}
 \text{L E T R A} \\
 + \text{L E T R A} \\
 \hline
 \text{F R A S E}
 \end{array}$$

B. Para escuchar. Use los dígitos del 0 al 6.

$$\begin{array}{r}
 \text{O N D A} \\
 + \text{O I D O} \\
 \hline
 \text{R A D I O}
 \end{array}$$



NUMERO OCULTO

Cada esquema da pistas con las que usted podrá deducir un número compuesto por cuatro cifras distintas (elegidas del 0 al 9), que no empieza con cero. En la columna B (de Bien) indicamos cuántos dígitos hay allí en común con el número buscado y en la misma posición. En la columna R (de Regular) se indica la cantidad de dígitos en común pero en posición incorrecta.

A

	B	R
	4	0
4 2 1 8	0	1
7 0 5 1	0	2
6 8 9 0	2	0
7 8 5 9	1	2

B

	B	R
	4	0
9 2 4 7	1	1
8 4 9 7	0	2
5 1 6 8	2	0
7 1 2 8	3	0

C

	B	R
	4	0
1 2 7 9	0	2
3 6 1 2	1	0
5 9 4 3	1	1
4 9 6 1	1	1

D

	B	R
	4	0
2 1 6 8	2	0
6 1 8 7	1	2
4 8 7 6	0	2
7 6 3 4	2	0

Número oculto

Cada esquema da pistas con las que usted podrá deducir un número compuesto por cuatro cifras distintas (elegidas del 0 al 9), que no empieza con cero. En la columna B (de Bien) indicamos cuántos dígitos hay allí en común con el número buscado y en la misma posición. En la columna R (de Regular) se indica la cantidad de dígitos en común pero en posición incorrecta. Si

en algún caso encuentra tres de los cuatro dígitos que forman el número misterioso y no da con el restante (que no es ninguno de los dígitos que intervienen en los números-pista) deberá buscar cuál es el dígito que no forma parte de dichos números-pista. Si se trata de un único número ausente, ése será el cuarto dígito buscado.

A				B	R
				4	0
7	8	0	4	2	0
3	0	1	9	0	3
3	4	0	6	1	0
1	9	8	4	1	1

B				B	R
				4	0
2	7	5	9	2	0
7	3	8	0	0	1
2	3	9	6	0	3
1	9	3	6	0	3

C				B	R
				4	0
1	2	9	3	0	2
6	1	7	5	1	0
5	9	0	6	1	2
6	9	5	8	1	1

D				B	R
				4	0
7	1	3	9	1	1
3	1	7	9	2	0
9	3	6	4	0	3
4	0	2	8	0	0

E				B	R
				4	0
1	9	4	6	1	1
4	3	6	5	1	0
6	4	5	1	0	1
2	8	3	4	0	0

F				B	R
				4	0
6	9	8	3	2	2
2	0	4	9	0	1
4	6	1	5	0	1
4	9	6	3	3	0

Qu'est-ce qu'un jeu de nombres fléchés?

Les problèmes de nombres fléchés sont construits à partir d'un principe simple: la case fléchée vous indique 6, en face de 2 cases? Vous aurez à inscrire dans ces cases, en fonction des autres nombres fléchés, 5+1, 1+5, 2+4 ou 4+2, soit la décomposition en 2 nombres du total 6.

Seules interdictions: pas de répétition de nombres pour un même total. Pas de 3+3, donc. Et pas de répétition de sommes dans une même grille: si vous avez déjà utilisé dans la grille la réponse 5+1, il ne vous reste plus que les 2 possibilités 2+4 et 4+2.

Les calculs sont simples: on n'additionne que les chiffres de 1 à 9 (pas de zéro, donc). Le reste est affaire de logique.

Et pour simplifier vos débuts ou vous venir en aide lorsque vous êtes bloqués, deux précieuses aides sont prévues:

- un tableau de décomposition des nombres, afin de découvrir les bonnes combinaisons et de faire les bonnes additions, vous attend en pages centrales.
- un explicatif approfondi des problèmes de nombres fléchés, avec quelques trucs utiles, se trouve dans les dernières pages, avant les solutions.

Et pour commencer, un petit problème, avec sa solution:

	12	29		28	19	15
11	↓	↓	24	↓	↓	↓
14	→		10	→		
22	→		16	↓		
38	→					

5	9	8	6	7	8
3	7	4	5	1	6
2	4	7	8	9	2
1	2	7	6	8	7
7	6	9	6	7	8

SOLUTION

NOMBRES FLÉCHÉS N° 6

	33	16		23	15	12	18	35
9	8	1	20	9	2	3	1	5
7	4	3	28	8	3	9	2	6
			6					
18	5	4	2	6	1	12	4	8
						8		
18	9	6	3	29	5	7	8	9
10	7	2	1	15	4	1	3	7

Chasse-chiffres

JEU N° 7

▣ Ce jeu consiste en la recherche logique d'un nombre caché. Pour découvrir celui-ci, il suffit de comparer les indices situés à côté des nombres donnés: un chiffre sur fond bleu indique le nombre de chiffres communs et À LA MÊME PLACE que dans le nombre caché; le chiffre sur fond noir indique, PARMI LES CHIFFRES RESTANTS, le nombre d'éléments communs entre le nombre concerné et le nombre à découvrir.

403

□ □ □

1	9	3	1	2
9	5	4	1	1
5	1	0	1	1
0	1	3	1	1

4	3	6	1	1
4	2	5	1	1
2	0	9	1	1
9	7	1	1	1

□ □ □

□ □ □

□ □ □

□ □ □

1	9	6	1	2
5	6	7	1	1
6	4	0	1	1
9	5	3	1	1

4	5	8	1	2
6	4	1	1	1
2	6	7	1	1
5	9	6	1	1

6	0	3	1	2
4	5	2	1	1
3	0	2	1	2
1	7	4	1	1

6	7	3	1	1
6	2	7	1	1
1	4	2	1	1
3	2	1	1	1

Nombres fléchés

Chaque nombre inscrit dans une CASE BLEUE représente la somme des chiffres (de 1 à 9) à placer dans les cases blanches indiquées par la flèche. Reconstituez ainsi toute la grille, sachant que:

- a) le chiffre ZÉRO n'est JAMAIS UTILISÉ.
 b) POUR UNE MÊME SOMME, on utilisera des CHIFFRES TOUS DIFFÉRENTS (par exemple, si l'on a 8 dans une case bleue et deux cases blanches indiquées par la flèche, on ne peut en aucun cas inscrire deux fois le chiffre 4; on doit choisir entre $1+7$, $6+2$ et $3+5$).
 c) une MÊME SÉQUENCE de chiffres, QUEL QU'EN SOIT L'ORDRE, ne peut apparaître qu'UNE SEULE FOIS.

	32	33	7	19	21		11	15	19
33	↓	↓	↓	↓	↓	12	↓	↓	↓
17	→					7	→		
17	→		6	→		10	↓	6	→
23	→		12	↓			7	↓	
15	→			34	→				
				16	→				

	29	16	10		29	10	8	18	34
11	↓	↓	↓	33	↓	↓	↓	↓	↓
14	→			18	→				
12	→		9	↓			7	→	
33	→		8	↓			3	↓	
18	→					9	→		
						19	→		

NOMBRES FLÉCHÉS N° 14

Nombres fléchés

Chaque nombre inscrit dans une CASE BLEUE représente la somme des chiffres (de 1 à 9) à placer dans les cases blanches indiquées par la flèche. Reconstituez ainsi toute la grille, sachant que:

- a) le chiffre ZÉRO n'est JAMAIS UTILISÉ.
- b) POUR UNE MÊME SOMME, on utilisera des CHIFFRES TOUS DIFFÉRENTS (par exemple, si l'on a 8 dans une case bleue et deux cases blanches indiquées par la flèche, on ne peut en aucun cas inscrire deux fois le chiffre 4; on doit choisir entre 1+7, 6+2 et 3+5).
- c) une MÊME SÉQUENCE de chiffres, QUEL QU'EN SOIT L'ORDRE, ne peut apparaître qu'UNE SEULE FOIS.

	24	12	19	12	37		8	32	14	11
35	↓	↓	↓	↓	↓	11	↓	↓	↓	↓
16	→					25	→			
						4				
20	→			15	→	↓			29	30
				6						
11	→		←9	↓			17	→	↓	↓
			8				15			
	31	13	→			29	→	↓		
		18				19				
7	→	↓		11	→	↓		14	→	
				12				27		
26	→			↓		19	→	↓		
						17				
9	→		20	→		↓		11	→	
			13					16		
30	→		↓					↓		
						28	→			
15	→									
						23	→			

Si ce jeu vous a plu, retrouvez le plaisir de jongler avec les chiffres dans la revue *Nombres Fléchés*. En vente tous les trois mois chez votre marchand de journaux.

NOMBRES FLÉCHÉS N° 36

☑ Voyez les explications page 16.

	21	10		12	22		10	32	28	14
11	↓	↓	14	↓	↓	18	↓	↓	↓	↓
8	↓	↓	11	↓	↓	27	↓	↓	↓	↓
			15	↓	↓	3	↓	↓	↓	↓
19	↓	↓	↓	10	↓	↓	23	↓	↓	↓
			↓	8	↓	↓	12	↓	↓	↓
	16	13	↓	↓	15	↓	↓	↓	↓	↓
	↓	8	↓	↓	10	↓	↓	↓	↓	↓
9	↓	↓	9	↓	↓	6	↓	↓	↓	↓
			19	↓	↓	9	↓	↓	37	26
21	↓	↓	↓	8	↓	↓	↓	12	↓	↓
			↓	41	↓	↓	↓	22	↓	↓
10	↓	↓	↓	↓	32	↓	↓	↓	↓	↓
			↓	↓	7	↓	↓	↓	↓	↓
	14	25	↓	↓	↓	↓	15	↓	↓	↓
	↓	4	↓	↓	↓	↓	13	↓	↓	↓
6	↓	↓	5	↓	↓	12	↓	↓	↓	↓
			6	↓	↓	18	↓	↓	↓	↓
20	↓	↓	↓	↓	12	↓	↓	17	↓	↓
			↓	↓	34	↓	↓	16	↓	↓
	25	26	↓	↓	↓	↓	10	↓	↓	↓
	↓	14	↓	↓	↓	↓	13	↓	↓	↓
43	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	11	20
			↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10	↓	↓	9	↓	↓	26	↓	↓	↓	↓
			5	↓	↓	11	↓	↓	↓	↓
7	↓	↓	↓	9	↓	↓	↓	12	↓	↓
			↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
21	↓	↓	↓	15	↓	↓	↓	10	↓	↓
			↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓



	6	20	34	30	13	16		4	26	12
22	↓	↓	↓	↓	↓	↓	17	↓	↓	↓
37							12			
							42			
26					17	↓		10	↓	
					27			5		
	20	22	↓			10	↓			
		18				3				
23	↓	↓		12	↓				33	18
				17						
5			15	↓				14	↓	↓
			33					10		
			↓					↓		
22						27	↓			
						21				
25					16	↓				
					15					
14				20	↓			8	↓	
				22				13		
	17	29	↓				21	↓		
		35					21			
	↓	↓					↓			
27					15	↓			13	24
					19				↓	↓
6			29	↓						
			7							
			↓							
9				14	↓			12	↓	
				9				10		
				↓				↓		
32						11	↓			
						↓				
20						14	↓			

25 1+7+8+9 1+2+5+8+9 1+2+3+4+6+9 1+2+3+4+7+8
 2+6+8+9 1+2+6+7+9 1+2+3+4+7+8 1+2+3+4+7+8
 3+5+8+9 1+3+4+8+9 1+2+3+5+6+8 1+2+3+4+7+9
 3+6+7+9 1+3+5+7+9 1+2+3+5+6+7 1+2+3+4+5+6+7
 4+5+7+9 1+3+6+7+8 1+3+6+7+8 1+3+6+7+8
 4+6+7+8 1+4+5+6+9 1+4+5+6+9 1+4+5+6+9
 1+4+5+7+8 2+3+4+7+9 2+3+4+7+9 2+3+4+7+9
 2+3+5+6+9 2+3+5+6+9 2+3+5+6+9 2+3+5+6+9
 2+4+5+6+8 2+4+5+6+8 2+4+5+6+8 2+4+5+6+8
 3+4+5+6+7 3+4+5+6+7 3+4+5+6+7 3+4+5+6+7
 26 2+7+8+9 1+2+6+8+9 1+2+3+4+7+9 1+2+3+4+7+9
 3+6+8+9 1+3+5+8+9 1+2+3+5+6+9 1+2+3+5+6+9
 4+5+8+9 1+3+6+7+9 1+2+3+5+7+8 1+2+3+5+7+8
 4+6+7+9 1+4+5+7+9 1+2+4+5+6+8 1+2+4+5+6+8
 5+6+7+8 1+4+6+7+8 1+3+4+5+6+7 1+3+4+5+6+7
 2+3+4+8+9 2+3+4+8+9 2+3+4+8+9 2+3+4+8+9
 2+3+5+7+8 2+3+5+7+8 2+3+5+7+8 2+3+5+7+8
 2+4+5+6+9 2+4+5+6+9 2+4+5+6+9 2+4+5+6+9
 2+4+5+7+8 2+4+5+7+8 2+4+5+7+8 2+4+5+7+8
 3+4+5+6+8 3+4+5+6+8 3+4+5+6+8 3+4+5+6+8
 27 3+7+8+9 1+2+7+8+9 1+2+3+4+8+9 1+2+3+4+8+9
 4+6+8+9 1+3+6+8+9 1+2+3+5+7+9 1+2+3+5+7+9
 5+6+7+9 1+4+5+8+9 1+2+4+6+7+8 1+2+4+6+7+8
 1+4+6+7+9 1+4+6+7+9 1+4+6+7+9 1+4+6+7+9
 1+5+6+7+8 1+5+6+7+8 1+5+6+7+8 1+5+6+7+8
 2+3+5+8+9 2+3+5+8+9 2+3+5+8+9 2+3+5+8+9
 2+3+6+7+9 2+3+6+7+9 2+3+6+7+9 2+3+6+7+9
 2+4+5+7+9 2+4+5+7+9 2+4+5+7+9 2+4+5+7+9
 2+4+6+7+8 2+4+6+7+8 2+4+6+7+8 2+4+6+7+8
 3+4+5+6+8 3+4+5+6+8 3+4+5+6+8 3+4+5+6+8
 28 4+7+8+9 1+3+7+8+9 1+2+3+5+8+9 1+2+3+5+8+9
 5+6+8+9 1+4+6+8+9 1+2+4+5+7+9 1+2+4+5+7+9
 1+5+6+7+9 1+5+6+7+9 1+5+6+7+9 1+5+6+7+9
 2+3+6+8+9 2+3+6+8+9 2+3+6+8+9 2+3+6+8+9
 2+4+5+8+9 2+4+5+8+9 2+4+5+8+9 2+4+5+8+9
 2+4+6+7+9 2+4+6+7+9 2+4+6+7+9 2+4+6+7+9
 2+5+6+7+8 2+5+6+7+8 2+5+6+7+8 2+5+6+7+8
 3+4+5+7+9 3+4+5+7+9 3+4+5+7+9 3+4+5+7+9
 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8
 29 5+7+8+9 1+4+7+8+9 1+2+3+6+8+9 1+2+3+6+8+9
 1+5+6+8+9 1+5+6+8+9 1+5+6+8+9 1+5+6+8+9
 2+3+7+8+9 2+3+7+8+9 2+3+7+8+9 2+3+7+8+9
 2+4+6+8+9 2+4+6+8+9 2+4+6+8+9 2+4+6+8+9
 2+5+6+7+9 2+5+6+7+9 2+5+6+7+9 2+5+6+7+9
 3+4+5+8+9 3+4+5+8+9 3+4+5+8+9 3+4+5+8+9
 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8
 3+5+6+7+8 3+5+6+7+8 3+5+6+7+8 3+5+6+7+8
 1+5+7+8+9 1+5+7+8+9 1+5+7+8+9 1+5+7+8+9
 2+4+7+8+9 2+4+7+8+9 2+4+7+8+9 2+4+7+8+9
 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8
 30 6+7+8+9 1+4+7+8+9 1+2+3+4+5+6+8 1+2+3+4+5+6+8
 2+4+7+8+9 1+5+6+8+9 1+2+4+6+7+9 1+2+4+6+7+9
 3+4+6+7+8 2+5+6+7+9 1+3+4+5+7+8 1+3+4+5+7+8
 3+4+6+7+8 2+3+4+5+7+8 2+3+4+5+7+8 2+3+4+5+7+8
 3+5+6+7+8 3+5+6+7+8 3+5+6+7+8 3+5+6+7+8
 1+5+7+8+9 1+5+7+8+9 1+5+7+8+9 1+5+7+8+9
 2+4+7+8+9 2+4+7+8+9 2+4+7+8+9 2+4+7+8+9
 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8 3+4+6+7+8
 4+5+6+7+8 4+5+6+7+8 4+5+6+7+8 4+5+6+7+8
 2+3+4+6+7+8 2+3+4+6+7+8 2+3+4+6+7+8 2+3+4+6+7+8

31 1+6+7+8+9 1+2+4+7+8+9 1+2+3+4+5+7+9 1+2+3+4+5+7+9
 2+5+7+8+9 1+2+5+6+8+9 1+2+3+4+6+7+8 1+2+3+4+6+7+8
 3+4+7+8+9 1+3+4+6+8+9 1+3+4+6+8+9 1+3+4+6+8+9
 3+5+6+8+9 1+3+5+6+7+9 1+3+5+6+7+9 1+3+5+6+7+9
 4+5+6+7+9 1+4+5+6+7+8 1+4+5+6+7+8 1+4+5+6+7+8
 2+3+4+5+8+9 2+3+4+5+8+9 2+3+4+5+8+9 2+3+4+5+8+9
 2+3+5+6+7+8 2+3+5+6+7+8 2+3+5+6+7+8 2+3+5+6+7+8
 32 2+6+7+8+9 1+2+5+7+8+9 1+2+3+4+5+8+9 1+2+3+4+5+8+9
 3+5+7+8+9 1+3+4+7+8+9 1+2+3+4+6+7+9 1+2+3+4+6+7+9
 4+5+6+8+9 1+3+5+6+8+9 1+2+3+5+6+7+8 1+2+3+5+6+7+8
 1+4+5+6+7+9 1+4+5+6+7+9 1+4+5+6+7+9 1+4+5+6+7+9
 2+3+4+6+8+9 2+3+4+6+8+9 2+3+4+6+8+9 2+3+4+6+8+9
 2+3+5+6+7+9 2+3+5+6+7+9 2+3+5+6+7+9 2+3+5+6+7+9
 2+4+5+6+7+8 2+4+5+6+7+8 2+4+5+6+7+8 2+4+5+6+7+8
 33 3+6+7+8+9 1+2+6+7+8+9 1+2+3+4+6+8+9 1+2+3+4+6+8+9
 4+5+7+8+9 1+3+5+7+8+9 1+2+3+5+6+7+9 1+2+3+5+6+7+9
 1+4+5+6+8+9 1+4+5+6+8+9 1+2+4+5+6+7+8 1+2+4+5+6+7+8
 2+3+4+7+8+9 2+3+4+7+8+9 2+3+4+7+8+9 2+3+4+7+8+9
 2+3+5+6+8+9 2+3+5+6+8+9 2+3+5+6+8+9 2+3+5+6+8+9
 2+4+5+6+7+9 2+4+5+6+7+9 2+4+5+6+7+9 2+4+5+6+7+9
 3+4+5+6+7+8 3+4+5+6+7+8 3+4+5+6+7+8 3+4+5+6+7+8
 34 4+6+7+8+9 1+3+6+7+8+9 1+2+3+4+7+8+9 1+2+3+4+7+8+9
 1+4+5+7+8+9 1+4+5+7+8+9 1+2+3+5+6+8+9 1+2+3+5+6+8+9
 2+3+5+7+8+9 2+3+5+7+8+9 1+2+4+5+6+7+9 1+2+4+5+6+7+9
 2+4+5+6+8+9 2+4+5+6+8+9 1+3+4+5+6+7+8 1+3+4+5+6+7+8
 3+4+5+6+7+9 3+4+5+6+7+9 3+4+5+6+7+9 3+4+5+6+7+9
 35 5+6+7+8+9 1+4+6+7+8+9 1+2+3+5+7+8+9 1+2+3+5+7+8+9
 2+3+6+7+8+9 2+3+6+7+8+9 1+2+4+5+6+8+9 1+2+4+5+6+8+9
 2+4+5+7+8+9 2+4+5+7+8+9 1+3+4+5+6+7+9 1+3+4+5+6+7+9
 3+4+5+6+8+9 3+4+5+6+8+9 2+3+4+5+6+7+8 2+3+4+5+6+7+8
 1+5+6+7+8+9 1+5+6+7+8+9 1+2+3+6+7+8+9 1+2+3+6+7+8+9
 2+4+6+7+8+9 2+4+6+7+8+9 1+2+4+5+7+8+9 1+2+4+5+7+8+9
 3+4+5+7+8+9 3+4+5+7+8+9 1+3+4+5+6+8+9 1+3+4+5+6+8+9
 2+5+6+7+8+9 2+5+6+7+8+9 2+3+4+5+6+7+9 2+3+4+5+6+7+9
 3+4+6+7+8+9 3+4+6+7+8+9 1+2+4+6+7+8+9 1+2+4+6+7+8+9
 36 2+5+6+7+8+9 3+4+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8 1+2+3+4+5+6+7+8
 3+5+6+7+8+9 3+5+6+7+8+9 2+3+4+5+6+8+9 2+3+4+5+6+8+9
 37 2+5+6+7+8+9 1+2+4+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+9 1+2+3+4+5+6+7+9
 3+4+6+7+8+9 1+3+4+5+7+8+9 1+3+4+5+7+8+9 1+3+4+5+7+8+9
 38 3+5+6+7+8+9 1+2+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+8+9 1+2+3+4+5+6+8+9
 1+3+4+6+7+8+9 1+3+4+6+7+8+9 2+3+4+5+6+8+9 2+3+4+5+6+8+9
 39 4+5+6+7+8+9 1+3+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+7+8+9 1+2+3+4+5+7+8+9
 2+3+4+6+7+8+9 2+3+4+6+7+8+9 2+3+4+6+7+8+9 2+3+4+6+7+8+9
 40 1+4+5+6+7+8+9 1+2+3+4+6+7+8+9 1+2+3+4+6+7+8+9 1+2+3+4+6+7+8+9
 2+3+5+6+7+8+9 2+3+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8+9
 41 2+4+5+6+7+8+9 1+2+4+5+6+7+8+9 1+2+3+5+6+7+8+9 1+2+3+5+6+7+8+9
 42 3+4+5+6+7+8+9 1+3+4+5+6+7+8+9 1+2+4+5+6+7+8+9 1+2+4+5+6+7+8+9
 43 1+3+4+5+6+7+8+9 1+3+4+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8+9
 44 2+3+4+5+6+7+8+9 2+3+4+5+6+7+8+9 2+3+4+5+6+7+8+9 2+3+4+5+6+7+8+9
 45 1+2+3+4+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8+9 1+2+3+4+5+6+7+8+9

Editorial

Chère lectrice, cher lecteur,

En achetant *Logigraphe*, vous entrez dans un nouveau monde du jeu, vous découvrez une nouvelle source de plaisir ludique: la logique visuelle.

Avec ce nouveau concept développé par Sport Cérébral, vous exercerez vos talents de logicien et vous verrez les énigmes se dévoiler peu à peu sous vos yeux.

Commencez par le jeu-titre de cette revue: le Logigraphe, que les lecteurs de nos revues de logique, *Logigram*, *Logiplus* et *Nombres fléchés* connaissent bien et apprécient. En combinant logiquement les données chiffrées, vous pourrez remplir la grille et voir ainsi apparaître au fil de votre raisonnement le dessin-solution.

Avec le *Squelettres*, vous découvrirez le "squelette" de la grille, c'est-à-dire ses cases noires, en interprétant logiquement les données chiffrées qu'elle contient. Il vous suffira ensuite d'y placer les mots d'une liste thématique. Quant au *Logicube*, il fera appel à la logique géométrique.

Enfin, *Logigraphe* vous offre les Classiques des jeux de chiffres et de logique: *Nombres fléchés*, *Nombres placés*, *Chasse-chiffres*, *Tricodage*.

Voilà de quoi satisfaire les appétits variés des nombreux adeptes de la logique et du jeu!

A bientôt pour le n° 6, à paraître fin septembre.

La Rédaction

Explicatif

Le Logigraphe

Le principe de ce jeu est de placer de manière logique des cases noires dans une grille pour découvrir un dessin-solution.

Les nombres à gauche des grilles donnent les longueurs des ensembles de cases noires à placer dans la rangée correspondante. Les nombres au-dessus des grilles donnent les hauteurs des ensembles de cases noires à placer dans la colonne correspondante. Bien entendu, chaque ensemble de cases noires est séparé par une case blanche au moins!

1

			1			
			3	2		
		3	2	1	2	3
	3					
2	2					
1	1					
1	2					
	2					
	1					
	1					
	0					
	1					

Pour pouvoir arriver à la solution (Grille S) en partant de la grille 1, nous vous proposons le raisonnement suivant. Il va de soi qu'il en existe d'autres.

S

			1			
			3	2		
		3	2	1	2	3
	3	-	■	■	■	-
2	2	■	■	-	■	■
1	1	■	-	-	-	■
1	2	■	-	-	■	■
	2	-	-	■	■	-
	1	-	-	■	-	-
	1	-	-	■	-	-
	0	-	-	-	-	-
	1	-	-	■	-	-



2

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3					
2	2				
1	1				
1	2				
	2				
	1				
	1				
	0	-	-	-	-
	1				

Le chiffre 0 de la 8e rangée indique qu'il n'y a pas de cases noires dans cette rangée, donc rien que des cases blanches (indiquées ici par des traits).

Le chiffre 3 de la 1re rangée indique qu'il y a 3 cases noires accolées. Dans ce cas, il y a 3 possibilités:

A

ou

B

ou

C

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3	■	■	■	-	-
2	2				
1	1				
1	2				
	2				
	1				
	1				
	0	-	-	-	-
	1				

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3	-	■	■	■	-
2	2				
1	1				
1	2				
	2				
	1				
	1				
	0	-	-	-	-
	1				

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3	-	-	■	■	■
2	2				
1	1				
1	2				
	2				
	1				
	1				
	0	-	-	-	-
	1				

On constate qu'une case est noire dans les 3 cas: on l'indique dans la grille.

3

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3			■		
2	2		-		
1	1				
1	2				
	2				
	1				
	1				
	0	-	-	-	-
	1				

Si on compare cette case dont on est certain avec les chiffres des colonnes, au-dessus de la grille, on constate que cette case correspond au premier chiffre 1 de la 3e colonne: on peut donc inscrire une case blanche dans la grille, juste en-dessous de cette case noire.

Les deux chiffres de la 2e rangée, 2 2, indiquent qu'il y a 2 groupes de 2 cases noires accolées, séparées par au moins 1 case blanche. Dans ce cas, il n'y a qu'une solution:

4

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3			■		
2	2	■	■	-	■
1	1				
1	2				
	2				
	1				
	1				
	0	-	-	-	-
	1				

Pour le chiffre 3 de la 1re colonne, il ne resté que 2 possibilités, vu que la 2e rangée est certaine:

A

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3	■	■	■		
2	2	■	■	-	■
1	1	■			
1	2	-			
	2	-			
	1	-			
	1	-			
	0	-	-	-	-
	1	-			

B

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
3	-	■	■		
2	2	■	■	-	■
1	1	■			
1	2	■			
	2	-			
	1	-			
	1	-			
	0	-	-	-	-
	1	-			

On en déduit une case noire et 5 cases blanches, puisqu'elles se retrouvent dans les 2 possibilités. On suit le même raisonnement pour la 5e colonne.

5

			1			
			3	2		
		3	2	1	2	3
	3			■		
2	2	■	■	-	■	■
1	1	■				
1	2					
	2	-				
	1	-				
	1	-				
	0	-	-	-	-	-
	1	-				

6

			1			
			3	2		
		3	2	1	2	3
	3			■		
2	2	■	■	-	■	■
1	1	■				■
1	2					
	2	-				-
	1	-				-
	1	-				-
	0	-	-	-	-	-
	1	-				-

Ces nouvelles cases noires impliquent trois cases blanches pour la 3e rangée: en effet, les chiffres 1 1 indiquent qu'il n'y a que 2 cases noires, séparées par 1 ou plusieurs cases blanches.

L'une de ces nouvelles cases blanches nous permet de déduire une case noire dans la 2e colonne, que l'on peut compléter par une série de cases blanches.

A vous de continuer!

7

			1			
			3	2		
		3	2	1	2	3
	3			■		
2	2	■	■	-	■	■
1	1	■	-	-	-	■
1	2					
	2	-				-
	1	-				-
	1	-				-
	0	-	-	-	-	-
	1	-				-

8

			1			
			3	2		
		3	2	1	2	3
	3			■		
2	2	■	■	-	■	■
1	1	■	-	-	-	■
1	2					
	2	-				-
	1	-				-
	1	-				-
	0	-	-	-	-	-
	1	-				-

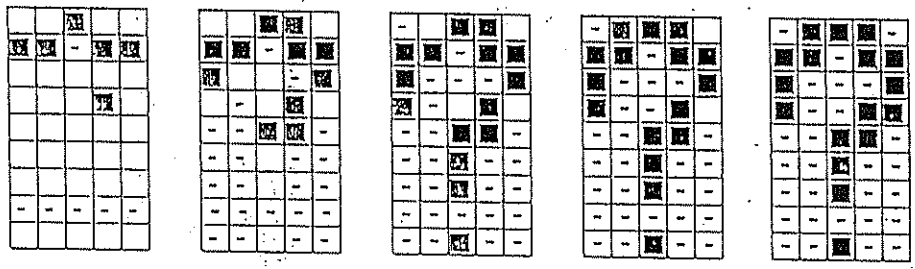
LOGIGRAPHE N° 1

						10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	8	8						
		4	6	6	6	6	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6	6	6	6	4	
11																							
11												■											
13																							
13																							
13																							
13																							
13																							
21		■																					
23																							
23																							
5	5																						■
23																							
21																							■

LOGIGRAPHE N° 10

			1		
			3	2	
	3	2	1	2	3
	3				
2	2				1
1	1				
1	2				
	2				
	1				
	1				
	0				
	1				

■ Le principe de ce jeu est de placer de manière logique des cases noires dans une grille pour découvrir un dessin-solution.
 Les nombres à gauche des grilles donnent les longueurs des ensembles de cases noires à placer dans la ligne correspondante. Les nombres au-dessus des grilles donnent les hauteurs des ensembles de cases noires à placer dans la colonne correspondante. Bien entendu, chaque ensemble de cases noires est séparé par une case blanche au moins.
 Exemple: si dans une grille de 7 cases de largeur, vous disposez à gauche des nombres 2 1 2, vous pouvez placer 2 cases noires, 1 blanche, 1 noire, 1 blanche et enfin 2 noires. Dans la plupart des cas cependant, ce n'est pas aussi facile, à vous d'analyser chaque ligne, de placer les cases noires et blanches déterminées à coup sûr, puis d'analyser les colonnes, placer les cases, puis revenir aux lignes et ainsi de suite.
 Pour illustrer le principe du jeu, nous avons représenté ci-dessous les 5 phases de résolution de la première grille en notant en bleu les découvertes de chaque phase et en noir celles des phases précédentes. Cachez-les si vous ne voulez pas d'aide.



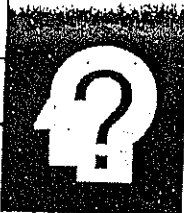
			3	11			12	11							13	10			4	4	7			11		
			5	4	1	11	15	2	1	11	10	10	10	16	2	1	11	10	3	2	1	10	8	4	2	2
		2	2																							
	4	4	1																							
		12	3																							
	13	2	2																							
		15	6																							
		15	4																							
		17	4																							
		1	20																							
		1	19																							
		1	19																							
		1	14	3																						
	4	3	2	2																						
		3	2	2																						
	2	1	1	2																						
	1	1	1	1																						
	1	2	2	2																						
	2	2	2	2																						

LOGIGRAPHE N° 40

										2	2					1	1	1	1				
			3	2	2	3				8	4	4	8		1	1	3	2	2	3	1		
			5	2	1	1	2	7	7	11	2	1	1	2	11	7	7	2	1	1	2	5	1
			4																				
			6																				
		2	10																				
			6																				
			6																				
			18																				
			20																				
2	5	5	2																				
1	3	3	1																				
1	3	3	1																				
2	5	5	2																				
			18																				

LOGIGRAPHE N° 41

									1	1	1	2	3										
									1	1	1	1	3	2	1	1	1						
			7	7	7	7	5	11	1	1	1	1	2	1	1	1	1	11	5	7	7	7	7
			3																				
			11																				
		1	1	1																			
4		1	1	4																			
		6	1	6																			
		6	1	6																			
			11	7																			
			6	6																			
			6	6																			
4		1	1	4																			
		1	1	1																			
			11																				



BANDERA DE CAMPEONES

Carlitos eligió las mejores fotos de sus 16 campeones predilectos, compró un poco de tela, y fue hasta la fotocopiadora laser más cercana para dejar estampados a sus ídolos en esta singular bandera. Usando las pistas y la figura, descubra en qué lugar aparecerá cada cabballero.

1. Hay cuatro campeones de ajedrez (Fischer, Karpov, Kasparov y Spassky), cuatro de Fórmula 1 (Clark, Fangio, Fittipaldi y Prost), cuatro de fútbol (Beckenbauer, Cruyff, Maradona y Pelé), y cuatro de tenis (Agassi, Borg, Lendl y Vilas).
2. En cada fila y cada columna hay fotos de cuatro disciplinas diferentes.
3. Fangio está en un cuadro impar, justo bajo Pelé y a la izquierda de un tenista.
4. Jim Clark, Franz Beckenbauer, Garry Kasparov y Guillermo Vilas aparecen en este orden, de arriba hacia abajo.
5. Maradona está en la casilla número 10. En esa misma diagonal aparecen dos campeones de ajedrez.
6. La foto de Spassky está justo a la izquierda de la de Agassi y ésta, justo sobre la de Bobby Fischer.
7. Beckenbauer, Prost y Fittipaldi aparecen en diagonal, en este orden.
8. Anatoli Karpov aparece bajo Björn Borg.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



JUEGOS DE LOGICA: COMO RESOLVERLOS

Los juegos de lógica son todos aquellos que se pueden resolver por pura deducción. En los enigmas de Quién es Quién, donde se trata de correlacionar ciertas características (nombre, apellido, profesión, edad, etc.) le proponemos el uso de diagramas de múltiple entrada. Aquí le decimos cómo se puede ir resolviendo un caso sencillo.

TE PARA TRES

Tres amigas se reúnen a tomar el té. Deduzca nombre, apellido y actividad de cada una.

1. Beatriz no es García.
2. López trabaja como secretaria en una oficina.
3. La actriz se llama Claudia.
4. La maestra no es Méndez.

(En estos juegos no hay dos variables con una misma cualidad. Es decir que aquí tenemos tres mujeres con nombres y apellidos distintos y con trabajos también distintos.)

SOLUCION

En el esquema vamos a indicar con una cruz (X) las relaciones que no valen y que entonces quedan eliminadas y con un círculo (O) las relaciones correctas.

Por pista 1 colocamos una X en el cruce de Beatriz con García:

		APELLIDO			ACTIVID.		
		García	López	Méndez	Actriz	Maestra	Secretaria
NOMBRE	Alicia						
	Beatriz	X					
	Claudia						
ACTIVID.	Actriz						
	Maestra						
	Secretaria						

La pista 2 nos da una relación correcta: López es secretaria. Colocamos un O en el cruce de secretaria con López. Al marcar un O en un sector, todas las casillas de su horizontal y su vertical deben llenarse con X pues quedan eliminadas. En este caso, en el sector ACTIVIDAD-APELLIDO, colocamos las X en las casillas secretaria-García, secretaria-Méndez, actriz-López y maestra-López. El esquema queda así:

4

		APELLIDO			ACTIVID.		
		García	López	Méndez	Actriz	Maestra	Secretaria
NOMBRE	Alicia						
	Beatriz	X					
	Claudia						
ACTIVID.	Actriz		X				
	Maestra		X				
	Secretaria	X	O	X			

Incorpore usted en el esquema los datos correspondientes a las pistas 3 y 4. Si siguió nuestras indicaciones, el esquema deberá verse así:

		APELLIDO			ACTIVID.		
		García	López	Méndez	Actriz	Maestra	Secretaria
NOMBRE	Alicia				X		
	Beatriz	X			X		
	Claudia				O	X	X
ACTIVID.	Actriz		X				
	Maestra		X	X			
	Secretaria	X	O	X			

En el sector ACTIVIDAD-APELLIDO quedan ahora determinadas dos relaciones correctas: maestra-García y actriz-Méndez. Incorpore usted los O correspondientes. Observe que Claudia es la actriz y que la actriz es Méndez, por lo tanto Claudia es Méndez. Así obtiene otra relación correcta.

Usted está en condiciones de completar la solución. Compare su respuesta con la nuestra:

NOMBRE	APELLIDO	ACTIVIDAD
Alicia	García	Maestra
Beatriz	López	Secretaria
Claudia	Méndez	Actriz

Si este juego lógico le gusta, Logic le apasionará

Instrucciones

- ☆ Traslade los datos numerados a las casillas del esquema.
- ☆ Los datos negativos márkelos con una cruz (X) en el cruce correspondiente.
- ☆ Los datos positivos, con un círculo (O).
- ☆ Cada dato positivo le permite automáticamente marcar otros negativos. (Fíjese en los ejemplos).
- ☆ Después de anotados todos los datos, utilice su deducción para completar el resto.

DATOS

UN VERANO MOVIDITO

Todos nuestros vecinos han vuelto de las vacaciones bien bronceados, alegres y con bonitos trofeos obtenidos al ganar los torneos organizados en las playas. Deduzca dónde triunfó cada familia.

1. Los Marini no fueron al "Riazor" ni al otro balneario donde se jugó el torneo de pelota a paleta.
2. La familia que ganó el torneo de voley playero ocupaba una carpa verde.
3. Ni las carpas del "Marbella" son azules, ni las del "Atlántico" son amarillas.
4. Los López (que no ocuparon una carpa amarilla) participaron en el torneo de tejo.

		BALNEARIO			CARPAS			TORNEO DE		
		"Atlántico"	"Marbella"	"Riazor"	Amarillas	Azules	Verdes	Pelota	Tejo	Voley
FAMILIA	López							X	O	X
	Marini								X	
	Palmieri								X	
TORNEO DE	Pelota									
	Tejo									
	Voley									
CARPAS	Amarillas									
	Azules									
	Verdes									

Solución en pág. 66

Logic REVISTA MENSUAL

Si prefiere suscribirse podrá recibir un total de 24 ediciones al año.
(12 números ordinarios y 12 extraordinarios)

PRECIO DE LA SUSCRIPCIÓN ANUAL
4600 Ptas. (Incl. IVA)

A la venta en su quiosco



UN ALTO EN EL CAMINO

Sólo tres viajeros se han detenido en el único bar de la polvorienta ruta. Deduzca qué bebió y qué comió cada uno, sabiendo que:

1. Al ver el aspecto de la salchicha que estaba comiendo John (que no bebió agua), el del jeep pidió otra cosa para acompañar su cerveza.
2. Kevin (que no pidió huevos y jamón) estacionó su camión entre el jeep y la moto.
3. El primer parroquiano pidió whisky y el último, huevos y hamburguesa.

VIAJERO	VEHICULO	BEBIDA	HUEVOS Y
Dave			
John			
Kevin			

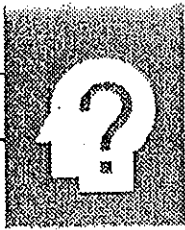


¡MUSICA, MUSICA!

Vivir en un edificio con tres vecinos músicos tiene sus encantos... y sus inconvenientes. Deduzca qué estudia y cuántas horas practica cada uno, sabiendo que:

1. Entre los tres, practican exactamente 12 horas.
2. El que estudia clarinete vive dos pisos más abajo que quien practica durante 5 horas.
3. Lepont vive dos pisos más arriba que el pianista.
4. El violinista vive en el 8° y practica una hora menos que Marasco (que no vive en el 6°).
5. García practica una hora más que el del 4°.

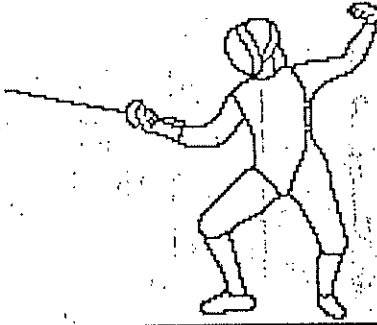
VECINO	PISO	ESTUDIA	HORAS
García			
Lepont			
Marasco			



DE CAPA Y ESPADA

Practicando esgrima con sus criados, varios nobles recibieron algunos arañazos. Deduzca dónde y con qué arma hirió cada empleado a su patrón.

- Ni Jaspers usaba florete, ni el otro que hirió al duque usaba espada.
- El del sable apenas rozó la mejilla de su patrón, que no es el marqués.
- Jurgens no trabaja para el conde ni para el otro noble que resultó herido en la nariz.
- Jenkins no trabaja para el marqués ni para el otro hombre que quedó herido en el mentón.



		HIRIO A			EN			CON		
		Conde	Duque	Marqués	Mejilla	Mentón	Nariz	Espada	Florete	Sable
CRIADO	Jaspers									
	Jenkins									
	Jurgens									
CON	Espada									
	Florete									
	Sable									
EN	Mejilla									
	Mentón									
	Nariz									

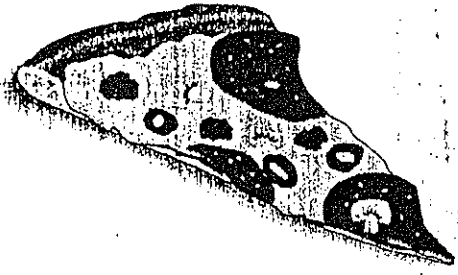
CRIADO	HIRIO A	EN	CON



PIZZA A DOMICILIO

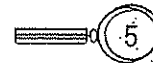
Carlitos trepó a su moto y corrió a entregar las pizzas encargadas por varias familias que viven en un mismo edificio. Deduzca cuánto recibió como propina cada vez.

- Quienes le dieron 1,50 \$ viven tres pisos más abajo que los Romero.
- Ni los Morales ni los otros del 8° pidieron pizza de anchoas.
- Los que pidieron pizza de morrones le dieron 50 centavos menos que los del 5° piso.
- Los del 2° (que no se apellidan Franco) encargaron la pizza de palmitos.
- Los Morales le dieron 50 centavos más que los Romero.



PIZZA	FAMILIA			PISO			PROPINA		
	Franco	Morales	Romero	2º	5º	8º	0,50 \$	1,00 \$	1,50 \$
Anchoas									
Morrones									
Palmitos									
PROPINA									
PISO									
2º									
5º									
8º									

PIZZA	FAMILIA	PISO	PROPINA



Abuelas ejemplares

Después de criar a los hijos y mientras mimaba a los nietos, cada una de estas señoras decidió seguir por fin su vocación y comenzó a estudiar. Deduzca las relaciones correctas sabiendo que este "quién es quién" es un poco diferente pues las pistas no son afirmaciones, sino que todas expresan una condición: cada una indica que "si pasa tal cosa, entonces sucede tal otra". En el recuadro le explicamos

cómo manejarse con los condicionales, lo cual ayudará a extraer conclusiones. Guiándose por éstas reglas, vaya viendo cuáles datos pueden ser verdaderos y cuáles falsos. Si aparece alguna contradicción, es señal de que el camino seguido no lleva a la solución. En este caso, revise lo andado y comience de nuevo.

1. Si la mayor estudia teatro, entonces Mercedes estudia pintura.
2. Si Mercedes estudia pintura, entonces Ofelia es la menor.
3. Si Ofelia es la menor, entonces la que tiene más nietos estudia teatro.
4. Si la que tiene más nietos estudia teatro, entonces la menor es la que tiene más nietos.
5. Si la de 61 años no tiene 8 nietos, entonces la mayor estudia teatro.
6. Si la mayor no tiene 8 nietos, entonces Néliida estudia canto.
7. Si Néliida estudia canto, entonces la de 62 años estudió violín.
8. Si Néliida no tiene 62 años, entonces la que tiene 10 nietos estudia pintura.
9. Si la de 61 años no estudia pintura, entonces Mercedes tiene 10 nietos.

COMO USAR LAS PISTAS

- Cada pista tiene la forma "Si pasa A, entonces pasa B".
- Cuando A es verdadero, por fuerza B también lo es.
- Cuando A es falso, no se pueden sacar conclusiones sobre B: B puede ser verdadero o falso.
- Cuando B es falso, A también es falso.
- Cuando B es verdadero, no se pueden sacar conclusiones sobre A: A puede ser verdadero o falso.

	Abuela		Edad				Nietos				Estudia						
			60	61	62	63	8	9	10	11	Canto	Pintura	Teatro	Violín			
	Mercedes																
	Néliida																
	Ofelia																
	Paula																
	Canto																
	Pintura																
	Teatro																
	Violín																
	8																
	9																
	10																
	11																



LA CIGÜEÑA NO ESPERA

En las horas de la tarde de ayer nacieron cinco hermosos bebés en la Clínica Nac & Mientos. Establezca a qué hora nació cada uno, qué peso acusó la balanza y quién fue el médico obstetra.

1. El bebé de la mamá asistida por el doctor Linares pesó más que el de la mamá atendida por el doctor Campoy.
2. Rodrigo nació a las 16:00.
3. El Dr. Santos tomó parte en el alumbramiento del bebé de 3,400 kg. de peso (que no es Rodrigo).
4. Flavio, que no pesó 3,600 kg., nació a las 14:00.
5. Intervino en el parto el Dr. Vega.
6. El bebé de la mamá que asistió el Dr. Macetti llegó al mundo a las 18:00 con un peso de 3,700 kg. No se llama Ariel.
7. Sebastián, que pesó 3,500 kg., nació antes que Ariel.

		HORA					PESO EN KILOS					OBSTETRA					
		14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	3,300	3,400	3,500	3,600	3,700	Campoy	Linares	Macetti	Santos	Vega	
BEBE	Ariel																
	Diego																
	Flavio																
	Rodrigo																
	Sebastián																
OBSTETRA	Campoy																
	Linares																
	Macetti																
	Santos																
	Vega																
PESO EN KILOS	3,300																
	3,400																
	3,500																
	3,600																
	3,700																

BEBE	HORA	PESO EN KILOS	OBSTETRA



EL HOMBRE OCUPADO

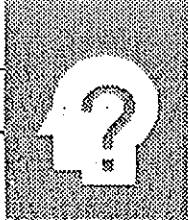
Soy un importante ejecutivo y, para demostrarlo, voy a abrir mi agenda delante de los lectores. Como se ve, la semana que viene es muy agitada para mí. Descubra cuál es mi actividad diaria, a qué hora y en qué ciudad.

1. El lunes no estoy en Miami.
2. La junta de Barcelona comienza una hora más tarde que la conferencia.
3. Dos días después del congreso tengo que estar en París, justo a las 18 horas.
4. Un compromiso (que no es el seminario) es el miércoles a las 17:00 horas.
5. El jueves estoy en Buenos Aires, pero no para la entrevista.
6. La reunión de Belgrado (que no es un congreso) es a las 15:00 horas (pero no el martes).

	COMPROMISO	DIA					HORA					CIUDAD				
		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	Barcelona	Belgrado	Buenos Aires	Miami	París
COMPROMISO	Conferencia															
	Congreso															
	Entrevista															
	Junta															
	Seminario															
CIUDAD	Barcelona															
	Belgrado															
	Buenos Aires															
	Miami															
	París															
HORA	14:00															
	15:00															
	16:00															
	17:00															
	18:00															



COMPROMISO	DIA	HORA	CIUDAD



FORMAS EXACTAS

Cinco profesoras nos dieron problemas matemáticos que requieren una solución con una figura geométrica. Descubra qué elementos necesitamos para cada materia y en qué tipo de material deben presentarse los trabajos.

1. El círculo en tinta es para la carpeta de física.
2. La profesora de dibujo (que tiene alergia a las tizas) considera antiestético las figuras hexagonales.
3. Las rectas del pentágono deben trazarse con marcador.
4. El modo más fácil de hacer un hexágono es utilizando una regla.
5. El compás (que no es necesario para aritmética) tiene una punta con tiza.
6. El triángulo (hecho con la ayuda de una escuadra) no puede diseñarse con témperas.
7. El transportador se usa para la carpeta de álgebra.

	MATERIA	FIGURA					INSTRUMENTO					PINTURA				
		Círculo	Cuadrado	Hexágono	Pentágono	Triángulo	Calculadora	Compás	Escuadra	Regla	Transportad.	Lápiz	Marcador	Témpera	Tinta	Tiza
	Algebra															
	Aritmética															
	Dibujo															
	Física															
	Geometría															
	Lápiz															
	Marcador															
	Témpera															
	Tinta															
	Tiza															
	Calculadora															
	Compás															
	Escuadra															
	Regla															
	Transportador															



MATERIA	FIGURA	INSTRUMENTO	PINTURA



DESDE ESTAS SOLEADAS PLAYAS

Así comienza cada uno de los mensajes que el pobre Juan recibió esta semana. Acompáñelo mientras espera que las mujeres de la familia regresen de las vacaciones, y deduzca las relaciones correctas sabiendo que este "quién es quién" es un poco diferente pues las pistas no son afirmaciones, sino que todas expresan una condición: cada una indica que "si pasa tal cosa, entonces sucede tal otra". En el recuadro le explicamos cómo manejarse con los condicionales, lo cual ayudará a extraer conclusiones. Guiándose por estas reglas, vaya viendo cuáles datos pueden ser verdaderos y cuáles falsos. Si aparece alguna contradicción, es señal de que el camino seguido no lleva a la solución. En este caso, revise lo andado y comience de nuevo.

1. Si Matilde está en Miami, entonces el telegrama llegó desde Cancún.
2. Si el telegrama llegó desde Cancún, entonces la madre está en Capri.
3. Si la madre está en Capri, entonces Irene es la esposa.
4. Si Irene es la esposa, entonces Matilde es la madre.
5. Si Victoria no está en Cancún, entonces Matilde está en Miami.
6. Si Victoria está en Cancún, entonces la tía está en Ibiza.
7. Si la tía está en Ibiza, entonces la postal llegó desde Miami.
8. Si la postal llegó desde Miami, entonces Carolina envió un e-mail.
9. Si Carolina envió un e-mail, entonces la madre envió una carta.
10. Si la madre envió una carta, entonces la hija está en Cancún.

COMO USAR LAS PISTAS

- Cada pista tiene la forma "Si pasa A, entonces pasa B".
- Cuando A es verdadero, por fuerza B también lo es.
- Cuando A es falso, no se pueden sacar conclusiones sobre B: B puede ser verdadero o falso.
- Cuando B es falso, A también es falso.
- Cuando B es verdadero, no se pueden sacar conclusiones sobre A: A puede ser verdadero o falso.

		ES LA				DESDE				MANDO			
		Esposa	Hija	Madre	Tía	Cancún	Capri	Ibiza	Miami	Carta	E-mail	Postal	Telegrama
PARIENTA	Carolina												
	Irene												
	Matilde												
	Victoria												
MANDO	Carta												
	E-mail												
	Postal												
	Telegrama												
DESDE	Cancún												
	Capri												
	Ibiza												
	Miami												





BIENES BIEN REPARTIDOS

Cuando el albacea leyó el testamento de Don Silvester Lonely, un huraño anciano que acaba de morir, muchos quedaron sorprendidos. Deduzca quiénes heredaron sus bienes, sabiendo que este "quien es quién" es un poco diferente pues las pistas no son afirmaciones, sino que todas expresan una condición: cada una indica que "si pasó tal cosa, entonces sucede tal otra". En el recuadro, le explicamos cómo manejarse con los condicionales, lo cual ayudará a extraer conclusiones. Guiándose por estas reglas, vaya viendo cuáles datos pueden ser verdaderos y cuáles falsos. Si aparece alguna contradicción, es señal de que el camino seguido no lleva a la solución. En este caso, revise lo andado y comience de nuevo.

1. Si Graves no heredó los muebles, entonces el empleado heredó los cuadros.
2. Si el empleado heredó los cuadros, entonces Moffitt es el empleado.
3. Si Dennis es el amigo, entonces el vecino heredó la casa.
4. Si Graves heredó los muebles, entonces Dennis es el amigo.
5. Si Moffitt es el empleado, entonces Graves heredó los muebles.
6. Si el vecino heredó la casa, entonces el empleado heredó las joyas.
7. Si el empleado no heredó los cuadros, entonces Charles se apellida Jackson.
8. Si Charles se apellida Jackson, entonces Moffitt heredó las joyas.
9. Si Moffitt es el empleado, entonces Horace es el sobrino.
10. Si Aldus heredó las joyas, entonces Dennis se apellida Graves.

COMO USAR LAS PISTAS

- Cada pista tiene la forma "Si pasa A, entonces pasa B".
- Cuando A es verdadero, por fuerza B también lo es.
- Cuando A es falso, no se pueden sacar conclusiones sobre B: B puede ser verdadero o falso.
- Cuando B es falso, A también es falso.
- Cuando B es verdadero, no se pueden sacar conclusiones sobre A: A puede ser verdadero o falso.

		APELLIDO				RELACION			HEREDO				
		Blair	Graves	Jackson	Moffitt	Amigo	Empleado	Sobrino	Vecino	Casa	Cuadros	Joyas	Muebles
NOMBRE	Aldus												
	Charles												
	Dennis												
	Horace												
HEREDO	Casa												
	Cuadros												
	Joyas												
	Muebles												
RELACION	Amigo												
	Empleado												
	Sobrino												
	Vecino												



XIX Reunión de Educación Matemática (Unión Matemática Argentina),
Salta (Argentina), 16.– 20 de septiembre de 1996.

**EL METODO DE BIFURCACION Y SU APLICACION EN
EL METODO PROGRESIVO-REGRESIVO.
UNA METODOLOGIA QUE INCENTIVA LA
CREATIVIDAD EN MATEMATICA**

Domingo Alberto TARZIA

Departamento Matemática, FCE, Univ. Austral
Paraguay 1950, (2000) Rosario.
Tel.: (041) 814990 ; Fax: (041) 810505 ;
E-mail: tarzia@uaufce.edu.ar
y CONICET.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia del método de bifurcación para resolver problemas y realizar demostraciones en Matemática. Es un valioso complemento para la aplicación del método progresivo, y por ende del método progresivo – regresivo.

El método de bifurcación consiste en el siguiente principio: "LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA PUEDE REALIZARSE A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE N ($N \geq 1$) PROBLEMAS MÁS SIMPLES QUE EL PRIMERO Y ASÍ SUCESIVAMENTE".

El método de bifurcación puede ser interpretado, en algún sentido, como la justificación lógica – matemática del método de tanteo el cual se utiliza cuando no se conoce cómo resolver un problema o demostrar una proposición. La aplicación del método de bifurcación permite detectar si un problema tiene una o varias soluciones y, en consecuencia, da una metodología para hallar todas las soluciones de dicho problema. Dicha metodología incentiva la creatividad en Matemática.

Se presentan numerosos ejemplos, con diversas dificultades, a través de los cuales se puede apreciar la potencialidad del método de bifurcación, ya sea en su forma simple o en su forma condicionada.

INTRODUCCIÓN.

Una de las mayores dificultades en la resolución de problemas y en la realización de demostraciones en Matemática es la de encarar la resolución del problema o la de demostrar una proposición, es decir encontrar una metodología de trabajo o concebir un plan que a través de su ejecución se logrará la solución deseada. Dicha dificultad se acrecienta enormemente cuando la solución no es única. Por ende es de fundamental importancia encontrar una metodología que permita encontrarlas a todas.

El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia del método de bifurcación para resolver problemas y realizar demostraciones en Matemática. Es un valioso complemento para la aplicación del método progresivo, y por ende del método progresivo – regresivo.

El método de bifurcación consiste en el siguiente principio: "LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA PUEDE REALIZARSE A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE N ($N \geq 1$) PROBLEMAS MÁS SIMPLES QUE EL PRIMERO Y ASÍ SUCESIVAMENTE".

El método de bifurcación puede ser interpretado, en algún sentido, como la justificación lógica – matemática del método de tanteo el cual se utiliza cuando no se conoce cómo resolver un problema o demostrar una proposición. La aplicación del método de bifurcación permite detectar si un problema tiene una o varias soluciones y, en consecuencia, da una metodología para hallar todas las soluciones de dicho problema. Dicha metodología incentiva la creatividad en Matemática, que se logra a través de la resolución de problemas que tengan muchas soluciones.

El presente estudio se restringirá a la resolución de problemas, muchos de los cuales son muy simples (para nivel primario), que permitirán apreciar la potencialidad del método de bifurcación.

Se presentan numerosos ejemplos, con diversas dificultades, que serán resueltos a través del método de bifurcación. Se clasifica de dos maneras: forma simple o forma condicionada. La clasificación se define de manera que la bifurcación sea independiente (forma simple) o dependiente (forma condicionada) de que una cierta condición o restricción se verifique.

I. FORMA SIMPLE DEL MÉTODO DE BIFURCACIÓN (BIFURCACIÓN SIMPLE).

A continuación se enunciarán seis problemas, para los cuales (algunos tienen varias soluciones) la aplicación del método de bifurcación es decisivo. La resolución de los problemas se encuentran al final del texto.

I.1) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación y encuentre todas las soluciones:

$$\begin{array}{rcccc}
 & 6 & \dots & \dots & 1 \\
 + & 7 & 9 & 7 & \dots \\
 \hline
 1 & 4 & \dots & 9 & \dots
 \end{array}$$

Definición: Un cuadrado se dice mágico respecto de la operación suma cuando la suma de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

I.2) Complete el siguiente cuadrado mágico con los números naturales, del 1 al 9, con constante 15.
¿La solución es única ?

8
.....	5
.....

I.3) Reemplace cada letra (A, D, M, N, O, R, S, U) por un número natural, del 1 al 9, de modo que se verifique el resultado dado teniendo en cuenta que a una misma letra le corresponde siempre el mismo número.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & S & U & M & A & N & D & O \\
 + & & & S & U & M & A & R \\
 \hline
 & 9 & 8 & 3 & 1 & 5 & 0 & 7
 \end{array}$$

Se solicita:

(i) Halle todas las posibles soluciones en el caso en que a letras diferentes correspondan números diferentes.

(ii) ¿Qué sucede si los números correspondientes a letras diferentes pueden repetirse ?

I.4) Reemplace cada letra (H, E, S) por un número entero, del 0 al 9, de modo que se verifique:

$$(HE)^2 = SHE$$

I.5) La última línea del cuadro debe llenarse con cuatro de los números que aparecen más arriba. En cada línea se indica cuantos números en común tiene ese grupo con el que falta. La B de "bien" significa que los números aparecen en la misma posición, y la R de "regular", que están en posición cambiada. Con nB y mR se indican, desde la columna de la derecha, que existen n números en posición correcta y m números en posición regular. ¿Cuál es la combinación correcta?

4	1	5	2	—	2 B
5	1	3	2	1 R	2 B
5	1	2	6	2 R	1 B
1	2	3	4	3 R	—
?	?	?	?	—	4 B

I.6) La última línea del cuadro debe llenarse con cinco de los números que aparecen más arriba. En cada línea se indica cuantos números en común tiene ese grupo con el que falta. La B de "bien" significa que los números aparecen en la misma posición, y la R de "regular", que están en posición cambiada. Con nB y mR se indican, desde la columna de la derecha, que existen n números en posición correcta y m números en posición regular. ¿Cuál es la combinación correcta?

1	2	3	4	5	3 R	—
3	6	2	7	1	3 R	—
3	2	8	1	9	3 R	—
2	1	4	6	8	1 R	1 B
5	1	9	2	7	3 R	—
2	3	5	9	6	2 R	—
?	?	?	?	?	—	5 B

II. FORMA CONDICIONADA DEL MÉTODO DE BIFURCACIÓN. (BIFURCACIÓN CONDICIONADA).

El método de bifurcación en su forma condicionada aparece cuando la bifurcación se debe realizar siempre y cuando una cierta condición o restricción se verifica.

A continuación se enunciará un problema, que tiene varias soluciones, para el cual la aplicación del método de bifurcación, en su forma condicionada, es decisivo. La resolución del problema se encuentra al final del texto.

II.7) Cada letra utilizada (A, C, E, I, M, N, T) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera de obtener la mayor MACANA posible, siendo:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & M & A & T & E \\ + & M & A & T & I & C & A & \\ \hline & & & & M & A & C & A & N & A \end{array}$$

para los siguientes casos:

- (i) A letras diferentes deben corresponder números diferentes;
- (ii) A letras diferentes pueden corresponder números iguales.

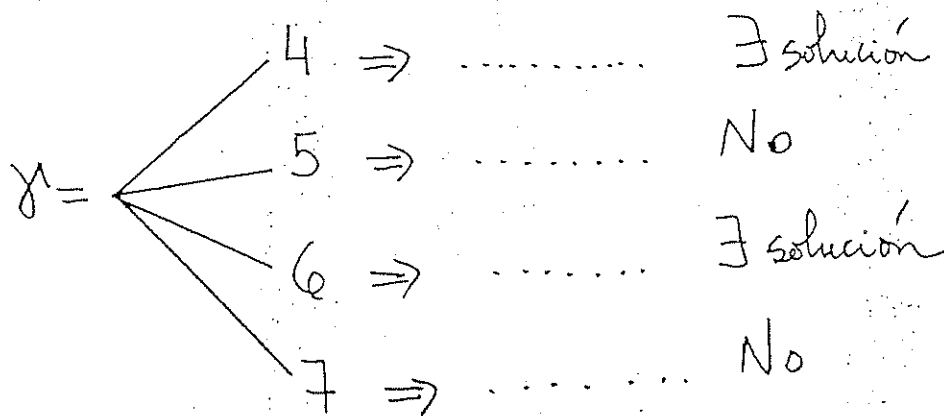
A continuación se indican las resoluciones de los siete problemas a través de la aplicación del método de bifurcación. En algunos casos, la demostración detallada se omite por ser trivial o muy larga.

I.4) Resolución. - Se supone que la solución, si existe, viene dada por:

$$\begin{array}{r}
 \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \\
 + \quad 6 \quad 9 \quad 7 \quad \delta \\
 \hline
 14 \quad 6 \quad 9 \quad 5
 \end{array}$$

(a) $\beta=2$.

(b) Bifurcación:



Conclusión: Existen 2 soluciones dadas por:

$$\begin{array}{r}
 \quad 6 \quad 7 \quad 2 \quad 1 \\
 + \quad 7 \quad 9 \quad 7 \quad 4 \\
 \hline
 14 \quad 6 \quad 9 \quad 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \quad 6 \quad 5 \quad 2 \quad 1 \\
 + \quad 7 \quad 9 \quad 7 \quad 6 \\
 \hline
 14 \quad 4 \quad 9 \quad 7
 \end{array}$$

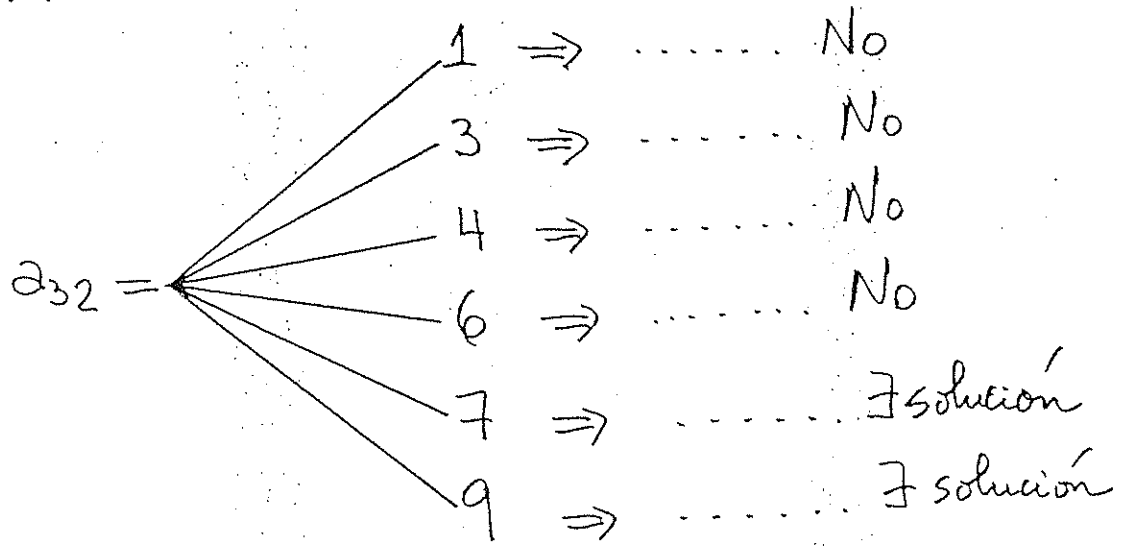
I.2) Resolución: se supone que la solución, si existe, viene dada por:

8	a_{12}	a_{13}
a_{21}	5	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

(a) $a_{33} = 2$.

(b) Bifurcación: Eligiendo el elemento a_{32} se tienen

6 casos:



Conclusión: Existen 2 soluciones

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

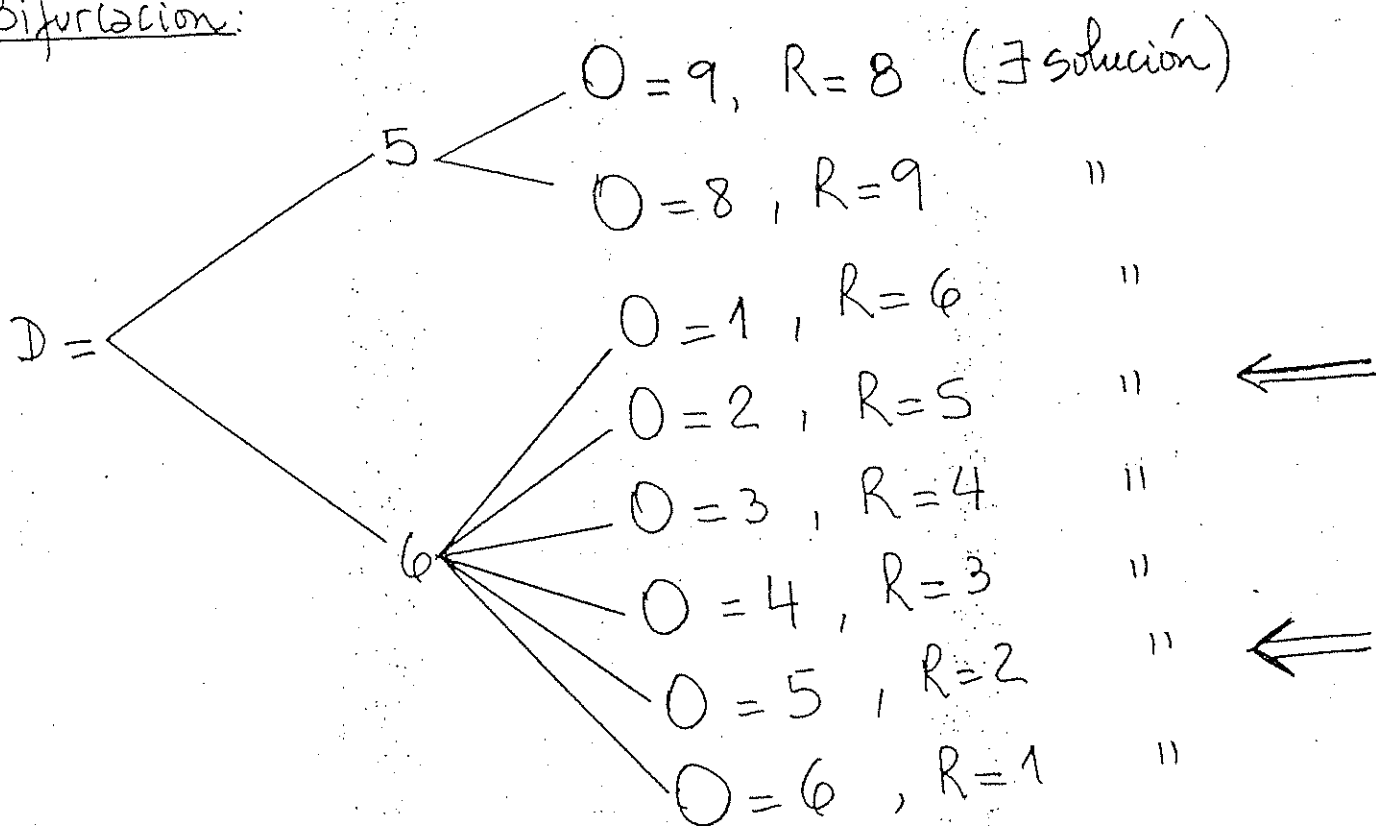
Observación: Si en lugar de elegir el elemento que va en una determinada casilla (a_{23} en nuestro caso) se elige las casillas a las que puede ir el número 9, entonces el problema se bifurca en dos, es decir $a_{23} = 9$, $a_{32} = 9$ que permiten obtener las dos soluciones. -8-

I.3.ii) Resolución

- (a) $S=9$
- (b) $U=7$
- (c) $M=3$
- (d) $N=1$
- (e) $A=4$
- (f) Resulta:

$$\begin{array}{r} + \quad D \quad O \\ \quad 4 \quad R \\ \hline 1 \quad 0 \quad 7 \end{array}$$

Bifurcación:



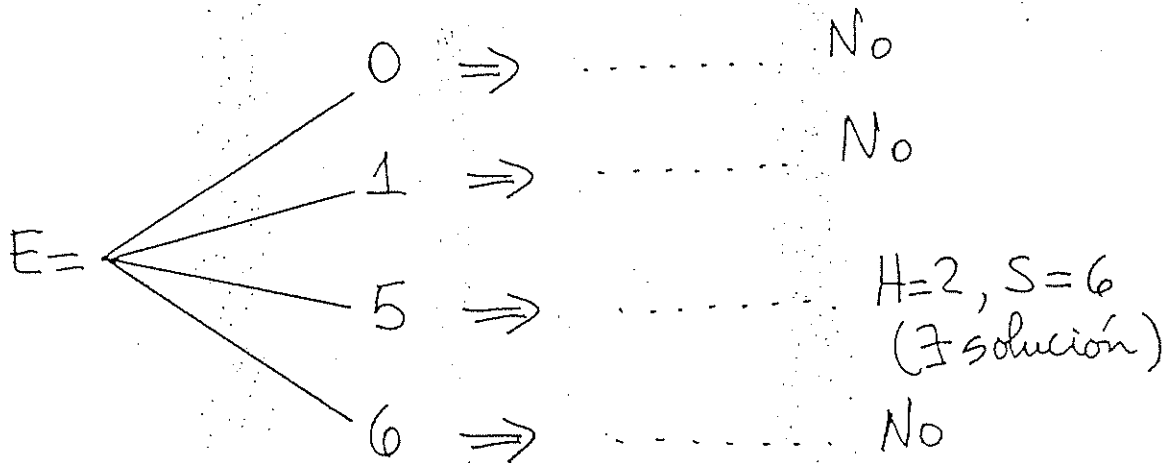
Conclusión: Existen 8 soluciones

(i) Existen 2 soluciones de las obtenidas en (ii), las cuales están marcadas con \leftarrow

I.4) Resolución. -

$$E^2 \equiv E \pmod{10} \Rightarrow$$

Bifurcación:



Conclusión: Existe una única solución

$$(25)^2 = 625$$

I.5) Resolución. - Se supone que la solución, si existe, viene dada por: α β γ δ .

La primera fila implica bifurcación:

$\alpha=4, \beta=1 \Rightarrow$	No
$\alpha=4, \gamma=5 \Rightarrow$	No
$\alpha=4, \delta=2 \Rightarrow$	No
$\beta=1, \gamma=5 \Rightarrow$	No
$\beta=1, \delta=2 \Rightarrow$	\exists solución
$\gamma=5, \delta=2 \Rightarrow$	No

Conclusión: Existe una única solución

3 1 6 2

I.6) Resolución. - Se supone que la solución, si existe, viene dada por: $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$.

La cuarta fila implica bifurcación:

$\alpha = 2 \Rightarrow \dots \dots \dots$ No

$\beta = 1 \Rightarrow \dots \dots \dots$ No

$\gamma = 4$

- el 2 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 1 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 6 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 8 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No

$\delta = 6$

\Rightarrow un elemento del $\{2, 1, 4, 8\}$ está regular

- el 2 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 1 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 4 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 8 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No

$\epsilon = 8$

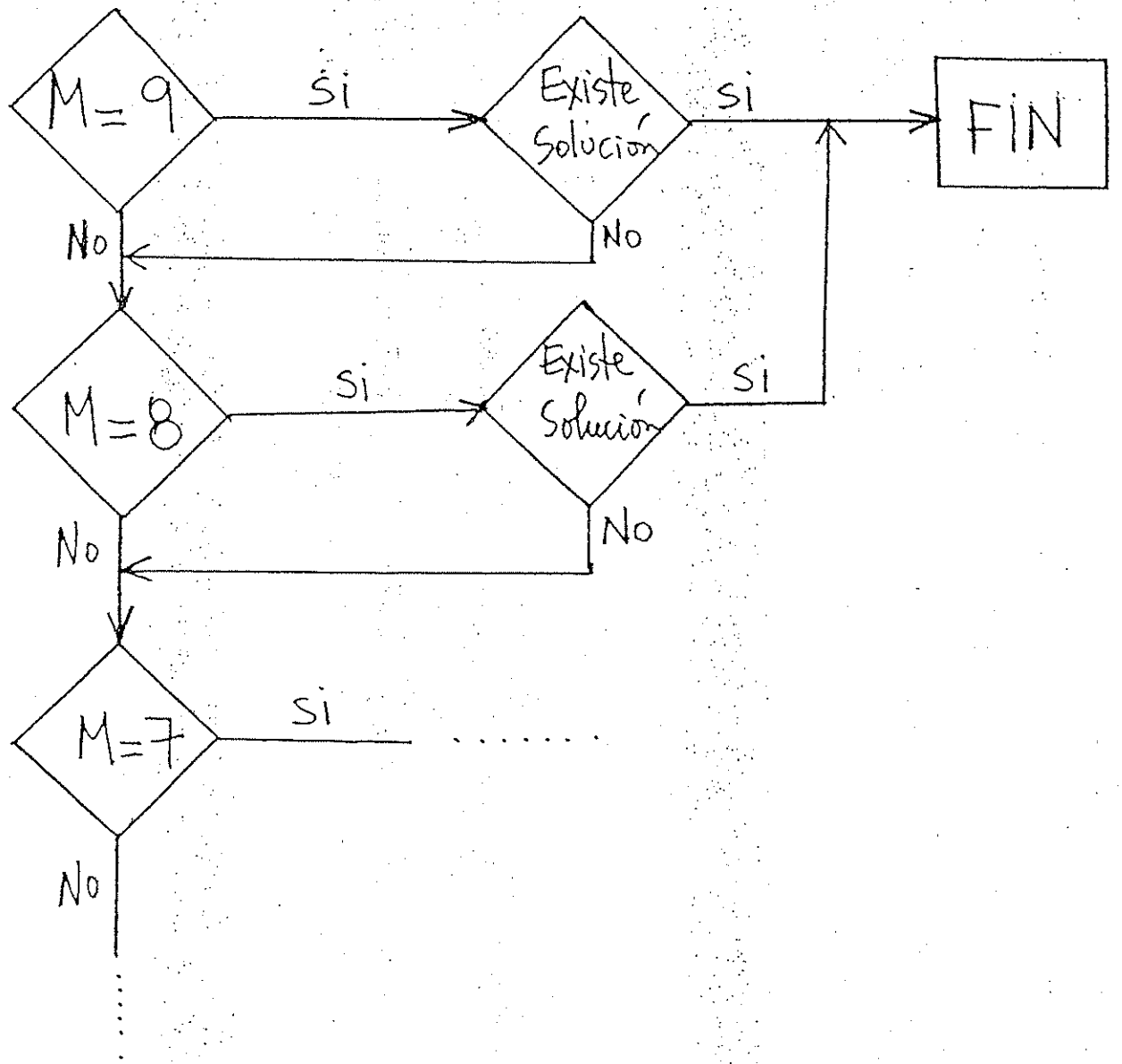
\Rightarrow un elemento del $\{2, 1, 4, 6\}$ está regular

- el 2 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 1 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ Isolado
- el 4 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No
- el 6 está regular $\Rightarrow \dots \dots \dots$ No

Conclusión: Existe una única solución

7 5 1 3 8

II.7) Resolución. - La mayor MACANA implica bifurcación condicionada:



(ii) Para $M=9$ existe solución $MACANA = 999.999$

(i)

$M=$	9	\Rightarrow	No
	8	\Rightarrow	No
	7	\Rightarrow	No
	6	\Rightarrow	No
	5	\Rightarrow	No
	4	\Rightarrow	No

\exists solución $MACANA = 478.717$

Conclusión: Existe una única solución: 478.717 para (i) y 999.999 para (ii).

BIBLIOGRAFÍA

- M. de GUZMÁN – J. COLERA – A. SALVADOR, "Matemáticas. Bachillerato 1", Anaya, Madrid (1993).
- OMA – Olimpiada Matemática Argentina, Red Olímpica, Buenos Aires.
- Olimpiada Matemática Ñandú, Red Olímpica, Buenos Aires.
- G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas", Trillas, México (1994).
- Revista La Nación, Buenos Aires.
- L.A. SANTALO, "Matemática 1. Iniciación a la creatividad", Kapelusz, Buenos Aires (1993).
- D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).
- D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", Partes I y II, Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral, Rosario (1995).
- D.A. TARZIA, "Matemática", Curso 3er. Ciclo del área Matemática para la Educación General Básica (Ley Federal de Educación), Red de Formación Docente Continua, Ministerio de Educación de la Prov. de Córdoba, Departamento de Matemática, FCE, UA, Rosario (1996) (80 páginas).

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)-814990 ; FAX: (041)-810505
E-Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

POSGRADO EN DIRECCIÓN DE EMPRESAS PDG'98

CURSO : MATEMÁTICA APLICADA

**"ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE
PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA.
PROBLEMAS, TRABAJOS PRÁCTICOS Y CASOS"**

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Abril 1998

PLAN A DESARROLLAR

En el presente módulo se presentan:

- un resumen de las definiciones y propiedades básicas en la teoría de la probabilidad y estadística [Me];
- la matemática de las distribuciones de probabilidades mas frecuentes (variables aleatorias discretas: binomial y Poisson; variables aleatorias continuas: normal y exponencial);
- se plantean actividades sobre probabilidad condicionada y tablas de contingencia (diagramas de arbol), probabilidad geométrica y probabilidad dinámica [CLGGLM];
- se plantean problemas, trabajos prácticos y casos no clásicos sobre el tema [CLGGLM, Kr, Me, Mi, SpBo, Th].

Para finalizar el tema se presentan:

- un modelo de fidelidad de marca para marketing y sus consecuencias matemáticas [Ta].
- las referencias básicas de la bibliografía utilizada.

I. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD.

Ejemplos de experimentos no determinísticos.

Se tratará de entender lo que se considera un experimento "aleatorio" o "no determinístico". (Más precisamente se darán ejemplos de fenómenos para los cuales los modelos no determinísticos son apropiados. Esta es una distinción que el lector deberá mantener presente. Así se refieren frecuentemente a experimentos no determinísticos o aleatorios, cuando de hecho se está hablando de un modelo no determinístico para un experimento.) No se pretende dar una definición precisa de diccionario para este concepto. En su lugar se darán numerosos ejemplos que la ilustran.

E_1 : Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.

E_2 : Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.

E_3 : Se lanza una moneda cuatro veces y se observa la sucesión de caras y sellos obtenidos.

E_4 : Se fabrica una lámpara eléctrica. Luego se prueba su duración conectándola en un portalámparas y se cuenta el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.

E_5 : Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.

E_6 : Se lanza un proyectil. Después de un tiempo determinado t , se anotan las tres componentes de la velocidad v_x, v_y, v_z .

E_7 : Un termógrafo marca la temperatura continuamente en un período de 24 horas. En un sitio y en una fecha señalados, "leer" dicho termógrafo.

¿Qué tienen en común los experimentos anteriores? Los siguientes aspectos son importantes para la descripción de un *experimento aleatorio*.

- Es posible repetir cada experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones.
- Aunque en general no se puede indicar cuál será un resultado *particular*, se puede describir el conjunto de *todos* los resultados *posibles* del experimento.
- A medida que el experimento se repite los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, como el experimento se repite un *gran* número de veces, aparece un patrón definido o regularidad. Esta regularidad hace posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual se analiza el experimento.

El espacio muestral.

Definición. Con cada experimento ϵ del tipo que se ha considerado, se define el *espacio muestral* como el conjunto de *todos* los resultados posibles de ϵ . Usualmente se designa este conjunto como S . (En nuestro contexto, S representa el conjunto universal descripto anteriormente).

Se considerará cada uno de los experimentos anteriores y se describirá el espacio muestral de cada uno. El espacio muestral S_i se referirá al experimento E_i .

- $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- $S_3 = \{\text{todas las sucesiones posibles de la forma } a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ donde } a_i = C \text{ ó } S \text{ según si aparece cara o ceca en el } i\text{-ésimo lanzamiento}\}.$

- $S_4 = \{t \mid t \geq 0\}.$

- $S_5 = \{10, 11, 12, \dots\}.$

- $S_6 = \{(v_x, v_y, v_z) \mid v_x, v_y, v_z \text{ son números reales}\}.$

- $S_7 =$ Este espacio muestral es el más importante de los que aquí se considera. Prácticamente se debe suponer que la temperatura en cierta localidad específica nunca puede subir o bajar con relación a ciertos valores, digamos M y m . Fuera de esta restricción, se debe admitir la posibilidad de que aparezca cualquier gráfica con determinadas características. Es posible que ésta no tenga saltos (esto es, representará una función continua). Además, la gráfica tendrá ciertas características de suavidad que pueden resumirse en forma matemática al decir que la gráfica representa una función diferenciable. Así, finalmente se puede enunciar que el espacio muestral es

$\{f \mid f \text{ es una función diferenciable, que satisface } m \leq f(t) \leq M, \text{ para todo tiempo } t\}.$

Será importante analizar de nuevo el número de resultados en un espacio muestral. Surgen tres posibilidades: el espacio muestral puede ser finito, infinito numerable, o infinito no numerable. Refiriéndose a los ejemplos anteriores, notemos que S_1, S_2 y S_3 son finitos, S_5 es infinito numerable y S_4, S_6 y S_7 son infinitos no numerables.

Eventos. Un evento A (respecto a un espacio muestral particular S asociado con un experimento ϵ) es un conjunto de resultados posibles. En la terminología de conjuntos, *un evento es un subconjunto del espacio muestral S* . En vista de lo expuesto previamente, esto significa que S es también un evento y también lo es el conjunto vacío \emptyset . Cualquier resultado individual también puede considerarse como un evento.

Los siguientes son ejemplos de eventos. Otra vez se referirá a los experimentos antes anotados: A_1 se referirá a un evento asociado con el experimento E_1 :

- A_1 Un número par ocurre; esto es, $A_1 = \{2, 4, 6\}.$

- $A_2 = \{2\}$; es decir, ocurren dos caras.

- $A_3 = \{CCCC, CCCS, CCSC, CCCC, SCCC\}$; es decir, salen más caras (C) que cecas (S).

- $A_4 = \{t \mid t < 3\}$; es decir, la lámpara se quema en menos de tres horas.

Cuando el espacio muestral S es finito o infinito numerable, *todo* subconjunto se puede considerar como un evento. Sin embargo, si S es infinito no numerable, aparece una dificultad teórica. Resulta que no cualquier subconjunto concebible se puede considerar como un evento. Por razones que escapan al nivel de esta presentación, ciertos subconjuntos "no admisibles" deben ser excluidos. Por fortuna, tales conjuntos no admisibles en realidad no aparecen en las aplicaciones y, por tanto, no interesarán aquí. En lo que sigue se supondrá tácitamente que cada vez que se mencione un evento será de la clase que está permitido considerar. Se pueden usar ahora los diversos métodos para combinar conjuntos (es decir, eventos) y obtener los nuevos conjuntos (es decir, eventos) que se presentó con anterioridad:

(a) Si A y B son eventos, $A \cup B$ es el evento que ocurre si y sólo si A ó B (o ambos) ocurren;

- (b) Si A y B son eventos, $A \cap B$ es el evento que ocurre si y sólo si A y B ocurren;
- (c) Si A es un evento, A^c es el evento que ocurre si y sólo si A no ocurre;
- (d) Si A_1, \dots, A_n es cualquier colección finita de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre;
- (e) Si A_1, \dots, A_n es cualquier colección finita de eventos, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos A_i ocurren simultáneamente.
- (f) Si A_1, \dots, A_n, \dots es cualquier colección finita (numerable) de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre.
- (g) Si A_1, \dots, A_n, \dots es cualquier colección infinita (numerable) de eventos, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos A_i ocurren simultáneamente.
- (h) Supóngase que S representa el espacio muestral asociado con un experimento ϵ y realizamos ϵ dos veces. Entonces $S \times S$ se puede utilizar para representar todos los resultados de esas dos repeticiones. Es decir, $(s_1, s_2) \in S \times S$ significa que s_1 resultó cuando se realizó ϵ la primera vez y s_2 cuando se realizó ϵ la segunda vez.
- (i) Evidentemente, el ejemplo h se puede generalizar. Se considera n repeticiones de un experimento ϵ cuyo espacio muestral es S . Entonces $S \times S \times \dots \times S = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \mid s_i \in S, i = 1, \dots, n\}$ representa el conjunto de todos los resultados posibles cuando ϵ se realiza n veces. En cierto sentido, $S \times S \times \dots \times S$ es un espacio muestral en sí mismo, o sea el espacio muestral asociado con n repeticiones de ϵ .

Eventos mutuamente excluyentes.

Definición. Se dice que dos eventos, A y B son *mutuamente excluyentes* si no pueden ocurrir juntos. Se expresa esto escribiendo $A \cap B = \emptyset$; es decir, la intersección de A y B es el conjunto vacío.

Frecuencia Relativa. Se supone que se repite n veces el experimento ϵ , y sean A y B dos eventos asociados con ϵ . Sean n_A y n_B el número respectivo de veces que el evento A y el evento B ocurrieron en las n repeticiones.

Definición. Se llama *frecuencia relativa* del evento A en las n repeticiones de ϵ al número dado por $f_A = n_A/n$.

La frecuencia relativa f_A tiene las siguientes propiedades importantes, que son verificables fácilmente:

- 1) $0 \leq f_A \leq 1$.
- 2) $f_A = 1$ si y sólo si A ocurre cada vez en las n repeticiones.
- 3) $f_A = 0$ si y sólo si A no ocurre en las n repeticiones.
- 4) Si A y B son dos eventos que se excluyen mutuamente y si $f_{A \cup B}$ es la frecuencia relativa asociada al evento $A \cup B$, entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
- 5) f_A , basada en las n repeticiones del experimento y considerada para una función de n , "converge" en cierto sentido probabilístico a $P(A)$ (probabilidad del evento A) cuando $n \rightarrow +\infty$.

Probabilidad de un evento.

Definición. Sea ϵ un experimento y S un espacio muestral asociado con ϵ . Con cada evento A se asocia un número real, designado con $P(A)$ y llamado *probabilidad de A* , el cual satisface las siguientes

propiedades:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P(S) = 1$.

3) Si A y B son dos eventos que se excluyen mutuamente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4) Si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ son eventos que se excluyen mutuamente dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Teorema. (i) Si \emptyset es el conjunto vacío, entonces $P(\emptyset) = 0$.

(ii) Si A^c es el evento complementario de A, entonces

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

(iii) Si A y B son eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(iv) Si A, B, y C son tres eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(v) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

II. EL ESPACIO MUESTRAL FINITO.

Se consideran sólo experimentos para los cuales el espacio muestral S consta de un número finito de elementos. La suposición que más comúnmente se hace para espacios muestrales finitos es que todos los resultados son igualmente probables. De ninguna manera esta suposición puede darse como un hecho; deberá justificarse con cuidado. En dicho caso, se puede definir la probabilidad de un evento de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\text{número de maneras en que } \epsilon \text{ puede ocurrir favorable a A}}{\text{número de maneras en que } \epsilon \text{ puede ocurrir}}$$

Es importante comprender que la expresión anterior de P(A) es sólo una consecuencia de la suposición de que todos los resultados son igualmente probables y sólo es aplicable cuando se satisface esta suposición. Sin duda no sirve como una definición general de probabilidad.

Métodos de enumeración.

A) Principio de multiplicación. Se supone que un procedimiento, designado como 1, puede hacerse de n_1 maneras. Se supone que un segundo procedimiento, designado como 2, se puede hacer de n_2 maneras. También se supone que cada una de las maneras de efectuar 1 puede ser seguida por cualquiera de las maneras de efectuar 2. Entonces el procedimiento que consta de 1 seguido por 2 se puede hacer de $n_1 n_2$ maneras.

Observación. Obviamente este principio puede extenderse a cualquier número de procedimientos. Si hay k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede hacer de n_i maneras, $i = 1, 2, \dots, k$ entonces el

procedimiento que consiste en 1, seguido por 2, ..., seguido por el procedimiento k puede hacerse de $n_1 n_2 \dots n_k$ maneras.

B) Principio de adición. Se supone que un procedimiento, designado con 1, se puede hacer de n_1 maneras. Se supone que un segundo procedimiento, designado con 2, se puede hacer de n_2 maneras. Se supone además que *no* es posible que *ambos*, 1 y 2, se hagan juntos. Entonces, el número de maneras de como se puede hacer 1 ó 2 está dado por $n_1 + n_2$.

Observación. También este principio puede generalizarse como sigue: si hay k procedimientos y el i -ésimo procedimiento se puede hacer en n_i maneras, $i = 1, 2, \dots, k$, entonces el número de maneras como se puede hacer el procedimiento 1, ó el procedimiento 2 ó ... ó el procedimiento k está dado por $n_1 + n_2 + \dots + n_k$, suponiendo que los procedimientos no se pueden realizar en forma conjunta.

C) Permutaciones.

a) Se supone que se tiene n objetos diferentes. ¿De cuántas maneras, se notará nPn , se pueden agrupar (permutar) estos objetos? En general, se considera el esquema siguiente. Agrupar los n objetos es equivalente a ponerlos, en algún orden específico, en una caja con n compartimientos. La primera casilla se puede llenar de cualquiera de las n maneras, la segunda de cualquiera de $(n - 1)$ maneras, ..., y la última casilla de sólo una manera. Por tanto, aplicando el principio de multiplicación anterior, se ve que la caja se puede llenar de $n(n - 1)(n - 2) \dots 1$ maneras.

Así el número de permutaciones de n objetos diferentes está dado por la expresión:

$$nPn = n!$$

b) De nuevo se considera n objetos diferentes. Esta vez se desea escoger r de esos objetos, $0 \leq r \leq n$, y se permuta el r elegido. Se indica el número de manera de hacerlo con nPr . Se recurre otra vez al esquema anterior de llenar una caja que tiene n compartimientos; ahora se detiene el proceso después que se ha llenado el compartimiento r -ésimo. Así, el primer compartimiento puede llenarse de n maneras, el segundo de $(n - 1)$ maneras, ..., y el r -ésimo compartimiento de $n - (r - 1)$ maneras. De este modo se puede realizar el procedimiento completo, usando de nuevo el principio de multiplicación, y se obtiene

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$

maneras. Usando la notación factorial, se puede escribir

$$nPr = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

Esta expresión también se conoce como *arreglo o variación*.

D) Combinaciones. Se considera nuevamente n objetos diferentes. Esta vez se está interesado en contar el número de maneras como se puede escoger r de esos n objetos sin considerar el orden.

Para obtener el resultado general se recuerda la fórmula derivada anteriormente: el número de maneras de elegir r objetos entre n y permutar los r elegidos es igual a $n!/(n - r)!$ Sea C el número

de maneras de elegir r entre n , sin considerar el orden. (Esto es, el número buscado es C .) Se observa que una vez que se han escogido los r artículos, hay $r!$ maneras de permutarlos. Por tanto, aplicando una vez más el principio de multiplicación, junto con el resultado anterior, se obtiene la expresión:

$$C r! = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Así, el número de maneras de elegir r entre n objetos diferentes, sin considerar el orden, está dado por

$$C = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

que se conoce como el número combinatorio de n tomado de a r .

Se generaliza el problema anterior. Supóngase que se tiene N artículos. Si se elige n de esos al azar, sin sustitución, hay $\binom{N}{n}$ muestras posibles diferentes, todas las cuales tienen la misma probabilidad de ser escogidas. Si los N artículos están formados de r_1 A 's y r_2 B 's (con $r_1 + r_2 = N$) entonces la probabilidad de que los n artículos elegidos contengan exactamente s_1 A 's y $(n-s_1)$ B 's está dada por

$$\frac{\binom{r_1}{s_1} \binom{r_2}{n-s_1}}{\binom{N}{n}}.$$

La anterior se llama *probabilidad hipergeométrica*.

Observación: Es muy importante especificar, cuando se habla de escoger artículos al azar, si se lo hace con o sin sustitución. En una descripción más realista se propondrá esta última. Por ejemplo, cuando se inspecciona un número de artículos manufacturados con el propósito de descubrir cuántos defectuosos podría haber, en general, no se pretende inspeccionar el mismo artículo dos veces. Previamente se ha observado que el número de maneras de escoger r objetos entre n , sin considerar el orden está dado por $\binom{n}{r}$. El número de maneras de escoger r artículos entre n , con sustitución, está dado por n^r . Aquí se está interesado en el orden en que se escogieron los artículos.

E) Permutaciones cuando no todos los objetos son diferentes. En todos los métodos de enumeración presentados se ha supuesto que todos los objetos considerados eran diferentes (esto es, distinguibles). Sin embargo, no siempre este es el caso. Se supone, entonces, que se tiene n objetos tales que hay n_1 de una clase, n_2 de una segunda clase, ..., n_k de una k -ésima clase, donde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Entonces, el número de permutaciones de estos n objetos está dada por

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Nótese que si todos los objetos son diferentes, se tiene $n_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, y, por tanto, la fórmula anterior se reduce a $n!$, el resultado obtenido en forma previa.

III. PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA.

Probabilidad condicional. Sean A y B dos eventos asociados con un experimento ϵ . Se indica con $P(B/A)$ la *probabilidad condicional del evento B, dado que A ha ocurrido*. Cada vez que se calcula $P(B/A)$, esencialmente se está calculando $P(B)$ respecto al espacio muestral reducido A, en vez de espacio muestral original S. Cuando se calcula $P(B)$ se pregunta qué tan probable es que se esté en B, sabiendo que se debe estar en S, y cuando se evalúa $P(B/A)$ se pregunta qué tan probable es que se esté en B, sabiendo que se debe estar en A (es decir, el espacio muestral se ha reducido de S a A.).

Definición. Se define

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

siempre que sea $P(A) > 0$.

Definición. Se dice que los eventos B_1, B_2, \dots, B_k representan una partición del espacio muestral S si:

- a) $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$;
- b) $\cup_{i=1}^k B_i = S$
- c) $P(B_i) > 0, \forall i=1, \dots, k$.

En otras palabras, cuando se efectúa el experimento ϵ , ocurre uno y sólo uno de los eventos B_i . Sea A algún evento respecto a S y sea B_1, B_2, \dots, B_k una partición de S, con lo cual se puede escribir:

$$A = \cup_{i=1}^k (A \cap B_i) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$$

y por ende, se tiene:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k)$$

Sin embargo, cada término $P(A \cap B_i)$ se puede expresar como $P(A/B_i)P(B_i)$ y, por lo tanto, se obtiene el llamado *teorema de la probabilidad total*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A/B_i) P(B_i) = P(A/B_1) P(B_1) + P(A/B_2) P(B_2) + \dots + P(A/B_k) P(B_k).$$

Observación. Este resultado representa una relación muy útil, ya que cuando se busca $P(A)$ frecuentemente puede ser difícil calcularlo de manera directa. Sin embargo, con la información adicional de que B_i ha ocurrido, se puede calcular $P(A/B_i)$ y por ende se puede entonces usar la fórmula anterior.

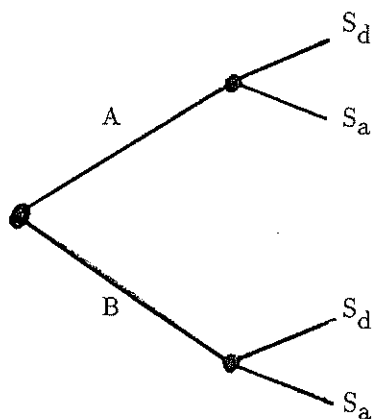
Por otro lado, cuando se necesite calcular $P(B_i/A)$ se podrá calcular esta probabilidad como una consecuencia de lo anterior. Sean B_1, \dots, B_k una partición del espacio muestral S y A un evento asociado con S. Aplicando la definición de probabilidad condicional, se puede escribir:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) P(B_i)}{\sum_{i=1}^k P(A/B_i) P(B_i)}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Este resultado se conoce como *Teorema de Bayes*. También se le llama fórmula para la probabilidad de las "causas". Puesto que las B_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos B_i ocurre. (Esto es, uno de los eventos B_i debe ocurrir y solamente uno.) Por lo tanto, la fórmula anterior da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una "causa"), dado que el evento A ha ocurrido. Para aplicar este teorema se debe conocer los valores de las $P(B_i)$, con $i = 1, \dots, k$. Muy a menudo esos valores no son conocidos y esto limita la aplicabilidad del resultado.

La siguiente ilustración del Teorema de Bayes dará la oportunidad de introducir la idea de *diagrama de árbol*, método muy útil para analizar ciertos problemas. Supóngase que varias cajas de caramelos son de dos tipos A y B. El tipo A contiene 70% de caramelos dulces y 30% de caramelos ácidos, mientras que en el tipo B dichos porcentajes están invertidos. Más aún, supóngase que el 60% de todas las cajas de caramelos son del tipo A, mientras que el resto son del tipo B.

Ahora se está ante el siguiente problema de decisión. Usted recibe una caja de dulces de tipo desconocido. Se le permite sacar una muestra de caramelo (una situación ciertamente no real, pero que permite presentar las ideas importantes sin mucha complicación y con esta información debe decir si cree que se le ha sido ofrecido una caja del tipo A o del tipo B). El siguiente "diagrama de árbol" (llamado así por las diversas trayectorias o ramas que aparecen) ayudará a analizar el problema (S_d y S_a indican la elección de un caramelo dulce o ácido respectivamente).



Se pueden realizar algunos cálculos simples:

$$P(A) = 0,60; \quad P(B) = 0,40; \quad P(S_d/A) = 0,70; \\ P(S_a/A) = 0,30; \quad P(S_d/B) = 0,30; \quad P(S_a/B) = 0,70.$$

Lo que en realidad se desea conocer son las siguientes probabilidades

$$P(A/S_d), \quad P(A/S_a), \quad P(B/S_d) \quad \text{y} \quad P(B/S_a).$$

Esto es, suponiendo que realmente se escogió un caramelo dulce, ¿qué decisión estaríamos más inclinados a hacer?

Para ello se deben comparar $P(A/S_d)$ y $P(B/S_d)$. Utilizando la fórmula de Bayes se tiene:

$$P(A/S_d) = \frac{P(S_d/A) P(A)}{P(S_d/A) P(A) + P(S_d/B) P(B)} = (0,7)(0,6) / [(0,7)(0,6) + (0,3)(0,4)] = 7/9.$$

Un cálculo similar da $P(B/S_d) = 2/9$. De este modo, con base en la evidencia que se tiene (es decir, la obtención de un caramelo dulce) es 3,50 veces más probable que se trate de una caja del tipo A que del tipo B. Por lo tanto, se decidiría, posiblemente, que el caramelo se obtuvo de una caja tipo A. (Por supuesto, se podría estar equivocado. Lo interesante del análisis anterior es que se elige la alternativa que parece más probable con base en los pocos datos que se tiene).

En términos del diagrama de árbol, lo que realmente se necesitaba (y se hizo) en los cálculos precedentes fue un análisis "hacia atrás". Esto es, dado lo que se observa, en este caso S_d , ¿qué tan probable era escoger el tipo A?

Eventos independientes. Dos eventos A y B que no pueden ocurrir de manera simultánea verifican que $A \cap B = \emptyset$. Tales eventos se designaron mutuamente excluyentes. Si A y B son mutuamente excluyentes entonces $P(A/B)=0$, porque la ocurrencia de B impide la ocurrencia de A. Por otra parte, para el caso particular $A \subseteq B$ se tendrá que $P(B/A)=1$.

En algunos de los casos anteriores, sabiendo que B ocurrió, se tiene una información precisa sobre la probabilidad de la ocurrencia de A. Sin embargo, hay muchos casos en los cuales se sabe que si un evento B ocurre, no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de otro evento A.

Definición. Se dice que A y B son dos *eventos independientes* si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) .$$

Observación. Esta definición es esencialmente equivalente a la que antes se sugirió, es decir, que A y B son independientes si $P(B/A)=P(B)$ y $P(A/B) = P(A)$. Esta última forma es un poco más intuitiva, porque afirma precisamente lo que se ha estado tratando de decir antes: A y B son independientes si el conocimiento de la ocurrencia de A no influye de modo alguno en la probabilidad de ocurrencia de B.

Definición. Se dice que los tres eventos, A, B y C, son mutuamente independientes si y sólo si todas las condiciones siguientes se satisfacen:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B) , & P(A \cap C) &= P(A) P(C) , \\ P(B \cap C) &= P(B) P(C) , & P(A \cap B \cap C) &= P(A) P(B) P(C) . \end{aligned}$$

Finalmente se generaliza esta noción a n eventos a través de la siguiente definición.

Definición. Los n eventos A_1, A_2, \dots, A_n son mutuamente independientes si y sólo si se tiene

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}) , \forall k=2, 3, \dots, n.$$

IV. VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES.

Definición. Sea ϵ un experimento y S el espacio muestral asociado con él. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $s \in S$, un número real $X(s)$, se le llama *variable aleatoria*.

Definición. Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X (es decir su recorrido) es finito o infinito numerable, se llama a X una *variable aleatoria discreta*. Esto es, se pueden anotar los valores posibles de X como $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. En el caso finito, la lista termina y en el caso infinito numerable, la lista continúa indefinidamente.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta, es decir que el recorrido de X consta, a lo más, de un número de valores, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ que es infinito numerable. Con cada resultado posible x_i se asocia un número $p(x_i) = P(X=x_i)$, llamado *probabilidad de x_i* . Los números $p(x_i), i=1,2, \dots$ deben satisfacer las condiciones siguientes:

a) $p(x_i) \geq 0, \forall i,$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

La función p que antes se definió, se llama *función de probabilidad (o función de probabilidad puntual) de la variable aleatoria X* . La colección de pares $(x_i, p(x_i)), i=1, 2, \dots$, algunas veces se llama *distribución de probabilidad de X* .

Definición. Se considera un experimento ϵ y sea A un evento asociado con ϵ . Se supone que $P(A) = p$, y por lo tanto, $P(A^c) = 1 - p$. Se considera n repeticiones independientes de ϵ . Por lo tanto, el espacio muestral consiste en todas las sucesiones posibles $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, donde cada a_i es A ó A^c , según A ó A^c ocurra en la i -ésima repetición de ϵ (hay 2^n de tales sucesiones). Aún más, se supone que $P(A) = p$ es el mismo para todas las repeticiones. Se define la variable aleatoria X como sigue: X es igual al número de veces que ocurrió el evento A . Se llama a X una variable aleatoria binomial con los parámetros n y p . Sus valores posibles obviamente son el $0, 1, 2, \dots, n$. (Decimos en forma equivalente que X tiene una *distribución binomial*). Las repeticiones individuales de E se llamarán ensayos de Bernoulli.

Definición. Se dice que X es una *variable aleatoria continua*, si existe una función f , llamada *función de densidad de probabilidad (fdp) de X* , que satisface las siguientes condiciones:

a) $f(x) \geq 0, \forall x,$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

c) Se tiene que $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \forall a, b \in \mathbb{R},$ tal que $a < b$.

Definición. Sea X una variable aleatoria, discreta o continua. Se llama *función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X* (abreviada *fda*) a la función dada por la expresión

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Teorema. a) Si X es una variable aleatoria discreta, entonces F viene dada por

$$F(x) = \sum_i p(x_i),$$

donde la suma se toma sobre todos los índices i que satisfacen $x_i \leq x$.

b) Si X es una variable aleatoria continua con función de probabilidad f , entonces F viene dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds.$$

Más aún:

i) La función F no es decreciente. Esto es, si $x_1 \leq x_2$ entonces se tiene que $F(x_1) \leq F(x_2)$.

ii) Se tienen los siguientes límites:

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1.$$

c) Sea F la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua con función de distribución f . Entonces, se tiene que f es la derivada de F , es decir:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}(x),$$

para todo x en el cual F es diferenciable.

d) Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles x_1, x_2, \dots , y se supone que es posible rotular dichos valores de modo que $x_1 < x_2 < \dots$. Sea F la función de distribución acumulativa de X . Entonces,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Observación. Una advertencia sobre la terminología puede ser de utilidad. Esta terminología, aunque no es muy uniforme, ha llegado a estandarizarse. Cuando se habla de la distribución de probabilidades de una variable aleatoria X se indica su fdp f si X es continua, o su función de probabilidad puntual p definida para x_1, x_2, \dots si X es discreta. Cuando se habla de la función de distribución acumulativa, o algunas veces sólo de la función de distribución, siempre se refiere a F , donde $F(x) = P(X \leq x)$.

V. CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS.

Valor esperado o esperanza matemática.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles x_1, \dots, x_n, \dots , y sea $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$. Entonces el *valor esperado* de X (o *esperanza matemática* de X) que se denota con $E(X)$, se define como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ converge absolutamente, es decir si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty$. Este número también se designa como *valor promedio* de X .

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad f . El *valor esperado* de X se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Nuevamente puede suceder que esta integral (impropia) no converja. Por lo tanto, se dice que $E(X)$ existe si y sólo si la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$$

es finita.

Varianza.

Definición. Sea X una variable aleatoria. Se define la *varianza* de X , que se denota con $\text{Var}(X)$, $V(X)$ ó σ_X^2 como sigue:

$$\sigma_X^2 = V(X) = E([X - E(X)]^2).$$

La raíz cuadrada positiva de $V(X)$ se llama *desviación estándar* de X y se designa con σ_X .

Teorema. Sea X una variable aleatoria. La varianza de X puede expresarse como

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Desigualdad de Chebyshev. Sea X una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y sea c un número real cualquiera. Entonces, si $E(X - c)^2$ es finita y ϵ es cualquier número positivo, se tiene

$$P[|X - c| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2} E(X - c)^2.$$

Las formas siguientes, equivalentes a la desigualdad anterior, son inmediatas:

(a) Al considerar el evento complementario se obtiene:

$$P[|X - c| < \epsilon] \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2} E(X - c)^2.$$

(b) Al elegir $c = \mu$ se obtiene

$$P[|X - \mu| < \epsilon] \geq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}.$$

(c) Al elegir $c = \mu$ y $\epsilon = k\sigma$, donde $\sigma^2 = \text{Var}(X) > 0$, se obtiene

$$P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq k^{-2}.$$

Esta última forma indica especialmente cómo la varianza mide el "grado de la concentración" de la probabilidad próxima a $E(X) = \mu$.

VI. MATEMÁTICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

A. Distribuciones discretas:

1) Distribución binomial:

Se define :

$$P(r) \equiv \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

como la probabilidad de que sucedan r éxitos en n pruebas donde :

$r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$: variable aleatoria que representa el número de aciertos ;

$n \in \mathbb{N}$: tamaño de la muestra o número de lanzamientos ;

$p \in (0, 1)$: probabilidad de un acierto ;

$q = 1 - p \in (0, 1)$: probabilidad de un fracaso ;

parámetros : n, p ; $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$: número combinatorio .

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) P determina una distribución de probabilidad pues :

$$\sum_{r=0}^n P(r) = 1 \quad (\text{Utilice el binomio de Newton}).$$

(ii) La media aritmética , esperanza o momento de orden 1 está dada por :

$$E \equiv \sum_{r=0}^n r P(r) = np .$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por :

$$\sum_{r=0}^n r^2 P(r) = np(q + np) .$$

(iv) La varianza está dada por :

$$\sum_{r=0}^n (r - E)^2 P(r) = \sum_{r=0}^n r^2 P(r) - E^2 = npq$$

y la desviación estándar por \sqrt{npq} .

(v) Si se considera que $np = m \in \mathbb{R}^+$ (fijo) se obtiene el siguiente límite :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ np = m}} P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!} \quad (\text{Ver (2)}) .$$

2) Distribución de Poisson :

Se define

$$P(x) \equiv \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

como la probabilidad de que sucedan x eventos por unidad de medida donde :

$x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: variable aleatoria que representa el número de ocurrencias por unidad de medida;
 $m \in \mathbb{N}$: número promedio de ocurrencias por unidad de medida ;
parámetro : m .

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) P determina una distribución de probabilidad pues :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(k) = 1 \quad (\text{Utilice la serie de potencias } e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \text{ con radio de convergencia } +\infty).$$

(ii) La media aritmética , esperanza o momento de orden 1 está dada por :

$$E \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} k P(k) = m .$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(k) = m^2 + m .$$

(iv) La varianza está dada por :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k-E)^2 P(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(k) - E^2 = m$$

y la desviación estándar por \sqrt{m} .

B. Distribuciones continuas.

3) Distribución normal :

La función de densidad de probabilidad está dada por :

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{Normal } N(\mu, \sigma))$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} : \text{variable aleatoria continua ;} \\ \text{parámetros : } \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 . \end{array} \right.$$

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) f genera una distribución de probabilidad pues :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 \quad (\text{Utilice la sustitución } t = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}).$$

(ii) La media aritmética, esperanza o momento de primer orden está dada por

$$E \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \mu .$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \mu^2 + \sigma^2 .$$

(iv) La varianza está dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E^2 = \sigma^2 ,$$

y la desviación estándar por σ .

(v) El cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ transforma la función $f = f(x)$ (Normal $N(\mu, \sigma)$) en $g = g(z)$ (Normal $N(0, 1)$).

(vi) La gráfica de la función $f = f(x)$ es una campana (campana de Gauss) que tiene las siguientes características (pasar de la variable x a la variable z ó t cuando sea conveniente) :

$$(a) \text{ Moda : } M_o \equiv \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Máx}} f(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (f'(\mu) = 0, f''(\mu) < 0) ;$$

$$(b) \text{ Mediana : } M_d \equiv f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ pues}$$

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x) dx = \int_{\mu}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

(c) f es cóncava en $(-\sigma, \sigma)$, es convexa en $(-\infty, -\sigma) \cup (\sigma, +\infty)$ y tiene puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$ ($f''(\mu \pm \sigma) = 0$).

(d) Se tienen las siguientes probabilidades de que la variable aleatoria pertenezca a ciertos intervalos importantes :

$$P(|x| \leq \sigma) = P(|z| \leq 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,6827 ;$$

$$P(|x| \leq 1,645 \sigma) = P(|z| \leq 1,645) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1,645}^{1,645} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,90 ;$$

$$P(|x| \leq 1,96 \sigma) = P(|z| \leq 1,96) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1,96}^{1,96} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,95 ;$$

$$P(|x| \leq 2\sigma) = P(|z| \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,9545 ;$$

$$P(|x| \leq 2,58 \sigma) = P(|z| \leq 2,58) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2,58}^{2,58} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,99 ;$$

$$P(|x| \leq 3\sigma) = P(|z| \leq 3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^3 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,9973 .$$

e) Calcule el primer cuartil Q_1 , el tercer cuartil Q_3 , y la desviación cuartílica.

4) Distribución exponencial:

La función de densidad de probabilidad está dada por :

$$f(t) \equiv \lambda e^{-\lambda t} ,$$

donde :

$t > 0$: variable aleatoria que representa el tiempo entre llegadas sucesivas ;
 $\lambda > 0$: es la tasa promedio de llegadas (similar al parámetro m de Poisson) ;
 $\frac{1}{\lambda}$: es el tiempo promedio entre llegadas
parámetro : λ .

Se puede extender la definición de la función f a todo el conjunto de números reales \mathbb{R} de la siguiente manera :

$$f(t) \equiv \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 , \\ 0 & \text{si } t < 0 . \end{cases}$$

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) f genera una distribución de probabilidad pues :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$$

(ii) La media aritmética, esperanza o momento de orden 1 está dada por :

$$E \equiv \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{utilice } \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = 1) .$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \frac{2}{\lambda^2} \quad (\text{utilice } \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = 2) .$$

(iv) La varianza está dada por

$$\int_0^{+\infty} (t - E)^2 f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt - E^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

y la desviación estándar por $\frac{1}{\lambda}$.

(v) Las probabilidades acumuladas "más que" están dadas por :

$$P(t > a) \equiv \int_a^{+\infty} f(t) dt = e^{-\lambda a}, \quad \forall a \geq 0.$$

(vi) Calcule el primer, segundo y tercer cuartil, y la desviación cuartílica.

(vi) La distribución de probabilidad exponencial es del tipo J invertida (grafique la función $f=f(t)$).

(vii) La distribución de probabilidad exponencial no tiene memoria pues se tiene la siguiente relación para la probabilidad condicional :

$$P(t > b / t > a) \equiv \frac{P(t > b)}{P(t > a)} = P(t > (b-a)).$$

Actividad N° 13:

Probabilidad condicionada y tablas de contingencia

Material

No es necesario.

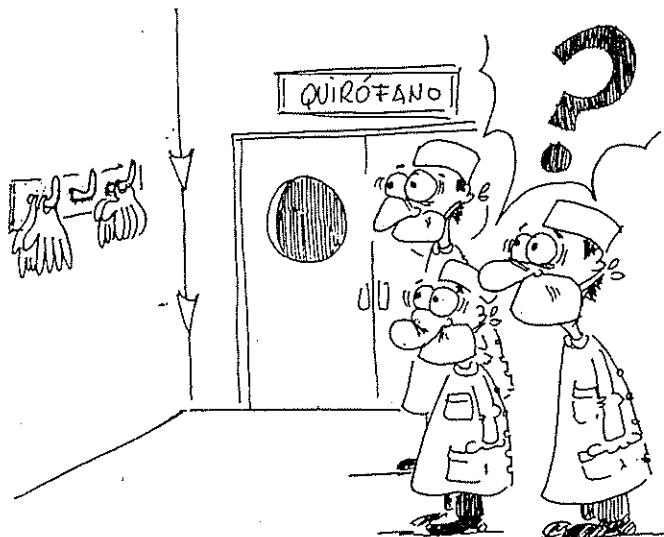
Tablas de contingencia

Comenzamos por dos problemas en los que se introduce un modo de presentar los datos de gran interés para el cálculo de probabilidades:

Problema 1. Diagnósticos

Una revista médica publica que para diagnosticar las lesiones de hígado existen dos procedimientos: "el histológico" y el "gráfico". El segundo procedimiento no es tan preciso como el primero, pero conlleva menor riesgo.

Para verificar la bondad del procedimiento gráfico se estudiaron con él 1.160 lesiones de hígado, comprobándose más tarde si el diagnóstico fue correcto o no.



Los datos obtenidos fueron distintos según que la lesión fuera maligna o benigna. He aquí la tabla:

TABLA 1	Diagnostico correcto	Diagnostico incorrecto	TOTALES
Lesiones malignas	418	38	456
Lesiones benignas	608	96	704
TOTALES	1.026	134	1.160

a) Interpreta el significado de cada uno de los números de la tabla.

b) Para juzgar la precisión del procedimiento es importante conocer la proporción de cada caso respecto al total de 1.160 lesiones. Expresa la tabla anterior en frecuencias relativas y en porcentajes; es decir, completa las dos tablas de la página siguiente:

TABLA 2	C	I	TOTAL
M	0'36		
B			
TOTAL			

TABLA 3	C	I	TOTAL
M	36		
B			
TOTAL			

¿Cómo son los sucesos C e I entre sí? ¿Y los M y B?

c) Se va a diagnosticar a un paciente por el procedimiento gráfico. ¿Qué probabilidades asignarás a los siguientes sucesos aleatorios

C y M; C y B; I y M; I y B; C, I?

d) ¿Qué probabilidad asignas al suceso "lesión maligna diagnosticada correctamente"?
 ¿Y al suceso "lesión benigna diagnosticada correctamente"?
 ¿Son independientes los sucesos C y M?

Para responder a estas preguntas recuerda que según vimos en la actividad número 10, si dos sucesos son independientes se verificaba que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2)$$

- Mientras que si son dependientes se verifica que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2/S1)$$

de donde se tiene:

$$P(S2/S1) = P(S1 \text{ y } S2) / P(S1)$$

Problema 2. Accidentes de tráfico

Con objeto de que disminuya el número de accidentes de circulación es preciso tomar diversos tipos de medidas: campañas de información en prensa, radio y televisión; mejora de la seguridad pasiva de los vehículos; mejora del trazado y señalización de las vías (calles y carreteras); vigilancia por parte de los agentes de tráfico, etc.

Para ello es necesario disponer de información, disponer de datos. El Instituto Nacional de Estadística (INE), en su Anuario de 1975 publicó para el año 1973 los siguientes datos:

TABLA 4	En carretera	En zona urbana	TOTALES
Con víctimas	34.092	32.295	66.387
Solo daños materiales	11.712	20.791	32.503
TOTALES	45.804	53.086	98.890

a) Completa la siguiente tabla de porcentajes, obtenida a partir de la anterior:

TABLA 5	A	no A	TOTALES
B	34		67
no B			33
TOTALES	46	54	100

b) Como sabes que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$$

calcula en este problema $P(B/A)$ y $P(B/\text{no } A)$ y decide si A y B son independientes. ¿Es $P(B/A) = P(B)$?

Las tablas 1, 2, 3 del problema del diagnóstico, y las 4 y 5 del de los accidentes de tráfico reciben el nombre de **tablas de contingencia**, pues en ellas figuran todas las posibilidades, o contingencia, de los sucesos compuestos que son intersección de otros sucesos, esto es:

$$A \text{ y } B = A \cap B; \quad A \text{ y no } B = A \cap \bar{B}; \quad \text{no } A \text{ y } B = \bar{A} \cap B; \quad \text{no } A \text{ y no } B = \bar{A} \cap \bar{B}$$

El esquema de dichas tablas es el siguiente:

TABLA 6	A	\bar{A}	Totales
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Totales	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

y pueden figurar en ellas, en lugar de probabilidades, frecuencias relativas o porcentajes.

Estas tablas además de darnos probabilidades de forma directa nos permiten el cálculo de probabilidades de sucesos condicionados; por ejemplo $P(B/A)$ y $P(B/\text{no } A)$.

Existen tablas de contingencia más complicadas. Si consideramos que los accidentes pueden ser leves, graves o mortales; en carretera o en zona urbana, el diagrama de contingencia será:

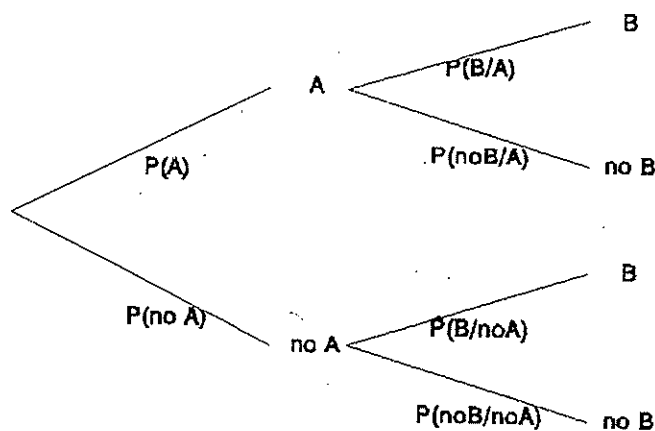
TABLA 7

	L	G	M	TOTALES
C				
U				
TOTALES				1

Lo fundamental de estas tablas es que los sucesos L, G y M sean incompatibles dos a dos y su unión sea el espacio muestral, y que los sucesos C y U también lo sean y compongan el espacio muestral.

Relación entre los diagramas de contingencia y los de árbol

La tabla 6 se puede poner en forma de diagrama de árbol de la forma siguiente:



Multiplicando las probabilidades de las distintas ramas que van hasta un punto dado, por ejemplo B, se obtiene la probabilidad de la intersección de los sucesos que se encuentran por el camino:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \text{ y no } B) = P(A) \cdot P(\text{no } B/A)$$

etc.

Los diagramas de contingencia y los de árbol están íntimamente relacionados: dado uno de ellos podemos construir el otro. Esto es muy importante, ya que unas veces los datos del problema permiten construir rápidamente uno de ellos y a partir de él podemos construir el otro diagrama, que nos dará la respuesta.

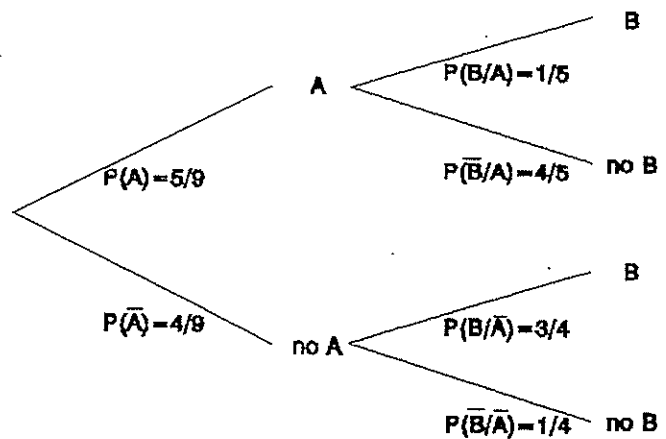
Teniendo en cuenta que:

$$P(B/A) = P(A \text{ y } B) / P(A) \quad [1]$$

y dado el diagrama de contingencia:

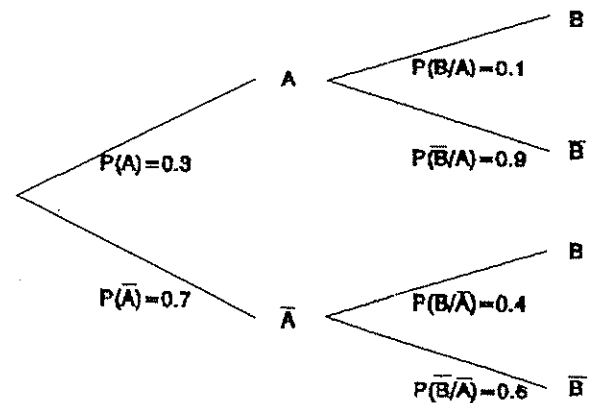
	A	no A	Totales
B	$P(A \text{ y } B)=1/9$	$P(\text{no } A \text{ y } B)=3/9$	$P(B)=4/9$
no B	$P(A \text{ y no } B)=4/9$	$P(\text{no } A \text{ y no } B)=1/9$	$P(\text{no } B)=5/9$
Totales	$P(A)=5/9$	$P(\text{no } A)=4/9$	1

puedes construir el de árbol:



Sin más que hacer en cada caso el cociente indicado en la expresión [1].

Recíprocamente, dado el diagrama de árbol, puedes construir el diagrama de contingencia:



Obtenemos, multiplicando los números de una misma rama, las probabilidades $P(A \text{ y } B)$, $P(A \text{ y no } B)$, $P(\text{no } A \text{ y } B)$, $P(\text{no } A \text{ y no } B)$, es decir, el diagrama de contingencia.

	A	\bar{A}	Totales
B	$P(A \cap B) =$ 0'03	$P(\bar{A} \cap B) =$ 0'28	$P(B) =$ 0'31
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B}) =$ 0'27	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ 0'42	$P(\bar{B}) =$ 0'69
Totales	$P(A) =$ 0'30	$P(\bar{A}) =$ 0'70	1

Problemas a resolver

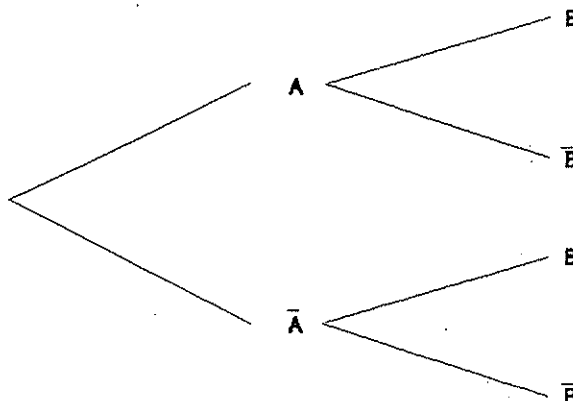
Ahora que ya conocemos los diagramas de contingencia y las relaciones con los diagramas de árbol te vamos a proponer varios problemas que resolverás aplicando lo que has aprendido en esta actividad.

1º

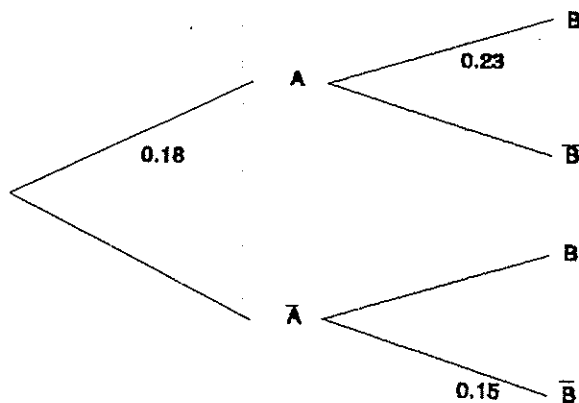
a) Dado el siguiente diagrama de contingencia

	A	no A	Totales
B	0,41	0,10	0,51
no B	0,30	0,19	0,49
Totales	0,71	0,29	1

construye el diagrama en árbol.



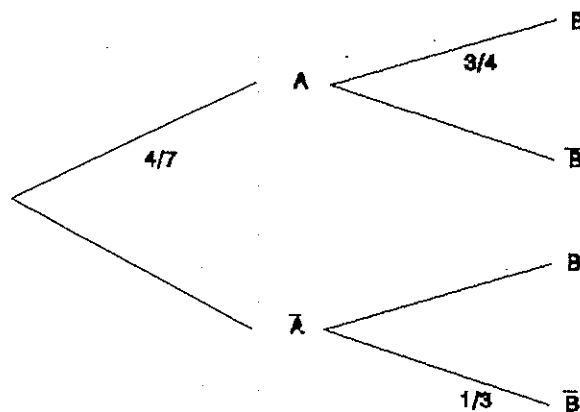
b) Dado el siguiente diagrama en árbol



construye el diagrama de contingencia:

	A	no A	Totales
B			
no B			
Totales			1

2º Completa el siguiente diagrama de probabilidades:



Construye con él una tabla de contingencia y a partir de ella un nuevo diagrama de árbol poniendo el suceso B en primer lugar.

3º Disponemos de dos cajas, M y N, la caja M contiene 7 bolas negras y 3 blancas, y la N 5 negras y 3 blancas. Se saca una bola al azar de una de las dos cajas, también al azar, y resulta ser blanca. Calcular la probabilidad de que proceda de la caja M.

4ª Se han observado 50 enfermos de piel tratados con un nuevo antibiótico y otros 70 enfermos no tratados. Anotamos las curaciones al cabo de 2 semanas, los resultados han sido:

	Tratados	No tratados
Curados	40	20
No Curados	10	50

Si se emplean estos datos para asignar probabilidades,

- ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado haya sido tratado?
- ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado no haya sido tratado?

5ª Una determinada empresa se dedica a la fabricación de cubiertas para las ruedas de los automóviles. Por los controles de calidad que esta empresa lleva a cabo se puede concluir diciendo que el 5% de las cubiertas producidas son defectuosas. En el laboratorio de control de calidad hay instalado un dispositivo que detecta el 90% de las cubiertas defectuosas, pero también califica como defectuosas el 2% de las correctas. El empresario está interesado en conocer las siguientes probabilidades:

- * Probabilidad de que sea correcta una cubierta calificada como defectuosa por el dispositivo.
- * Probabilidad de que sea defectuosa una cubierta calificada por el dispositivo como correcta.

¿Puedes ayudarle tú?

Nota: Consideremos los sucesos:

A = "Ser correcta"

B = "Ser calificada como correcta"

no A = "Ser defectuosa"

no B = "Ser calificada defectuosa"

El problema pregunta: $P(A/\text{no } B)$ y $P(\text{no } A/B)$. Para resolver el problema puedes construir primero el diagrama de árbol, el diagrama de contingencia y finalmente responder a las probabilidades pedidas a través del diagrama de contingencia.

$$P(A/\text{no } B) = P(A \text{ y no } B) / P(\text{no } B)$$

$$P(\text{no } A/B) = P(B \text{ y no } A) / P(B)$$

6º En un municipio hay tres partidos políticos: Progresista, Liberal y Moderado. Se efectúa un referéndum para decidir si un cierto día se declara fiesta local. He aquí los resultados en %, en función del partido al que votó cada ciudadano en las últimas elecciones:

		ULTIMAS ELECCIONES			
		Pr	Lib	Mod	Abs
REFERÉNDUM	SI	15 %	25 %	12 %	8 %
	NO	25 %	5 %	8 %	2 %

- a) ¿Qué porcentaje votó a cada partido en las últimas elecciones?
- b) ¿Qué probabilidad hay de que una persona tomada al azar haya votado Sí en el referéndum, $P(Sí)$?
- c) Calcular las siguientes probabilidades:
- $P(Pr/Sí)$ $P(Sí/Pr)$ $P(Lib/Sí)$ $P(Sí/Lib)$
 $P(Mod/Sí)$ $P(Sí/Mod)$ $P(Abs/Sí)$ $P(Sí/Abs)$
- d) Los sucesos "votar moderado en la última votación" y "votar Sí en el referéndum" son dependientes o independientes?

Contenidos implícitos en esta actividad

- Tablas de contingencia.
- Probabilidad condicionada.
- Relación entre los diagramas de contingencia y diagramas de árbol.

Actividad N° 16: Probabilidad geométrica

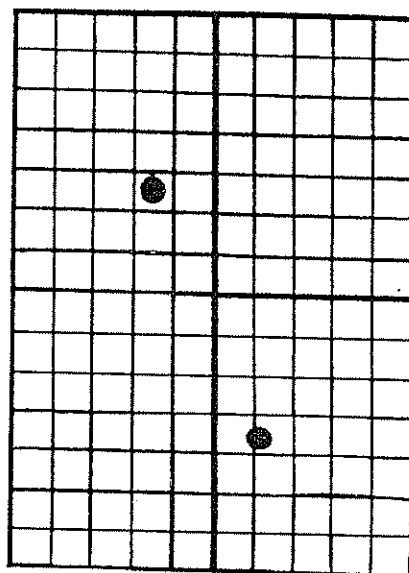
Reglas del juego

Este juego consiste en experimentar al fenómeno aleatorio "lanzar una moneda de cien pesetas sobre una cuadrícula de 60 x 60 mm". Cada alumno realizará el experimento cien veces.

Materiales necesarios

Cada alumno necesita:

- Una moneda de 100 pesetas.
- Una cuadrícula de 60 x 60 mm, que obtendrás uniendo cuatro hojas DIN A4, como muestra la figura, y después haciendo el cuadrículado:
- Unos folios para ir anotando los resultados, conclusiones o conjeturas.



Desarrollo del juego

1º- ¿Puedes formular alguna conjetura sobre qué es lo que ocurrirá al lanzar una moneda de cien pesetas sobre una cuadrícula de 60 x 60 mm?.

2º- Sobre una cuadrícula lanzas la moneda cien veces y anotas el número de veces que la moneda toca alguna de las líneas de la cuadrícula.

Llamamos al suceso "la moneda toca alguna de las líneas de la cuadrícula", suceso S. Con los datos de la experiencia, rellena la siguiente tabla:

	f(S)	f _r (S)
SUCESO "S"		
100 Lanzamientos		

3º- Recogemos los datos obtenidos por todos los alumnos de la clase y los colocamos en la siguiente tabla:

	f(S) Frecuencias absolutas de los Alumnos	f _r (S) Frecuencia relativa total
S		
100 X N lanzamientos		

$$f_r(S) = \frac{\text{suma de las frecuencias absolutas}}{100 \times N}; N = \text{número de Alumnos}$$

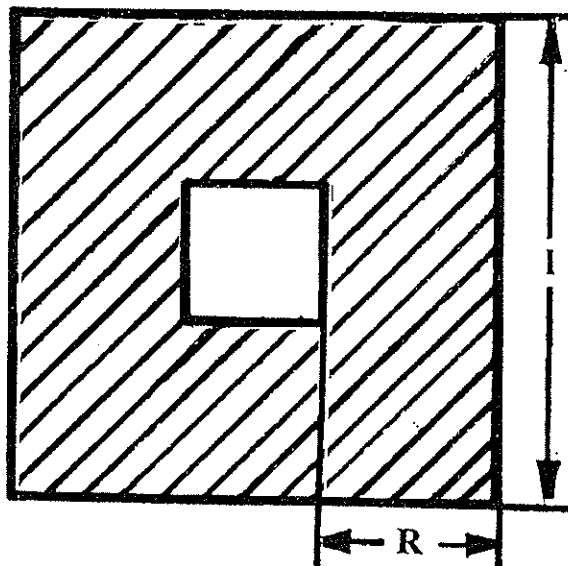
A la vista de los resultados obtenidos en la última tabla, ¿qué probabilidad asignarás al suceso S? Razónalo.

4º Recuerda la ley de Laplace, que utilizamos para el cálculo de probabilidades cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$P(S) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Con esta ley también calcularemos **probabilidades geométricas**, como vas a ver a continuación.

Si tomamos un cuadrado de la cuadrícula, la moneda pisará alguna línea de la cuadrícula si su centro cae dentro del área rayada:



$l = 60 \text{ mm.}$

$R = \text{radio de la moneda.}$

$\phi = \text{diámetro de la moneda} = 24,5 \text{ mm.}$

Según la ley de Laplace la probabilidad de que al lanzar la moneda pisé alguna línea de la cuadrícula será:

$$P(S) = \frac{\text{área de la zona rayada}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{l^2 - (1-2R)^2}{l^2} =$$

$$= \frac{l^2}{l^2} - \frac{(1-2R)^2}{l^2} = 1 - \left(\frac{1-2R}{l}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{\phi}{l}\right)^2 =$$

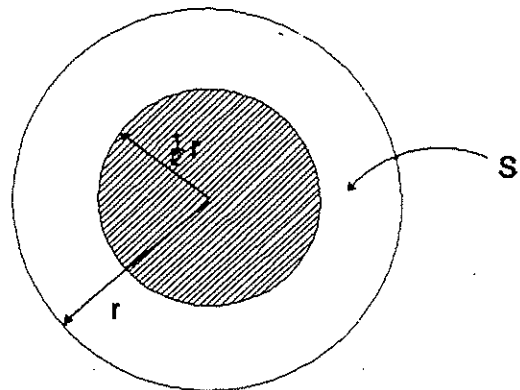
$$P(S) = 1 - \left(1 - \frac{24 \cdot 5}{60}\right)^2 = 0,65$$

5º- Compara el resultado anterior con el que se obtuvo, de forma experimental, en el punto 3 y comenta la primera ley de los grandes números.

6º- Con el fin de que veas cómo se hacen los cálculos de probabilidades geométricas te resolveremos varios problemas.

Problema 1: En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Hallar la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.

Denotamos por S el conjunto de los puntos interiores al círculo de radio r y denotamos por A el conjunto de puntos interiores al círculo concéntrico de radio 1/2 de r. Así A está formado por aquellos puntos de D que están más cercanos a su centro que a su circunferencia.



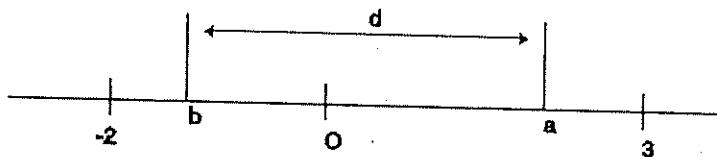
La probabilidad pedida vale:

$$P(A) = \frac{\text{área de A}}{\text{área de S}} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}r\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

Problema 2: Sobre una línea recta se seleccionan al azar los puntos a y b tales que

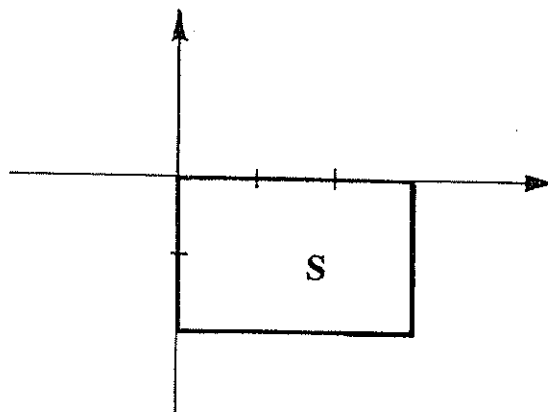
$$-2 \leq b \leq 0 \text{ y } 0 \leq a \leq 3$$

como se muestra en la figura siguiente:



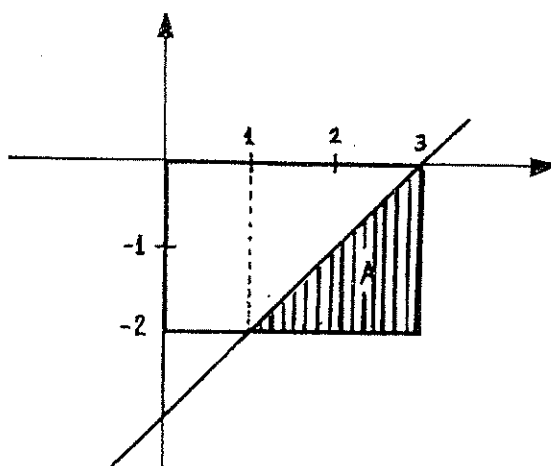
Hallar la probabilidad de que la distancia d entre a y b sea mayor que 3.

Los puntos (a,b) posibles son los que se muestran en el diagrama siguiente:



e incluidos en el rectángulo.

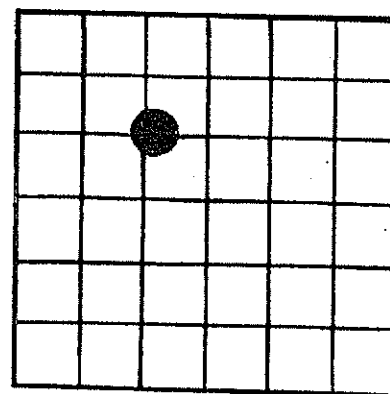
El conjunto de puntos favorables (a,b) serán aquellos para los cuales $d = a - b \geq 3$ y son los puntos de S que caen por debajo de la línea $x - y = 3$ y forman por tanto la superficie sombreada.



En consecuencia:

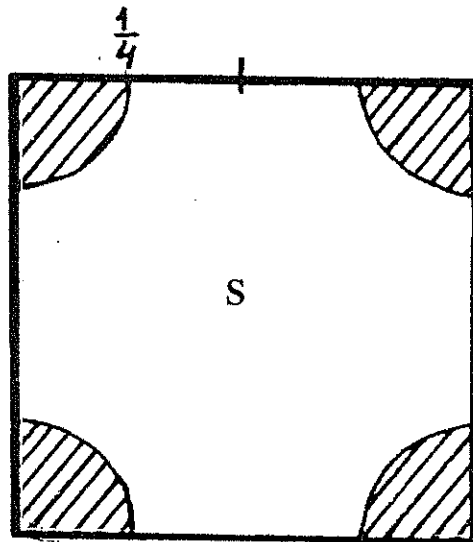
$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Problema 3: Se tiene una cuadrícula de 1 x 1 cm. Se lanza un disco sobre ella de 1/2 cm de diámetro al azar. Hallar la probabilidad de que el disco cubra un punto de intersección de la cuadrícula.



Tomamos un cuadrado de la cuadrícula y sea S el conjunto de los puntos interiores a este cuadrado.

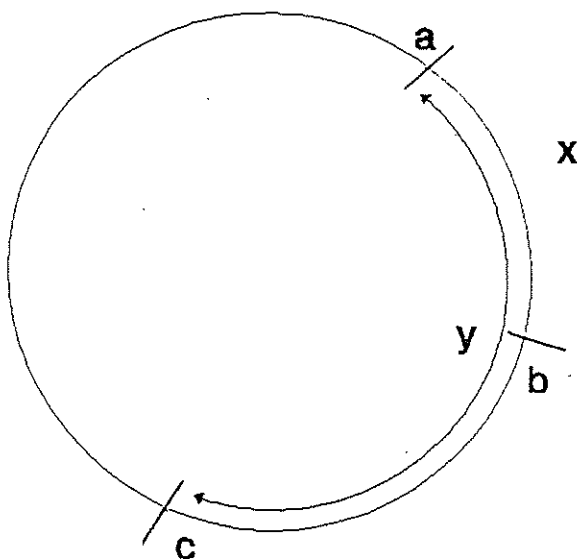
Denotamos por A el conjunto de puntos de S de distancia a las esquinas $\frac{1}{4}$ cm. Así si el centro del disco cae en S cubrirá un punto de intersección de la cuadrícula sí y sólo sí su centro cae en un punto de A.



A = sombreada

Según esto:

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi \left(\frac{1}{4}\right)^2}{1^2} = \frac{\pi}{16}$$



Problema 4: Tres puntos a, b, c de una circunferencia se escogen al azar. Hallar la probabilidad de que los puntos caigan sobre el mismo semicírculo.

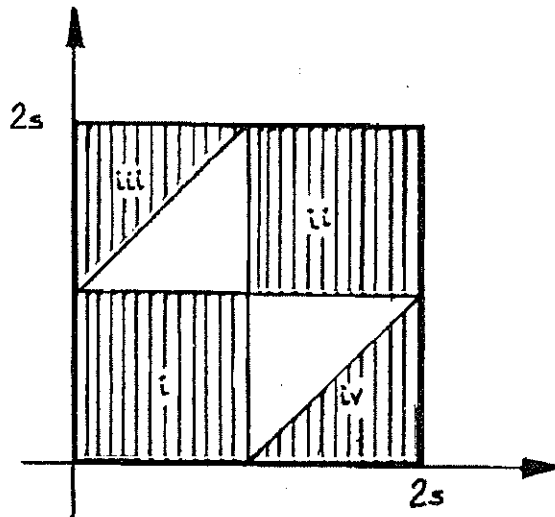
Supongamos que la longitud de la circunferencia sea $2s$. Denotamos por x la longitud del arco ab en el sentido del movimiento de las agujas del reloj y denotamos por y la longitud del arco ac en el mismo sentido. Se debe cumplir:

$$0 < x < 2s$$

$$0 < y < 2s$$

Sea S el conjunto de los puntos de \mathbb{R}^2 para los cuales se cumplen las condiciones anteriores: Sea A el subconjunto de S para los cuales se cumplen las condiciones siguientes:

- i) $x, y < s$
- ii) $x, y > s$
- iii) $x < s, y - x > s$
- iv) $y < s, x - y > s$



Entonces A consta de aquellos puntos para los cuales se cumple que a, b, c caen sobre el semicírculo. Así

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{3s^2}{4s^2} = \frac{3}{4}$$

Problema 5: Dado un segmento cualquiera, hallar la probabilidad de obtener, por trisección, los tres lados de un triángulo.

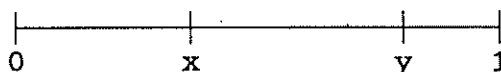
Entendemos por trisección la elección de dos puntos al azar del interior del segmento. Es evidente que no supone restricción alguna identificar al segmento con el intervalo $[0,1]$. La elección de dos puntos en el segmento es entonces la elección de dos números tales que

$$x \in (0,1)$$

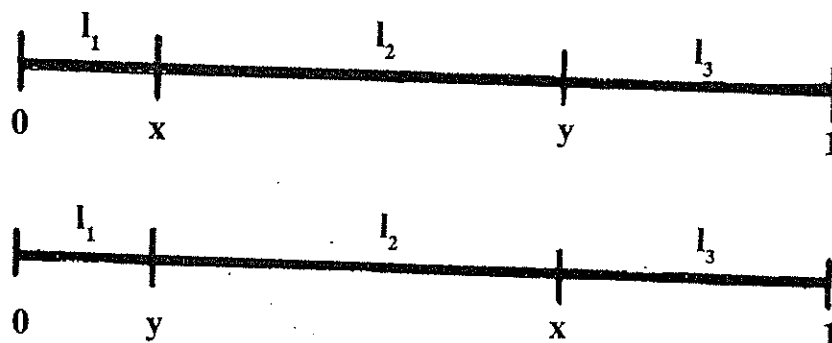
$$y \in (0,1)$$

$$x \neq y.$$

La condición necesaria y suficiente para que con tres segmentos



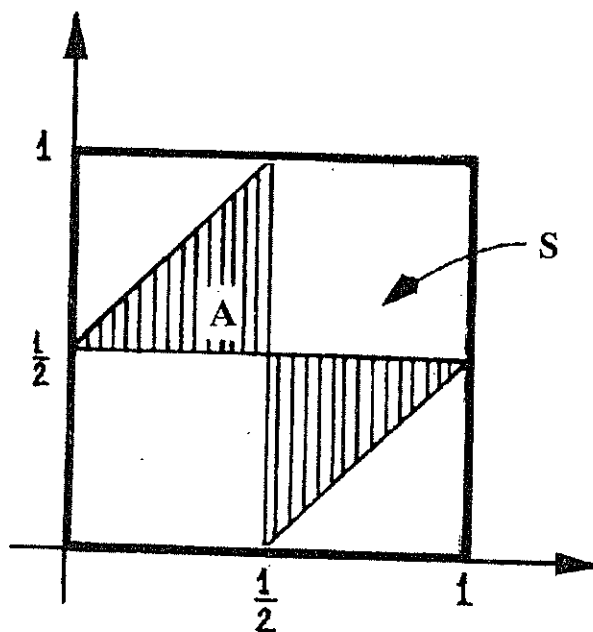
se pueda formar un triángulo es que la longitud de cada uno de los segmentos sea menor que la suma de los otros dos. Refiriendo estas condiciones a los números x e y obtenemos:



$$x < y; 0 < x < \frac{1}{2}; y - x < \frac{1}{2}; \frac{1}{2} < y < 1$$

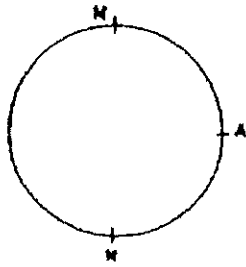
$$y < x; 0 < y < \frac{1}{2}; x - y < \frac{1}{2}; \frac{1}{2} < x < 1$$

Interpretando geoméricamente estas condiciones, identificando (x,y) con un punto del plano, resulta que los puntos que verifican la condición pertenecen a la parte rayada de la figura:



La probabilidad es por tanto:

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{4}$$



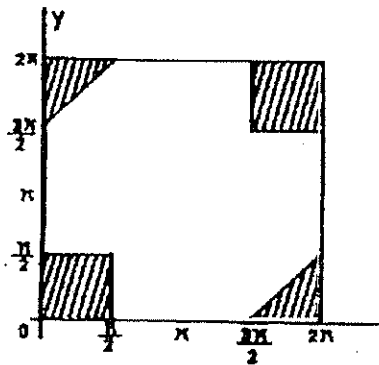
Problema 6: En una circunferencia se escogen al azar tres puntos A, B y C.

Calcular la probabilidad de que los tres estén situados en un mismo arco de 90° .

Supuesto elegido el punto A tomémoslo como origen de medida de longitudes de arco en una circunferencia que podemos suponer de radio 1.

El punto B se puede escoger de forma que la longitud x del arco AB esté comprendida en

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$



Elegido el punto B, la medida del arco AC verificará:

a) Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ entonces $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ o bien $x - \frac{\pi}{2} + 2\pi \leq 2\pi$

b) Si $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ se verificará $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq 2\pi$ o bien $0 \leq y \leq x + \frac{\pi}{2} - 2\pi$

En consecuencia (x,y) ha de ser un punto de la parte rayada de la figura, cuyo área es

$$2 \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}}{2} \right) = \frac{3\pi^2}{4}$$

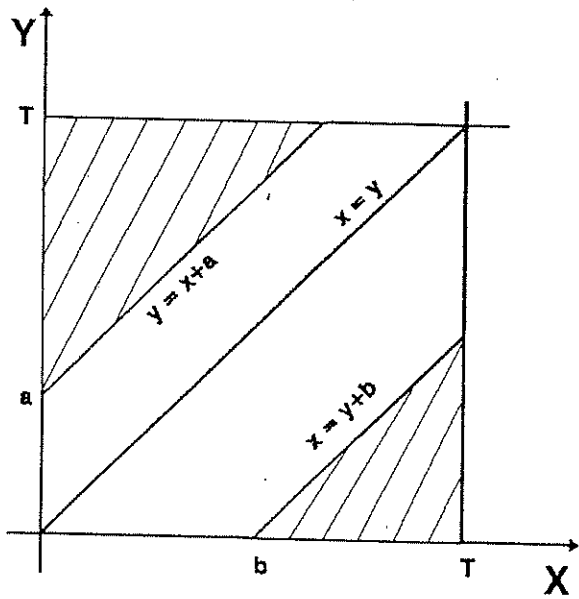
La probabilidad buscada es

$$\frac{\frac{3\pi^2}{4}}{4\pi^2} = \frac{3}{16}$$

Problema 7: Un tren llega a una estación en un instante al azar del intervalo $(0,T)$, parando a minutos. A la misma estación acude un autobús al azar e independientemente en el mismo intervalo y parando b minutos, a y $b < T$.

- 1) Calcular la probabilidad de que el tren llegue antes que el autobús.
- 2) Determinar la probabilidad de que se encuentren.
- 3) Suponiendo que se encuentren en la estación, determinar la probabilidad de que el tren llegue antes que el autobús.

Interpretaremos el problema geoméricamente.



Sean x el instante de llegada del tren e y el de llegada del autobús.

1) Es la probabilidad del suceso $x < y$:

$$P = \frac{\frac{1}{2} T^2}{T^2} = \frac{1}{2}$$

2) Es la probabilidad de la suma de los sucesos:

$$\begin{aligned} x < y < x + a \\ y < x < y + b; \end{aligned}$$

luego

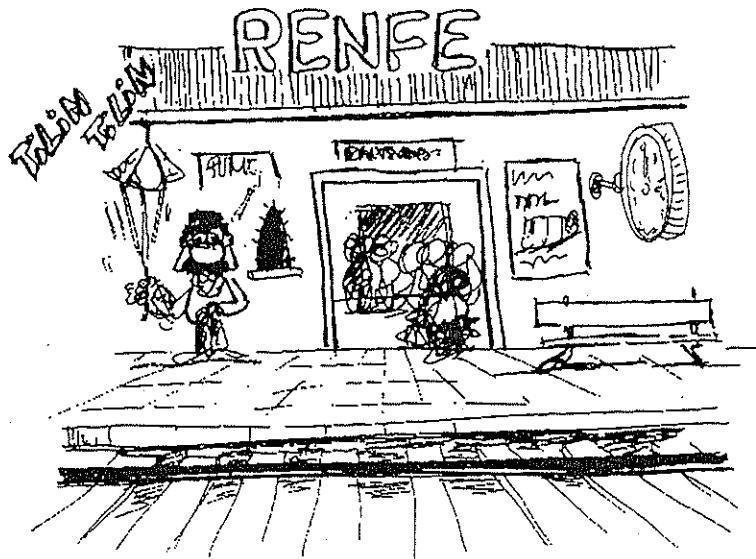
$$P = \frac{\frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} (T-a)^2}{T^2} + \frac{\frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} (T-b)^2}{T^2} = \frac{(a+b) T - \frac{1}{2} (a^2 + b^2)}{T^2}$$

3) Es

$$P = \frac{\frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} (T-a)^2}{(a+b) T - \frac{1}{2} (a^2 + b^2)} = \frac{aT - \frac{1}{2} a^2}{(a+b) T - \frac{1}{2} (a^2 + b^2)}$$

Contenidos implícitos de esta actividad

- Probabilidades geométricas.



Actividad Nº 18

Probabilidad dinámica

Reglas del juego

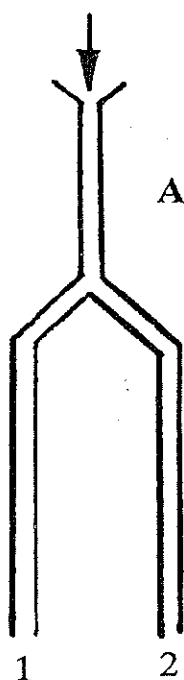
Utilizando fichas, simular situaciones de problemas de probabilidad.

Materiales necesarios

Un gran número de fichas.

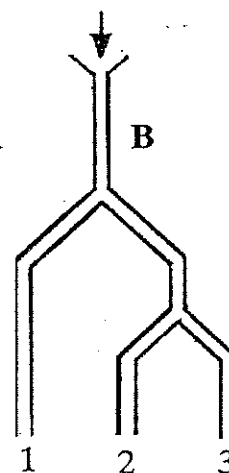
Etapas del desarrollo del juego

Embudos



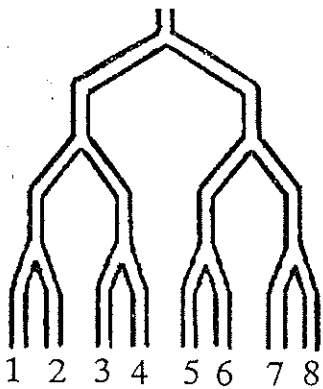
Si dejamos caer un gran número de bolitas, perdigones, fichas, etc, en los embudos A y B que aparecen dibujados observaremos que ocurre lo siguiente:

Las posibilidades que tiene un objeto de ir por un camino u otro es igual en cada bifurcación; como en cada bifurcación aparecen dos ramas, la probabilidad de que un objeto pase por cada una de ellas es $1/2$ en cada cruce; expresado en porcentaje, el 50%.

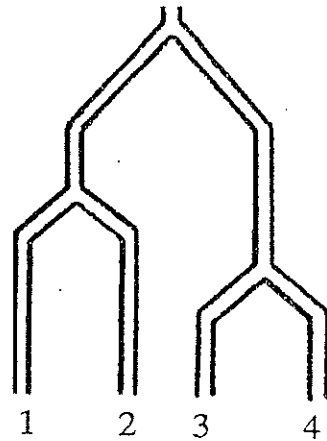


Así, si lanzamos 100 objetos por el embudo A, esperamos que aproximadamente sean 50 los que salen por el canal 1 y otros 50 por el canal 2. Si los 100 lanzamientos los realizamos en el embudo B, esperamos que aproximadamente 50 caigan por el canal 1 y 25 por los canales 2 y 3.

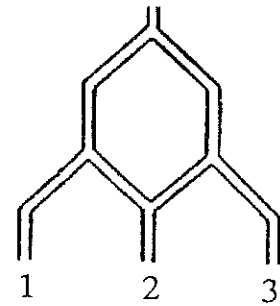
Supón que ahora dejamos caer un montón de perdigones en cada uno de los embudos C, D y F. En estos casos, ¿qué proporción de perdigones esperas que salga por cada canal?



Embudo C



Embudo D

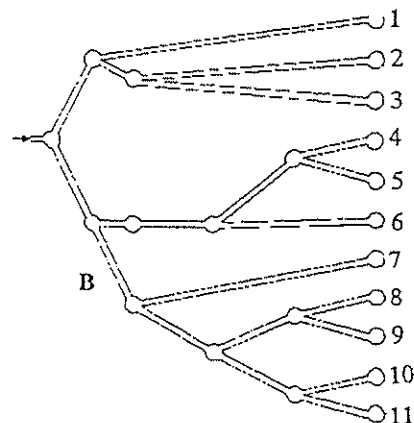
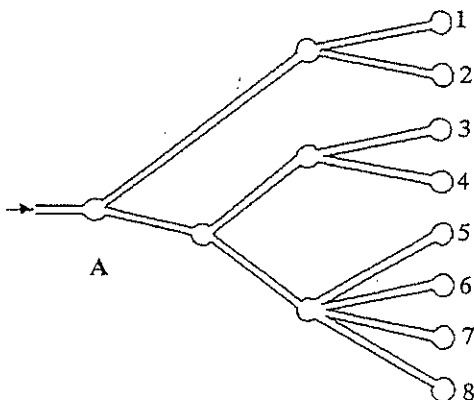
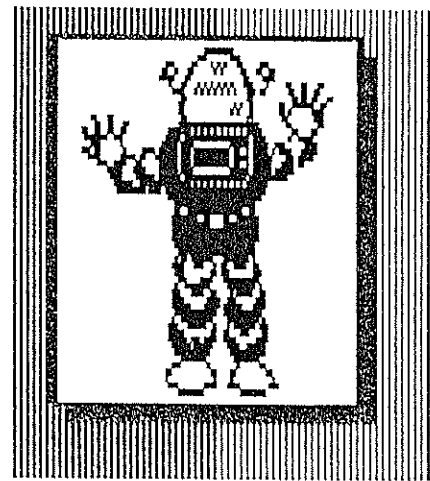


Embudo E

Laberintos

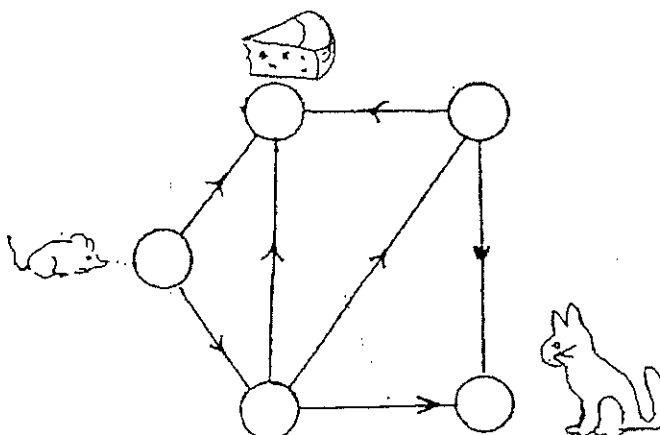
Se pone un robot en un laberinto y empieza a explorarlo. En cada bifurcación es igual de probable que el robot continúe por un camino que por otro (excepto que no puede retroceder por el mismo camino por el que ha llegado). Hay trampas al final de los caminos. ¿En cuál de las trampas es más probable que acabe el robot, o son todas igualmente probables?

Imagina que repetimos la experiencia muchas veces ¿En qué proporción de ocasiones caerá en cada trampa? Resuelve, para cada uno de los laberintos dibujados.

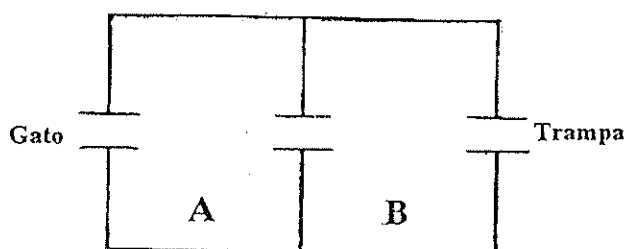


Ratones

A).- Se introducen doce ratones por la entrada del laberinto de la figura, que tiene dos salidas, una en la que hay un gato y otra en la que se encuentra un queso. Si el ratón llega a donde está el queso, se lo come y sale libre, pero si va a parar a la salida donde se encuentra el gato, es comido por éste.



¿Cuántos ratones se salvarán? ¿Cuántos serán comidos por el gato? ¿Y si hay 24 ó 36 ratones? ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se coma el queso? ¿Cuál la de que sea comido por el gato?



B).- Un ratón se mueve entre dos habitaciones A y B. Si sale de A es atrapado por el gato, mientras que si sale de B cae en una trampa, como se ve en el diagrama. Inicialmente parte de la habitación A y su movimiento se realiza de la siguiente forma: de A a B con probabilidad $3/4$, de B a A con probabilidad $7/8$. Hallar la probabilidad de que: a) lo coja el gato, b) lo coja la trampa.

C).- Un ratón puede estar en 6 posiciones (como se indica en la figura) de forma que si está en la posición i , luego se mueve a las posiciones $i+1$ o $i-1$ con probabilidades $2/3$ y $1/3$ respectivamente, pero si llega a las posiciones 1 o 6 queda atrapado en sendas trampas. En este paseo aleatorio, si el ratón parte de la posición 3 determinar las probabilidades de ser atrapado en las trampas 1 y 6.



Estrategias

D).- Un jugador necesita cinco millones de pesetas para pagar una deuda, pero solo tiene un millón y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma mas rápida posible a su objetivo. Estudiar la estrategia a seguir por el jugador y calcular la probabilidad que tiene de conseguirla.

VII. PROBLEMAS CON PROBABILIDADES

1) Ir a dos fábricas. Un ingeniero trabaja en dos fábricas A y B. Los ómnibus que lo llevan a las fábricas parten del mismo lugar. A las horas exactas sale el que lo lleva a la fábrica A, y a las horas y cuarto el que lo lleva a la fábrica B. Si sale de su casa sin preocuparse de la hora y toma el primer ómnibus que llega, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a cada una de las fábricas?

2) Nueva sociedad. Un grupo financiero estudia el lanzamiento de una nueva sociedad con una inversión de \$ 500.000. De acuerdo a sus expertos, tres casos solamente pueden ocurrir:

- La sociedad se desarrolla rápidamente obteniendo el 30 % del mercado. Se tiene una ganancia de \$ 800.000 con una probabilidad del 10 %;
- La sociedad comienza normalmente obteniendo el 10 % del mercado. Se tiene una ganancia de \$ 200.000 con una probabilidad del 70 %;
- La sociedad cierra después de una tentativa infructuosa. Los expertos estiman al 20 % la probabilidad de esta eventualidad.

¿Cuál es la ganancia esperada ?

Observación. La ganancia esperada no corresponde a la ganancia de ninguna de las tres posibilidades. Ella indica solamente la ganancia media que se obtendría con la hipótesis irreal que se podría ejecutar la inversión un número grande de veces. Esta medida permite tomar en cuenta la ganancia de cada posibilidad futura teniendo en cuenta como peso la probabilidad de dicha realización. En otras palabras, la ganancia esperada es la media aritmética (esperanza) de las ganancias de cada posibilidad, ponderadas por su probabilidad respectiva.

3) Oscar y sus dos tías. Oscar tiene dos tías a quienes visita cada viernes por la noche. Cada una de ellas vive sobre la ruta de la línea de ómnibus B, una en dirección sur y la otra en dirección norte. Cada viernes, alrededor de las 7 de la tarde, Oscar camina hacia la parada y toma el primer ómnibus que pasa, en una dirección o en la opuesta. En ambas direcciones la frecuencia es de 10 minutos. Al cabo de algún tiempo, una de las tías llama a Oscar reclamando que sólo había ido una vez, mientras que ha visitado 9 veces a su hermana. ¿Cómo se explica esto?

4) Gracia de un condenado a muerte. En el lejano reino de Juegolandia, a los condenados a muerte se les concedía la gracia de que su vida dependiera de que sacaran una bola blanca de una bolsa que contenía 50 bolas blancas y 50 negras. Pero en cierta ocasión, un reo pidió la gracia de que se le dejara distribuir las bolas de otro modo antes de hacer el sorteo. Tras algunas discusiones, se le concedió la gracia y preparó dos bolsas: en una colocó una sola bola blanca; en otra bolsa colocó 49 blancas y 50 negras. ¿Cuál resultó de este modo la probabilidad de sacar blanca?

5) Azar en el círculo. En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Halle la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.

6) Azar de un disco en una cuadrícula. Se tiene una hoja cuadrículada con cuadrados de 1cm x 1cm. Se lanza sobre ella, al azar, un disco de $1/4$ cm de radio. Halle la probabilidad de que el disco cubra un

punto de intersección de la cuadrícula.

7) Un jugador arriesgado. Un jugador necesita cinco millones para pagar una deuda, pero solo tiene un millón y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma más rápida posible a su objetivo. Estudie la estrategia a seguir por el jugador y calcule la probabilidad que tiene de conseguirlo.

8) Azar en una recta. Sobre una línea recta se seleccionan al azar los puntos a y b tales que:

$$-2 \leq b \leq 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq a \leq 3 .$$

Halle la probabilidad de que la distancia entre a y b sea mayor que 3.

Definición.— Dados dos números positivos a y b , se definen la media aritmética MA y la media geométrica MG de la siguiente manera :

$$MA = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad MG = \sqrt{ab} .$$

9) (i) Demuestre que :

(a) $MG \leq MA$; (b) $MG = MA \Leftrightarrow a = b$; (c) $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in [0,1]$.

(ii) ¿Cuál es el rectángulo de área máxima que tiene por perímetro p ?

(iii) La población de la Argentina está dada en la siguiente tabla:

año	población (en millones de habitantes)
1960	20
1970	23
1980	28
1990	33

(a) Calcule las medias aritmética y geométrica de la población de los años 1960 y 1980. Compare los valores hallados con los que nos brinda la tabla para el año 1970.

(b) Idem (a) para los años 1970 y 1990.

(c) Estime el número de habitantes que tendría la Argentina en el año 2000, utilizando solamente los datos de la tabla.

Observación.— Los resultados obtenidos con la MA y la MG no son muy diferentes. En general, para problemas referentes al crecimiento o decrecimiento de poblaciones la MG da resultados más aproximados a la realidad. Naturalmente que éstos son valores estimados, es decir, aproximados, pues pueden ocurrir fenómenos (catástrofes, gran inmigración o emigración) que los haga variar.

VIII. TRABAJOS PRACTICOS Y CASOS.

TRABAJO PRACTICO 1: Estrategias con urnas y bolas.

Una urna contiene α bolas blancas y β bolas negras; se sabe que $\alpha + \beta \geq 3$. Los jugadores A y B juegan un juego con la urna y las bolas. Se consideran dos estrategias:

- (I) El jugador A toma al azar una bola de la urna. Si es blanca entonces él gana, en caso contrario pierde;
 - (II) El jugador A toma al azar una bola y la tira afuera de la urna sin mirarla. El jugador B toma entonces una bola negra. Luego, A toma otra bola de la urna. Si esta segunda bola es blanca entonces A gana. En caso contrario, pierde.
- (i) Calcule la probabilidad de ganar que tiene el jugador A en las estrategias I y II.
 - (ii) ¿Cuál de las dos estrategias es preferible para el primer jugador A?

TRABAJO PRACTICO 2: El tren y el ómnibus. Un tren llega a una estación en un instante del intervalo $(0, T)$ al azar, parando α minutos. A la misma estación acude un ómnibus al azar, independientemente del tren, en el mismo intervalo de tiempo $(0, T)$ parando β minutos (con $\alpha < T$ y $\beta < T$).

- (i) Calcule la probabilidad de que el tren llegue antes que el ómnibus;
- (ii) Determine la probabilidad de que se encuentren;
- (iii) Suponiendo que se encuentren en la estación, determine la probabilidad de que el tren llegue antes que el ómnibus;
- (iv) Analice los resultados anteriores dando diferentes valores a α y a β .

TRABAJO PRACTICO 3: El duelo triangular. Tres políticos A, B y C deciden resolver sus diferencias mediante un duelo a pistola bajo las siguientes reglas. Luego de sortear quien dispara en primer, segundo y tercer lugar, los tres se ubican en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero. Se conviene que cada uno disparará un tiro por turno, continuando en el orden sorteado hasta que dos de ellos queden fuera de combate. Cada uno puede disparar en la dirección que desee. Además, conocen que las precisiones de tiro de A, B y C son de 100%, 80% y 50% respectivamente.

Suponiendo que cada uno adopta la estrategia más favorable y que nadie muere a causa de una bala perdida que no había sido disparada contra él,

- (i) ¿Quién tiene más chances de sobrevivir?
- (ii) ¿Cuáles son las probabilidades de cada uno? Demuestre que se tiene que:

$$P_A = \frac{3}{10} ; \quad P_B = \frac{8}{45} ; \quad P_C = \frac{47}{90} .$$

- (iii) Suponiendo que C no dispara al aire, calcule las probabilidades de cada uno de sobrevivir.
- (iv) Si la precisión de C es del $x\%$ ¿Cuál es el mínimo valor de x que garantice la victoria a C?

Observación: dado que A y B son los mejores tiradores, ambos tratarán de eliminarse el uno contra el otro, luego, la mejor estrategia para C es disparar al aire hasta que A ó B caiga. De este modo, C tiene el primer disparo contra el sobreviviente con una chance del 50 % de vencer.

TRABAJO PRACTICO 4. La compañía X está tratando de decidir sobre la compra de una máquina nueva, la cual se utilizará exclusivamente en la fabricación de cierto producto. Actualmente existen dos máquinas que pueden ser satisfactorias para el fin perseguido.

Si se compra la máquina A, se invertirán \$ 10.000 y se ahorrará \$ 1 por unidad, en relación con el proceso de producción que se utiliza en la actualidad. Si se compra la máquina B, se invertirán \$60.000 y se ahorrarán \$3 por unidad producida. Ambas máquinas tienen una vida útil de 5 años. Las condiciones futuras del mercado son algo inciertas y se han resumido en las siguientes estimaciones sobre la probabilidad correspondiente a un volumen total de ventas dado, para los próximos 5 años:

<i>Ventas Totales (en unidades)</i>	<i>Probabilidad</i>
10000	0,10
20000	0,30
30000	0,40
40000	0,20

Sin tomar en cuenta el problema de la actualización financiera de los ingresos futuros, ¿cuál es la máquina que debería comprar la empresa X? ¿Cuáles son los ahorros esperados correspondientes a cada una de esas acciones alternativas?

CASO 1: Producción óptima de productos por semana. Se supone que la demanda D, por semana, de cierto producto es una variable aleatoria con determinada distribución de probabilidades, $P(D = n) = p(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Supóngase que el costo para el proveedor es \$ C_1 por artículo, mientras que él lo vende a \$ C_2 . Cualquier artículo que no se venda al término de la semana, debe almacenarse con un costo de \$ C_3 por artículo. Si el fabricante decide producir N artículos al comienzo de la semana, entonces:

- (i) ¿Cuál es su utilidad esperada por semana?
- (ii) ¿Para qué valor de N es máxima la ganancia esperada? Para realizar este estudio se analizará el siguiente caso: Se supone además que para la demanda aleatoria D es apropiada la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(D = n) = \frac{1}{5}, n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

- (a) Entonces calcule, en este caso, la expresión de la utilidad esperada por semana.
- (b) Calcule el N óptimo para el caso concreto de $C_1 = 3$, $C_2 = 9$, $C_3 = 1$.
- (c) Pruebe, en general, que el valor N óptimo se obtiene en el caso en que $N < 5$ y que los parámetros C_1 , C_2 y C_3 satisfagan la siguiente desigualdad:

$$C_2 < 10 C_1 + 9 C_3.$$

Más aún, en dicho caso el N óptimo se obtiene como la parte entera o la parte entera más uno del valor real x_0 dado por la expresión:

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{5(C_2 - C_1)}{C_2 + C_3}.$$

CASO 2: Postres preparados. Un fabricante de postres planifica el lanzamiento de un nuevo tipo de plan. Le ofrecen dos posibilidades:

- venderlo a un precio elevado para hacer un producto de prestigio;
- venderlo a un precio accesible (barato) para realizar una venta masiva y obtener una importante ganancia por cantidad.

Su competidor principal tiene también un proyecto de este tipo, pero al presente no se conoce todavía cuál será su decisión. Tres posibilidades del futuro pueden ser consideradas, y sus consecuencias están descriptas en el cuadro 1 siguiente:

Unidad: \$ 10.000	precio bajo (\$)	precio elevado (\$)	probabilidad del evento
No competencia (NC)	20	- 2	0,50
Competencia con buena reacción del mercado (CBR)	5	25	0,20
Competencia con débil reacción del mercado (CDR)	- 10	10	0,30

- Represente el árbol de decisión correspondiente al problema del fabricante;
- ¿Cuál es la mejor decisión a tomar, y cuánto es su esperanza de ganancia (o ganancia esperada)?;
- ¿Qué permite conocer con certeza, cuál de las tres posibilidades del futuro ocurrirá? En otras palabras, cuál es el monto a pagar por la encuesta que nos permita pasar de información imperfecta (dada por el cuadro anterior) a información perfecta.
- Un asesor externo, de quién se conoce la seguridad de sus estudios, propone sus servicios para prever la reacción de la competencia y del mercado; las previsiones del experto están dadas en el siguiente cuadro 2:

	RR RP	NC	CBR	CDR
RR: Reacción real	NC	0,80	0,10	0,10
RP: Reacción prevista	CBR	0,10	0,70	0,20
	CDR	0,10	0,30	0,60

Observación. Cuando hay competencia y se tiene una débil reacción del mercado (caso CDR), el experto prevé:

- NC en el 10 % de los casos (probabilidad 0,10)
- CBR en el 30 % de los casos (probabilidad 0,30)
- CDR en el 60 % de los casos (probabilidad 0,60).

Si el análisis del experto cuesta \$ 15.000 ¿Conviene contratarlo?

CASO 3: Curso de idioma. Una empresa lanza un curso de idioma por CD (discos compactos). La demanda puede ser de 1000, 2000, 3000, 4000 ó 5000 unidades. La creación del curso costó \$ 100.000. El juego de CD cuesta \$ 200 y se vende a \$ 400. Como todos los CD a producir deben ser realizados en el mismo momento, la sociedad debe decidir el número de cursos a producir. Por razones de prestigio, los cursos que no se pudieron vender, no pueden venderse en liquidación; pero los CD se borran y se liquidan a \$ 100 el juego.

I) Formulación del problema. El problema puede ser representado por una matriz, en la cual cada fila corresponde a una decisión de la empresa, y cada columna corresponde a una posibilidad futura de demanda. De acuerdo a los datos anteriores coloque en la intersección de cada fila y cada columna el beneficio (o pérdida) correspondiente (en unidades de \$ 1.000 para facilitar las operaciones).

P \ D	1000	2000	3000	4000	5000
1000					
2000					
3000					
4000					
5000					

D: Demanda de CD ;

P: Producción de CD

II) A continuación se estudiarán varios criterios que permitirán elegir la solución adecuada:

(a) El criterio maximin. Su interés principal, además de su simplicidad, reside en su óptica conservadora: se elige la estrategia para la cual la ganancia mínima es la más grande posible. Este criterio tiene por objetivo principal dar una garantía: "se va a ganar al menos tanto", o "se va a perder a lo sumo tanto".

Sea $g(p_i, d_j)$ la ganancia obtenida para un nivel de producción de p_i unidades ($i=1, \dots, 5$) y una demanda de d_j unidades ($j = 1, \dots, 5$). Entonces

$$\text{Mín}_j g(p_i, d_j)$$

será la ganancia más pequeña posible para la producción p_i dada ($i = 1, \dots, 5$).

La estrategia maximin es la que maximiza estos mínimos, es decir halla el nivel de producción p_i de manera tal que se tenga

$$\text{Max}_i \text{Mín}_j g(p_i, d_j) = \text{Mín}_j g(p_i, d_j) .$$

Calcule la estrategia del criterio maximin, es decir ¿Cuál es el nivel de producción p_i ($i = 1, \dots, 5$) a elegir y la ganancia a obtener?

(b) El criterio maximax. Este criterio es, por el contrario, extremadamente optimista. Se elige la estrategia que aporta la mayor ganancia, en el mejor de los casos posibles. La estrategia p_i a elegir es la dada por

$$\text{Max}_i \text{Max}_j g(p_i, d_j) = \text{Max}_j g(p_i, d_j) .$$

Calcule la estrategia del criterio maximax.

Observación: Este criterio es de un uso poco frecuente.

(c) Criterio de Laplace. Se utiliza cuando la probabilidad de cada posibilidad futura parece ser la misma (constante) o que se ignoran sus probabilidades. Este criterio consiste en elegir la estrategia que maximiza la ganancia esperada, dando la misma probabilidad a cada evento futuro. La estrategia p_i ($i=1, \dots, 5$) a elegir es la dada por

$$G(p_i) = \text{Max}_k G(p_k)$$

donde $G(p_i)$ es la ganancia esperada de la estrategia p_i (con n posibilidades futuras con probabilidad $1/n$ cada una; en nuestro caso se tiene que $n = 5$), es decir:

$$G(p_i) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g(p_i, d_j) .$$

Calcule la estrategia del criterio de Laplace.

(d) Criterio del minimax (conocido también como del lamento o costo de oportunidad mínimo, es decir que sea mínimo lo que se deja de ganar).

Se supone que se conoce a priori la demanda. Se busca hallar la estrategia que permita obtener la mejor ganancia para esta demanda. En la columna correspondiente a esta demanda se reemplaza cada ganancia por la diferencia entre dicha ganancia y la ganancia correspondiente a la producción óptima para la demanda. Se obtiene de esta manera una tabla identificando, para la demanda dada, el lamento o lo que se deja de ganar, correspondiente a una producción no óptima para esta demanda. Esta modificación de la tabla se realiza para cada valor posible de la demanda. Se elige la estrategia que minimiza el lamento máximo.

Calcule la estrategia del criterio minimax.

Observación: Ningún criterio es en sí mismo, mejor que otro. Todo depende de la situación en la que se encuentre la empresa. El sólo criterio que se puede, más o menos, eliminar es el maximax.

III) Arboles de decisión.

La empresa que lo edita tiene 6 posibilidades de acción:

- no lanzar el producto (nunca debe olvidarse esta posibilidad nula);
- producir 1.000 juegos de CD;
- producir 2.000 juegos de CD;

- producir 3.000 juegos de CD;
- producir 4.000 juegos de CD;
- producir 5.000 juegos de CD.

Se distinguirán 5 estados posibles de demanda: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 juegos de CD.

Se supone que se ha realizado un estudio del mercado a fin de predecir mejor la demanda. La encuesta ha producido los resultados siguientes:

Demanda	Probabilidad
1.000	0,10
2.000	0,30
3.000	0,40
4.000	0,15
5.000	0,05

(i) Represente el problema bajo la forma de un árbol de decisión y distinga las 26 situaciones finales posibles.

(ii) Calcule, para cada decisión de producción, la ganancia esperada:

Producción	Ganancia Esperada
1.000	
2.000	
3.000	
4.000	
5.000	

(iii) Reduzca el árbol reemplazando las ramas relativas a las diversas posibilidades de demanda por la ganancia esperada que le corresponde. Por lo tanto, el problema fue llevado a una elección entre las 6 acciones posibles, cada una de las cuales tiene una ganancia esperada, con lo cual se puede elegir la alternativa cuya ganancia esperada sea la más elevada. ¿Cuál es dicha alternativa?

(iv) Valor de la información.

En general, es muy interesante poder determinar cuánto más se podría obtener de ganancia teniendo una mejor información sobre el futuro; de allí la necesidad de información adicional.

Se supone que se puede hacer una cierta publicidad del curso de idioma y que se lo puede vender por suscripción, con lo cual se podrá producir conociendo la demanda por anticipado. Por lo tanto, ¿cuánto se podría invertir en publicidad y en organización para que esta estrategia sea rentable?

Se supone, para simplificar, que esto no modifica la demanda, pero permite solamente predecirla. Bajo suscripción, se producirá exactamente la demanda.

Calcule la ganancia esperada si se produce de acuerdo a la demanda obtenida (es el cálculo de la ganancia esperada con información perfecta).

Observación. Por ende, considerando sólo la tabla de probabilidades para cada demanda se pudo calcular anteriormente la ganancia esperada máxima (dada por \$ 350.000 para una producción de 3.000 CD). Por otro lado, con información perfecta, se pudo obtener una ganancia esperada de \$ 450.000. Por lo tanto, la información extra para conocer la demanda exacta vale \$ 100.000, es decir, es el monto máximo que se podrá pagar para el conjunto de gastos relativos a la venta por suscripción.

Un modelo simple de fidelidad de marca y sus consecuencias



por
Domingo Alberto Tarzia
 Investigador Principal del CONICET
 Director Depto. Matemática U.A. - F.C.E.

"La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza..."

Los analistas de mercado se interesan en la preferencia de un cliente hacia una determinada marca, y en el efecto que tiene esa fidelidad o lealtad en la participación de cada marca en el mercado de un determinado producto.

En este trabajo se presenta un modelo simple de lealtad a la marca que corresponde a un producto dado P para el cual existen sólo dos marcas «M₁» y «M₂». Se realizan las siguientes suposiciones (una probabilidad del 85% se expresará matemáticamente a través del número real 0,85%):

(S1) Un cliente que compra la marca «M₁» en un período determinado t tiene una probabilidad a (con 0 < a < 1) de comprar nuevamente «M₁» y una probabilidad 1 - a de comprar la marca «M₂» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente t+1;

(S2) Un cliente que compra la marca «M₂» en un período determinado t tiene una probabilidad b (con 0 < b < 1) de comprar nuevamente «M₂» y una probabilidad 1 - b de comprar la marca «M₁» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente t+1;

(S3) Las probabilidades dadas anteriormente en (S1) y en (S2) no varían de período en período;

(S4) El comportamiento del comprador de una marca depende sólo de la compra inmediata anterior y es estadísticamente independiente de las otras compras anteriores;

(S5) En un determinado momento t (condición inicial del presente estudio) la marca «M₁» tiene una porción α (con 0 ≤ α ≤ 1) del mercado del producto P (en el sentido de las

probabilidades) y por ende la marca «M₂» tiene la porción restante 1 - α del mercado del producto P.

Observación 1: De las hipótesis (S1) y (S2) se desprende que los clientes de la marca «M₂» son más leales que los de la marca «M₁» si y sólo si el porcentaje de los que compran la marca «M₂» en el período t y vuelven a comprar la marca «M₂» en el siguiente período t + 1 es mayor que el porcentaje de los que compran la marca «M₁» en el período t y vuelven a comprar la marca «M₁» en el siguiente período t + 1, lo cual se expresa matemáticamente por la siguiente desigualdad: b > a.

Esta propiedad es también válida recíprocamente, es decir, que los clientes de la marca «M₁» son más leales que los de la marca «M₂» si y sólo si a > b.

Las dos hipótesis (S1) y (S2) se pueden resumir en la siguiente tabla:

Marca comprada en el período t	Marca comprada en el período t + 1	
	Marca «M ₁ »	Marca «M ₂ »
Marca «M ₁ »	a	1 - a
Marca «M ₂ »	1 - b	b

Luego de presentar el modelo y sus hipótesis, será de mucho interés que se puedan responder las siguientes preguntas:

(1) ¿Qué porcentaje del mercado del producto P tendrán la marca «M₁» y la marca «M₂» en los períodos de tiempo t + 1, t + 2, t + 3, etc.?

(2) ¿El mercado del producto P tiende a

estabilizarse asintóticamente (es decir, cuándo se deja evolucionar el sistema)?

(3) Si la respuesta a (2) es afirmativa, ¿cómo será la convergencia: lenta o rápida?

(4) ¿Las respuestas a las preguntas anteriores (1) a (3) dependerán (y de qué forma) o serán independientes de la posición inicial del mercado del producto P?

Observación 2: Si el mercado del producto P se estabiliza en la posición de equilibrio se tendrá que el número de clientes que dejan la marca «M1» por la marca «M2» quedará balanceado con aquellos que cambian de la marca «M2» hacia la marca «M1».

Observación 3: La respuesta a las preguntas anteriores es de suma importancia para las empresas que producen las dos marcas «M₁» y «M₂» del producto P, a pesar de que en el modelo se supone que las empresas no reaccionan ante cambios del mercado (lo cual obviamente, no es cierto en la realidad). Pero, el presente modelo le brindará a las empresas la necesidad de hacer algo ante un cambio de lealtad a su marca, pues si no reaccionan (no realizan nada en el tiempo) sabrán lo que les sucederá, es decir el porcentaje del mercado que perderán.

Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema: Si x_n representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M₁» al instante $t_n = t+n$ (por lo tanto, $y_n = 1-x_n$ representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M₂» al instante t_n) entonces se tienen los siguientes resultados:

R₁) Se tiene la siguiente relación que da la variación de x_{n+1} (porcentaje del mercado que tiene la marca «M₁» al instante t_{n+1}) en función de x_n :

$$(1) \quad x_{n+1} = 1 - b + (a + b - 1)x_n, \quad \forall n \geq 1,$$

con la condición inicial $x_1 = a$;

R₂) El porcentaje x_{n+1} de la marca «M₁»

del mercado del producto P al instante t_{n+1} viene dado en función de los coeficientes α , a y b de la siguiente manera:

$$(2) \quad x_{n+1} = (1-b) \frac{1-(a+b-1)^n}{2-(a+b)} + (a+b-1)^n \alpha;$$

R₃) El porcentaje x_n de la marca «M₁» del mercado del producto P al instante t_n converge al número $x \in (0,1)$ cuando $n \rightarrow +\infty$, el cual no depende del coeficiente α y viene dado en función de los coeficientes a y b de la siguiente manera:

$$(3) \quad x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1-b}{2-a-b} = \frac{1}{1 + \frac{1-a}{1-b}}$$

Demostración: La prueba de estos resultados matemáticos (que no se explicitarán aquí) surgen de la utilización de la teoría de árboles de probabilidades, serie geométrica y su suma, principio de inducción matemática, y, sucesión y su límite.

Observación 4: La relación (2) da la expresión de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en función de los parámetros a , b y α . Si se tiene el caso particular $a+b-1=0$ ($b=1-a$), entonces se deduce que:

$$(4) \quad x_{n+1} = \frac{1-b}{2-(a+b)} = a, \quad \forall n \geq 1,$$

que no depende del coeficiente α y del número de períodos n . Este hecho es lógico pues al ser $a+b=1$ el mercado está dividido en dos porciones que no varían: una porción del mercado con porcentaje « a » que compra la marca «M₁» y la otra porción del mercado con porcentaje « $1-a$ » que compra la marca «M₂».

Observación 5: Si se tiene el caso límite en que $a=b=1$ (es decir, los clientes de ambas marcas son leales al 100%) entonces se deduce que:

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n, \quad y_{n+1} = y_n, \quad \forall n \geq 1,$$

que indica que el mercado no varía y permanece constante en la condición

inicial, es decir $x_n = \alpha, y_n = 1-\alpha, \forall n \geq 1$.

Observación 6: Si se tiene el caso particular $a=b$ (ambas marcas tienen la misma fidelidad) entonces se deduce que $x=0.50$, es decir que las dos marcas «M₁» y «M₂» compartirán el mercado en partes iguales (el 50% para cada una de las dos marcas).

Observación 7: Si se supone que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite x , entonces éste puede calcularse de una manera más simple a través de la relación (1) pues al pasar al límite cuando $n \rightarrow +\infty$ se tiene que

$$(6) \quad x = 1 - b + (a + b - 1)x$$

de donde surge (3), pero tiene el inconveniente de no poder dar una expresión de x_n en función de n y de los otros parámetros del sistema: a, b y α .

Consecuencias del modelo:

- 1) El mercado siempre se estabiliza y la convergencia es, en general, rápida (será tanto más rápida como más pequeño sea el número $|a+b-1|$);
- 2) El resultado final, al estabilizarse el mercado, no depende del coeficiente α que indica cómo estaba compuesto inicialmente el mercado del producto P con las dos marcas «M₁» y «M₂»;
- 3) Si $a > b$ (la fidelidad de la marca «M₁» es mayor que la de «M₂») entonces el mercado evolucionará al límite x , dado por la fórmula (3), siendo $x > 0.50$;
- 4) Si $a=b=1$ (ambas marcas tienen el 100% de fidelidad) entonces el mercado no evoluciona y permanece siempre constante con $x_n = \alpha, y_n = 1-\alpha, \forall n \geq 1$;
- 5) Si $a=b$ (ambas marcas tienen igual fidelidad) entonces el mercado evolucionará al límite $x=0.50$ que indica que cada marca tendrá el 50% del mercado.
- 6) Si $a+b=1$ ($b=1-a$) entonces el mercado sólo evoluciona en el primer período al pasar de $x_1 = \alpha$ a $x_2 = a$ y luego

permanece siempre constante con $x_{n-1}=a, y_{n-1}=1-a=b, \forall n \geq 1$;

Observación 8: De las consecuencias 2 y 3 anteriores se deduce que la marca que tenga mayor fidelidad obtendrá más del 50% del mercado independientemente de lo que poseía inicialmente.

Ejemplo: Para tener un ejemplo de cómo varía el porcentaje x_n de la marca «M₁» del mercado del producto P (y por ende, el porcentaje $y_n=1-x_n$ de la marca «M₂» del mercado del producto P) se considerará el siguiente caso:

$\alpha = 0,50$ (el mercado está dividido en partes iguales entre las dos marcas)
 $a = 0,80$ (un 80% de los clientes de la marca «M₁» vuelven a comprar «M₁»)
 $b = 0,50$ (un 50% de los clientes de la marca «M₂» vuelven a comprar «M₂»).

Entonces, aplicando la fórmula (2), pa-

ra distintos periodos de tiempo, se deduce que:

$$\begin{array}{l} x_1=0,50 \\ x_2=0,695 \\ x_3=0,7126 \\ x_4=0,7138 \\ x_5=0,7143 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2=0,65, \\ x_3=0,7085, \\ x_4=0,7138, \dots \\ = 0,7143 \end{array}$$

(la marca «M₁» poseerá el 71,43% del mercado), con lo cual a partir del tercer período (n=3) el mercado se encuentra cerca del valor de estabilización con un error menor al 1%, al ser $x-x_3 = 0,0058$.

Al final del trabajo, se presenta una tabla con numerosos casos y en cada uno de ellos se explicitan: $\alpha=x_1, a, b, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ y $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

El ejemplo anterior se presenta como el primer caso.

Conclusión final:

La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer

cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza (si no se efectúa ningún cambio o ninguna reacción por parte de las empresas que producen las marcas «M₁» y «M₂»). Un estudio análogo para n marcas daría conclusiones más realistas, pero que no cambian la filosofía de lo realizado.

Observaciones y consejos finales:

1) El liderazgo en un mercado puede durar poco si ingresa al mercado un nuevo competidor con mayor fidelidad de marca;

2) Debemos preguntarnos: ¿Cuál es la rotación de nuestra cartera de clientes?

3) Tal vez debamos preocuparnos menos por aumentar nuestra participación en el mercado y más por aumentar la fidelidad de nuestros clientes actuales. **S.MI**

x1= alpha	a	b	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x=lim xn
0.5	0.8	0.5	0.65	0.695	0.7085	0.71255	0.713765	0.71413	0.714239	0.714286
0.5	0.2	0.5	0.35	0.395	0.3815	0.38555	0.384335	0.3847	0.38459	0.384615
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.2	0.8	0.5	0.56	0.668	0.7004	0.71012	0.713036	0.713911	0.714173	0.714286
0.1	0.8	0.5	0.53	0.659	0.6977	0.70931	0.712793	0.713838	0.714151	0.714286
0.5	0.5	0.8	0.35	0.305	0.2915	0.28745	0.286235	0.285871	0.285761	0.285714
0.5	0.1	0.9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.5	0.3	0.38	0.348	0.3608	0.35568	0.357728	0.356909	0.357143
0.4	0.9	0.9	0.42	0.436	0.4488	0.45904	0.467232	0.473786	0.479028	0.5
0.3	0.9	0.9	0.34	0.372	0.3976	0.41808	0.434464	0.447571	0.458057	0.5
0.2	0.9	0.9	0.26	0.308	0.3464	0.37712	0.401696	0.421357	0.437085	0.5
0.01	0.9	0.9	0.108	0.1864	0.24912	0.299296	0.339437	0.371549	0.39724	0.5

BIBLIOGRAFÍA

- [CLGGLM] M.C. DE LA CRUZ LOPEZ – C. GONZALEZ GARCIA – J. LLORENTE MEDRANO, "Actividades sobre el azar y la probabilidad", Narcea – MEC, Madrid (1993).
- [Kr] S.G. KRANTZ, "Techniques of problem solving", American Math. Soc., Providence (1997).
- [Me] P.L. MEYER, "Probabilidad y aplicaciones estadísticas", Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (1992).
- [Mi] R. MIATELLO, "Actividades investigativas en la enseñanza", Revista de Educación Matemática, 12 (1997), 19 – 33.
- [SpBo] W.A. SPURR – C.H. BONINI, "Toma de decisiones en administración mediante métodos estadísticos", Editorial Limusa, Mexico (1980).
- [Ta] D.A. TARZIA, "Un simple modelo de fidelidad de marca y sus consecuencias", Revista Siglo XXI, (1994), 3 No. 4 (1994), 23 – 25.
- [Th] H. THIRIEZ, "Initiation au calcul économique", Dunod, Paris (1987).