UNIVERSIDAD AUSTRAL
Facultad de Ciencias Empresariales

"MATEMATICA APLICADA"

Prof.: Dr. Domingo Tarzia.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)-814990 ; FAX: (041)-810505
E-Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

POSGRADO EN DIRECCIÓN DE EMPRESAS PDG'98

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA

"LÓGICA, NÚMEROS, PROPORCIONES, ECUACIONES Y FUNCIONES APLICADAS A LA ECONOMÍA Y LA ADMINISTRACIÓN. PROBLEMAS, TRABAJOS PRÁCTICOS Y CASOS"

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Abril 1998

PLAN A DESARROLLAR

En el presente módulo se presentan:

Para resolver un problema se necesita:

I Comprender el problema

II Concebir un plan

Determinar la relación entre los datos y la incógnita.

De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares.

Obtener finalmente un **plan** de solución.

III Ejecución del plan

IV Examinar la solución obtenida

Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

ACTIVIDAD 1:
LECTURA
SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y JUEGOS.

Para desarrollar esta actividad no tienes que construir ni manipular ningún material, solo debes leer con atención lo que sigue y reflexionar sobre la lectura ya que en las próximas actividades deberás recordar lo que aquí se dice.

¿QUÉ ES UN PROBLEMA O UN JUEGO MATEMÁTICO?

Es una situación que implica un propósito u objetivo que hay que conseguir, y que es aceptada como problema por alguien. Sin esa aceptación no hay problema. Hay obstáculos para alcanzar ese propósito, y requiere deliberación, ya que el que lo afronta no conoce ningún algoritmo o procedimiento para resolverlo.

Un problema debe representar un reto adecuado a las capacidades de quien intenta resolverlo. Además debe tener interés en sí mismo, estimular el deseo de proponerlo a otras personas; no debe ser un problema con trampa o un acertijo, ni dejar bloqueado inicialmente a quien lo ha de resolver.

No confundas problema con ejercicio; estos son cuestiones que de un golpe de vista se ve en qué consisten y cuál es el medio para resolverlas. A la hora de resolver un ejercicio se suele tener a mano una receta que facilita su solución y en general la resolución de un ejercicio exige poco tiempo, situaciones que no suelen darse ante un problema o juego.

¿QUÉ ES RESOLVER UN PROBLEMA O JUEGO?

La resolución de un problema o juego es un proceso de acontecimientos que nos lleva a recorrer diferentes etapas en un viaje: aceptar el desafío, formular las preguntas adecuadas a cada caso, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución. Llevará consigo el uso de la heurística (el arte del descubrimiento), pero no de una manera predecible, porque si el método,(que no existe), pudiera ser predicho de antemano, se convertiría en un algoritmo pasando de problema a mero ejercicio.

Todo esto comporta, para cada uno de los problemas a resolver, una inmersión en el mundo particular del problema, poniendo de manifiesto las técnicas, habilidades, estrategias y actitudes personales de cada individuo que aborda el problema.

La resolución de problemas es un proceso, no un procedimiento paso a paso; es fundamentalmente un viaje, no un destino (" ... *no hay camino, se hace camino al andar.*"). Este viaje queda plasmado en ir cubriendo las siguientes etapas: deseo de acercarse al problema, aceptar el desafío, correr un riesgo, hallar la respuesta, comprender una pregunta, descubrir nuevos conocimientos o crear una nueva solución.

¿QUIÉN ES UN BUEN RESOLUTOR DE PROBLEMAS?

El que tiene deseo de afrontarlo (**yo quiero**), acepta el desafío con entusiasmo (**yo puedo**), está en posesión del equipamiento de técnicas y estrategias (heurística) matemáticas oportunas (**estoy dispuesto a aprenderlas**), y tiene talento para ello (aunque el talento es fundamental para llegar lejos en el viaje, no lo es para disfrutar de él). Y por fin, el que practica las virtudes de la paciencia y la perseverancia.

¿QUÉ SE APRENDE RESOLVIENDO PROBLEMAS?

Se aprende fundamentalmente, a entender el funcionamiento de nuestro propio razonamiento, a dominar nuestros estados de ánimo y a aumentar la confianza en nosotros mismos, nuestra autoestima.

¿CUÁL ES LA MEJOR FORMA DE RESOLVER PROBLEMAS?

La única forma es resolviendo problemas. Cada problema afrontado, con o sin éxito, nos enseña a resolver el siguiente. De alguna manera se aprende a aprender, por eso es interesante esta actividad. Pero recuerda que ésta, como todo arte, es una actividad que requiere fe (en que **puedes**), coraje (en que **quieres**), humildad (porque **no lo sabes todo**) y disciplina (**estás dispuesto a esforzarte por seguir aprendiendo**).

REGLA DE ORO: *LO QUE IMPORTA ES EL CAMINO*

Siempre debes tener en cuenta que lo que importa es el camino. No pongas la mira en el éxito, sino en el proceso. Es el proceso el que te enseña. Un problema resuelto es un problema muerto, pero si aún se te resiste, vive en ti como problema.

BLOQUEOS Y DESBLOQUEOS

Dijimos anteriormente que un problema constituye un auténtico reto. Sabemos, más o menos, a dónde queremos llegar, pero ignoramos el camino. Ante esta situación caben actitudes positivas como confianza, tranquilidad, disposición de aprender, curiosidad, gusto por el reto, etc. y otras negativas o bloqueos que pueden obstaculizar nuestro avance como, miedo a lo desconocido, nerviosismo, prisa por acabar o cierta desazón ante la prueba.

En la tabla siguiente puedes ver los tipos de bloqueos que nos pueden afectar y algunas pautas para reflexionar sobre ellos e intentar superarlos.

BLOQUEOS DE ORIGEN	PAUTAS PARA SUPERAR LOS BLOQUEOS
AFECTIVO ➤ Apatía, abulia, pereza por el comienzo. ➤ Miedos al fracaso, a la equivocación, al ridículo. ➤ Ansiedades. ➤ Repugnancias.	♦ Piensa en las distintas formas de comenzar tu tarea. Escoge una y comienza. ♦ El inicio puede tener carácter provisional. ♦ Los fallos y equivocaciones nos enseñan sobre las formas adecuadas de proceder. ♦ Aminorar la hiperactividad cuando nos percatamos de estar empujados a ella. ♦ Actúa ocasionalmente contra la tendencia que te arrastra.
COGNOSCITIVO ➤ Dificultades en la percepción del problema. ➤ Incapacidad de desglosar el problema. ➤ Visión estereotipada.	♦ Examinar cómo otros se enfrentan con actividades parecidas y comparar procedimientos. ♦ Tratar de descomponer en partes más sencillas. Establecer prioridades. ♦ Permanecer abierto a lo extraño.
CULTURALES Y AMBIENTALES ➤ La sabiduría popular dice: "Busca la respuesta correcta". "Esto no es lógico". "Hay que ser práctico".	♦ No te contentes con la primera respuesta, busca varias respuestas. ♦ Déjate llevar por ideas imaginativas y por tu fantasía. ♦ Cultiva, en lo posible, la actitud lógica. ♦ Juega con tus problemas.

AUTOEXAMEN SOBRE TU MANERA DE PENSAR

La resolución de problemas nos debe llevar a entender el funcionamiento de nuestro propio razonamiento, a dominar nuestros estados de ánimo y a aumentar la confianza en nosotros mismos. En definitiva, nos ayuda a conocernos mejor a nosotros mismos. El conocerte a ti mismo, en este ámbito, te proporcionará la posibilidad de utilizar tus recursos de la forma más eficaz posible y alcanzar con seguridad un conocimiento más pleno.

Lee con atención, reflexiona detenidamente y escribe con cuidado y orden las respuestas a las siguientes cuestiones:

1. Cuando te enfrentas a un problema, ¿con qué papel de los siguientes te identificas más?:

investigador	detective	profesor	conductor de coches
explorador	actor	juez	científico
negociante	matemático	constructor	el más listo de la clase

Explica brevemente tu elección.

2. Cuando te enfrentas a un problema, ¿con qué estado de ánimo te identificas más?:

optimista	pesimista	desanimado	indiferente
vigilante	derrotado	crítico	disgustado
angustiado	aburrido	divertido	tranquilo

Explica brevemente por qué.

3. ¿Qué es lo que más te ayuda a concentrarte? El silencio, la paz, la tranquilidad, la música, viajar, pasear, contemplar el paisaje, etc. Explica por qué.

4. Si no te sale un problema, qué prefieres hacer: continuar a pesar de todo, olvidarte de él por un rato, abandonarlo definitivamente, seguir pensando en él en casa. Explica por qué.

5. A la vista de la tabla de bloqueos, ¿de qué tipo son los bloqueos que encuentras al resolver un problema? Explica por qué.

6. ¿Qué buscas en la resolución de problemas? Entretenimiento, ejercicio, cumplimiento de un deber, satisfacer mi curiosidad, autosuperación, preparación más eficaz, etc. Explica por qué.

7. ¿Cómo eres respecto al trabajo? Me cuesta ponerme en marcha, soy de esfuerzos prolongados, me canso y me aburro fácilmente, soy de intensos altibajos. ¿Conoces la causa?

8. En el trabajo, ¿qué te produce más satisfacción: pensar autónomo, observar, mirar como lo hacen los otros, explorar, repetir, repasar, asegurarse, no trabajar?
¿Qué es lo que más te cuesta?

9. ¿Qué tipos de problemas son los que más te gustan?

10. Tu pensamiento, ¿anda casi siempre bajo control o a ratos anda vagando y divagando?

ACTIVIDAD 2: MODELOS Y PROTOCOLOS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Recuerda que en la actividad anterior la respuesta a la cuestión ¿cuál es la mejor forma de resolver problemas?, era que el único camino posible es resolviendo problemas. Esto puede parecer un contrasentido, pero la realidad nos muestra que es así.

Esta situación puede resultar descorazonadora para alguien que comienza a introducirse en este ámbito. Para salir de este círculo vicioso te diremos que en la resolución de problemas podemos servirnos de guías o **modelos** que nos faciliten el camino que debemos recorrer a lo largo de todo el proceso de resolución de un problema.

Recuerda que para que mejores el hábito de pensar sería conveniente que nunca olvidases estos tres principios básicos:

- Tener un modelo que nos sirva de guía en el pensamiento y la acción.
- Practicar el pensar, tratando de ajustarlo a dicho modelo.
- Poner en práctica una forma de examinar, en cualquier momento, nuestro proceso de pensamiento y resolución, ya que siempre resulta más interesante el camino recorrido que el final del viaje o resultado del problema.

Antes de explicarte el modelo que puedes seguir y la forma de expresión escrita de lo que vayas pensando y sintiendo, puedes observar cómo hemos resuelto, trabajando en grupo, los problemas que siguen.

Queremos poner de manifiesto que estos protocolos no deben leerse como un solucionario de problemas o ejercicios al uso; en ellos debe contemplarse la realidad que normalmente aparece cuando, individual o colectivamente, intentamos la resolución de un problema.

En los protocolos, ligeramente retocados para hacer más fácil su lectura, se encontrarán entre otros aspectos: los bloqueos, los caminos erróneos, las opiniones individuales de agrado o desagrado respecto al tipo de problema, las reflexiones individuales o colectivas referidas a aspectos particulares del problema, a las fases del modelo de resolución utilizado, etc.

FICHAS DE DOMINÓ

Se han colocado, al azar, las fichas de un dominó sobre una mesa y se han fotografiado.

La exposición no fue correcta; aunque se podían distinguir los números de las fichas, no se podía distinguir la posición de cada ficha individual.

¿Puedes reconstruir las fichas?

5	1	4	6	0	3	3	5
6	5	4	6	2	2	4	0
4	5	4	5	0	0	2	5
6	2	1	3	3	6	3	0
4	2	3	5	0	1	6	6
0	1	4	1	4	1	5	6
2	1	3	2	0	3	2	1

FASES DE FAMILIARIZACIÓN Y BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS:

El grupo no tiene dificultades respecto al enunciado del problema, y pasa a la búsqueda de estrategias que pueden resolverlo.

Aparecen las siguientes ideas:

1) De forma ordenada marcamos un número (por ejemplo, el 5) y fijamos todas las fichas donde aparece.

2) Buscar, en primer lugar, las fichas dobles y continuar con la opción i).

3) Analizar las posibilidades que se pueden ofrecer en las esquinas.

4) Se construye una tabla con todas las fichas del dominó y se van tachando las fichas encontradas que tengan posibilidad única de aparición en el cuadro dado.

FASE DE DESARROLLO DE LA ESTRATEGIA:

Pequeña discusión sobre el enunciado que se concluye con:

- Las fichas sólo se pueden colocar en horizontal y en vertical.

- Se cae en la cuenta de que, dado que el dominó tiene 28 fichas, el número de dígitos del cuadro debe ser 56. Así ocurre.

Se inicia la resolución a partir de la estrategia ii) (fichas dobles).

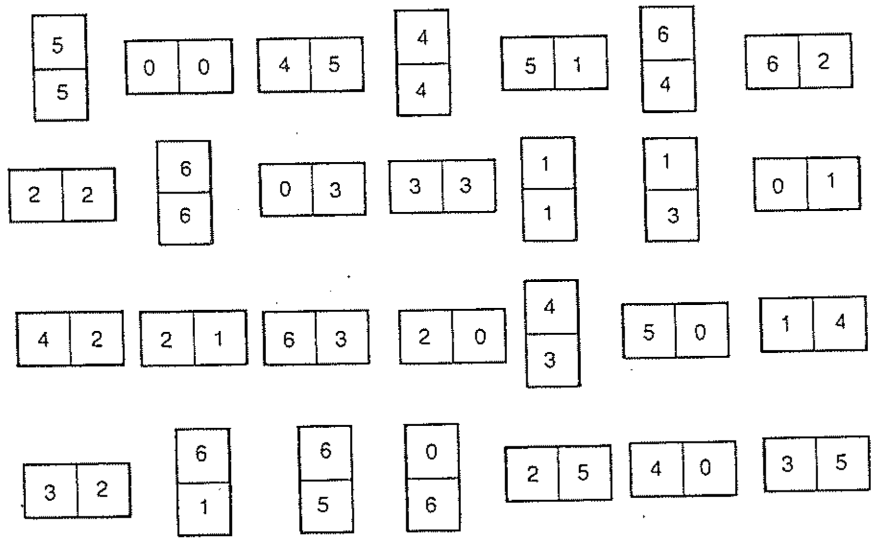
Aparecen las fichas $\begin{array}{|c|}\hline 5\\\hline 5\\\hline\end{array}$ y $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0\\\hline\end{array}$ como posibilidades únicas y no hay continuación.

Se va a desarrollar la idea 3 (esquinas), la cual no produce resultados después de un análisis en cada una de ellas.

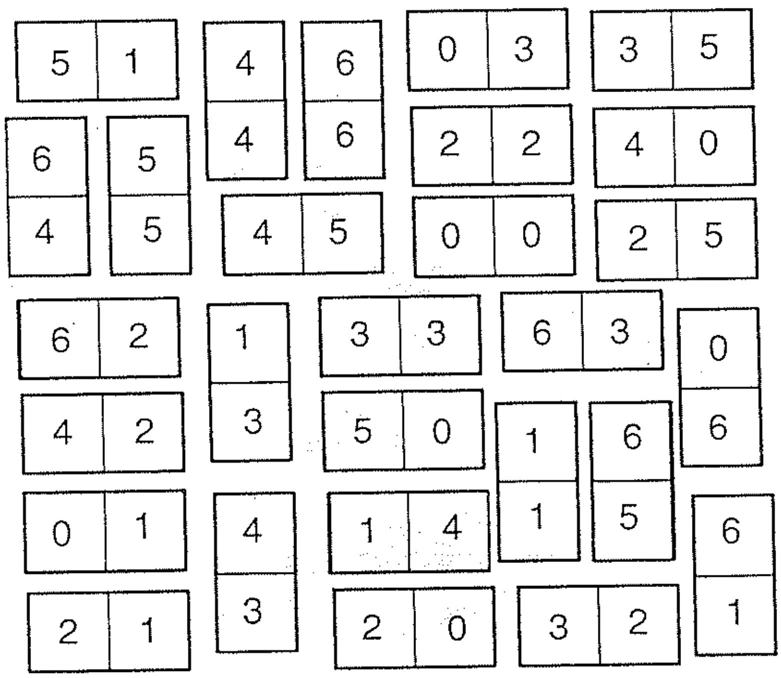
La opción 1 también se abandona.

Llegados aquí y ante el fracaso de todo lo anterior, se pone en marcha la estrategia 4.

Se pone en práctica esta idea y el orden de aparición de las fichas es el de la figura siguiente (a la vez, se van tachando las fichas de la tabla que contiene todas las fichas del dominó):



quedando el cuadro:



FASE DE REVISIÓN Y AMPLIACIÓN:

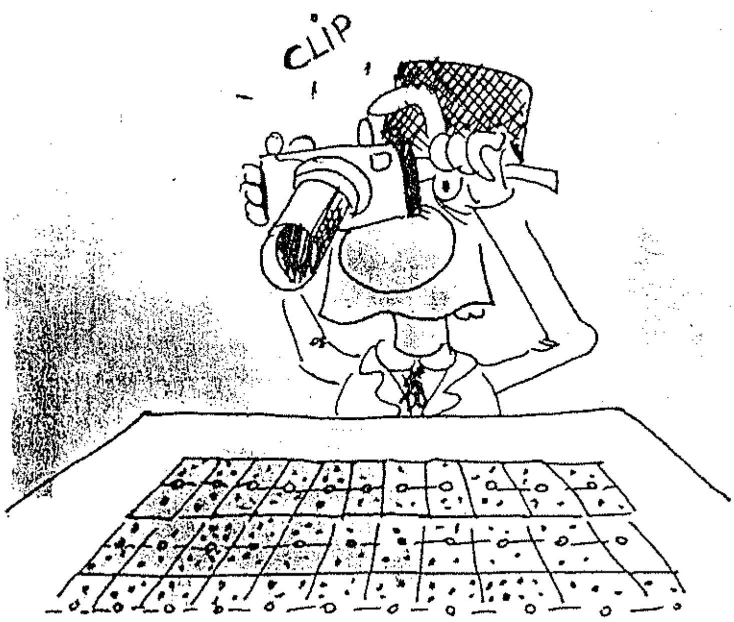
El grupo reflexiona sobre la resolución y concluye que la idea de sistematizar construyendo la tabla con todas las fichas del dominó es la idea clave que permite seguir adelante y solucionar el problema.

Entre las posibles ampliaciones podemos encontrar:

A) Un problema análogo puede plantearse para el siguiente cuadro de fichas del dominó:

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

B) ¿Podrías colocar las fichas del dominó de tal manera que se dé una única solución para un diagrama similar con todas las fichas? ¿Y para un conjunto más reducido de fichas?



UN MODELO PARA TRABAJAR CON PROBLEMAS: EL MODELO DE GUZMÁN

Habrás observado, en la lectura de los protocolos de los problemas anteriores, que en todos ellos hemos seguido un mismo esquema de trabajo. Este esquema corresponde al modelo propuesto por **Miguel de Guzmán** en sus libros *Para pensar mejor* y *Aventuras Matemáticas*, Labor-MEC.

Un modelo es una guía que nos facilita el camino que debemos recorrer a lo largo de todo el proceso de resolución de un problema. La finalidad de todo modelo es la de adquirir una colección de hábitos mentales que nos ayuden eficazmente en el manejo de los problemas.

Este modelo consta de cuatro fases, que revisaremos con más detenimiento en la actividad posterior, a saber:

I. Fase 1: **Familiarización con el problema.**
II. Fase 2: **Búsqueda de estrategias.**
III. Fase 3: **Llevar adelante la estrategia.**
IV. Fase 4: **Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.**

En cada una de las fases las pautas a seguir son:

Al comienzo, en **la familiarización con el problema**, debemos actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Hay que conseguir tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones, incógnitas, etc. En resumen, **antes de hacer, trata de entender.**

Una vez que hemos entendido el problema pasamos a **buscar las estrategias** que nos permiten resolverlo. En esta fase no iniciamos el ataque del problema sino que vamos apuntando todas las ideas que nos surjan relacionadas con el problema. Es conveniente pensar y disponer de más de una estrategia o camino a desarrollar en la fase posterior.

Tras acumular varias opciones de resolución, es el momento de **llevar adelante la estrategia** elegida. La llevamos adelante trabajando con confianza y sin apresuramientos. Conviene no echarse atrás ante la primera dificultad que surja, ni continuar con la estrategia si las cosas se complican demasiado. En el caso de no acertar con el camino correcto, es el momento de volver a la fase anterior y reiniciar el proceso. Seguimos de esta forma hasta cerciorarnos de haber llegado a la solución.

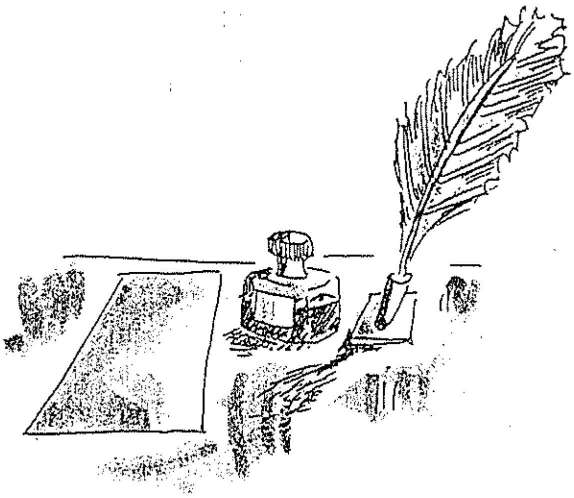
Por último, queda la fase más importante del problema, la de **revisión del proceso y sacar consecuencias de él.** En esta fase, que no puede faltar hayamos resuelto el problema o no, debemos reflexionar sobre todos los incidentes del camino seguido, sobre si es posible extender las ideas que hemos tenido a otras situaciones, sobre el problema en sí y sobre nuestros estados de ánimo a lo largo de todo el proceso recorrido.

En la resolución de un problema o juego puedes seguir estos pasos:

I **FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA**	* Antes de hacer, trata de entender. * Tómate el tiempo necesario. * Actúa sin prisas y con tranquilidad. * Imagínate los elementos. * Juega con los elementos del problema. * Pon en claro la situación de partida, la de llegada y lo que debes lograr. * Busca información que te pueda ayudar. * Encara la situación con gusto e interés.
II **BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS**	* Busca y anota las ideas que se te ocurran. * No desarrolles las ideas hasta que no poseas varias. * Estas estrategias te pueden ayudar: - Empezar por lo fácil. - Experimentar y buscar regularidades, pautas. - Hacer esquemas, figuras, diagramas. - Modificar el problema. - Escoger un lenguaje, una notación apropiada. - Buscar semejanzas con otros juegos y problemas. - Explorar la simetría de la situación. - Suponer el problema resuelto. - Suponer que no ¿dónde nos lleva? - Piensa en técnicas generales: inducción, principio del palomar, proceso diagonal, etc.
III **LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA**	* Lleva adelante las ideas de la etapa anterior. * Procura no mezclarlas, de una en una. * Trabaja con tenacidad y decisión en cada idea. * Trabaja con flexibilidad en las situaciones que se compliquen demasiado. * Cuando consideres que has llegado al final, observa a fondo la solución que obtienes.
IV **REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS**	* Examina con detenimiento y profundidad el camino que has seguido. * ¿Cómo has llegado a la solución? Si no lo has resuelto ¿por qué no has llegado a la solución? * Trata de entender que las cosas han marchado y por qué han marchado. * Busca un modo más sencillo u otro modo de resolverlo. * Intenta trasladar el método seguido a otras situaciones. * Reflexiona sobre tus estados de ánimo y tu proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

EL PROTOCOLO DE UN PROBLEMA

Cuando leemos y estudiamos la resolución de un problema efectuado por otro, en general nos encontramos con una secuencia de pasos ordenados, clasificados y lógicos que nos llevan desde el enunciado hasta la solución o soluciones. Esta solución nada nos dice de los procesos de pensamiento ni de los estados de ánimo por los que ha pasado el resolutor del problema.



Cuando intentamos resolver un problema individualmente o en grupo ocurren muchas cosas interesantes. Habitualmente escribimos nuestros cálculos, esquemas y diagramas que nos ayudan en la resolución, pero hay otros fenómenos interesantes que suelen pasar desapercibidos.

El borrador de nuestros intentos sucesivos de resolución no es el protocolo de un problema. Tampoco lo es la solución en limpio que podamos elaborar de nuestro trabajo.

El protocolo del proceso de resolución de un problema debería ser capaz de reproducir cuanto ha pasado por nuestra mente a lo largo de todo el proceso, en lo que se refiere a lo que realizamos, pensamos y a los sentimientos por los que hemos ido pasando.

El hecho de sentarnos con calma, papel y un bolígrafo ante todo un problema, para registrar por escrito todo el proceso de resolución del problema nos debe ayudar en las situaciones siguientes:

- A superar el peligro de que empieces y luego abandones un problema.
- Para que no olvides las buenas ideas que te surjan de repente.
- Para que cuando desees o necesites repasar de nuevo el problema te resulte más sencillo hacerlo.
- Para que no te quedes parado o atascado, sin saber qué hacer. Al escribir, te obligas a estar activo y concentrado, y el cerebro aprovecha este cauce para deslizar intuiciones y nuevas ideas.
- Para conseguir que no abandones. La huida debe ser hacia adelante. El simple hecho de emborronar una hoja con esquemas, dibujos, gráficos, etc., puede dar lugar a alguna idea útil.
- Para que puedas controlar en todo momento, al tenerlo delante, el proceso de resolución de un problema.

ACTIVIDAD 3: FASES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y JUEGOS

En las actividades anteriores habrás podido observar cómo en la resolución de un problema o juego hemos seguido un plan de acción que llamamos modelo de resolución. Éste puede decidirse y efectuarse en etapas o fases que hemos denominado:

Fase 1: Familiarización con el problema.
Fase 2: Búsqueda de estrategias.
Fase 3: Llevar adelante la estrategia.
Fase 4: Revisar el proceso y sacar consecuencias.

En esta actividad vamos a revisar con detenimiento cada una de estas fases.

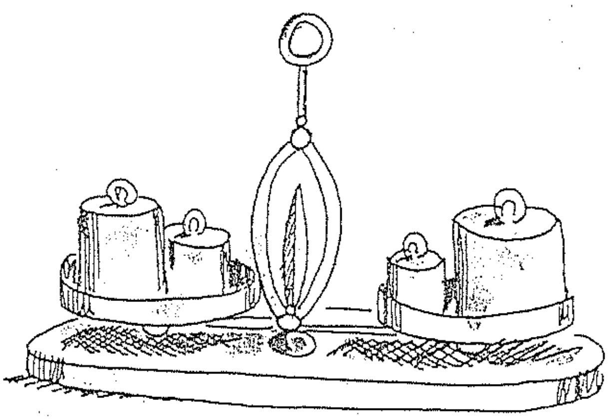
FASE DE FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA

Antes de ofrecerte unas sugerencias que puedes tener en cuenta para desarrollar esta fase de la resolución de un problema, observa lo que hemos hecho con el siguiente problema.

LAS PESAS. Calcula el juego de cuatro pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza con dos platos cualquier cantidad entera de uno hasta cuarenta kilos.

Leyendo el problema con detenimiento, varias veces, hasta comprenderlo con precisión, lo primero que nos llama la atención es, si cuatro no serán pocas pesas para tantas pesadas. Si es así debo aprovecharlas muy bien.

Otra cuestión importante es, ¿cómo puedo pesar? Los objetos a pesar los colocamos en un plato y las pesas en el otro. Quizás tenga que hacerlo por "diferencia": colocando objeto y pesas en un plato y solo pesas en el otro plato de la balanza.



Al tener sólo cuatro pesas parece que debemos utilizar el segundo procedimiento para pesar.

Hasta este punto ya sabemos del problema: lo que nos piden (pesar de 1 a 40), los datos que ofrece (4 pesas), cómo podemos pesar (pesadas por diferencias). A partir de aquí debemos pensar en el procedimiento que vamos a utilizar para resolverlo.

Antes te ofrecemos algunas pautas o sugerencias que puedes poner en práctica en la fase de familiarización con el enunciado cuando te enfrentes a cualquier problema.

PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE FAMILIARIZACIÓN CON EL ENUNCIADO

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Adopta una disposición cómoda que te permita trabajar largo tiempo si es necesario.
- Usa siempre lápiz y papel para anotar todo lo que vayas pensando y haciendo.
- Dispón del tiempo que necesites.
- Actúa con confianza, tranquilidad y curiosidad ante lo desconocido.
- Ten en cuenta que: "*lo importante es seguir preguntando siempre*".
- Aunque actúes por pasos o fases procura no perder nunca la visión unitaria de todo el proceso.
- Los expertos permanecen abiertos a la utilización de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

- Al leer el problema, ¿qué es lo primero que te ha llamado la atención?
- Manipula elementos si es necesario.
- Actúa con disposición de aprender y gusto por el reto a lo desconocido.
- Intenta superar la pereza ante todo inicio de cualquier actividad.
- Evita el miedo a la equivocación y al ridículo.
- Escribe con tus palabras este problema, de forma que sea mas fácil de entender.
- No te asustes ante la aparente magnitud del problema. Trata de descomponerlo en partes más sencillas.
- Busca las situaciones de partida, de llegada y lo que hay que lograr.
- No pases a la siguiente fase hasta que no te hayas familiarizado a fondo con el problema.
- No olvides que lo que importa es el camino.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- ¿De qué trata el problema? ¿Te ha recordado la lectura algún hecho, problema o situación anterior?
- ¿Comprendes el significado de todas las palabras del enunciado?, ¿cuáles no?
- ¿Has analizado, palabra por palabra, cada una de las fases del enunciado, para ver la relación que hay entre ellas?
- ¿Qué es lo que pide hallar el problema? ¿Pide una cosa o pide varias?
- ¿Qué datos te dan para encontrar la solución? ¿Hay datos relacionados?
- ¿Has separado las distintas relaciones que ligan los datos?
- ¿Qué necesitas saber de Matemáticas para resolver este problema?
- ¿Por dónde empiezo?
- ¿Qué debo hacer?, ¿qué gano haciendo esto?

FASE DE BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS

Continuando con el problema de las pesas, es la hora de buscar procedimientos que permitan solucionar el problema.

Comenzamos realizando un listado de posibles caminos a seguir.

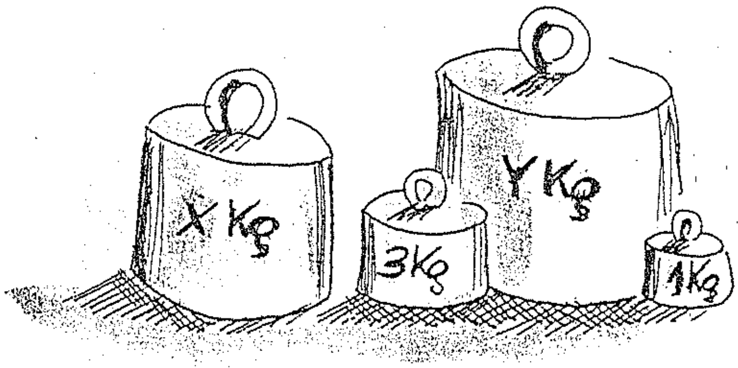
1. Hacer el problema más sencillo, particularizando para situaciones como: ¿Cuántas pesas necesitas para pesar un Kg? ¿Y para 1 y 2 Kg? ¿Y para 1, 2 y 3 Kg?, y así sucesivamente.

2. Experimentar con los casos fáciles y si las cosas funcionan seguir adelante. No debo olvidar escribir los resultados de manera ordenada para tener a la vista los resultados parciales conseguidos.

Antes de llevar adelante alguna de estas ideas vamos a ver qué ocurre en los casos sencillos. Organizamos los resultados en una tabla:

Para pesar (Kg)	**Necesitamos pesas de (Kg)**
1	1
1 y 2	1 y 2 ó 1 y 3 (-1)
1, 2 y 3	1 y 2 (+1) ó 1 y 3 (-1)
1, 2, 3 y 4	1 y 3 (+1)
1, 2, 3, 4 y 5	1, 3 y X
1, 2, 3, 4, 5 y 6	1, 3 y X
1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7	1, 3 y X

En las experiencias de las pesadas con 1, 2, 3 y 4 observamos que la mejor opción es disponer de pesas de 1 Kg y 3 Kg ya que ofrecen más posibilidades que las pesas de 1 Kg y 2 Kg. No debemos olvidar que "tenemos que aprovechar las pesas al máximo".



Llegados aquí podemos dar por finalizada esta fase y disponernos a pasar a la fase siguiente. En la página que sigue hemos resumido y juntado unas cuantas sugerencias que puedes aprovechar para desarrollar esta etapa en la resolución de cualquier problema.

PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Evita las prisas y el nerviosismo por seguir adelante.
- Pon en juego todos tus recursos.
- Apunta con claridad todas las ideas que tengas.
- Actúa con confianza y curiosidad.
- Lo importante es perseverar en las situaciones, sin olvidar la flexibilidad.
- Toma el tiempo que creas conveniente.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

- Practica la "tormenta de ideas" (brainstorming) a través de las reglas siguientes:
    * Aplazamiento del juicio: no evalúes aún las ideas que se te ocurran.
    * Espontaneidad de ideas: apunta todas las ideas, aún las que parezcan ridículas.
    * Cantidad conduce a calidad: no te quedes con la primera idea, busca varias.
    * Perfeccionamiento de ideas: revisa y perfila las ideas que tienes apuntadas.
- Evita el miedo a la equivocación y al ridículo.
- No pases a la siguiente fase si no posees varias ideas que te permitan seguir adelante.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- Observa la lista siguiente, puede proporcionarte ideas para tu problema:
    * Empieza por lo fácil: simplifica o busca casos particulares.
    * Experimenta e intenta buscar regularidades y pautas. Actúa a través de ensayo y error.
    * Organiza la información ayudándote de dibujos, figuras, esquemas y diagramas.
    * Modifica el problema: reformula y busca metas parciales.
    * Busca un lenguaje o notación adecuada que te facilite el desarrollo del problema.
    * Busca semejanzas o parecidos con otros juegos o problemas similares.
    * Analiza posibles simetrías y casos extremos.
    * Suponer el problema resuelto y trabajar marcha atrás puede resultar, a veces, más fácil.
    * Suponer que no se cumplen las condiciones del problema, ¿dónde nos lleva?.
    * Utiliza técnicas generales matemáticas: método de inducción, principio del palomar, etc.
- Procura tener siempre en cuenta las siguientes cuestiones: ¿Qué me dice este problema?, ¿qué me pregunta?, ¿por dónde empiezo?, ¿qué sé de lo que trata este problema?, ¿qué debo hacer?, ¿qué gano haciendo esto?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿he considerado todas las nociones esenciales de este problema?
- Antes de pasar a la siguiente fase, procura disponer de una respuesta clara a las preguntas: ¿Qué camino has elegido?, ¿por qué?

FASE DE LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA

Volviendo de nuevo al problema de LAS PESAS, vamos a llevar adelante el procedimiento que habíamos apuntado y comenzado en la fase anterior.

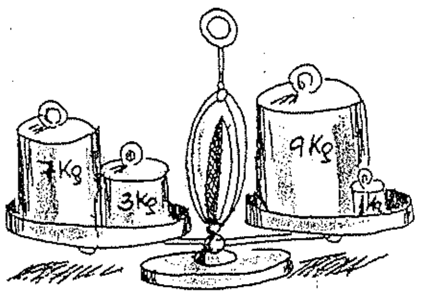
Ya teníamos realizadas las pesadas para 1, 2, 3 y 4 Kg procediendo con las pesas de 1 y 3 Kg, así: 1=1, 2=3-1, 3=3, 4=3+1

Estamos en la situación de pesar entre 1 y 5 Kg, 1 y 6 Kg, 1 y 7 Kg y 1 y 8 Kg con las pesas de 1, 3 y **X** Kg. Teniendo que aprovechar las pesas al máximo, ¿cómo debe ser **X**? Conviene que **X** sea lo más grande posible para poder aprovecharla a tope por diferencias.

¿Cómo de grande podrá ser **X**? ¡Ya está!: 5=X-3-1. De donde X=9.

¿Será X=9? Para ello continuamos realizando pesadas y obtenemos:

5=9-3-1	6=9-3	7=9+1-3	8=9-1
9=9	10=9+1	11=9+3-1	12=9+3
13=9+1+3	14=?	15=?	16=?



Necesitamos otra pesa para pesar a partir de 14 Kg. Tenemos las pesas 1, 3 y 9.
¿Cuál será la siguiente? ¿Qué sucesión es 1, 3, 9, ...?.

Son las potencias de tres: 3^0, 3^1, 3^2, ... La próxima pesa, ¿será 3^3=27?

Para comprobarlo debemos intentar hacer las pesadas a partir de 14 Kg. Obtenemos:

14=27-9-3-1	15=27-9-3	16=27-9-3+1	17=27-9-1
18=27-9	19=27-9+1	20=27-9-1+3	21=27-9+3
22=27-9+3+1	23=27-3-1	24=27-3	25=27-3+1
26=27-1	27=27	28=27+1	29=27+3-1
30=27+3	31=27+3+1	32=27+9-3-1	33=27+9-1
34=27+9-3+1	35=27+9-1	36=27+9	37=27+9+1
38=27+9+3-1	39=27+9+3	40=27+9+3+1	

¡Lo hemos conseguido! Hemos pesado desde 1 Kg hasta 40 Kg utilizando una balanza de dos platos y las pesas de 1, 3, 9 y 27 Kg.

En la página siguiente se describen sugerencias que puedes utilizar en otros problemas para llevar adelante la estrategia.

PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Procura tener siempre a la vista una lista con las estrategias que has ideado poner en práctica en la fase anterior.
- No te desanimes ante la primera dificultad que te surja, tienes otros caminos.
- Trabaja ordenadamente y sin apresuramientos.
- Las ideas que se te ocurran relacionadas con las estrategias, llévalas a la lista que tienes de la fase anterior.
- Estas ideas que te pueden surgir en esta fase, no deben desviar tu atención sobre el desarrollo de la estrategia que estés efectuando.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

- Procura trabajar con decisión y confianza sobre la estrategia que hayas elegido.
- Si ninguna de las estrategias conduce al éxito, vuelve a buscar nuevas estrategias o modifica las que hayas puesto en práctica.
- No debes contentarte con soluciones a medias.
- Indica con símbolos propios las situaciones resbaladizas, delicadas, de ideas brillantes, cuando estás atascado, etc.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- Si en la ejecución de tu plan aparecen dificultades, no vuelvas atrás hasta que no veas tu idea invalidada o destruida. Trata de resolver pequeñas dificultades que siempre pueden surgir.
- No te líes, cuando tropieces con una dificultad vuelve al principio de la situación, reordena las ideas, corrige los errores y prueba de nuevo.
- Si llegas a una situación muy complicada prueba otra cosa; piensa que resolver el problema puede ser cuestión de buscar otro camino más adecuado.
- No olvides en toda esta fase preguntarte si lo que haces es correcto y si puedes justificarlo.
- Debes estar seguro que has llegado a la solución, en caso contrario vuelve a la fase anterior en busca de mejores ideas.
- Comprueba uno a uno todos los pasos que te han llevado a la solución.

FASE DE REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS

Ya hemos resuelto el problema y es ahora el momento mas adecuado de sacar el jugo al trabajo que hemos ido realizando en las fases anteriores.

Para ello podemos preguntarnos sobre algunos de los aspectos que han ido surgiendo, a saber:

- ¿Es correcta la respuesta?

  Parece ser que no ofrece dudas ya que hemos conseguido, una a una, realizar las pesadas que nos pedía el problema.

- ¿Puedo pesar más cantidades con estas cuatro pesas?

  Por lo observado en la ejecución del problema y debido al aprovechamiento máximo que hemos hecho de ellas, se necesitan más pesas de la sucesión $1=3^0$, $3=3^1$, $9=3^2$, $27=3^3$, ... para poder pesar otras cantidades mayores de 40 Kg.

- ¡Qué curioso lo obtenido!, con las potencias de tres y con las operaciones de sumar y restar puedo generar todas las de los números naturales:

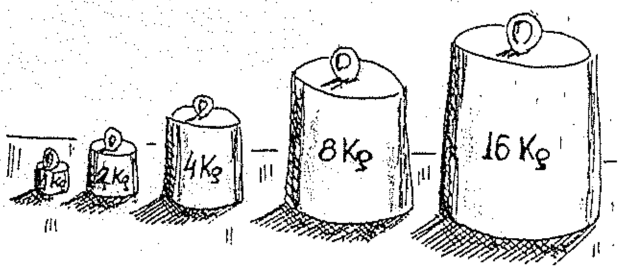
$$1=3^0,\ 2=3^1-3^0,\ 3=3^1,\ 4=3^1+3^0,\ 5=3^2-3^1-3^0,\ \dots$$

- ¿Será consecuencia de algún resultado más profundo?

  Podemos encontrar una explicación en el sistema de numeración ternario (o de base 3), donde todo número natural puede expresarse utilizando las cifras 0, 1 y 2. En nuestro problema se han sustituido las cifras 0, 1 y 2 por 0, 1 y -1.

- ¿Funcionará con las potencias de algún otro número?

  Dejamos al lector que investigue estas nuevas situaciones.



Ahora hemos llegado a un punto donde:

a) el problema nos parece precioso,
b) el problema se convierte en una investigación,
c) el problema no termina nunca. ¡Qué maravilla!

En la página siguiente encontrarás sugerencias que pueden servirte para desarrollar la fase de revisión del proceso y de ampliación de resultados.

PAUTAS O SUGERENCIAS A TENER EN CUENTA EN LA FASE DE REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS

ASPECTOS FÍSICOS Y ACTITUDINALES

- Has dado por concluido el trabajo sobre el problema, no debe importarte si no lo has resuelto.
- Revisa y aprende de todos los pasos dados, los erróneos y los válidos.
- Esta fase puede ser muy importante y provechosa, ten en cuenta todas las sugerencias y lleva adelante las que estén de acuerdo con tu problema.
- Invierte el tiempo que necesites en analizar el proceso seguido y en ampliar las situaciones del problema.
- Reconsidera, comprueba y discute tu solución.

ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNOSCITIVOS

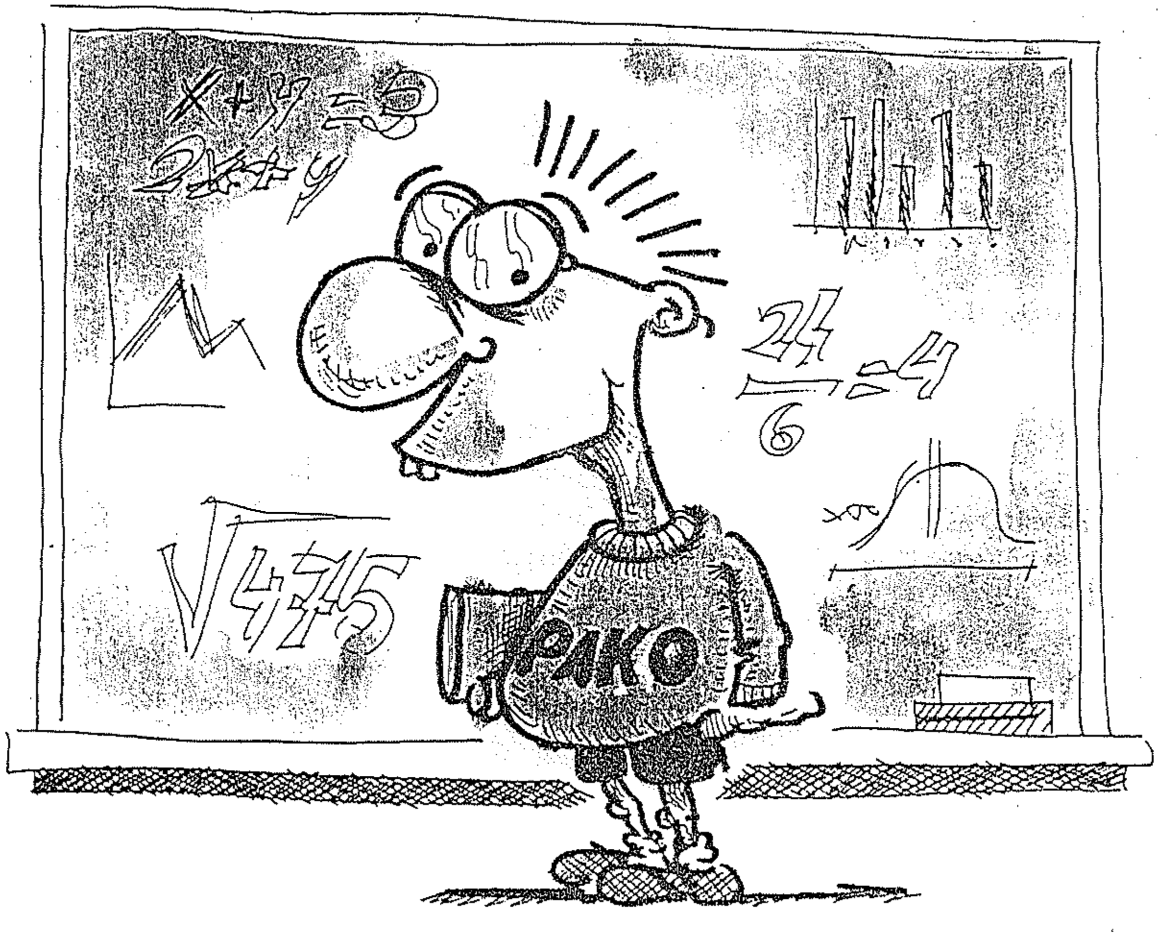
- Lee de nuevo el enunciado y comprueba que lo que te pedían es lo que has calculado.
- Escribe otro enunciado que te conduzca a la misma solución.
- Saca jugo de todo lo que te haya ocurrido a lo largo de la resolución.

ASPECTOS HEURÍSTICOS

- El resultado que has obtenido, ¿tiene sentido?, ¿puede haber otro resultado o solución?
- ¿Acompañas a la solución una explicación literal que indica lo que has hallado?
- ¿Serías capaz de explicar el problema a otra persona? Inténtalo.
- ¿Puedes obtener el resultado de forma diferente?
- ¿Puedes utilizar el resultado o el procedimiento que te ha llevado a la solución en algún otro problema o situación?
- Si varías los datos, ¿dónde te conduce?
- Si varías parte o todo el enunciado, ¿dónde te conduce?
- Es el momento de escribir un protocolo con todas las incidencias que te hayan ocurrido a lo largo de todo el proceso de resolución del problema.

ACTIVIDAD 4:
ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y JUEGOS

En esta actividad vamos a revisar, de forma detenida, aquellas estrategias que enunciamos en la actividad anterior, correspondientes a la fase de búsqueda de estrategias. Seguiremos el procedimiento utilizado en las otras actividades; para cada estrategia resolveremos un problema y posteriormente te damos algunas sugerencias sobre la mejor manera de llevar adelante dicha estrategia. En los problemas resueltos no desarrollamos todo el protocolo, sino que nos centramos en la ejemplificación de la estrategia.



Debes tener en cuenta que muy pocos problemas se resuelven utilizando una única estrategia, ya que, en general, necesitarás en la resolución de un problema tener en cuenta las pautas y sugerencias combinadas de más de una estrategia.

Estrategias en la resolución de problemas

- Empiece por lo fácil, simplifique o particularice;
- Experimente (ensayo y error) y busque regularidades;
- Organización y codificación;
- Modificación del problema;
- Analogía y semejanza;
- Exploración: casos límites, simetría (esta estrategia suele ir asociada a otras como es la experimentación).

SIMPLIFICAR. PARTICULARIZAR

Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a considerar un conjunto más pequeño (o incluso un sólo objeto) contenido en el conjunto dado.

Puede afectar a los datos, las incógnitas, los objetivos, etc. y su aplicación a unos u otros dependerá del tipo de problema a resolver.

Puede utilizarse en múltiples situaciones y ayuda a adquirir confianza y en los atascos, además de permitirnos, manipulando, entrar en harina.

La particularización puede hacerse al azar para entender el significado del problema o de forma sistemática para preparar el terreno hacia objetivos más ambiciosos.

Se utiliza en la técnica de demostración lógica denominada "contraejemplo": basta encontrar una sola excepción para refutar de forma irrevocable lo que pretende ser una regla o una afirmación de carácter general.

Acude a esta estrategia cuando no poseas ninguna idea que te haga progresar, ya que en múltiples ocasiones te permitirá lograr algún avance.

EXPERIMENTAR (ENSAYO Y ERROR). BUSCAR REGULARIDADES

Las propiedades o situaciones generales de un conjunto de números, figuras, objetos en general se pueden intuir cuando observamos la presencia de ellas en casos particulares. Por tanto, la forma de averiguar si una propiedad es común a varios elementos consiste en experimentar con alguno de ellos.

La experimentación y la observación han sido las bases fundamentales de los descubrimientos en todas las ciencias naturales, también en Matemáticas.

La experimentación conduce a patrones o reglas generales cuyas conclusiones nunca podemos asegurar que sean ciertas. Estas conclusiones pueden ser aplicadas a todos o a la mayoría de los objetos parecidos a los que hemos observado.

La experimentación suele ir asociada a la técnica que se denomina "ensayo y error", que consiste en realizar los siguiente pasos:

- ► Elegir un valor (resultado, operación o propiedad) posible.
- ► Llevar a cabo con este valor las condiciones indicadas por el problema.
- ► Probar si hemos alcanzado el objetivo buscado.

Si la respuesta del último paso no es positiva, se repite todo el proceso hasta alcanzar el objetivo buscado.

En la utilización del ensayo y error es conveniente contrastar cada respuesta para ver si estamos más cerca o más lejos del objetivo pretendido.

ORGANIZACIÓN Y CODIFICACIÓN

La organización, en general, consiste en adoptar un enfoque sistemático del problema. Suele ser de gran ayuda enfocar el problema en términos de tres componentes fundamentales: antecedentes (origen y datos), el objetivo y las operaciones que pueden realizarse en el ámbito del problema.

Las técnicas asociadas a la organización pasan por realizar símbolos apropiados, croquis, gráficos, figuras, diagramas o esquemas. Estos símbolos o dibujos pueden servir de ayuda en cualquier ámbito y no solo en geometría.

Una buena organización suele ir asociada con la elección de una notación o código que organice la búsqueda de posibles caminos hacia la solución.

Las diferentes notaciones y códigos nos conducen a utilizar un determinado lenguaje. Los lenguajes que resultan útiles en la resolución de problemas son: el lenguaje de la lógica, el de las matemáticas (geométrico, algebraico, analítico, probabilístico, etc.), el analógico (modelos, manipulaciones, etc.) y el lenguaje pictórico (figuras, esquemas, diagramas, etc.)

MODIFICAR EL PROBLEMA

Si pretendemos romper un manojo de lápices por la mitad es probable que encontremos serias dificultades de hacerlo, sin embargo si rompemos cada lápiz por separado, el objetivo resultará fácil de alcanzar.

La analogía anterior sirve para describir esta estrategia que consiste en dividir el problema de forma consciente y sistemática en partes más pequeñas y resolver, por separado, cada una de las partes.

Esta estrategia puede llevarse a cabo siguiendo los pasos siguientes:

1. Descomponer el problema en subproblemas, teniendo en cuenta las relaciones entre estas partes como parte del problema total.

2. Resolver los subproblemas.

3. Combinar los resultados hasta completar la solución del problema global.

Hay que tener en cuenta que la definición de subobjetivos válidos no es suficiente para resolver el problema. En numerosas ocasiones hay que utilizar otras estrategias para solucionar los subobjetivos.

ANALOGÍA. SEMEJANZA

La analogía ocupa todo nuestro modo de pensar, tanto en nuestras conversaciones cotidianas y nuestras conclusiones más sencillas como en los medios de expresión artísticos y en las más profundas relaciones científicas.

En la práctica debemos buscar semejanzas (parecidos, relaciones, similitudes) en el "archivo" de nuestras experiencias con situaciones, problemas y juegos que hayamos resuelto.

Ante cualquier situación nueva debemos preguntarnos: ¿A qué nos recuerda? ¿Es como aquella otra? ¿Se parece al problema o juego aquél?

La búsqueda de situaciones análogas o semejantes y su posterior puesta en práctica será más fácil cuanta mayor sea nuestra experiencia en la resolución de problemas y juegos.

EXPLORACIÓN: SIMETRÍA Y CASOS LÍMITES

Son muchos los problemas y juegos que se resuelven o facilitan su resolución teniendo en cuenta la simetría y los casos límites que presentan de forma explícita o velada.

La simetría comprende dos acepciones, la geométrica, más reconocible y usual y otra lógica más general y menos difundida que la anterior.

En general, decimos que un todo es simétrico si se compone de partes intercambiables. Así en un cuadro son fácilmente reconocibles las simetrías axiales y central, lo mismo ocurre en un cubo de seis caras, del mismo modo que la expresión ab + bc + ac es simétrica ya que podemos intercambiar dos letras cualesquiera sin modificar toda la expresión.

TRABAJAR MARCHA ATRÁS

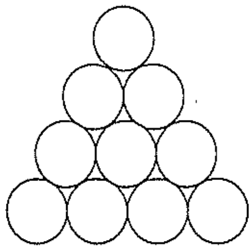
Existen situaciones donde el camino es más sencillo de recorrer si lo hacemos desde el final al comienzo. Esta idea es la que puede describir esta estrategia que también podríamos denominar *cómo considerar el problema resuelto.*

La utilizaremos en los casos en los que conocemos el objetivo o resultado final y el problema o juego consiste en determinar la secuencia correcta de operaciones que nos llevará desde el estado inicial hasta el objetivo.

Al imaginar el problema resuelto, ya que este es el punto de partida para poder aplicar esta estrategia, aparecen los datos y las relaciones más próximos a los que buscamos y más fácilmente encontramos el camino desde donde nos encontramos a donde queremos llegar.

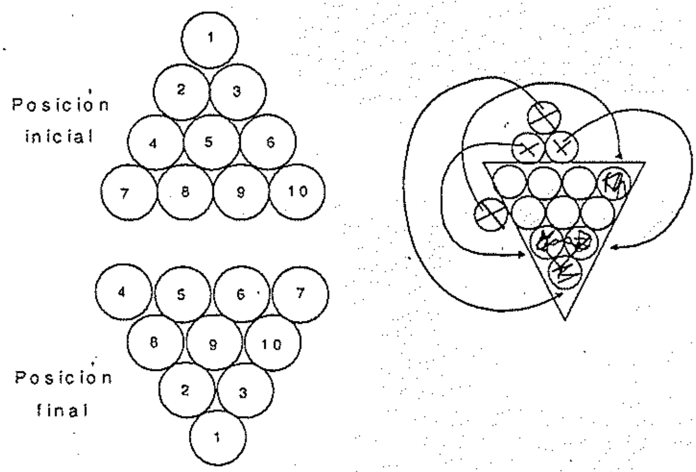
TRABAJAR MARCHA ATRÁS

Observa la resolución del siguiente problema.



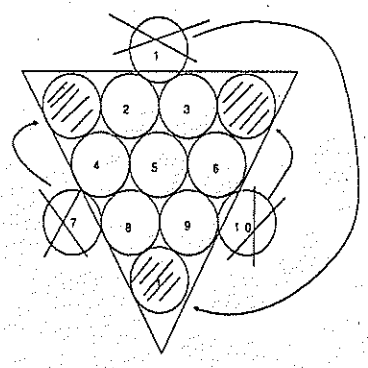
UN TRIÁNGULO CON MONEDAS. Se tiene un triángulo formado por diez monedas iguales. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que hay que cambiar de sitio para que el triángulo quede en posición invertida?

Manipulando o dibujando las monedas, nos movemos entre las posiciones que llamamos "posición inicial" o posición de partida y "posición final" o resultado del problema:



Tras la manipulación se ve claramente que cambiando 4 monedas se puede invertir la figura.

Consideramos si sería posible invertirla moviendo solamente 3 monedas. Manipulando monedas entre la posición final y la inicial llegamos a la solución que puede verse el la siguiente figura.



Efectivamente, cambiando de lugar tres monedas, se puede invertir la figura.

TÉCNICAS GENERALES MATEMÁTICAS

Te presentamos, de manera abreviada, algunas de las técnicas generales que se utilizan en la resolución de problemas y juegos. La aparente sencillez de alguna de ellas puede servir para demostrar resultados matemáticos profundos, que de otra forma sería muy dificultosa su demostración. En alguno de los problemas y juegos propuestos podrás utilizarlos.

SUPÓN QUE NO ... (REDUCCIÓN AL ABSURDO O CONTRADICCIÓN)

Es una manera de razonar para demostrar que una situación, P, determinada es verdadera. Suponemos que no lo es, es decir que se verifica no-P. Deducimos consecuencias correctas de no-P y nos encontramos con una que supone un absurdo, que no se tiene de pie. Por tanto, nuestro punto de partida no-P es falso, es decir P es verdadero.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Es uno de los métodos más habituales de demostración matemática, donde aparecen situaciones asociadas a los números naturales. La idea de este procedimiento está asociada con ascender por la escalera de infinitos peldaños. Si puedes asegurarte el ascender a uno de los primeros peldaños y una vez situado en uno cualquiera de los peldaños, subir al siguiente, entonces puedes recorrer todos los peldaños de la escalera.

Si deseas demostrar una propiedad P(n) que esté asociada a los números naturales, entonces debes probar:

1º El número 1 (tal vez el 4 o el 14) tiene la propiedad P(n).
2º Si el número **k** tiene la propiedad P(n), entonces el número **k+1** tiene la propiedad P(n).

PRINCIPIO DEL PALOMAR DE DIRICHLET

Es una estrategia poco conocida que se utiliza sobre todo en problemas de conteo o enumeración y se basa en la siguiente idea: *"Si 11 palomas se meten en 10 palomares, necesariamente en algún hueco debe de haber más de una paloma".*

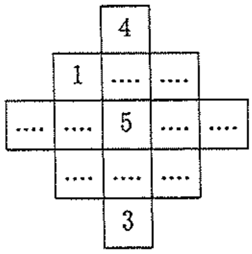
El principio del palomar dice: *"Si* ***m*** *objetos ocupan* ***n*** *cajones y* ***m > n****, entonces hay al menos un cajón que tiene dos o más objetos".* Esta idea tan sencilla tiene aplicaciones interesantes, sorprendentes y profundas.

I. PROBLEMAS SOBRE LOGICA Y CONJUNTOS

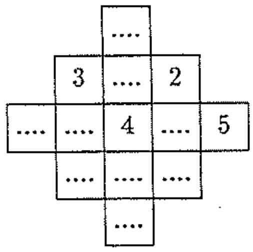
I.1. PROBLEMAS SOBRE LOGICA

1) Complete los cuadrados con los cinco dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 de manera que no se repitan en ninguna de las franjas horizontales, verticales y oblicuas.

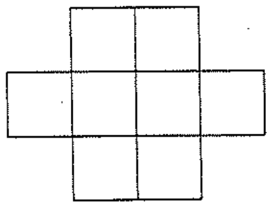
(i)



(ii)



2) Consecutivos lejos. En las 8 casillas de la siguiente figura



se trata de colocar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de modo que no resulten dos números consecutivos cerca ni en diagonal, ni en horizontal, ni en vertical. ¿ La solución es única ?

3) Las mujeres de Napoleón. Dicen que el primer marido de la segunda mujer de Napoleón y el segundo marido de la primera mujer de Napoleón eran la misma persona. Suena extraño. ¿ Podrá ser verdad ?

4) Se aprueba estudiando. Si alguien que estudia mucho aprueba siempre el examen, y si Juan estudió mucho, entonces ¿ cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas ? :

(a) solamente Juan aprobó el examen;
(b) Juan aprueba el examen;
(c) Juan estudió mucho más que cualquier otro;
(d) Todos aprobaron el examen.

5) Lógica de pertenencia. Todo argentino es americano. Todo salteño es argentino. Ningún americano es asiático. Entonces ¿ cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas ? :

(a) Ningún salteño es americano;
(b) Todo americano es salteño;
(c) Todos los americanos son argentinos;
(D) Ningún salteño es asiático.

6) ¿ Se casarán los novios?. Cuando su novia le preguntó si se iban a casar, el joven le respondió: "No

estaría mintiendo si te dijera que no puedo no decirte que es imposible negarte que si creo que es verdadero que no deja de ser falso que no vayamos a casarnos. ¿Podría ayudar a la desconcertada y atribulada novia, y decirle si su pretendiente quiere contraer matrimonio o no con ella?

7) Los trillizos Pérez: Los trillizos Pérez tienen la molesta costumbre siguiente: Cada vez que se les hace una pregunta, dos de ellos dicen la verdad y el otro la mentira acerca de la respuesta.

Se les preguntó cuál de los tres había nacido primero y contestaron lo siguiente:
Perico: "Pepe nació primero";
Pepe: "Yo no soy el mayor";
Pablo: "Perico nació primero".

Entonces, ¿cuál de los tres nació primero?

8) Cinco corredores y dos mentirosos: Al finalizar una carrera escuchamos estas declaraciones de los participantes:
Antonio: "Yo no he llegado último";
Bernardo: "Carlos ha llegado tercero";
Carlos: "Antonio ha llegado inmediatamente detrás de Ernesto";
Daniel: "Ernesto ha llegado en segundo lugar";
Ernesto: "Daniel no ha ganado al carrera";

Por alguna razón extraña, los dos primeros clasificados han mentido y los otros tres no. ¿Cuál ha sido el orden de llegada de los cinco corredores?

9) ¿Cuántos primos puede tener Juan, de acuerdo al siguiente diálogo, si se sabe que uno solo de los chicos dice la verdad?

José dice: Juan tiene por lo menos 6 primos;

Alberto corrige : No, tiene menos de 6;

Pablo agrega: Tal vez tengas razón, pero lo que yo sé, es que tiene más de 1 primo.

10) (i) Si con $\tilde{P}$ se indica la negación de P, se solicita explicitar las siguientes expresiones :

(a) $(\forall x : x > 2)\tilde{}$; (b) $(\exists x : x \leq 8)\tilde{}$.

(ii) Analice la siguiente proposición:

$$\forall x : (x^2 \geq x)$$

y demuestre que es falsa si el dominio de la proposición es el conjunto de los números reales; en cambio es verdadera en el conjunto de los números naturales y enteros.

11) Demostrar por contradicción que si X y Y son números reales tales que

$$X \geq 0\,, \qquad Y \geq 0\,, \qquad X + Y = 0\,,$$

entonces $X = 0$ y $Y = 0$.

12) Demuestre por contradicción que en una fiesta de n personas ($n \geq 2$) existen por lo menos dos personas que tienen el mismo número de amigos en la fiesta;

13) El trío municipal: Los señores Pablo, Fernando y Carlos son los tres candidatos que obtuvieron la mayor cantidad de votos en las últimas elecciones municipales de Villalinda. El resultado fue muy ajustado: el que quedó a la cabeza aventaja al segundo en un voto, éste aventaja al tercero en un voto. Los tres practican deportes diferentes (atletismo, natación y fútbol) y tienen un vino favorito (clarete, tinto y blanco).

Se tienen las siguientes informaciones:

(a) El señor Carlos, gran aficionado al tinto, aventajó a Fernando por un sólo voto;

(b) El aficionado al blanco, que no soporta el fútbol, obtuvo un voto más que el bebedor de clarete;

(c) El señor Pablo adora la natación.

Se necesita saber para cada candidato su clasificación, su deporte y su vino preferido.

I.2. PROBLEMAS PARA PENSAR SOBRE LOGICA

1) Se tiene una fuente de agua y se dispone sólo de dos recipientes, de 4 y 9 litros. Indique un procedimiento para que uno de los recipientes contenga 6 litros de agua.

2) Se tiene una fuente de agua y se dispone sólo de dos recipientes, de 7 y 11 litros. Indique un procedimiento para que uno de los recipientes contenga 6 litros de agua.

Definición: Un cuadrado se dice mágico respecto de la operación suma (producto) cuando la suma (producto) de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

3) Cuadrados mágicos respecto de la suma:

(i) Complete los siguientes cuadrados mágicos con los números del 1 al 9 con constante 15. ¿La solución es única ?

a)

8	.....	.....
.....	5	.....
.....	.....	.....

b)

.....	.....	.....
.....	.....	1
2	.....	.....

(ii) ¿Es posible construir un cuadrado mágico con los nueve números siguientes : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ?

4) Cuadrados mágicos respecto del producto:

(i) Complete el siguiente cuadrado mágico .

3	.....	.....
.....	6	.....
.....	1	12

5) Oráculo. El oráculo era legendario por la veracidad de sus vaticinios, pero en realidad predecía correctamente durante dos años, y al año siguiente fallaba siempre, y luego el ciclo recomenzaba. Un

mago visitó el lugar, y oráculo le dijo: "Lo que digas ahora será mentira". El mago respondió: "El año que viene dirás una verdad". Al año siguiente el mago volvió a consultar el oráculo, y se reprodujo el mismo diálogo. ¿Puede usted decirnos si el mago mintió alguna vez?

6) Convención de Espías. En la última convención nacional de espías y afines se encontraban 001, 002, 003, 004, bajo los nombres de Alvarez, Benítez, Chavez y Diéguez (no necesariamente en ese orden). Cada uno, obviamente, conocía su propio número, pero no el de los demás, hasta que la chica del stand de la KGB le informó a Chavez que Benítez tenía un número menor que el de Alvarez. Entonces Chavez dijo: "Si alguien me dijera que Estévez tiene un número más alto que el mío, sabría todos los números". Si Estévez tiene un número más alto que Chavez, ¿Cuál es la identidad de cada espía?

7) Travesía del río. Veinte hombres y dos chicos desean cruzar un río, utilizando una pequeña canoa que sólo puede transportar a un hombre o a los dos chicos. ¿Cuántas veces debe este bote cruzar el río para llevar a cabo el objetivo?

8) Una fiesta reúne a 40 personas. Uno de los presentes comenta que seguramente hay allí dos personas que tienen la misma cantidad de parientes entre los invitados. Otro le responde que eso sería una gran casualidad y que no lo cree muy probable. Sin embargo, tiene razón el primero. ¿Por qué?
Ayuda: Utilice el método por contradicción.

Principio de los Casilleros o Principio del Palomar: Si $n+1$ ó más objetos se distribuyen o se clasifican en n categorías, entonces alguna categoría deberá contener por lo menos dos objetos.

Si bien es un hecho matemático sencillo (simplemente expresa que una función de un conjunto de n+1 ó más elementos en otro de n elementos no puede ser inyectiva), permite a veces sacar conclusiones bastante interesantes. Por ejemplo, ¿es obvio para Ud. que si durante una noche un teatro o un cine tiene colmada su capacidad de 370 localidades, entonces se encuentran presentes al menos dos personas que cumplen años el mismo día? El principio anterior puede refinarse para obtener resultados más útiles y precisos.

9) Una cierta cantidad de equipos de fútbol han disputado un torneo, por el sistema de todos contra todos. Pruebe que al menos dos de ellos han empatado la misma cantidad de partidos.

10) Si elegimos seis personas al azar en una reunión, entonces debe haber 3 de ellas que se conocen todas entre sí o bien tres de ellas todas extrañas entre sí.

11) Para organizar diversas actividades culturales y deportivas, los 10 integrantes de la comisión directiva de un club deben agruparse en 10 subcomisiones. Si el presidente no puede formar parte de ninguna de ellas, concluya que debe haber dos subcomisiones con el mismo número de miembros.

TRABAJO PRACTICO 1: Un grupo de rock. Juan Ciruelo, Jorge Cerezo y Javi Manzano decidieron formar un grupo de rock: "Las Tres Frutas". Tenían unas voces estupendas, pero además cada uno de ellos sabía tocar la guitarra o la bandurria, o tal vez, las dos cosas.

Se sabe que si es verdad que Ciruelo y Manzano saben tocar la guitarra, entonces también lo sabe hacer Cerezo. Si Cerezo no sabe tocar la guitarra, entonces Manzano sí que sabe. Pero si Manzano sabe tocar la bandurria entonces Ciruelo no sabe. También se sabe que uno de los dos, Ciruelo o Cerezo, pero no los dos simultáneamente, sabe tocar la guitarra.

Se sabe también que solo uno de los tres sabe tocar la bandurria y la guitarra. ¿Quién es?

TRABAJO PRACTICO 2: Lógica con preguntas con respuestas SI – NO.

Una isla se encuentra habitada por dos tipos de personas: las personas sinceras y las personas mentirosas. Cuando se les realiza una pregunta que se responde con SI ó NO, la persona sincera dice siempre la verdad, mientras que la persona mentirosa siempre miente. Por otro lado, ambas personas no pueden distinguirse por ningún método visual.

¿Qué pregunta podría realizarse a cualquier persona que se encuentra en la isla para determinar si es una persona sincera o bien una persona mentirosa?

Analice las siguientes preguntas:

(i) ¿Es usted una persona sincera?

(ii) ¿Es usted una persona mentirosa?

(iii) Si usted fuese una persona sincera entonces cómo respondería a la pregunta ¿Es usted una persona mentirosa?

(iv) Si usted fuese una persona mentirosa entonces cómo respondería a la pregunta ¿Es usted una persona sincera?

TRABAJO PRACTICO 3: Lógica en el cruce de un río.

Hay dos matrimonios que necesitan cruzar un río. Poseen un pequeño bote que permite llevar solamente a dos personas por vez. Los esposos son bastante celosos. Una mujer no puede permanecer (sea en la tierra o en el bote) con un hombre excepto que su esposo esté también presente.

(i) ¿Cómo pueden estas cuatro personas cruzar el río?;

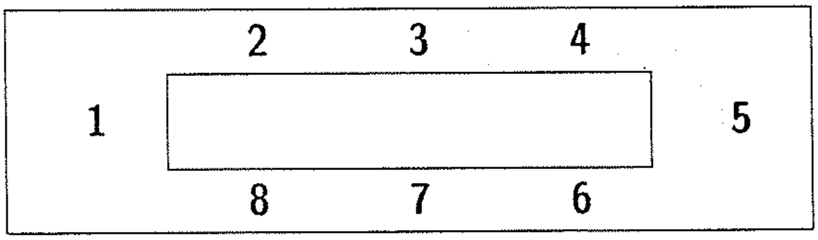
(ii) ¿Cuál es el número mínimo de viajes posible para que las cuatro personas crucen el río?;

(iii) ¿ Suponga ahora que hay tres matrimonios sujetos a las mismas reglas anteriores. ¿En cuántos viajes pueden las seis personas cruzar el río?

<u>CASO 1: Reunión de Directorio</u>. Es una simple reunión de directorio. Bah, no tan simple, ya va a ver... Deben votar por mayoría simple (más del 50% de las acciones) la venta de la empresa. Una decisión, sin dudas importantísima. Se tienen las siguientes informaciones:

- Entre todos los presentes suman el 100% de las acciones. Nadie tiene idéntico porcentaje que otro, ninguno tiene centésimos (todos números enteros) y entre el que menos tiene y el que más, la diferencia es del 7%.
- En las cabeceras están sentados Martínez y Sánchez.
- Vázquez no está del mismo lado que Giménez. Entre ambos suman el 23%.
- Estando del mismo lado de la mesa, Alvarez y Domínguez, no están uno al lado del otro.
- Henríquez tiene un porcentaje menor que Domínguez.
- Martínez y Sánchez suman el 21%, y Martínez tiene un 6% menos que aquel que se sienta a su izquierda.
- Henríquez está sentado al lado Giménez, del mismo lado de la mesa.
- El que está a la izquierda de Sánchez tiene el 15% y el que está enfrente a este último tiene el 9%.
- Domínguez está sentado justo frente a Fernández pero Vázquez no está sentado justo enfrente a Giménez.
- Martínez tiene a su derecha a Domínguez.
- Suponiendo que Martínez está sentado en la posición 1 del cuadro, los votos finales se repartieron de la siguiente manera:
    - los ubicados en las posiciones 1, 3, 5 y 8 votaron por la afirmativa;
    - los sentados en las posiciones 2, 4, 6 y 7 votaron por la negativa.

La pregunta es, finalmente, ¿Qué se hizo?



1) En un club de 2200 socios, $\frac{2}{5}$ de los socios practican natación, $\frac{1}{4}$ practica tenis y $\frac{3}{10}$ practica rugby.
(i) ¿ Qué parte del total de socios no practica deportes?
(ii) ¿ Qué porcentaje del total de socios practica algún deporte?
(iii) ¿ Cuál es el deporte que agrupa más socios?
(iv) ¿ Cuántos socios practican natación y tenis?

2) Encuesta azúcar – edulcorante. El equipo de Javier realizó una encuesta para determinar cuántas personas utilizan azúcar y cuántas utilizan edulcorante. El informe dice:

• Número de personas encuestadas	600
• Número de personas que utilizan azúcar	352
• Número de personas que utilizan edulcorante	318
• Número de personas que utilizan ambos (azúcar y edulcorante)	168
• Número de personas que no utilizan ni azúcar ni edulcorante	100

(i) Después de analizarlo Javier detectó que era inexacto. ¿Puede explicar por qué?
(ii) Cómo se podría cambiar el número de personas que no utilizan ni azúcar ni edulcorante para que el informe sea exacto. Calcule en dicho caso, el correspondiente porcentaje de cada item.

3) Simultaneidad. 25 personas están cursando economía, matemática o ambas. Si 20 están anotadas en economía y 18 están anotadas en matemática, ¿ cuántas personas están anotadas tanto en historia como en matemática ?

4) Televisión por cable y videocaseteras. En el pueblo 1/5 de los hogares están equipados con televisión por cable. Si 1/10 de los hogares, incluyendo 1/3 de aquellos que tienen televisión por cable, tienen videocaseteras, ¿ Qué fracción de hogares no tienen ni televisión por cable ni videocaseteras?
(a) 23/30 ; (b) 11/15 ; (c) 7/10 ;
(d) 1/6 ; (e) 2/15 .

5) Mitines Electorales: Se está próximo a las elecciones municipales y los anteriores líderes municipales han organizado cada uno un mitín electoral. Las estimaciones sobre las participaciones dan los resultados siguientes:

- 130 personas participaron en la reunión organizada por Pablo, 165 en la de Fernando y 65 en la de Carlos.
- En total, se han desplazado 200 personas de las cuales 30 participaron en los 3 mitines.

Se necesita conocer:
(i) ¿Cuántos participaron en un solo mitin? ;
(ii) ¿Cuántos participaron en dos mitines? ;
(iii) Si hubo 50 personas que fueron a la reuniones organizadas por Pablo y por Fernando, y hubo 45 personas en la reuniones organizadas por Pablo y por Carlos, entonces determine la cantidad de personas que fueron solamente a la reunión organizada por Carlos.

II. PROBLEMAS CON NUMEROS REALES, PROPORCIONES (PORCENTAJES), ECUACIONES Y FUNCIONES REALES

II.1. PROBLEMAS CON NUMEROS REALES

1) Ahorro por estacionamiento. Un estacionamiento alquila sus espacios a $ 30 por semana ó a $ 90 por mes. ¿Cuánto ahorrará una persona en un año si alquila por mes en lugar de hacerlo por semana?

(a) $ 420 ; (b) $ 480 ; (c) $ 660 ;
(d) $ 720 ; (e) $ 780 .

2) La edad de la familia. Hace exactamente dos años, las edades sumadas de los integrantes de la familia Pérez daba como resultado 62. Ahora, las edades suman 67. ¿Puede indicar cuántas personas componen la familia Pérez?

3) En la heladería. Juan le comentó a Roberto: Ayer fui con mi novia a la heladería, y decidimos pedir un helado de un solo gusto para cada uno. Contamos todas las combinaciones de gustos que podíamos hacer entre los dos, pero ahora no recuerdo si eran 78, 81 u 86.
Su amigo Roberto le contestó: Con lo que dijiste ya puedo saber cuántas posibles combinaciones había, y también cuántos gustos distintos hay en esa heladería.
¿Podría explicar el razonamiento de Roberto?

4) Encuentre los números I. Complete las siguientes operaciones:

(i)

	8	...	3	...
−	...	2	...	1
	3	4	6	5

(ii)

1	2	3	9	
X		...	...	
	...	...	7	...
...	...	...	...	
...	...	...	4	8

(iii)

				....,	1	....
	×			....,	....	7
			4	3	3	3
....	....	....	8	....		
....	....	....	....	....	....	

(iv)

7	5	...	....	|	....	....	
3	4	9			1	....	....
	...	....	....				
		0	8				

5) Encuentre los números II. En cada uno de los siguientes problemas encuentre todas las soluciones:
(i) Utilizando solamente una vez las cifras 1, 3, 4, 5 y 8, complete la siguiente operación:

		9	7	.....	6
+		1	.....	5	.....
	1	1	.....	1	.....

(ii) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación:

		6	.....	.....	1
+		7	9	7	.....
	1	4	.....	9	.....

6) Suma con letras. (i) Cada letra utilizada (A, P, R, S) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

		R	A	S
+		P	A	R
	A	S	S	A

(ii) Cada letra utilizada (A, B) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$AB + BA = 99 .$$

Definición.– Se llama sucesión geométrica, a todo conjunto de números dados en un cierto orden, tal que, el cociente entre dos números sucesivos se mantiene constante. Dicha constante r se la denomina razón.

Si el primer término es a, entonces la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica es:

(A) $$S_n = a + a\,r + a\,r^2 + \dots\dots\dots + a\,r^{n-1}$$

está dada por ($r \neq 1$)

(B) $$S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r} \, .$$

7) Sucesión geométrica. Demuestre la validez de la expresión (B) por los dos siguientes métodos : (i) multiplique (A) por r y réstele (A) ; (ii) por el principio de inducción completa.

8) El mendigo y el avaro. Un mendigo pide hospitalidad a un avaro haciéndole la siguiente proposición: "Yo pagaré \$ 10 por el primer día, \$ 20 por el segundo día, \$ 30 por el tercer día, y así sucesivamente; en cambio, usted me dará \$ 0,01 por el primer día, \$ 0,02 por el segundo día, \$ 0,04 por el tercer día, y así sucesivamente". El avaro consideró esta proposición y consistió en este arreglo por 30 días, pensando que era un buen negocio. ¿Sabrías decir quién salió perjudicado en este contrato?

9) Tamaño de los televisores. El tamaño de los televisores se mide en pulgadas e indica la medida de la diagonal de la pantalla, que tiene forma rectangular. Las dimensiones de la pantalla están en la relación 3 a 4. Calcule en cm las dimensiones de los televisores de 26 y 20 pulgadas (1 pulgada = 2,54 cm).

10) Carreras de batracios. Los verdaderos apostadores juegan su dinero en cualquier competencia: galgos, caballos, una riña de gallos o, en este caso, una carrera entre un sapo y una rana. El sapo avanzaba 15 cm en cada salto; la rana sólo 9 cm, pero era más rápida. Los dos salieron del mismo lugar y terminaron su último salto exactamente en la meta. No sabemos quién ganó, pero sí que la rana dió 4 saltos más que su contrincante.

(i) ¿Cuánto medía la pista?

(ii) ¿Cuántos saltos dieron cada uno?

11) Naipes. Alberto, Beatriz, Carlos y Diana jugaban a las cartas. El juego consistía en repartir un mazo completo de 48 cartas españolas (cada palo tiene todos los números del 1 al 12) entre los jugadores. Luego se sumaban los puntos de las cartas que tenía cada uno; el ganador era el de mayor puntaje. Resultó que Beatriz tenía el doble que Alberto, que Carlos tenía el doble que Beatriz, y que Diana tenía el triple que Beatriz. Sin discutir lo divertido del juego, ¿Puede calcular qué cartas tenía Alberto?

12) La Isla Lejana. El primero sobre el barco en avistar la isla fue el vigía. "Está a 54 kilómetros!", dijo. Su compañero lo corrigió: "No, está más lejos, como a ...", pero el viento se llevó sus últimas palabras. Otro del grupo, opinó que estaba a 57 km, y el Capitán que estaba a 59 km. Si uno de ellos calculó mal la distancia por 1 km, otro por 2, otro por 3 y otro por 4, ¿a qué distancia estaba la isla?

13) Números capicúas. ¿Los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11 ?

14) Adivinando la edad. El profesor pide a los alumnos que escriban la edad de una persona en la calculadora, la multipliquen por 10, sumen 20, multipliquen por 10 y sumen 165. Luego toma la calculadora y resta 365. El resultado, quitando los dos ceros de la derecha es la edad tecleada.

15) Los números fieles.

- El 10: Tome un número, multiplíquelo por 6, sume 48, multiplique por 5, sume 60, divida entre 30 y reste el número inicial.
- El 23: Tome un número, súmele 25, multiplique por 2, reste 4, divida entre 2 y reste el número inicial.
- El 60: Tome un número, súmele 10, multiplique por 2, sume 100, divida entre 2 y reste el número inicial.
- El anillo: Tome un número, multiplíquelo por 2, sume 4, multiplique por 5, sume 12, multiplique por 10, reste 320 y divida por 100.
- Otro anillo: Tome un número, multiplíquelo por 3, sume 30, multiplique por 5, sume 600, divida entre 15 y reste 50.

¿Puede justificar los resultados?

16) ¿Recuerda el número?. Piense un número de dos cifras. Tecléelo en su calculadora. Multiplíquelo por 3 y luego por 3367, ó bien multiplíquelo por 7 y luego por 1443. ¿Recuerda qué número había pensado? ¿Puede justificar lo que sucede?

17) Jugando con los números. Piense un número de dos cifras. Multiplique la cifra de las decenas por 5, sume 3, multiplique por 2, sumele ahora la cifra de las unidades, reste 6. ¿Qué obtiene? ¿Puede justificarlo?

18) Adivinando la edad. Le voy a adivinar la edad de sus padres. Teclee en su calculadora la mayor de las dos edades. Multiplícala por 5, sume 36, multiplique por 20, sume la edad del más joven. El profesor toma la calculadora y le resta 720. En la pantalla queda un número de cuatro cifras, las dos de la izquierda son la edad mayor y las dos de la derecha son la edad menor.

19) La fecha de nacimiento. Escriba en la calculadora el día, seguido del mes de su nacimiento, formando un número de 4 cifras. Multiplíquelo por dos, súmele 5, multiplíquelo por 50 y finalmente súmele las dos últimas cifras de su año de nacimiento. Se le pide la calculadora y se resta 250. En la pantalla aparece su fecha de nacimiento en la forma dd-mm-aa.

20) Las cuatro cifras. Elija dos números de dos cifras. Teclee uno de ellos en su calculadora. Súmele ese número incrementado en una unidad, multiplíquele por 50, súmele 72 y súmele el otro número. Se le pide la calculadora y se resta 122. En la pantalla aparece un número de cuatro cifras, las dos primeras de uno de los números y las dos últimas del otro.

21) Las siete cifras. Teclee en su calculadora un número de 7 cifras. Súmele 25, multiplíquelo por 2, réstele 4, divídalo entre 2. Se toma la calculadora y se resta 23 quedando el número inicial.

22) Número natural. Si n es un número natural y $n = \frac{2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13}{77\,k}$ ¿ Cuál de los siguientes números podría ser el valor de k?

(a) 22 ; (b) 26 ; (c) 35 ;
(d) 54 ; (e) 60 .

23) Cantidad de folletos sobrantes. Un editor imprimió en total 5000 folletos, repartió algunos pero aún le queda más de 2000. Puede embalarlos en cajas de 45 folletos sin que le sobre ninguno, también puede usar cajas de 40 ó de 50 folletos sin que le sobre. ¿Cuál es el número de folletos que todavía tiene?

24) Números. Tome un número de tres cifras, con todas sus cifras desiguales, por ejemplo 523. Dele vuelta, 325. Reste el menor del mayor $523 - 325 = 198$. Ahora invierta el número 198 y sume los dos últimos números obtenidos $198 + 891 = 1089$. Haga lo mismo con otros números de tres cifras. ¿ Qué observa? ¿ Puede justificar el resultado?

25) Pesadas. Una jarra pesa igual que una botella y un vaso. Una botella pesa lo mismo que un vaso y un plato. Dos jarras pesan lo mismo que tres platos. ¿ Cuántos vasos pesarán lo mismo que una botella?

II.2. PROBLEMAS SOBRE PROPORCIONES

1) Angulo entre agujas. ¿Qué angulo forman las agujas del reloj a las 12:35 hs?

2) Empresa constructura. (i) En una empresa constructora de caminos se informa que 20 obreros pavimentaron 30 Km de un camino en 12 días. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

No. de Km del camino a pavimentar	No. de días utilizados	No. de obreros empleados
30	12	20
18	8	....
40	....	32
....	16	15

(ii) Si se representan con c, d y x el número de Km del camino a pavimentar, el número de días utilizados y el número de obreros empleados respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

3) Días en un hotel. (i) En un hotel se informa que 20 pasajeros en 3 días pagaron $1800. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

No. de pasajeros	No. de días	Pago (en $)
20	3	1800
15	2	....
40	....	6000
....	4	1200

(ii) Si se representan con p, d y x el número de pasajeros, el número de días y el pago (en $) respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

4) Costo de una mezcla. Si 6 kg de nueces que cuestan $ 3,60 por kg se mezclan con 2 kg de nueces que cuestan $ 4,80 por kg, ¿cuál es el costo por kg de la mezcla?

5) Litros a agregar. ¿Cuántos litros de una solución que es 15 % salada deben ser agregados a 5 litros de una solución que es 8 % salada para que la solución resultante sea 10 % salada?

6) Dos máquinas en producción. Si la máquina X puede producir 1.000 unidades de un producto en 4 hs. y la máquina Y puede producir 1.000 unidades del mismo producto en 5 hs. ¿Cuánto tiempo tardarán las máquinas X e Y para producir 1.000 unidades si trabajan juntas a dichos niveles de producción?

II.3. PROBLEMAS CON PORCENTAJES

1) Precio original. Un cierto comprador pagó \$ 24 por un vestido. Si ese precio representa un 25% de descuento sobre el precio original del vestido, ¿ Cuál es el precio original del vestido?

2) Descuento aplicado. El precio de un ítem es descontado en un 20% y luego a este precio reducido se le aplica otro descuento adicional del 30%. ¿Cuál es el descuento global aplicado?

3) Obtención de un beneficio. Una cierta mercadería le cuesta a un comerciante \$ 30 .¿A qué precio debería el comerciante vender la mercadería para obtener un beneficio del 50% sobre el costo de la mercadería?

4) Porcentaje en compra-venta. (i) Un comerciante compra mercaderías que luego vende aplicándoles un porcentaje de ganancia. Complete la siguiente tabla:

Precio de compra (\$)	Precio de venta (\$)	Ganancia (en %)
30	36	....
....	88	10
45	....	15
....	39,60	20

(ii) Si se representan con C, V y g el precio de compra de una mercadería, el precio de venta de una mercadería y el porcentaje de ganancia respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

5) Descuentos en un supermercado. (i) En un supermercado se realizan descuentos sobre los precios de los diferentes artículos. Complete la siguiente tabla:

Precio de los artículos (\$)	Suma a pagar luego del descuento (\$)	Descuento (en %)
....	40	20
50	.....	15
60	48	....

(ii) Si se representan con C, P y d el precio del artículo antes del descuento, el precio del artículo a pagar luego del descuento y el porcentaje de descuento respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

6) Porcentaje de aumento. Complete las siguientes tablas e indique si existe una sola forma para realizarla:

(i) (La tabla indica el precio de un artículo luego de un aumento, en función del precio del artículo y del porcentaje de aumento) .

precio / % aumento	120	.....	.....
15	.....	793,5	.....
.....	147,6	.....	42
.....	.....	50	.....
40	.....	.....	60

(ii) (La tabla indica el precio de un artículo luego de un descuento, en función del precio del artículo y del porcentaje de descuento).

precio / % descuento	100	300	.....
5	.....	.....	420
.....	.....	270	....
.....	.....	50	.....
17	.....	.....	.....

7) Intermediarios. ¿Qué porcentaje de aumento tiene el precio de un artículo que pasa por las manos de tres intermediarios, cada uno de los cuales vende el producto un 50% más caro de lo que le costó?

8) Aumentos y descuentos. Si el dueño de un negocio ordena subir un 25 % el precio original de sus zapatillas en vidriera, para luego ofrecer a los compradores una rebaja sobre este último precio, de un 20 % más un 10 %. ¿Con qué porcentaje vende respecto al precio original?

(i) Con una rebaja de un 5 % ; (ii) Con una rebaja de un 10 % ;
(iii) Con una rebaja de un 12,5 % ; (iv) Con un aumento de un 10 % .

9) Tasas de interés real, nominal e inflación. Si la tasa de interés real es del 5%. Si se supone que la tasa de interés nominal y el de la inflación esperada aumenten un 20%, entonces la tasa de interés real:

(a) aumenta ; (b) disminuye ;
(c) permanece invariable ; (d) es del 6 % ;
(e) ninguna de las respuestas precedentes.

10) El truco del comerciante. Un comerciante descubrió un truco genial: Si quería vender a un precio determinado, lo aumentaba un 15% y así hacía al cliente un 15% de descuento cuando venía a comprar.

(i) ¿Qué opina de la actitud del comerciante?
(ii) ¿Se beneficia o se perjudica el comerciante?
(iii) Para obtener lo que deseaba el comerciante ¿Cuánto debería ser el porcentaje de incremento?

11) Repartiendo los gastos de la excursión. Se ha dividido los gastos de la excursión entre los 15 alumnos que asistieron. Posteriormente, resulta que los dos profesores también pagan. ¿Qué porcentaje se ahorran los alumnos?

12) Los intermediarios y los precios. Siempre se comenta la incidencia que sobre los precios finales tienen los intermediarios. Es muy fácil matematizar estos comentarios.

(i) ¿Qué ocurre con el precio de un artículo que pasa por las manos de tres intermediarios, cada uno de los cuales vende el producto un 50% más caro de lo que le costó?

(ii) Si un artículo pasa por las manos de dos intermediarios, ¿Qué porcentaje de aumento debe aplicarse para que el precio final se duplique?

13) Los empleados de una empresa. Este año hay 252 empleados en una empresa, lo que representa un aumento del 12 % respecto del año pasado. ¿Cuántos empleados había el año pasado?

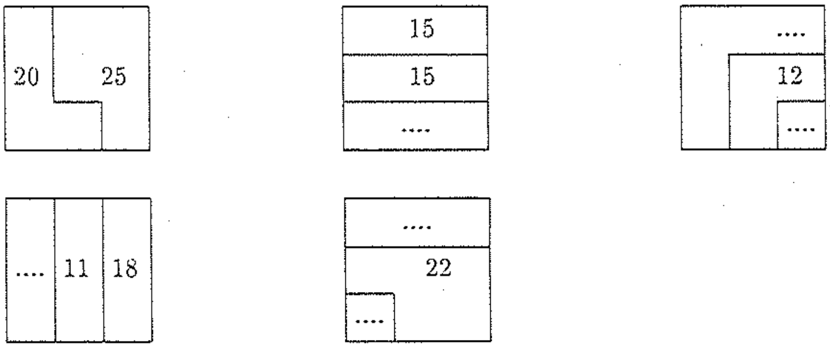
14) Chicos y chicas en el colegio. El año pasado un 40% de los alumnos eran chicos. El número total de alumnos ha aumentado en un 15%, pero los chicos sólo han aumentado un 10%. ¿Qué parte del alumnado es masculino este año?

II.4. PROBLEMAS CON ECUACIONES E INECUACIONES

1) Números del 1 al 9. Escriba los números del 1 al 9, en la tabla de 3 filas y 3 columnas siguiente:

....	....	....
....	....	....
....	....	....

de manera que se satisfagan las sumas indicadas:



2) Problemas con ecuaciones de primer grado. Resuelva los siguientes problemas que se conducen a ecuaciones de primer grado :

(i) Halle tres números de manera que la suma de los tres sea 54, que el segundo sea el doble del primero y el tercero sea el triplo del segundo ;

(ii) Una persona compra una mercadería pagando \$30 por adelantado y 12 cuotas fijas por un valor igual a 1/15 del precio total. Cuánto cuesta la mercadería ?

(iii) Si hoy el precio de una mercadería es de \$ 1.210,= , cuál fue el precio exactamente 2 años antes si se considera un incremento en los precios del 10% anual durante ambos años ?

(iv) Un vendedor de frutas compró una cierta cantidad de manzanas a razón de 3 kilos por \$ 0,50 y vendió todo el lote a razón de 4 kilos por \$ 1,= . Cuántos kilos compró el comerciante si la ganancia obtenida fue de \$ 10,= .

3) Papas fritas. En un bar, una hamburguesa y ensalada cuestan \$ 3,95 , y una hamburguesa y papas fritas cuestan \$ 4,40. Si las papas fritas cuestan el doble que la ensalada, ¿cuánto cuestan las papas fritas?

(a) \$ 0,30 ; (b) \$ 0,45 ; (c) \$ 0,60 ;
(d) \$ 0,75 ; (e) \$ 0,90 .

4) Problemas con sistemas de ecuaciones de primer grado. Resuelva los siguientes problemas que se conducen a un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas :

(i) En un edificio, las puertas tienen 4 cristales y las ventanas tienen 6 cristales. Si se cuentan 30 aberturas y 172 cristales, cuántas puertas y ventanas hay ? ;

(ii) Halle el número de pesos que tienen Luis y José, sabiendo que :

(a) si Luis da \$ 20 a José, éste tendrá el doble de lo que le queda a Luis ,
(b) si José da \$ 20 a Luis, éste tendrá el triple de lo que le queda a José.

(iii) El empresario de un teatro decide contribuir a una obra benéfica con 60 centavos por cada entrada de mayores y con 40 por las de niños. Asisten 400 personas y el importe que dona es de \$ 234. ¿A cuántas entradas de mayores y cuántas de niños corresponden?.

II.5. PROBLEMAS PARA PENSAR CON NUMEROS REALES Y ECUACIONES

1) Ratones de laboratorio. Fue un día agitado el que pasaron los 35 ratones (19 blancos y 16 negros) de la jaula de un laboratorio. Un científico extrajo nueve ratones y les inyectó un líquido experimental. El líquido (un futuro producto contra las canas) actuó sobre los ratones inyectados: volvió blancos a los negros y negros a los blancos. Cuando el científico volvió para comprobar los resultados, en la jaula había 16 ratones blancos y 19 ratones negros. Sabiendo esto, ¿puede indicar cuántos ratones blancos fueron inyectados?

2) Descifrar un número con mínimas preguntas. Averigue un número telefónico de a lo más 5 cifras, con la mínima cantidad de preguntas que sólo admiten las respuestas "sí" o "no".

3) Un juego para dos. Dos jugadores dicen alternativamente un número del 1 al 5. El primer jugador que alcance 31, sumando todos los números que dice cada uno, gana. ¿Qué número conviene decir, si se juega primero?

4) El monje en la montaña. Un monje decide subir desde su casa a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale a las 9 hs. de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 9 hs. de la mañana, emprende el camino de regreso a su casa por el mismo sendero. Al ir bajando se pregunta: ¿ Habrá algún punto en el camino en el que hoy esté a la misma hora que ayer?

5) Las pesas. Calcula el juego de cuatro pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza con dos platos cualquier cantidad entera de uno hasta cuarenta kilos.

6) Mercado Negro. En la República de Bangaminga, el intercambio monetario es más bien caótico. Y no por su política económica, sino porque los únicos billetes que poseen son de 11, 13, 31, 33, 42, 44 y 46 bangamangos (moneda local). Con esas salvajes cifras, ¿podría pagar exactemente 100 bangamangos? (Puede usar más de un billete de una determinada clase). Analice si lo puede hacer con sólo dos billetes, con tres billetes, etc.

7) ¿Quién no sabe contar? Sobre un tablero de ajedrez alguien contó una vez, 204 cuadrados diferentes. ¿Estará en lo cierto? ¿Cuántos rectángulos se pueden contar?

8) Equipo de basket. Un equipo de basquet, que ha jugado las 2/3 partes de sus partidos, tiene un record de 17 victorias y 3 derrotas. ¿Cuál es el mayor número de partidos, entre los que le queda por jugar, que el equipo puede perder y aún así ganar como mínimo los 3/4 de todos los partidos?

(a) 7 ; (b) 6 ; (c) 5 ;
(d) 4 ; (e) 3 .

9) Sobre el número 2. Cierto número termina en 2. Cambiando de lugar esta cifra y poniéndola al principio, resulta un número que es el doble del número inicial. ¿ Qué número es el inicial?

10) Un criado sabio. Un señor tenía sus mejores botellas de vino dispuestas en la bodega de la manera indicada en la figura. Desconfiaba de su criado y todas las noches, antes de acostarse, bajaba al sótano y las contaba sumando el número de botellas que había en los tres compartimentos de cada uno de los cuatro lados. Si la suma era de 21 botellas en cada uno de los cuatro lados, descansaba feliz.

El criado, por su parte, sabedor de la estratagema y del bajo concepto que de él tenía el señor, decidió robarle botellas. Y lo consigió !!. Le robaba unas cuantas y redistribuía las restantes de modo que no perturbase los sueños del amo.

¿Cuántas botellas, como máximo, pudo robar? ¿Cómo quedó dispuesta la bodega?

6	9	6
9	0	9
6	9	6

(Posición inicial de las botellas en la bodega)

11) Se elige un número de dos cifras AB con A $\neq$ B. Se invierten sus cifras BA. Se resta el menor del mayor y se suman las cifras del resultado. Demuestre que siempre se obtiene el mismo resultado final. ¿Cuál es?

12) ¿Cuál es la menor de las siguientes fracciones

$$\frac{5}{x}, \qquad \frac{x+1}{5}, \qquad \frac{5}{x-1}, \qquad \frac{x}{5}, \qquad \frac{5}{x+1},$$

si $x > 5$?

13) (i) Para numerar las páginas de un libro se usaron 495 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro ?
(ii) ¿Idem a la parte (i), si se hubiesen utilizado 6725 cifras ?
(iii) ¿ Idem a la (i), si se hubiesen utilizado 2.989 cifras ?

14) (i) Julián lleva un canasto con manzanas. Encuentra a tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que le dió al primero más dos; y al tercero la mitad de lo que le dió al segundo más dos. ¿Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?
(ii) Al día siguiente lleva otro canasto con manzanas. Encuentra a sus tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que le quedan más dos; y al tercero la mitad de las sobrantes más dos. ¿Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?

15) a) La mamá de Juan le lee 5 páginas de un libro por noche. Antes de comenzar a leerle, desde la segunda noche, la madre relee la última página para recordar en qué habían quedado. Si el libro tiene 97 páginas, ¿en cuántos días terminará el libro?.
b) Si la mamá le leyó otro libro durante todo el mes de enero de 1998, ¿cuántas páginas tenía el libro?

16) Jaimito generoso. Jaimito sale de casa con un montón de caramelos y vuelve sin ninguno. Su madre le pregunta qué ha hecho con los caramelos.

- A cada amigo que me encontré le di la mitad de caramelos que llevaba más uno.
- ¿Con cuántos amigos te encontraste?
- Con seis.

¿Con cuántos caramelos salió Jaimito?

17) Vacas lecheras. Cuatro vacas negras y tres vacas marrones dan tanta leche en cinco días como tres vacas negras y cinco marrones en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la mejor lechera, la negra o la marrón?

18) Una soga larga. Imagine una soga larga que ciñe ajustadamente a la Tierra por la circunferencia del ecuador. Ahora imagine que a esa soga se le agrega un metro de largo, y se eleva de la superficie terrestre a igual altura en todo el contorno. Dicha altura, ¿alcanza para que pase una mano entre la soga y el suelo?

19) El faro. El farero sube todos los días la larga escalera hasta la luz que está en lo alto. El lunes sube de a un peldaño por vez, el martes de a dos y así hasta el sábado cuando sube de a seis peldaños por vez. Todos estos llega justo hasta la linterna. Pero el día domingo, al subir los escalones de a siete, le falta uno para llegar ahí. ¿Cuántos escalones tiene el faro?

20) La liebre y el galgo. Una liebre perseguida por un galgo lleva a éste 60 saltos de ventaja; la liebre da 9 saltos, mientras el galgo da 6, pero 3 saltos del galgo equivalen a 7 de la liebre. ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar a la liebre?

21) ¿Qué hora es? Preguntada una persona por la hora, contestó: "Lo que queda del día es igual a siete veces la quinta parte de las horas que han transcurrido". ¿Qué hora es?

TRABAJO PRACTICO 1: Sistemas monetarios. (i) Se tienen numerosas monedas de 5 y de 8 centavos.

(a) ¿Cuáles de las siguientes cantidades (en centavos)

$$11,\ 14,\ 17,\ 23,\ 26,\ 27,\ 28,\ 42,\ 76,\ 951,\ 13632$$

pueden ser obtenidas utilizando dichas monedas?

(b) Haga una lista completa de las cantidades entre 1 y 99 centavos que no pueden ser obtenidas utilizando dichas monedas.

(ii) Repita el problema anterior (parte (i)) si se tienen dos monedas de:

(a) 5 y 2 centavos ; (b) 5 y 3 centavos ; (c) 5 y 4 centavos.

TRABAJO PRACTICO 2: Metegol lógico. Tres amigos, Juan, Pedro y Carlos, jugaron un torneo triangular de metegol, es decir que cada uno jugó dos partidos (todos contra todos) y hubo tres partidos en total. Se recuerda que una ficha de metegol da siete bolas. Al final del torneo resultó que Juan y Pedro hicieron 5 y 6 goles respectivamente. Entonces:

(i) ¿Cuántos goles hizo Carlos?

(ii) ¿Cuántos goles recibió, en su arco, cada uno de los tres jugadores?

(iii) Si se sabe que Pedro perdió los dos partidos jugados, determine los resultados de los tres partidos.

(iv) Si no se hubiese sabido que Pedro perdió los dos partidos (según (iii)), ¿cuántas soluciones posibles sobre los resultados de los tres partidos se tendría? Además, ¿Pedro hubiese ganado algún partido?

TRABAJO PRACTICO 3: Cuadrangular de fútbol. Determine los resultados de cada partido si la posición final de un cuadrangular de fútbol es la dada por la siguiente tabla en la cual se tienen en cuenta que:

(a) J, G, E y P representan la cantidad de partidos jugados, ganados, empatados y perdidos respectivamente;

(b) GF y GC representan la cantidad de goles a favor y en contra respectivamente;

(c) El puntaje es la suma de los puntos obtenidos en el torneo a razón de 2, 1 y 0 puntos por partido ganado, empatado y perdido respectivamente.

Resultados Equipos	J	G	E	P	GF	GC	PUNTAJE
A	3	3	0	0	7	2	6
B	3	2	0	1	3	3	4
C	3	0	1	2	3	6	1
D	3	0	1	2	0	2	1

II.6. PROBLEMAS PARA PENSAR CON PROPORCIONES Y PORCENTAJES

1) Verde y rojo. Había tres latas: una con un litro de pintura verde, otra con un litro de pintura roja y otra más pequeña, vacía. El pintor llenó la lata pequeña con pintura verde, y luego pasó el contenido de la lata pequeña hacia la lata roja y mezcló los colores. Con esta mezcla llenó otra vez la lata pequeña, y volcó el contenido ésta en la lata de pintura verde. ¿Quedó más pintura verde en la lata roja que pintura roja en la lata verde? ¿Es al revés? ¿O quedó la misma cantidad?

TRABAJO PRACTICO 1: Respuesta correcta – Método incorrecto. Usted probablemente esté familiarizado con este tipo de problemas: El costo de un libro aumentó de \$ 13.50 a \$ 14.58. Encuentre el porcentaje de aumento del costo.

Un método equivocado es restar $14.58 - 13.50 = 1.08$ y entonces considerar a 1.08 como el factor correspondiente a un 8% de aumento.

El método correcto es, por supuesto, el dado por:

$$\frac{\text{nuevo costo}}{\text{viejo costo}} = \frac{14.58}{13.50} = 1.08, \text{ que corresponde a un } 8\% \text{ de incremento.}$$

¿ Puede encontrar otros ejemplos en los cuales el método incorrecto y el método correcto den la misma respuesta?

Bien, se supone que el costo aumenta de \$x a \$y (donde x e y son números reales con dos decimales). Los métodos coincidirán si se tiene

$$\frac{y}{x} = y - x\,.$$

es decir $y = xy - y^2$, con lo cual se obtiene que $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Ahora sean $X = 100x$, $Y = 100y$, por lo cual X e Y serán ambos números enteros. Entonces se deduce:

$$\frac{Y}{100} = \frac{(\frac{X}{100})^2}{\frac{X}{100} - 1}$$

con lo cual se tiene que:

$$Y = \frac{X^2}{X-100} = X + 100 + \frac{10000}{X-100}$$

Se sigue que, como Y debe ser entero, entonces necesariamente $X - 100$ debe ser uno de los divisores de 10000. Por lo tanto, eligiendo uno de eso divisores, X e Y quedan determinados.

¿Puede hallar todos los x, y posibles ?

TRABAJO PRACTICO 2: Concesionaria de autos. Una concesionaria de autos vendió en el año 1991 cuatro veces más autos grandes que pequeños y en el año 1992 vendió tres veces más autos pequeños que grandes . Se supone que el precio promedio de venta de los autos pequeños es de $ 5.000 y el de los autos grandes es de $ 8.000 . Se solicita que responda a los siguientes casos :

(i) Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si, en ambos años, se vendieron el mismo número de autos ;

(ii) Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si el número de autos que se vendieron en el año 1992 es ocho quintos de los que se vendieron en el año 1991 ;

(iii) Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si se vendieron 1000 autos en el año 1992 y 800 autos en el año 1991 .

(Ayuda : Plantee un sistema de ecuaciones que incluya todos los casos contemplados, suponiendo que :

G_2 (G_1) es el número de autos grandes vendidos en el año 1992 (1991) ;

P_2 (P_1) es el número de autos pequeños vendidos en el año 1992 (1991) ;

N_2 (N_1) es el número de autos vendidos en el año 1992 (1991) ;

V_2 (V_1) es la venta (en pesos) de autos vendidos en el año 1992 (1991) .

Deduzca que se tiene la relación

$$\frac{V_2}{V_1} = a \, \frac{N_2}{N_1} \quad , \quad \text{con a un número real a determinar,}$$

y luego obtenga la solución para todos los casos planteados).

II.7. PROBLEMAS PARA PENSAR CON VELOCIDAD, ESPACIO Y TIEMPO

1) El footing de Pepe y Pablo. Pepe y Pablo hacen footing desde A hasta B. Pepe corre la mitad de la distancia y camina la otra mitad. Pablo corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad. Los dos corren a la misma velocidad y los dos caminan a la misma velocidad. ¿Quién llega antes? ¿La respuesta depende de la distancia de A a B ?

2) El ciclista playero. Un ciclista va desde un pueblo a al playa cuesta abajo a una velocidad de 30 km/h. A la vuelta, cuesta arriba, va a 10 km/h. ¿Cuál es la velocidad media del ciclista en el trayecto de ida y vuelta?

3) Promedio de velocidades. Un viaje en colectivo de 450 km debería haber tomado una hora menos, si el promedio de velocidad del viaje, V, hubiera sido 5 km por hora mayor. ¿Cuál es, en km por hora, el promedio de velocidad V del viaje ?

(a) 10 ; (b) 40 ; (c) 45 ;

(d) 50 ; (e) 55 .

4) Velocidad promedio. En un viaje de 400 km un auto viaja la mitad de la distancia a 80 km por hora y la otra mitad a 100 km por hora. ¿ Cuál es la velocidad promedio de dicho auto?

5) Peligro en el puente. Un señor llegó hasta un puente ferroviario y empezó a correr por él. Cuando había recorrido 3/8 del puente oyó el silbato de un tren. Calculó inmediatamente: si retrocedo al comienzo llego exactamente en el momento en el que el tren entra al puente, corriendo a mi velocidad de 10 km/h, y si corro al final a esta velocidad llego allá al mismo tiempo que el tren. ¿A qué velocidad marcha ese tren?

6) Camino del hogar. Todos los días la señora Pérez espera a su marido en la estación del tren y le lleva a casa en su automovil. Un día el señor Pérez se adelanta una hora en llegar a la estación. Decide caminar hacia su casa por el camino que su mujer siempre sigue. Ella lo encuentra en el camino y lo lleva a su casa el resto del trayecto. Si hubiera esperado en la estación, ella habría llegado exactamente a tiempo, como de ordinario. Tal como sucedió, el señor Pérez llegó a casa veinte minutos más temprano que de ordinario. ¿Cuánto tiempo caminó el marido?

7) Problema de móviles. Un tren sale de Rosario hacia Buenos Aires a 70 km/h. Simultáneamente otro tren sale de Buenos Aires hacia Rosario a 60 km/h. Cuando se encuentran, ¿cuál estará más cerca de Rosario?

II.8. ECUACIONES E INECUACIONES CON PARAMETROS

1) Ecuaciones de primer grado con parámetros I. Resuelva las siguientes ecuaciones literales de primer grado en la incógnita x ($m, a, b \in \mathbb{R}$) :

(i) $7x - 3m = 0$; (ii) $3(x-m) - \frac{m}{2} = 2(2m - x)$;

(iii) $2b(x-a) + ab = 3b(x+a)$; (iv) $\frac{3x-2a}{3} + 6b = x + 5b - \frac{2a}{3}$;

2) Ecuaciones de primer grado con parámetros II. Considere la ecuación :

$$2\,m\,(x-1) = (m-5)\,(x+2)\,.$$

(i) Determine el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que la ecuación admita la solución $x = 3$;

(ii) Indique si es posible elegir $m \in \mathbb{R}$ de manera que la ecuación admita como solución a un dado número real α;

(iii) Resuelva la ecuación en $\mathbb{R}$.

3) Sistemas de ecuaciones de primer grado con parámetros I. Resuelva los siguientes sistemas paramétricos ($a, b \in \mathbb{R}$) de primer grado con dos incógnitas (x, y):

(i) $\left| \begin{array}{l} x + y = 2a \\ 2x + ay = 2a^2 \end{array} \right.$; (ii) $\left| \begin{array}{l} ax - 3y = a \\ x + ay = 1 \end{array} \right.$;

(iii) $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} \end{array} \right.$; (iv) $\left| \begin{array}{l} x + y = 2a \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{array} \right.$;

(v) $\left| \begin{array}{l} 2bx + 3ay = 5ab \\ 3bx - 4ay = -ab\,. \end{array} \right.$

4) Ecuaciones de segundo grado con parámetros I. (a) (i) Halle los valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que la ecuación $\frac{m}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = 0$ tenga sus raíces iguales.

(ii) Calcule además dicha raíz doble para cada valor de m hallado.

(b) Idem para la ecuación $mx^2 + 6x + \frac{1}{2} = 0$.

5) Ecuaciones de segundo grado con parámetros II. Determine el o los valores del parámetro m real de manera que:

(i) la ecuación $mx^2 + 4x + (m+2) = 0$ tenga una única solución;

(ii) la suma de las raíces de la ecuación $m^5x^2 + (m-1)x + 2m = 0$ sea cero.

6) Ecuaciones de segundo grado con parámetros III. Considere la ecuación $(m+5)x^2 - (2m+3)x + m - 1 = 0$, con parámetro $m \in \mathbb{R}$.

(i) ¿ Para qué valores de m la ecuación tiene una raíz doble ? Calcule, además, dicha raíz ;

(ii) Para qué valores de m la ecuación de segundo grado tiene dos raíces distintas ;

(iii) Para qué valores de m la ecuación de segundo grado no tiene raíces reales .

7) Ecuaciones de segundo grado con parámetros IV. (i) ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ la siguiente ecuación de segundo grado tiene raíces de distintos signos : $(m-1)\,x^2 - 2\,m\,x + m + 3 = 0$?;

(ii) ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen raíces positivas o raíces negativas? :

(a) $(m-1)\,x^2 - 2\,m\,x + m + 3 = 0$; (b) $3\,x^2 - 5\,x + m + 7 = 0$;

(iii) Determine el valor del parámetro real m para que una de las raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - mx + m - 1 = 0$ sea el doble de la otra. Halle, además, las dos raíces.

8) Inecuaciones de primer grado con parámetros.

(i) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

(a) $4x + m \leq (m+1)x - 2$; (b) $mx - m + 1 > 4 - x$;

(ii) Verifique que la inecuación

$$\frac{3\,x-2}{m} - m < x ,$$

con parámetro real $m \in \mathbb{R}$, tiene como conjunto de solución S al conjunto dado por:

(i) $S = \left(\frac{m^2+2}{3-m}, +\infty\right)$ cuando $m < 0$; (ii) La inecuación no está definida cuando $m = 0$;

(iii) $S = \left(-\infty, \frac{m^2+2}{3-m}\right)$ cuando $0 < m < 3$; (iv) $S = \mathbb{R}$ cuando $m = 3$;

(v) $S = \left(\frac{m^2+2}{3-m}, +\infty\right)$ cuando $m > 3$.

9) Inecuaciones de segundo grado con parámetros I. Resuelva y discuta en $\mathbb{R}$ (en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$) las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita :

(i) $x^2 - (m-2)\,x + 3(m-5) \leq 0$; (ii) $m\,x^2 - 2\,(m+2)\,x + m + 7 > 0$;

(iii) $m\,x^2 - (2\,m+1)\,x + m > 0$.

Respuestas 9):

(i) $m = 8 :\ S = \{3\}$ $\quad m < 8 :\ S = [m-5, 3]$ $\quad m > 8 :\ S = [3, m-5]$

(ii) $m = 0 :\ S = \left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$ $\quad m < 0 :\ S = \left(\frac{m+2-\sqrt{4-3\,m}}{m}, \frac{m+2+\sqrt{4-3\,m}}{m}\right)$

$0 < m < \frac{4}{3} :\ S = \left(-\infty, \frac{m+2-\sqrt{4-3\,m}}{m}\right) \cup \left(\frac{m+2-\sqrt{4-3\,m}}{m}, +\infty\right)$

$m > \frac{4}{3} :\ S = \mathbb{R}$ $\quad m = \frac{4}{3} :\ S = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$

(iii) $m = 0 :\ S = (-\infty, 0)$

$-\frac{1}{4} < m < 0 :\ S = \left(\frac{2\,m+1-\sqrt{4\,m+1}}{2\,m}, \frac{2\,m+1+\sqrt{4\,m+1}}{2\,m}\right)$

$$0 < m : \; S = \left(-\infty, \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2m} \right) \cup \left(\frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2m}, +\infty \right)$$

$$m \leq -\frac{1}{4} : \; S = \emptyset .$$

10) Inecuaciones de segundo grado con parámetros II. Resuelva en $\mathbb{R}$ (en función del parámetro m) las siguientes inecuaciónes:

(i) $x^2 + 4x - m < 0$; (ii) $(m - 1)x^2 - 2mx + (m+4) \geq 0$;

(iii) $x^2 + mx + m - 1 \leq 0$; (iv) $x^2 + (m+1)x - m^2 > 0$;

(v) $x^2 + 4x - m < 0$; (vi) $mx^2 + 2mx + (m+2) \geq 0$.

1) Interpolación. Dados n puntos del plano determine la interpolación lineal correspondiente, es decir, la poligonal (con sus respectivas leyes por sub-intervalos) que une dichos puntos en forma continua:

(i) $n = 5$: $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,-1)$, $P_4 = (3,2)$ $P_5 = (4,3)$

(ii) $n = 4$: $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (2,4)$, $P_3 = (4,4)$, $P_4 = (6,5)$

(iii) Según la siguiente tabla de valores:

x	y
−1	2
0	1
1	3
2	4

2) Gráfica de valores absolutos I. Grafique las siguientes funciones reales :

(i) $f_1(x) = 2x-1$; (ii) $f_2(x) = -\frac{x}{2}+3$;

(iii) $f_3(x) = 4 - 2|x|$; (iv) $f_4(x) = x+|x|$;

(v) $f_5(x) = 2|x-3|+|x-2|$; (vi) $f_6(x) = |x+3|$;

3) Gráfica e inecuaciones con valores absolutos I. Sea la función real definida por la siguiente ley :

$$f(x) = |x+3| - \left|\frac{x-2}{2}\right|.$$

(i) Halle una expresión equivalente (distinguiendo varios casos, si fuese necesario) a la dada ley que no contenga las barras de valor absoluto ;

(ii) Realice la gráfica de la función real f ;

(iii) Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 8$;

(iv) Resuelva analítica y gráficamente la inecuación $f(x) \leq 1 + 2x$.

4) Gráfica e inecuaciones con valores absolutos II. Resuelva analítica y gráficamente, en $\mathbb{R}$, las siguientes inecuaciones (represente gráficamente el conjunto de soluciones en la recta real):

(i) $|x-4| < |x+1|$; (ii) $x \leq |x+2|$;

(iii) $|x+2| \leq 3|x|$; (iv) $|x+2| \leq 2$,

(defina, si lo considera conveniente, alguna función real auxiliar).

Trabajo Práctico Especial

"Aplicaciones de los Números y de las Funciones Reales a Problemas de la Economía y de la Administración"

1) Etiqueta. Un fabricante mayorista vende a un comerciante minorista un determinado producto al valor de $\$ 30$ la unidad. El fabricante le ofrece colocar una etiqueta de precio a cada producto (para conveniencia del minorista en períodos de estabilidad económica). Se necesita conocer el precio que se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio de venta al público en 20%, en una oferta promocional, y obtener una utilidad del 12% sobre el costo del producto. Calcule además el porcentaje de la ganancia que obtiene el comerciante minorista en los días que no efectua la promoción.

(Ayuda: plantee una ecuación de primer grado para el precio p marcado en la etiqueta).

(ii) Idem para el caso en que el comerciante minorista compre el producto al valor de $ C (C es un valor positivo cualquiera y representa el caso de estudio que debe realizar el minorista para efectuar la promoción de sus numerosos productos que tiene en venta) (Es un problema real que se plantea como un problema paramétrico).

(iii) Puede usted generalizar el problema anterior obteniendo una fórmula si el costo es $\$ C$, la reducción es del $i > 0$ (porciento) y la utilidad es del $j > 0$ (porciento).

(Ayuda. se tiene en cuenta, por ejemplo, que $i = 0{,}20$ para un 20%).

2) Inversión en dos empresas. Una persona invirtió un total de $\$ \, 10.000$ en dos empresas A y B. Al final del primer año las empresas A y B produjeron rendimientos del 6% y del 5% respectivamente sobre las inversiones originales.

(i) ¿ Cómo se distribuyó la cantidad original, si el total que se ganó fue de $ 570 ? (Ayuda: plantee una ecuación de primer grado para la cantidad (en pesos) que se invirtió al 6%).

(ii) Qué explicación daría usted si lo que se ganó es de 470 $ o de 610 $?

(iii) ¿ Puede usted generalizar el item (i) para porcentajes de rendimientos i y j para las empresas A y B respectivamente, y ganancia G al final del primer año ? ¿ Qué condición necesaria debe verificar G para que exista solución al problema planteado ?

3) Alquiler de departamentos. Una empresa de bienes raíces es propietaria de un conjunto de 70 departamentos. Se puede alquilar cada departamento a $ 250 por mes, obteniendo, de este modo, una renta total mensual de $\$ 70 \times 250 = \$ 17.500$.

Por otro lado, por cada 10 $ que se aumente al valor del alquiler mensual se tendrán 2 departamentos desocupados sin posibilidad de alquilarlos.

(i) ¿ Cuánto se debe cobrar por el alquiler de cada departamento si la empresa desea obtener una renta mensual de $ 17.980 ?

(Ayuda .– Método 1 : Sea $x > 250$ el valor (en $) del alquiler que se cobrará por cada departamento, entonces:

(a) el número total de departamentos alquilados será de $m = 70 - 2\left(\frac{x-250}{10}\right)$;

(b) x satisface la ecuación $17980 = mx$, es decir la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 600\,x + 89900 = 0\,.$$

Método 2 : Sea n el número de aumentos de \$ 10 por el alquiler de los departamentos. Entonces n satisface la ecuación de segundo grado siguiente

$$17980 = (250 + 10\,n)\,(70 - 2\,n)\,,$$

cuyas soluciones son $n = 4$ y $n = 6$.

Interprete los dos métodos y saque conclusiones).

4) Productos a vender. El costo de mano de obra y materiales de un producto es de \$ 5 por unidad para el fabricante. Además, los costos fijos (los que se tienen en un determinado período independiente de la cantidad que se fabrique) son de \$ 20.000 . Si el precio de venta del producto es \$ 7, se necesita saber cuántos deben venderse para que la Compañía obtenga utilidades.
(Ayuda: deduzca y resuelva una inecuación de primer grado en q (número de productos a venderse) utilizando el hecho que: utilidades = ingresos totales − costos totales > 0).
¿ Puede Ud. generalizar este problema?

5) Ecuación de demanda. Si la demanda semanal de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de \$58 por unidad, y de 200 unidades cuando el precio es de \$51 por unidad, halle la ecuación de demanda (precio p en función de la cantidad q), suponiendo que es lineal.

6) Maximizar ingresos. (i) La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1000 - 2q$, donde p es el precio (en pesos) por unidad cuando existe una demanda semanal q por parte de los consumidores. Se solicita que obtenga el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y que determine, además, dichos ingresos.
(Ayuda : ingresos totales = precio unitario por la cantidad).
(ii) Un fabricante tiene una demanda semanal de 50 unidades de un producto cuando el precio es de \$ 80 por unidad, y de 40 unidades cuando el precio es de \$ 100 por unidad. Suponiendo que la ecuación de demanda ($p = p(q)$) es una recta, halle el nivel de producción que maximiza los ingresos totales y determine, además, dichos ingresos.

7) Punto de equilibrio con ecuaciones lineales. Sea $p = 0{,}08\,q + 50$ la ecuación de oferta para cierto fabricante y se supone que la ecuación de demanda para su producto es $p = -\,0{,}07\,q + 65$.
(i) Determine los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio.
(ii) Si se carga un impuesto de \$1,50 al fabricante, ¿cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?
(iii) Determine, además, los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio después de aplicarse el impuesto.

8) Punto de equilibrio con ecuaciones no lineales. Encuentre el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y de demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$, y, $p = \frac{8.000}{q}$ respectivamente.

9) <u>Compra de sellos postales.</u> Una secretaria debe comprar sellos postales de \$1 y \$2 por un total que no supere los \$100 . Ella desea, además, que el número de los de \$1 sea más de 10 y al menos el doble de los de \$2. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

(<u>Ayuda</u> : Plantee un sistema de desigualdades para las variables x = número de sellos postales de \$1, y = número de sellos postales de \$2).

10) <u>Venta de dos radios.</u> En un negocio se venden radios de dos marcas A y B. Según la demanda de los clientes es necesario almacenar al menos el doble de los aparatos A respecto a los aparatos B y se deben tener a la mano al menos 20 de la marca A y 10 de la marca B. Si no se tiene espacio para más de 100 aparatos en el negocio, encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

11) <u>Dos cuentas de ahorro.</u> Una persona desea invertir \$ 10.000 en dos cuentas de ahorro distintas. Desea tener al menos \$2.000 en cada una y que la cantidad que haya en una sea al menos el triple de lo que haya en la otra. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y realice la representación gráfica correspondiente.

12) <u>Inversión a interés compuesto.</u> (i) Sea una cantidad de dinero C_0 (capital inicial) que se invierte a interés compuesto (al final de cada período los intereses devengados se acumulan al capital inicial y se reinvierten) a un interés simple del i por ciento por un período (por ejemplo: semestral, trimestral, mensual, etc.). Entonces, el capital al final de $n \in \mathbb{N}$ períodos está dado por la fórmula exponencial:

$$C(n) = C_0 \, (1 + i)^n \, .$$

Realice una gráfica en el plano de la sucesión $(C(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) Si se invierten \$10.000 al 12% anual y los intereses se acumulan mensualmente, ¿ determine cuál será el capital después de 1, 3, 6 y 12 meses? Además, ¿cuánto dinero habrá que invertir para tener \$ 15.000 al final del primer año?

13) <u>TRABAJO PRACTICO 1: Descuentos en fotocopias.</u> En un comercio donde se realizan fotocopias, los precios al público están dispuestos según la siguiente tabla:

Precio de cada fotocopia (en centavos)	Número de fotocopias
5.00	1 a 9
4.40	10 a 49
4.30	50 a 99
4.10	100 a 999
4.00	más de 1000 .

(i) Determine la función real (mejor dicho : sucesión real) f definida como el precio del trabajo realizado, en función de la cantidad $n \in \mathbb{N}$ de fotocopias demandadas. Realice, además, una gráfica de la función real hallada, uniendo los puntos del plano mediante segmentos de rectas.

(ii) Analice y saque conclusiones de la siguiente situación real : si usted hace 9 fotocopias entonces el trabajo le costará \$ 0.45 ; en cambio, si realiza 10 fotocopias le costará \$ 0.44, es decir \$ 0.01 menos. ¿Qué haría usted, si fuese el comerciante, para evitar que una persona le haga una o varias copias extras y pague aún menos ?

(iii) Analice y saque conclusiones también para los casos de 49 y 50 fotocopias; 99 y 100 fotocopias, y 999 y 1000 fotocopias.

(iv) Proponga una función real adecuada para los intereses del comerciante y sin perjudicar al cliente, pero beneficiándolo por mayor cantidad al superar 9, 49, 99 y 999 fotocopias.

(v) Encuentre otros hechos de la realidad en los cuales el análisis anterior pueda aplicarse.

14) Costo de un producto. Si un comprador adquiere un determinado producto a \$ P ($P > 0$) y sabe que el comerciante recarga el i % como margen de venta (es lo que se agrega al costo para obtener el precio de venta al público) se desea saber a que valor el comerciante adquirió el producto, en los siguientes casos :

(a) P = \$ 1000 , i = 1% , 5% , 10% ;

(b) P = \$ 1100 , i = 1% , 5% , 10% .

(Ayuda: plantee una ecuación de primer grado tomando como incógnita el valor de compra del producto por parte del comerciante).

15) Cotización de una acción. Una empresa que cotiza en la Bolsa de Comercio tuvo los siguientes valores, por acción, en las fechas indicadas:

Día	Valor de una acción (en \$)
5/2	4,93
11/3	4,05
17/5	4,96

(i) ¿Cuál es el porcentaje de disminución del valor de una acción al pasar del 5/2 al 11/3 ?;

(ii) ¿Cuál es el porcentaje de aumento del valor de la acción al pasar del 11/3 al 17/5 ?;

(iii) Determine que sucedió con el valor de la acción al pasar del 5/2 al 17/5 , y determine, ¿cuál es el porcentaje correspondiente?

16) Descuento en farmacias. Una farmacia atiende a personas afiliadas a una obra social que paga el 50 % del valor de los medicamentos, quedando el resto a cargo del afiliado. Si la farmacia hace un 10 % de descuento extra sobre lo que el cliente paga, ¿Cuál es el porcentaje del valor del medicamento que pagará el afiliado?

17) Pago en efectivo. Una persona paga \$121 con una tarjeta de crédito por la compra de un artefacto. Sabiendo que la tarjeta incluye un 10 % , calcule el precio por pago en efectivo de dicho artefacto.

18) TRABAJO PRACTICO 2: Descuento e IVA. (i) ¿Qué prefiere, que le hagan el descuento del 10% antes o después de pagar el 21% de IVA?

(ii) Sea "a" el porcentaje de IVA, y sea "b" el porcentaje de descuento. Generalice la parte (i).

(iii) Si el vendedor le dice al cliente: "La ley me obliga a cargar el IVA, pero le voy a hacer un descuento del modo que pague lo mismo que si no le cobrara el IVA". ¿Qué tanto por ciento de descuento debería hacerle? Si el IVA fuese del 21 % ó del 16% ¿Cuál sería dicho descuento?

19) TRABAJO PRACTICO 3: Opciones para aumentar los sueldos. El dueño de una empresa propone a sus empleados dos opciones :

(a) Aumentar los sueldos el 5 % ;

(b) Aumentar los sueldos un monto fijo de \$ 100 .

¿A partir de que salario se debe elegir la primera opción?. ¿y la segunda opción?.

20) TRABAJO PRACTICO 4: Alquiler de videos. Un negocio para alquilar videos propone a sus clientes tres posibilidades :

(a) P_1 : \$ 24 de abono anual más \$ 1,5 por cassette alquilado ;

(b) P_2 : \$ 12 de abono anual más \$ 2 por cassette alquilado ;

(c) P_3 : sin abono anual, pero \$ 3 por cassette alquilado.

(i) ¿Cuál es la posibilidad más económica para alquilar, por año, 10 cassettes?, para 20?, para 30? ;

(ii) (a) Exprese para cada posibilidad el precio a pagar en función del número x de cassettes alquilados;

(b) Represente gráficamente estas tres posibilidades de alquiler en un mismo plano cartesiano ;

(c) Un cliente, habiendo elegido la P_1 ha gastado en el año \$ 51. ¿Ha hecho una buena elección? ;

(d) Otro cliente ha gastado \$ 53 en el año. ¿Es esto posible? ; ¿Habrá algún error cometido por el dueño del negocio? ;

(iii) ¿Cuál es la posibilidad más ventajosa para elegir según el número de cassettes alquilados?

21) TRABAJO PRACTICO 5: Abonos de transporte. Una compañía de transporte propone a sus clientes las tres posibilidades siguientes :

(a) P1 : Comprar en cada viaje, un boleto donde el precio es proporcional al kilometraje, a razón de \$ 0,30 por kilómetro ;

(b) P2 : Comprar un abono anual de \$600, que permite viajar durante todo el año a razón de \$ 0,15 por kilómetro ;

(c) P3 : Comprar un abono anual de \$ 1500, que permite recorrer hasta 5000 km ; a partir de los 5000 Km, todo Km suplementario costará \$ 0,10 por kilómetro.

Una persona recorre anualmente "x" Km con esta compañía. Se definen las funciones $f_i : R^+ \to R^+$ $(i = 1, 2, 3)$, correspondiente a la posibilidad Pi, que a "x" asocia el costo en \$ de los viajes anuales de esta persona.

(i) Escriba la ley correspondiente para f_1, f_2 y f_3 ;

(ii) Represéntelas gráficamente en un mismo plano cartesiano ;

(iii) Utilizando sus representaciones gráficas, determine qué posibilidad es la más conveniente si la persona recorrerá 3000 Km por año, 6500 Km por año, 9000 Km por año.

(iv) ¿Cuál es la posibilidad más económica en función del número de kilómetros recorridos en un año?. ¿Cuál es la función que a "x" asocia el gasto mínimo para una persona?.

22) Consumo de electricidad. En 1995, la familia López tuvo un consumo de electricidad promedio por bimestre de \$ 37. En el bimestre enero-febrero sólo pagaron el básico de \$ 18 ya que estuvieron de

vacaciones. En el bimestre julio-agosto gastaron un 10 % más que en los otros cuatro bimestres, en los que el consumo fue el mismo. ¿Cuánto gastaron en el bimestre julio-agosto ? ¿Y en el bimestre setiembre-octubre ?

23) TRABAJO PRACTICO 6: Descuentos en una AFJP. Una AFJP de la Argentina descuenta, de los salarios nominales de sus afiliados, los siguientes importes según la fecha en que se realice el aporte mensual correspondiente:

(Op.1) Hasta diciembre de 1995 descontaba el 2,6 % del sueldo más \$ 5 de cuota fija por mes;

(Op.2) A partir de enero de 1996 descuenta el 2,3 % del sueldo más \$ 8 de cuota fija por mes.

Se solicita responder a las siguientes preguntas:

(i) ¿A partir de que salario conviene la segunda opción? ;

(ii) ¿la segunda opción beneficia a los afiliados si el promedio de los salarios nominales de los afiliados a la AFJP es de \$ 2.000?

24) Trabajo conjunto. (i) Juan puede hacer un trabajo en 5 días y en cambio José puede hacerlo en 3 días. ¿En qué tiempo lo harán trabajando conjuntamente?; (ii) Juan puede hacer un trabajo en 3 días, José en 4 días y Pablo en 6 días. ¿En qué tiempo harán la obra trabajando conjuntamente?

25) TRABAJO PRACTICO 7: Descuentos y ganancias con parámetro. Sea $C \in \mathbb{R}^+$ el costo de una determinada mercadería.

(i) Cuál debe ser el valor de venta para que el comerciante en una futura promoción, con un descuento del 10 % , gane un 20 % sobre el costo ? ;

(ii) Dar el valor de venta para un costo de \$6 y de \$9 ;

(iii) Indicar además, el porcentaje de ganancia cuando no se efectúa la promoción.

(Es un problema real que se plantea como un problema paramétrico).

26) Metro tramposo. Un vendedor de telas gana el 30 % sobre el precio de costo. Pero un día descubre un metro defectuoso que hace aumentar sus beneficios al 33 %. ¿Cuánto mide en realidad el metro tramposo ?

27) Dinero en el banco. (i) Se colocan X pesos en el banco a interés compuesto anual del 5%. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse ese capital?

(ii) Si se coloca dinero en el Banco a interés compuesto y al cabo de 7 años se ha duplicado el capital, ¿A qué interés se lo ha colocado?

28) Pagando los impuestos. En un país se paga, por el impuesto a las ganancias, un tanto por ciento igual a la cantidad de miles de pesos que se gana en el año. Así, si una persona gana \$ 1.000, paga un impuesto del 1% y si gana \$ 25.000, paga el 25% de esa cantidad. ¿Cuál desearía que fuese su sueldo?

29) Activo financiero y valor actual. Si el precio de un activo financiero es superior a su valor actual, ¿qué le conviene hacer al operador?

30) Conveniencia sobre dos activos financieros. En el mercado existen dos activos financieros, A y B. Se sabe que A rinde 100 este año y 200 el año próximo. En cambio, B rinde 50 este año y 300 el año próximo (se supone que el rendimiento se recibe al final del año). Analice que activo será preferido por un operador, en función de la tasa de interés anual i del mercado. Por ejemplo, A será preferido a B si la tasa de interés anual i del mercado (en el segundo año) es:

(a) $i < 50\,\%$; (b) $i = 0$;

(c) $i > 100\,\%$; (d) $i > 10\,\%$;

(e) ninguna de las respuestas precedentes.

31) Tasas equivalentes. (i) ¿ Cuál es la tasa de interés semestral equivalente a una capitalización anual del 12 %?

(ii) ¿ Cuál es la tasa de interés cuatrimestral equivalente a una capitalización anual del 12 %?

(iii) Si un año tiene n períodos, ¿ cuál es la tasa de interés de un período equivalente a una capitalización anual del 12 %?

(iv) Si un año tiene n períodos, ¿ cuál es la tasa de interés de un período equivalente a una capitalización anual del i %?

32) TRABAJO PRACTICO 8: Promociones en un supermercado. El dueño de un supermercado ofrece las siguientes promociones:

(P_1) Los días lunes, para toda compra superior o igual a \$40, se descuenta un importe fijo de \$15.

(P_2) Los días martes se descuenta el 10% sobre el importe de la compra.

Una persona gasta "x" \$ en la compra del supermercado. Se definen las funciones $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i = 1, 2$) correspondiente a la promoción P_i, que a "x" asocia el gasto en \$ de la compra.

(i) Escriba la ley correspondiente para f_1 y f_2.

(ii) Represéntelas gráficamente en un mismo gráfico cartesiano.

(iii) Utilizando sus representaciones gráficas responda que día le conviene ir al supermercado si la persona piensa gastar \$140, \$160 y \$150.

33) <u>TRABAJO PRACTICO 9: Flujo de caja actualizado después del pago de impuestos.</u> ¿Puede una política de amortización de una inversión hacer posible obtener un flujo de caja neto (flujo de caja actualizado después de pagar impuestos) que sea negativo o positivo? Analice el siguiente caso:

(i) Sea un proyecto de inversión con costo inicial \$ 100.000 sin gastos de explotación y sin valor residual que asegura recibir durante 4 años las rentas anuales de \$ 40.000, \$ 50.000, \$ 45.000 y \$ 39.000. Se considera durante todo el período una tasa de interés del 14% anual. Se supone que el impuesto anual a pagar representa el 50% de los beneficios contables del año, es decir después de la deducción de la amortización correspondiente.

Se consideran dos políticas diferentes de amortización:

(I) el amortizamiento es lineal, es decir \$ 25.000 por año;

(II) el amortizamiento es decreciente: \$ 31.000 el primer año, \$ 27.000 el segundo, luego \$ 23.000 y \$ 19.000 respectivamente.

<u>Definiciones</u>. 1) El <u>flujo de caja</u> (o <u>flujo de fondos</u>) de un año es la diferencia entre las entradas y las salidas de dinero durante todo el año. Para un determinado año, el flujo de fondos está dado por:

$$F = R - D - I$$

donde

F:	flujo de fondos ;	R:	renta entrada ;
D:	gastos de exportación ;	I :	inversiones.

2) El <u>flujo de caja actualizado</u> es la suma de los valores actuales de los flujos de caja durante toda la vida del proyecto realizado o a realizar.

<u>Observación</u>. Para comparar adecuadamente las inversiones, es deseable tomar en cuenta los impuestos a pagar por año. Por ende, lo que se busca es de maximizar el flujo de caja actualizado después de pagar los impuestos (llamado *flujo de caja neto*).

Se solicita que calcule el flujo de caja neto.

(ii) Analice el problema anterior si el impuesto a pagar es del 33%.

<u>Ayuda</u>. Realice un cuadro para cada política de amortización en el cual se aprecien las columnas de: Año, Flujo de caja, Amortización, Impuesto, Flujo de caja después de pagar el impuesto, Valor actual de \$1, Flujo de caja neto.

Respuestas Trabajo Práctico Especial

1) (i) $p=42$ (iii) $p=\frac{c(1+j)}{(1-i)}$

2) (i) $a=7.000$ $b=3.000$ (ii) no es posible
(iii) $cj \leq G \leq Ci$ con $i \geq j$

3) (i) $x_1=310$ con $m_1=58$, $x_2=290$ con $m_2=62$

Generalización : si se pretende $mx \geq 17.980$ entonces $x \in (290,310)$
La máxima ganancia (18.000) se obtiene para $x=300$ ($m=60$)

4) $q > 10.000$;

Generalización : $$q > \frac{c_F}{p_V - p_C}$$

donde

c_F: costo fijo ; p_C: precio de compra ; p_V: precio de venta

5) $p=-\frac{7}{100}q+65$; 6) (i) $q=250$, $I(250)=125.000$

7) (i) $I=5.800$ (ii) $p=58{,}7$ (iii) $I=5.283$

8) $p=20$, $q=400$

12) (ii) $C(1)=10.100$; $C(3)=10.303$; $C(6)=10.615{,}2$; $C(12)=11.268{,}3$;

$C_0=13.311{,}679$

14) (a)	990,099	952,38	909,09
(b)	1089,11	1047,62	1000

En general, x viene dado por la siguiente expresión : $x=\frac{P}{1+i}$.

15) (i) 17,85 %, (ii) 22,47 %, (iii) 0,61%; 16) 45 %.

17) \$ 110; 18) (i) Es indistinto.

19) (i) Cuando el sueldo es mayor a \$ 2000.
(ii) Cuando el sueldo es inferior a \$ 2000.

20) (i-ii) $f_1(x)=0{,}30\,x$, $f_2(x)=600+0{,}15\,x$,

$$f_3(x)=\begin{cases} 1500 & \text{si} \quad x \leq 5000 \\ 1500+0{,}10\,(x-5000) & \text{si} \quad x \geq 5000 \end{cases}$$

(iii) Si recorre 3000 km por año conviene la posibilidad P_1 ;
Si recorre 6500 km por año conviene la posibilidad P_2 ;
Si recorre 9000 km por año conviene la posibilidad P_3 .
(iv) Hasta 4000 km conviene la posibilidad P_1 ; de 4000 a 8000 km conviene P_2 y a partir de 8000 km conviene P_3 .

23) (i) \$ 1.000 ; (ii) Si, en general, la segunda opción beneficia a los afiliados.

25) $\frac{4}{3}$ C

BIBLIOGRAFÍA

- [AA] A. ALVAREZ ALVAREZ, "Uso de la calculadora en el aula", Narcea – MEC, Madrid (1995).
- [AR] J.A. ARGUELLES RODRIGUEZ, "Matemática recreativa y otros juegos de ingenio", Akal, Madrid (1994).
- [AB] J.L. ANTON BOZAL et al., "Taller de matemáticas" Narcea – MEC, Madrid (1994).
- [BePiSa] M.E. BECKER – N. PIETROCOLA – C. SANCHEZ, "Notas de combinatoria", Red Olímpica, Buenos Aires (1996).
- [Fa] E. FAVRO, "Mathématiques financieres et calcul d'optimisation", Dunod, Paris (1991).
- [Ga] A. GARDINER, "Discovering Mathematics. The art of investigation", Oxford Univ. Press, Oxford (1998).
- [Ha] E.F. HAEUSSLER – R.S. PAUL, "Matemática para administración y economía", Grupo Editorial Iberoamericano, México (1992).
- [Gu] M. DE GUZMAN, "Para pensar mejor", Pirámide, Madrid (1995)
- [Kr] S.G. KRANTZ, "Techniques of problem solving", American Math. Soc., Providence (1997).
- [Po] G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas", Trillas, México (1994).
- [Sa] L.A. SANTALÓ, "Matemática. Iniciación a la creatividad", Vol. 1 (1993), 2 (1993) y 3 (1995), Kapelusz, Buenos Aires.
- [So] D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).
- [Ta1] D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", Parte I (23 páginas), Parte II (15 páginas), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1995).
- [Ta2] D.A. TARZIA, "Curso de nivelación en Matemática", McGraw-Hill, Santiago de Chile, Por aparecer.

<u>Revistas</u>:

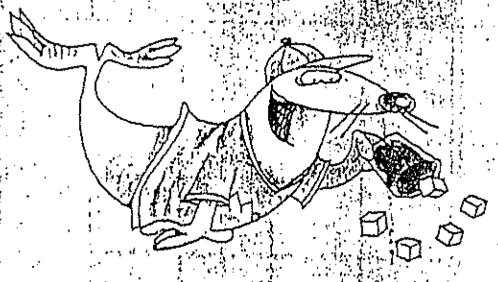
- "Laberintos", Ediciones de Mente, Buenos Aires (1996).
- "Batalla Naval", Ediciones de Mente, Buenos Aires (1992/1993).
- "Cruzadas", Zugarto Ediciones, Madrid.
- "Enigmas de oro", Ediciones de Mente, Buenos Aires.
- "Enigmas. Juegos de lógica", Ediciones de Mente, Buenos Aires.
- "Jeux de logique", Keesing France, Levallois-Perret.
- "La Nación", Diario La Nación, Buenos Aires.
- "Les placés de sport cerébral", Keesing France, Levallois-Perret.
- "Nombres fleches", Keesing France, Levallois-Perret.
- "Nombres placés", Keesing France, Levallois-Perret.
- "Viva" y "Juegos de verano", Diario Clarín, Buenos Aires.

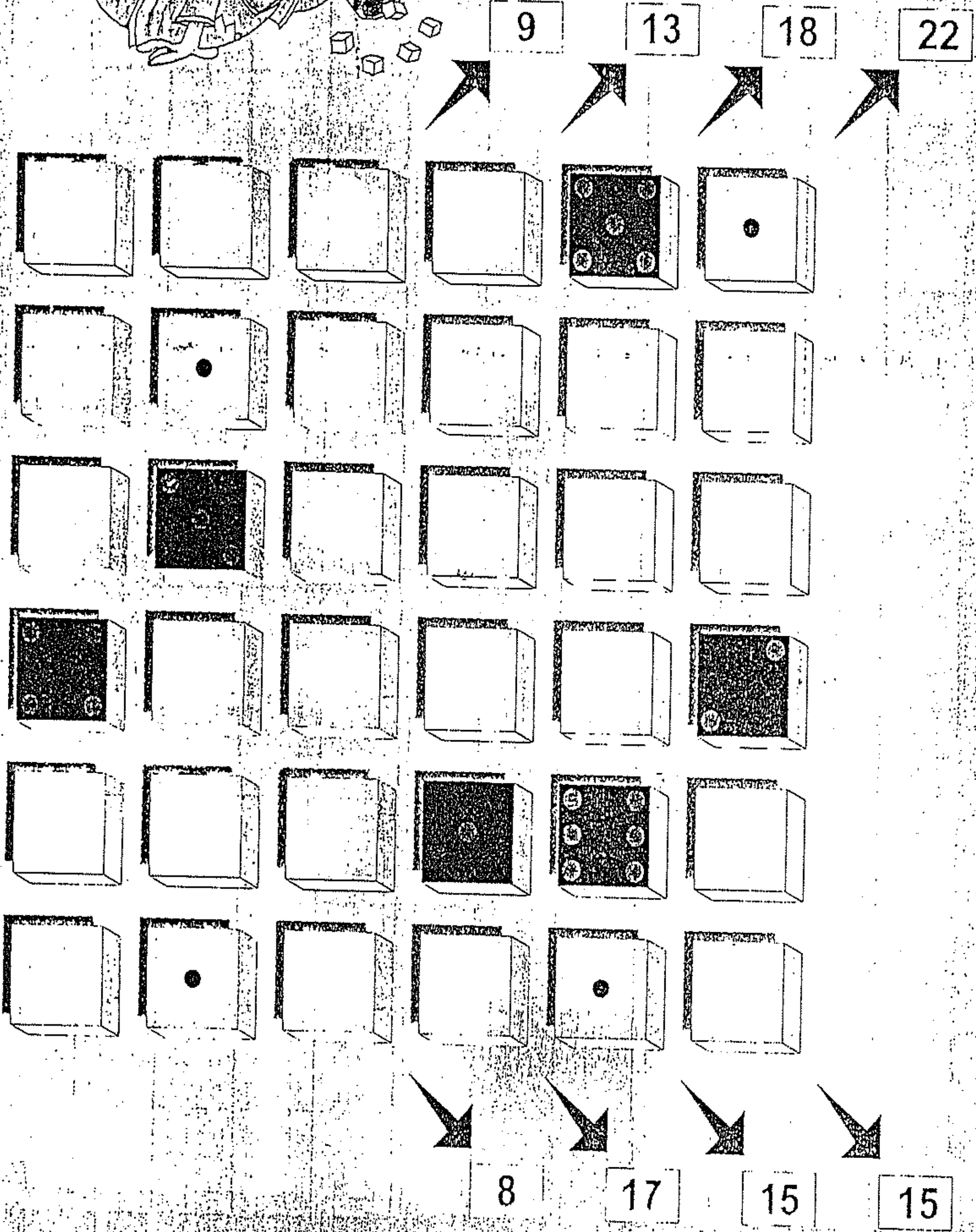
COMPLEMENTO SOBRE LOGICA

Y JUEGOS MATEMATICOS

TODOS LOS DADOS

Este cuadro fue realizado con 36 dados. Cada línea o columna contiene los dados del 1 al 6 sin repetir ninguno, o sea que siempre suman 21, y presentan siempre el mismo dibujo para la misma cantidad de puntos (el que le mostramos al pie de estas líneas).
Las caras coloreadas en azul son definitivas. Si hay caras que muestran un solo punto en el centro y no están coloreadas de azul, indican que allí sólo puede aparecer un as, un tres o un cinco.
Finalmente, le mostramos cuál es la suma de puntos que aparece en las distintas diagonales, con tres, cuatro, cinco o seis dados, de uno y otro lado.
Con todos estos datos, usted puede descubrir qué dado hay en cada lugar exactamente.

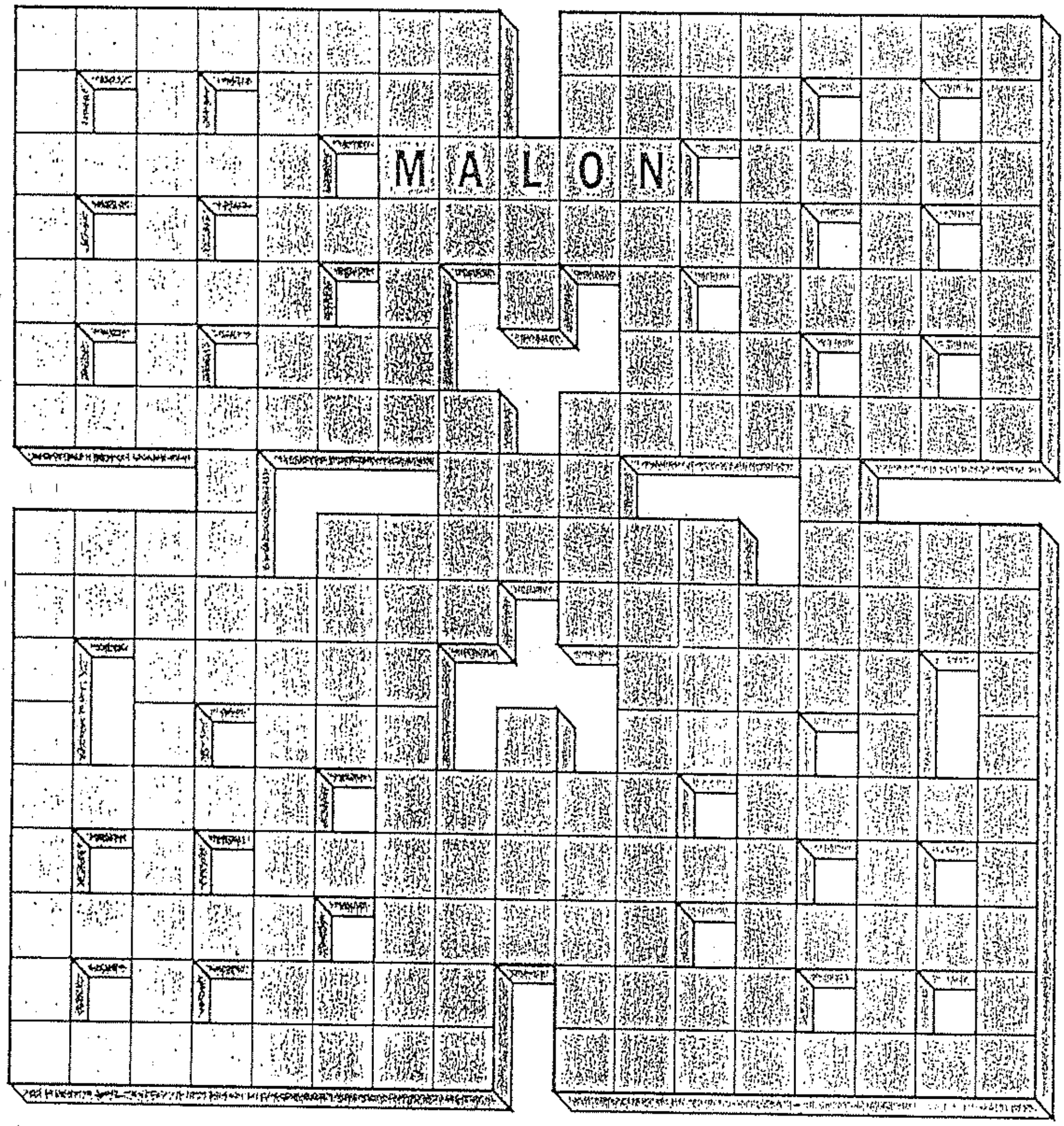




70

ACOMODO

Inserte en el diagrama todas las palabras que listamos al pie, separadas por cantidad de letras y ordenadas alfabéticamente. Hay un "MALON" de ayuda, por lo que cuídese de las flechas...



DE 2 LETRAS

AM - AN - AR - BA - EL - OC - OD - TA - TU.

DE 3 LETRAS

ATA - DAR - LID - OBI - OSE - RED.

DE 4 LETRAS

ABAD - ACAB - ACAL - ADEN - AÑOS - BARI - BETA - DRIL - ENOC - NIDO - ODER - OLAF - RIAS.

DE 5 LETRAS

ARABE - BEBEN - COMEN - DEDAL - ERROR - EVADE - ~~MALON~~ - MAMAN - MAZDA - NIDAL - NORTE - ORINA - RARAS - RISCO - RODAR - SOLON - TORDO.

DE 7 LETRAS

AVENIDA - COBARDE - MACERAD - MANERAS - RAMADAN - REBASAR - SINTOMA - TAMIZAR - VINAGRE.

DE 8 LETRAS

ALEMANAS - AMENACEN - AMOLARAN - DELETREA - DONOSURA - ENASTARA - EVOCARAS - LEÑADORA - MAREMOTO - RESONASE.

DE 9 LETRAS

ASEVERABA - BALANCEAR - DESOLASEN - EDIFICARA - IONIZARIA - REMEDARAS - SARRACENA - VENIDERAS.

71

72

MONTAÑAS DE CRUZADAS 14

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

8 Letras
Insomnio
Profecía
Simiente
Tropelía
Soltura

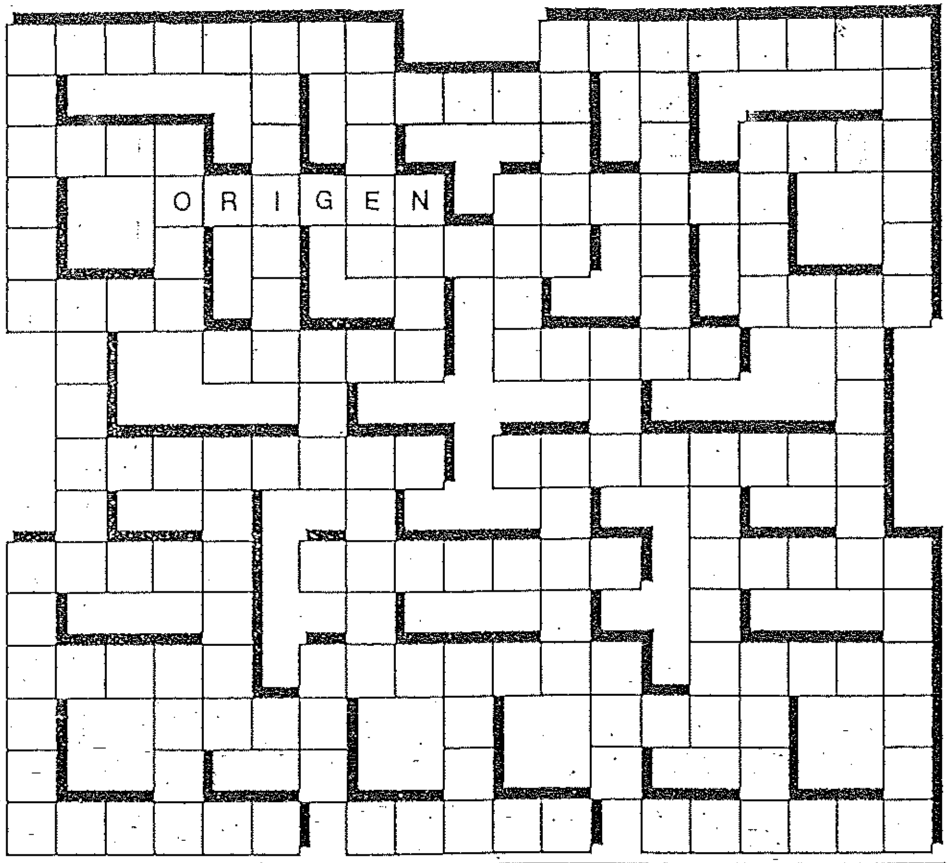
7 Letras
Apósito
Bromuro
Nazismo

6 Letras
Borrón
Brecha
Estaño
Estilo
Lector
Nómina
Obleas
Origen
Platea
Pueblo
Rareza
Siervo

5 Letras
Brete
Envés
Gesta
Impar
Ingle
Lagar
Nipón
Retal
Retor
Sobre
Sorna
Tumor
Zagal

4 Letras
Allí
Arte
Edén
Eses
Icor
Loma
Mies
Nomo
Nota
Olmo
Paté
Piel
Prez

3 Letras
Bar
Geo
Oír
Rol



MONTAÑAS DE CRUZADAS 15

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

9 Letras
Alimentos

7 Letras
Detalle
Montaje
Oración

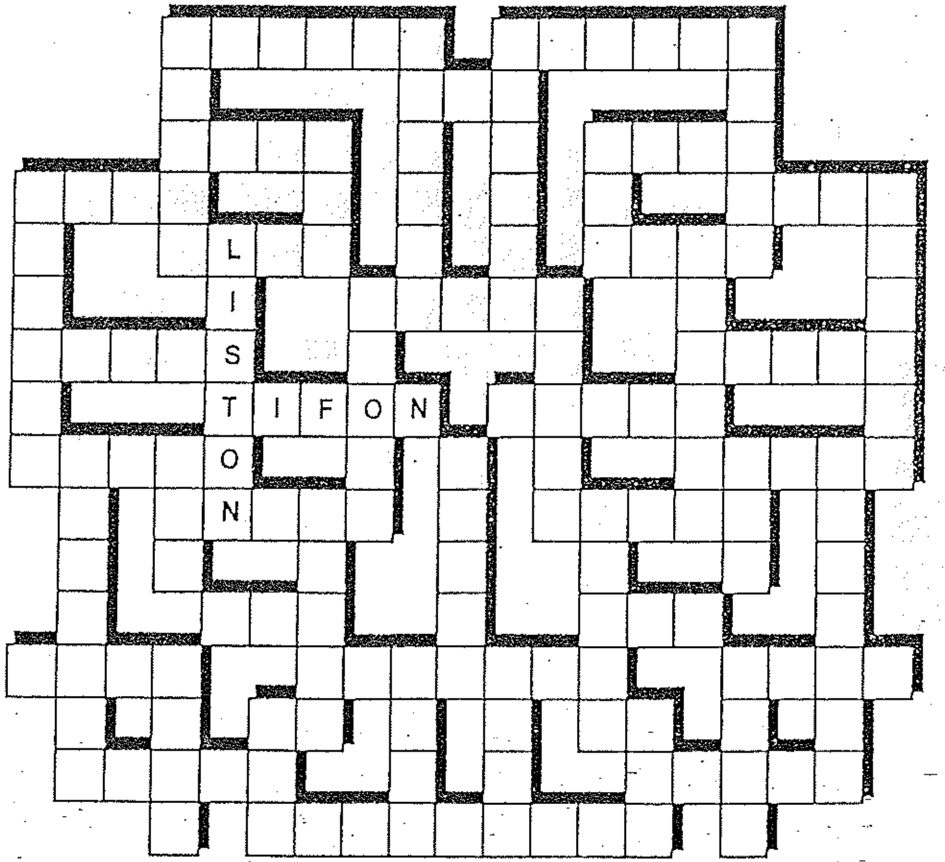
6 Letras
Aceite
Avance
Baladí
Bistec
Colega
Listón
Madeja
Mesías

5 Letras
Abuso
Alelí
Amigo
Anade
Bueno
Carie
Cielo
Entre
Envés
Equis
Orate
Rumor
Salón
Selva
Tesis
Tifón
Trote
Vivac

4 Letras
Alim
Baúl
Bote
Celo
Clan
Ello
Imán
Lava
Liga
Maní
Rape
Simo

3 Letras
Asa
Bus
Cia
Epi
Evo
Gen
Nos
Sam
Sos

2 Letras
Ar
Os



73

MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

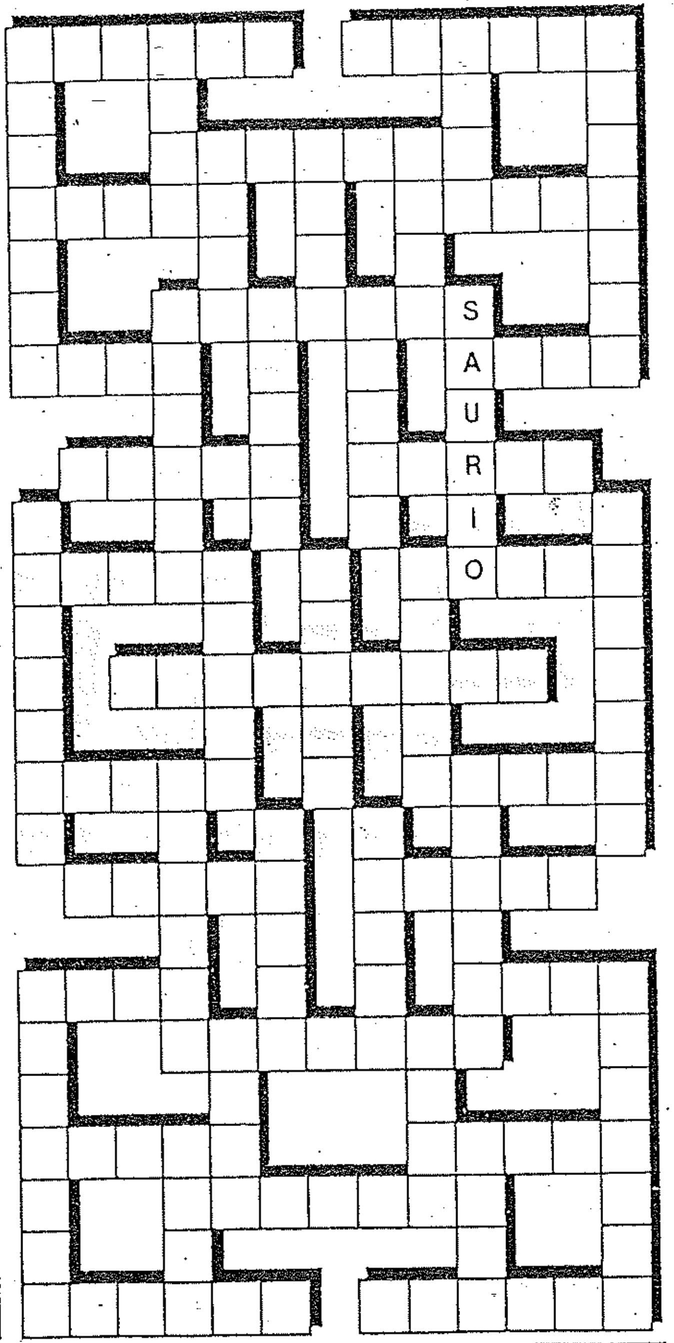
9 Letras
Trampolín

7 Letras
Amistad
Bonanza
Epopeya
Establo
Lotería
Lozanía
Noventa
Pesetas
Pletina
Sanidad

6 Letras
Agrado
Ceniza
Empeño
Germen
Jornal
Pintor
Rienda
Saurio

5 Letras
Abaco
Abecé
Alero
Anejo
Ardid
Arpia
Borde
Carie
Elite
Feliz
Folio
Fösil
Garra
Litro
Mitra
Orden
Señor
Taiga
Talón

4 Letras
Adán
Alta
Buda
Dial
Eter
Inca
Isla
Onda
Orbi
Paté
Pote
Real
Yema



MONTAÑAS DE CRUZADAS

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

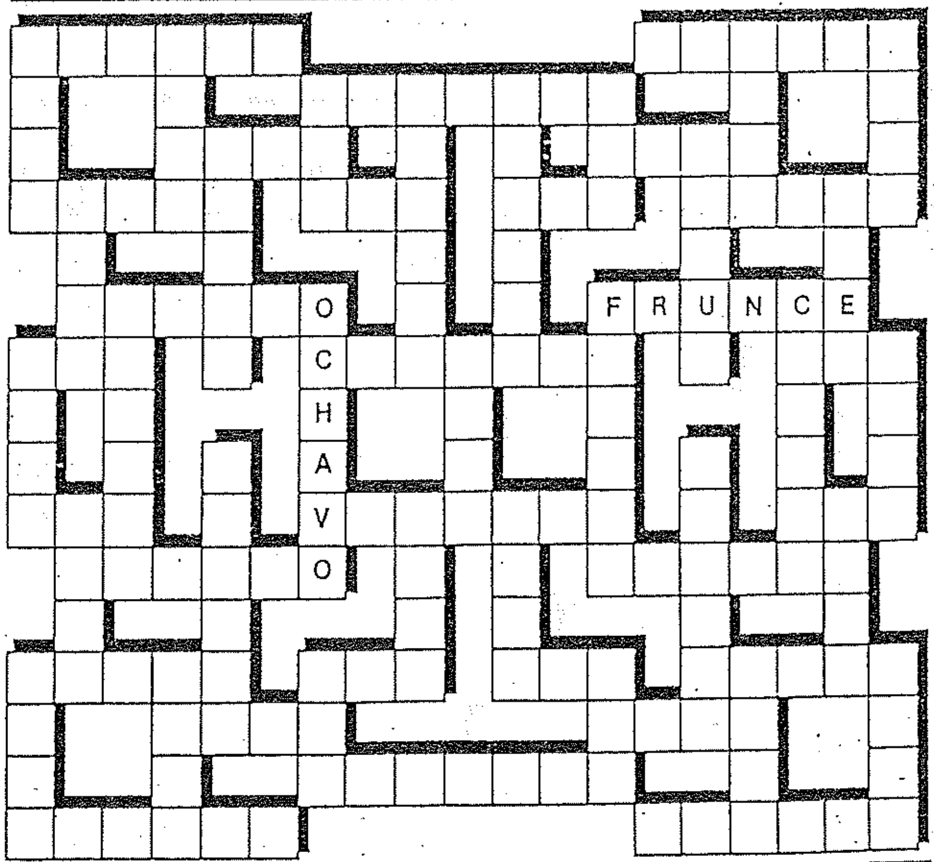
7 Letras
Arcabuz
Chavala
Fomento
Vicario

6 Letras
Camada
Crisis
Estilo
Factor
Fiebre
Frunce
Jornal
Muesca
Novata
Ochavo
Pamela
Remate
Remesa
Salero
Sandía
Trineo

5 Letras
Ajuar
Album
Ardid
Calor
Labio
Tizón

4 Letras
Amén
Asta
Auto
Crio
Chic
Idea
Indi
Irán
Jaén
Jota
Maná
Nasa
Nomo
Otra
Raso
Rico
Saga
Sarí
Test
Unir
Veta

3 Letras
Eta
Evo
Fin
Ira
Noé
Oíl
Olp
Paz
Rai
Ras
Una
Vil



74

MONTAÑAS DE CRUZADAS 18

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

9 Letras
Armamento

7 Letras
Invicta
Ligamen
Vegetal

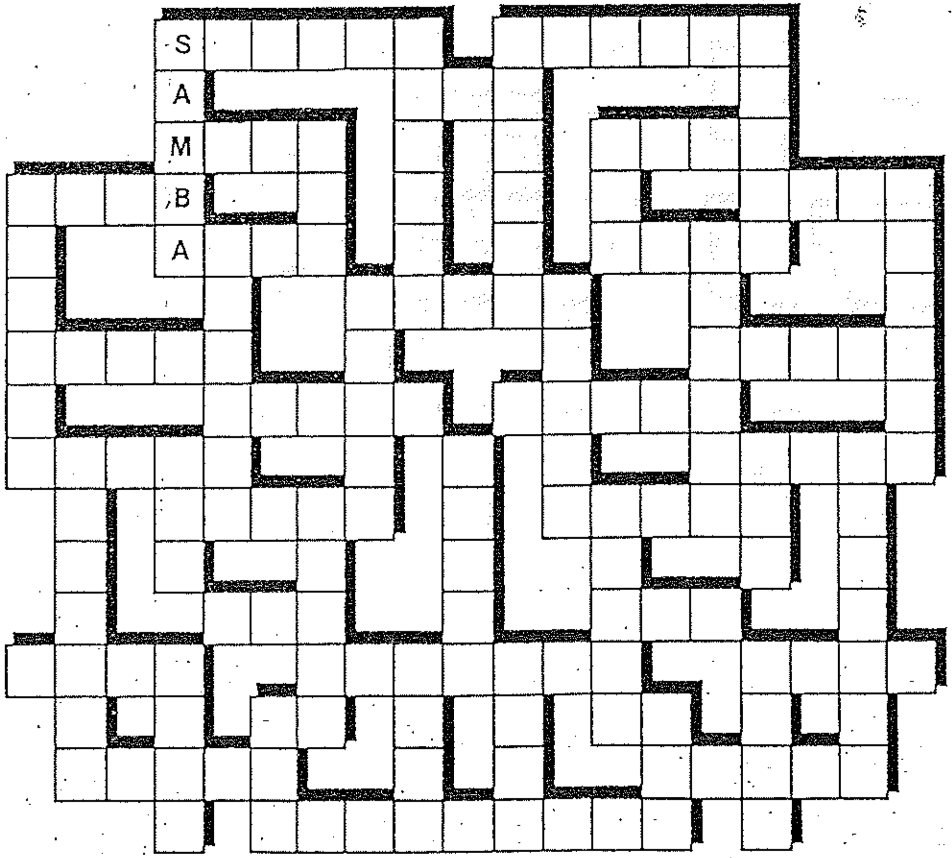
6 Letras
Calima
Masaje
Miopía
Morral
Nocivo
Osario
Sermón
Toisón

5 Letras
Abasi
Alelí
Arena
Ileso
Impar
Lista
Nadir
Oliva
Olivo
Pilas
Primo
Ramal
Rodeo
Rumor
Samba
Sedal
Tahur
Urdir

4 Letras
Amor
Beta
Boda
Cate
Club
Imán
Mico
Nodo
Opus
Seta
Tipo
Visa

3 Letras
Era
Las
Ltd
Mis
Oca
Oms
Oír
Oso
Red

2 Letras
Er
Lo



MONTAÑAS DE CRUZADAS 19

Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

9 Letras
Entresijo
Falladora

7 Letras
Armazón

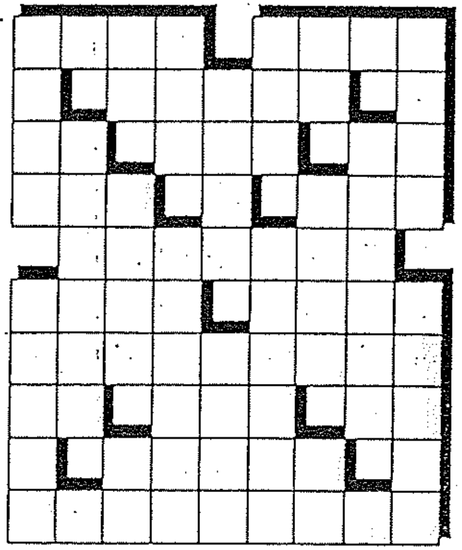
6 Letras
Canora
Italas
Mollar
Zudras

5 Letras
Caras
Ofoue
Ovina
Saldo

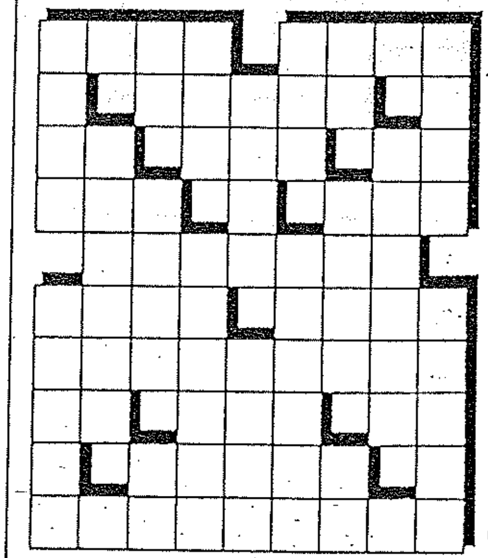
4 Letras
Aare
Adán
Arel
Deca
Dote
Inca
Mono
Niel
Oleo
Unos

3 Letras
Ana
Ave
Ena
Eta
Lar
Mal

2 Letras
Al
Ce
Co
Ct
Da
Os
Si
Ti



MONTAÑAS DE CRUZADAS 20



Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

9 Letras
Ortología
Santurrón

7 Letras
Irlanda

6 Letras
Anadón
Irisar
Lutero
Norato

5 Letras
Estro
Ojalá
Onaya
Orate

4 Letras
Acta
Adir
Aloe
Ella
Esaú
Faba
Faro
Oído
Orán
Ural

3 Letras
Ají
Alo
Ana
Era
Ico
Oro

2 Letras
Al
Bo
Eg
La
Na
Ot
Ri
Tr

Coloque en el diagrama los siguientes dígitos:

9 Dígitos
745608123
965817003

7 Dígitos
1212378
2725452
3601790
3624343
4586791
5986709
6129123
7355378
8283761
9901280

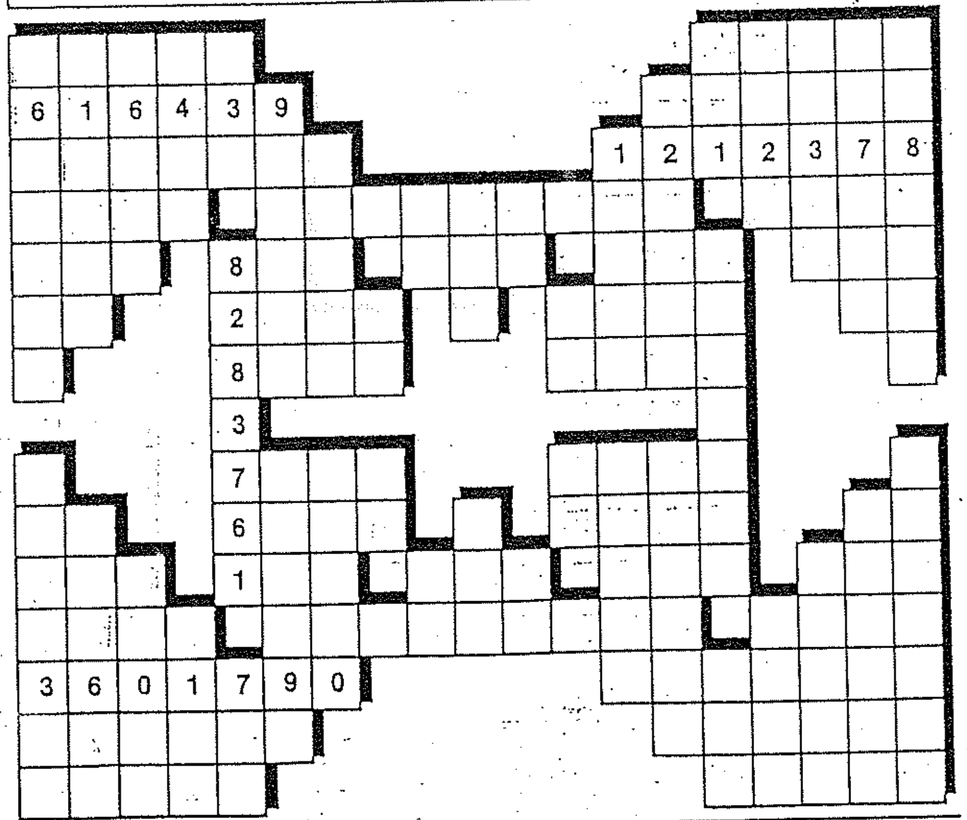
6 Dígitos
138904
179358
213791
289634
307581
417902
523456
545609
616439
735221
887502
959210

5 Dígitos
10987
12643
24756
26789
32740
34536
42635
46924
56281
66344
77055
84543

4 Dígitos
1456
1859
2185
2521
3453
3760
4412
4983
5678
5976
6124
6127
7236
7489
7672
8090

3 Dígitos
123
124
137
232
296
301
441
487
587
634
723
827
881
890
949
990

2 Dígitos
10
11
13
26
32
42
45
50
67
68
73
81



75

Coloque en el diagrama los siguientes dígitos:

9 Dígitos
391024176
676510095
917112430

7 Dígitos
1607451
2307419
3776577
4619289
5691162
5918467
6314599
7927644
7987658
8213172
9687162
9857011

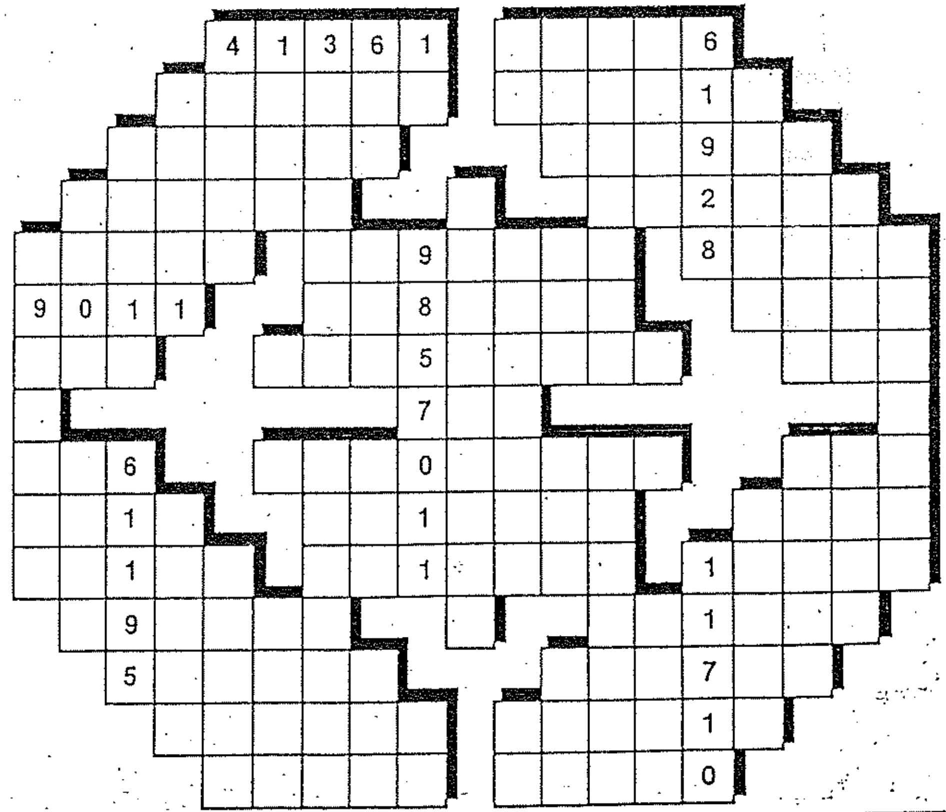
6 Dígitos
100971
266718
312992
352136
491277
505615
673662
721959
867708
914517
922414
958713

5 Dígitos
11710
15717
18719
21430
21612
32575
33758
41361
45016
51726
57236
61195
61928
72193
77456
79106
81652
88907
89419
90221

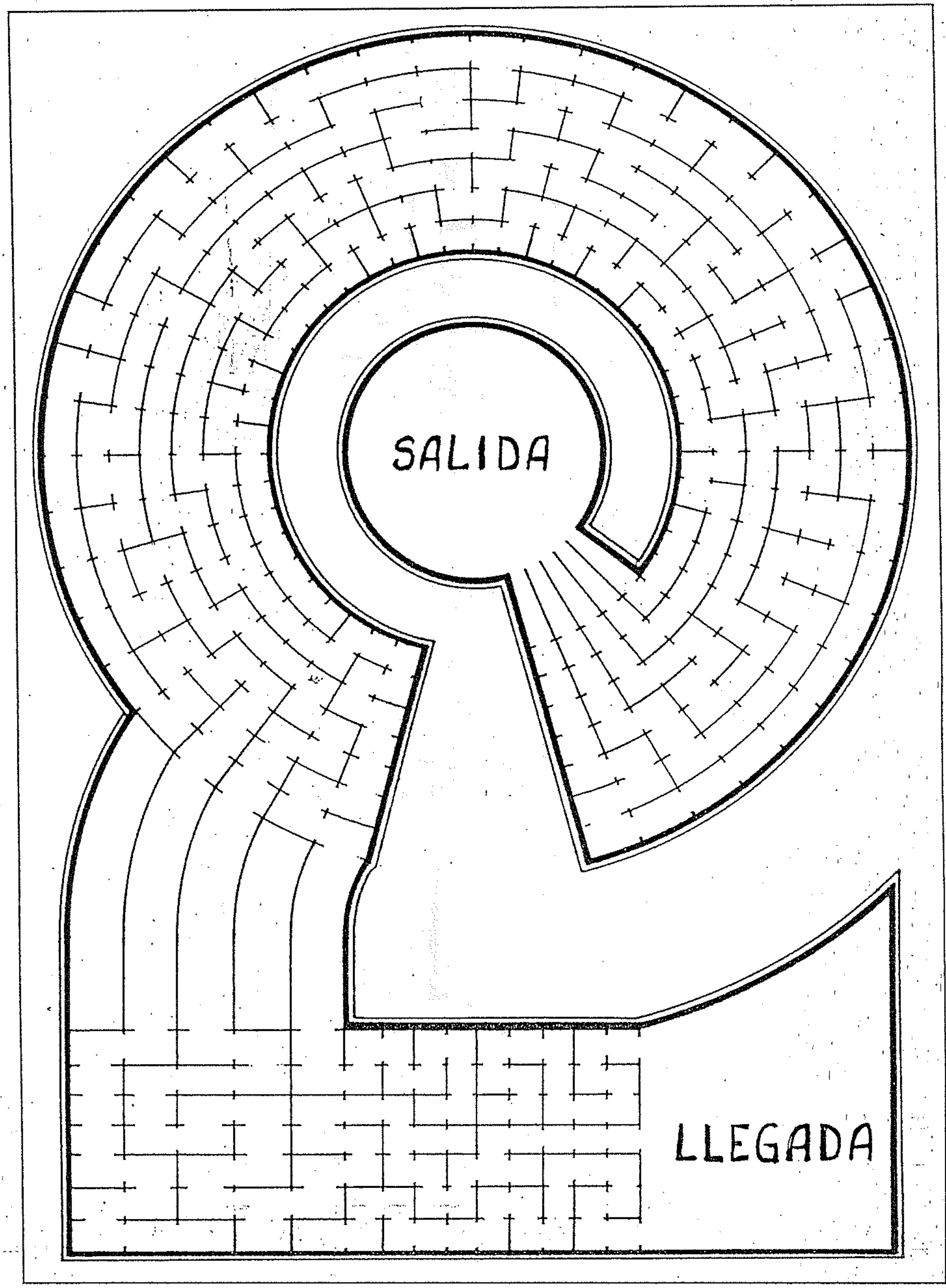
4 Dígitos
1893
2753
3102
4572
5219
5722
6717
7637
7724
8321
9011
9173

3 Dígitos
127
132
197
220
354
476
563
611
650
696
717
763
811

2 Dígitos
13
26
72
92



LABERINTO



4

AMEN
ANET
ANNA
ARES
BREL
DITO
EDEN
IGOR
LIEU
LOTI
LUTH
ONDE
ORAN
RARE
REPU
RISE
RUER
SOIE
TANT
TIEN
TUNE
UNAU
VAUD

5

ANIME
AVARE
GRANT
HETRE
ORSEC
REVER
TABAC
TETER

6

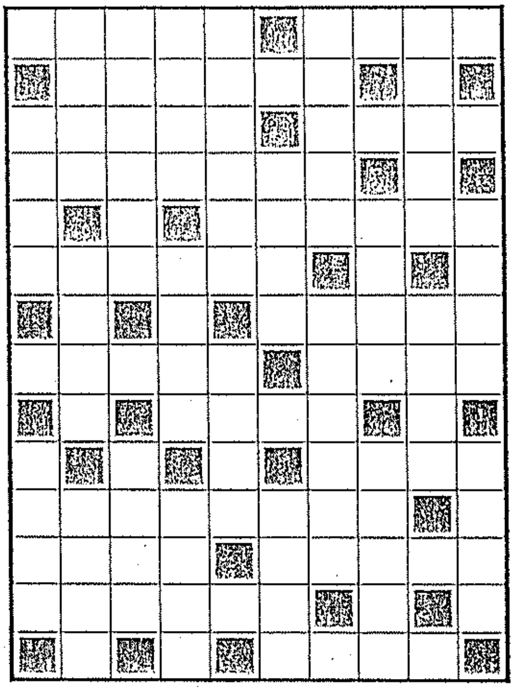
BETAIL
CHRONO
ETUVER
MENHIR
NUCLEE
TALBOT
UDERZO

7

ANATOLE

8

NOUREIEV



4

AMAS
AVAL
BAHT
DARD
ERNE
EVRY
FANE
GREC
INCA
IRUN
JANE
KENT
MOAB
NAZE
NERF
PEZE
RIOM
ROSI
SLOW
SMOG
SPOT
TRUC
TSAR

5

BASTA
BUTOR
DRAIN
ENJEU
MECHE
MICRO
RANCI
SALUT

6

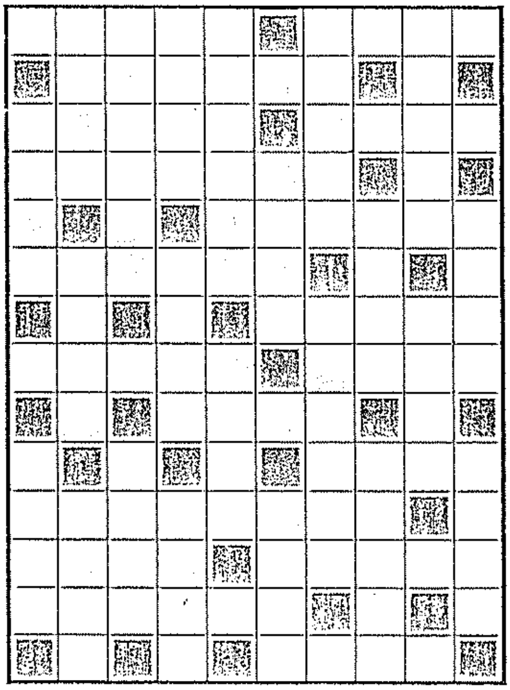
ATTIFE
FAUTIF
REBATI
SALANT
THERMO
TITRER
VARTAN

7

PLACIDE

8

EBENISTE



4

AGIO
AZUR
BELE
CAFE
CEDE
DAIM
ELBE
EMEU
EPAR
FADE
HELA
HEUR
INDE
INDU
INFO
INNE
LAOS
LOTI
LOUP
MALI
OGRE
PAPA
PERI
RETS
SMOG
SOIR
TARA
UNIR
UPAS
UVAL
VOEU
ZOOM

5

AGLAE
BENIN
CELUI
CHERE
COUIC
CREPU
EBENE
FERME
FERRE
FUGUE
HAREM
HEROS
LAIDE
MOIRA
NIVAL
NOUER
OISIF
SYMPA
TOMEE

6

ADAGIO
AGENDA
AMALFI
AMERRI
AVERTI
CERISE
CHELEM
CREVEE
DACIER
GLOTTE
HUBERT
IVETTE
MACULA
MENTHE
MENTOR
POINTU
RALANT
REPORT
REUSSI
SUCOIR
TANREC
TOREER
TUNNEL

7

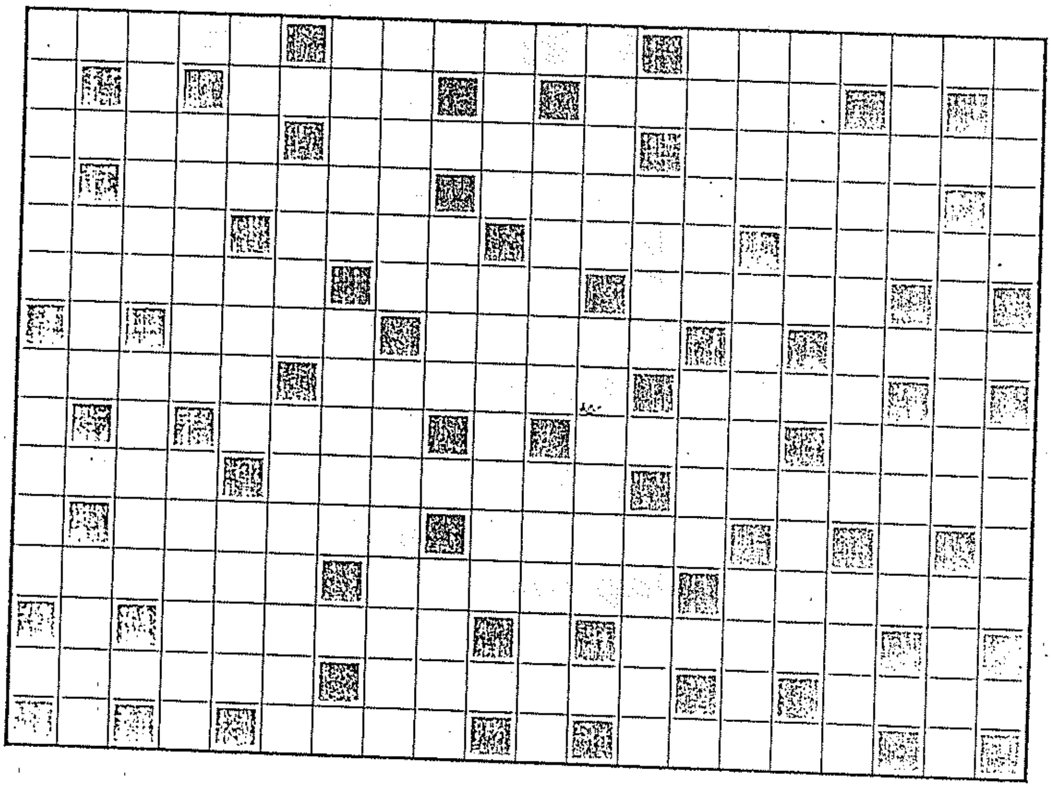
ALLEGRO
ANIMALE
CHARNUE
DETACHE
ELAGUEE
NABUCCO

8

GUENILLE
LIBRAIRE

9

SUREVALUE



4

AGEE
ALFA
APIC
APTE
AVEC
CASE
ECRU
GUAI
HAIE
IGOR
ISSU
LIME
MISE
NAOS
NINA
NOCE
OHIO
OVEE
RANG
RECU
RIEN
ROSI
RUGI
TRIE
URNE
VTOL

5

AGLAE
AIRER
ALOES
APURE
AUTEL
ELTON
HALER
LENDL
MAMAN
NAPPA
NUAGE
OBTUS
ODEUR
PACHA
PLACE
SEPIA
TROUE

6

AILIER
ALINEA
AMEDEE
ANKARA
ARMANT
AUTRUI
BERNEE
CANTAL
CHRONO
ECLOSE
ECUEIL
ESSAIM
GRAPPA
IGUANE
ITALIE
LACANT
NIABLE
OMNIUM
PEDALO
POLICE
REITRE
RENARD
RENVOI
RONALD
SETTER
SIMILI
SNOBEE
TOISER

7

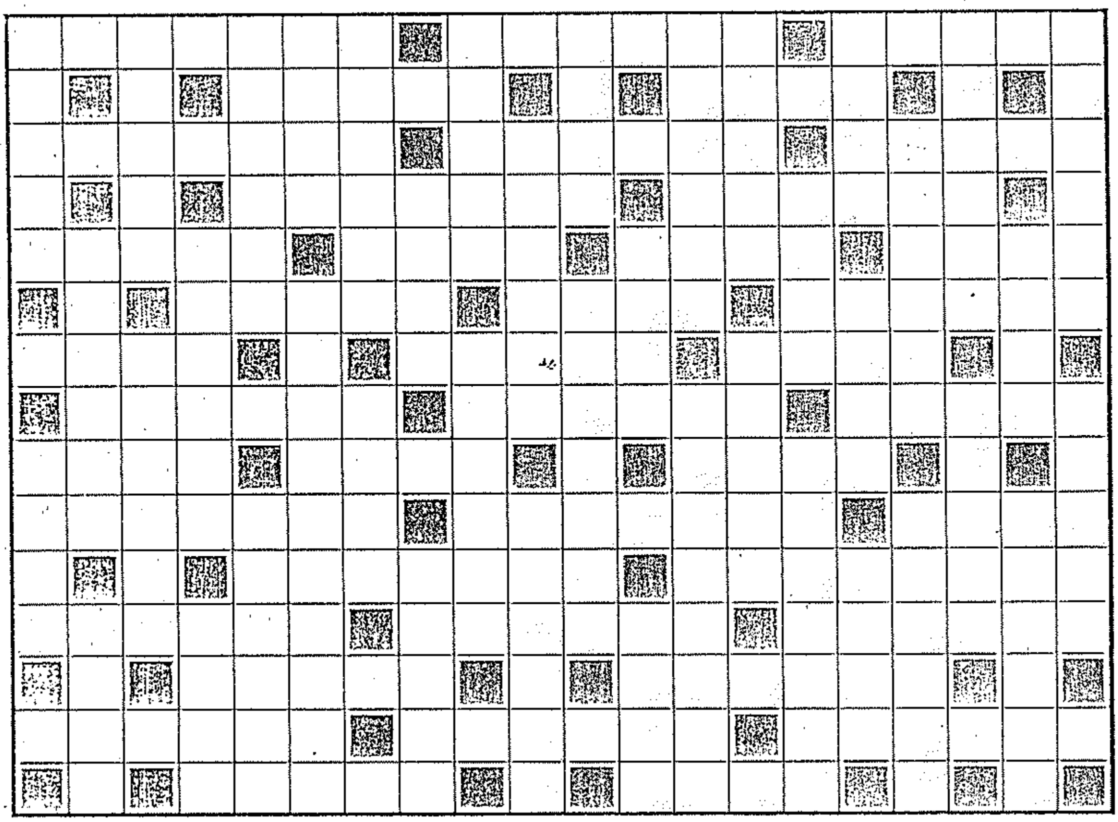
ANTIGUA
CALIBRE
NIAGARA
NUANCEE
OCEANIE
PATERNE
PATRICK
TELETEL

8

ENGRENER
RELACHER

10

MELANCOLIE



4

ABER
AGEE
ALBE
ALEA
ALLE
ALMA
ANET
AUTO
BEAT
DELA
EMEU
ETAT
FIAT
KIVU
LALA
LENA
LIEU
LUNE
MATH
OLAV
RAIE
SALI
SEUL
STAR
TURF
VETO

5

AGACE
ALAMO
ALLEU
ASTER
CASSE
ECUME
KAFKA
KOALA
MATCH
MIAMI
ROCHA
SAULE
SISSI
SLANG
START
THETA
TIMON
TRACE

6

ALASKA
ALESEE
ANHELE
ATHENA
BRANDO
CACTUS
CARUSO
CASTRO
CHASSE
CHEVAL
CLAPIR
DEPERI
LEONIN
MOBILE
PESETA
PETREL
PHRASE
RETORS
SHERPA
SIRENE
SMALAH
SURNOM
SURVOL
TASSEE

7

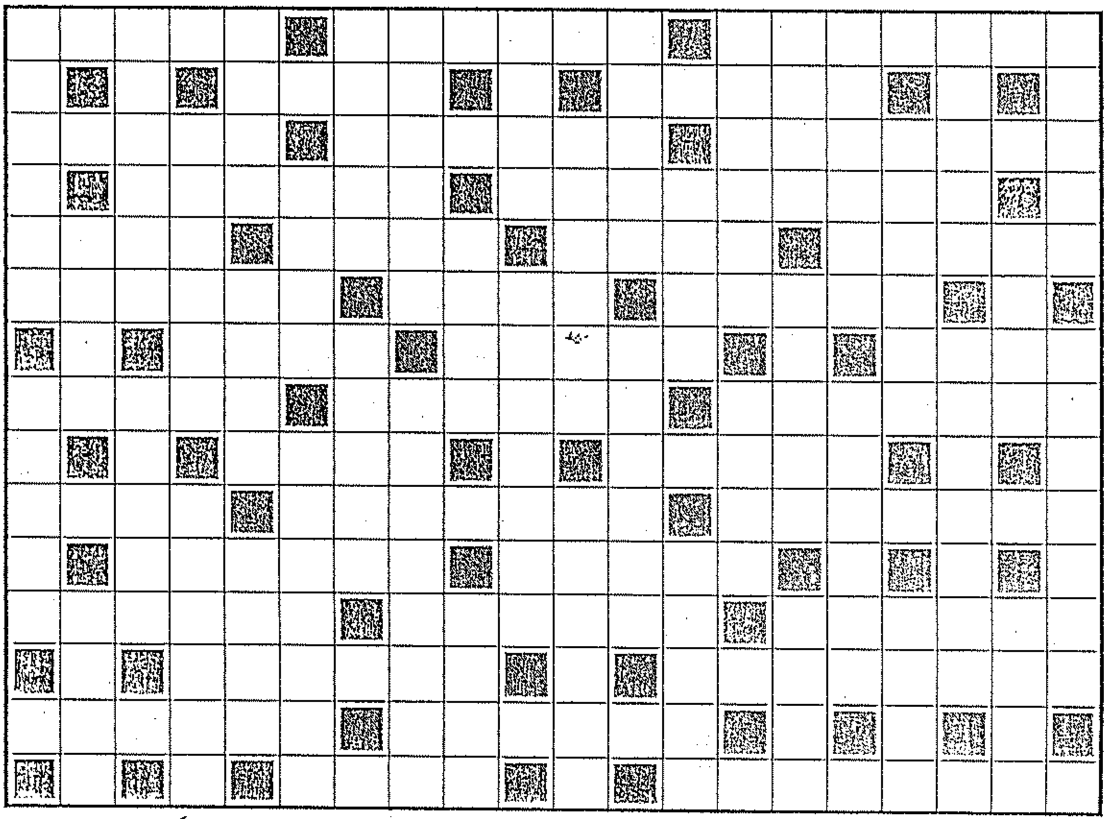
ARTABAN
BALLAST
DECLARE
ESTEREL
EVEREST
LIBERIA
PARBLEU
SAMOVAR
SENSASS

8

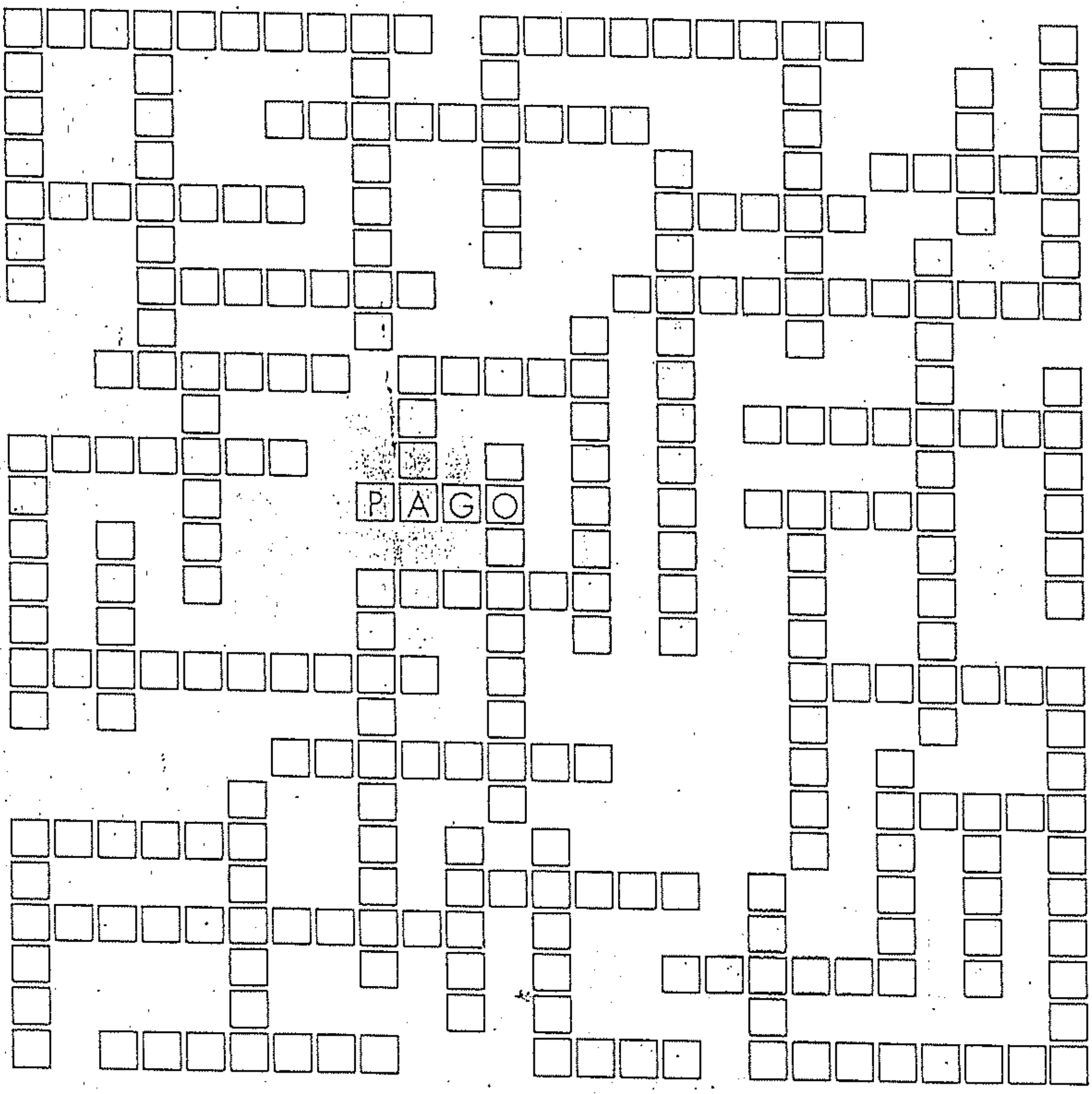
ARGENTIN
GUETTEUR
MONOPOLE

9

FERMETURE



LA CONTABILIDAD



4 letras

Aval
Caja
Debe
~~Pago~~

5 letras

Abono
Banco
Cargo
Cobro
Coste
Gasto
Haber
Mayor
Saldo

6 letras

Activo
Apunte
Cambio
Cierre
Cuenta
Débito
Diario
Margen
Nómina
Pasivo
Socios

7 letras

Balance
Capital
Compras
Crédito
Efectos
Factura
Ingreso
Morosos
Pérdida

8 letras

Clientes
Comisión
Deudores
Impuesto
Registro
Reservas

9 letras

Beneficio
Comitente
Dividendo
Ejercicio
Impagados

10 letras

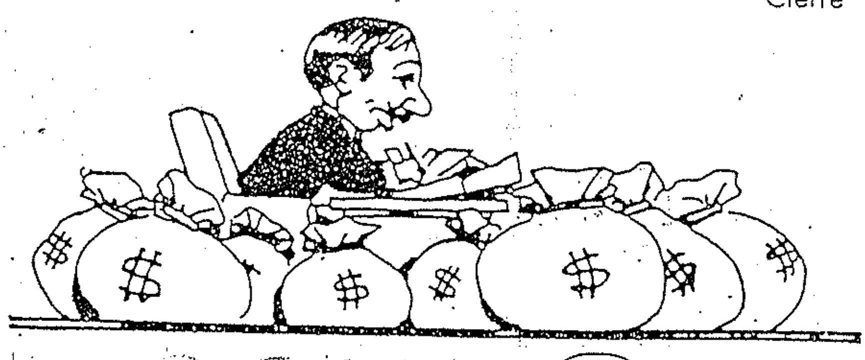
Accionista
Acreedores
Inventario
Patrimonio

11 letras

Mercaderías
Proveedores

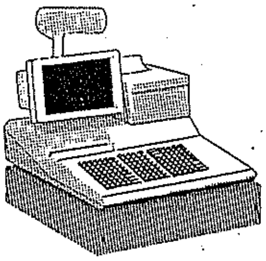
12 letras

Amortización
Comisionista

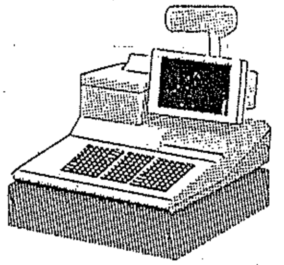


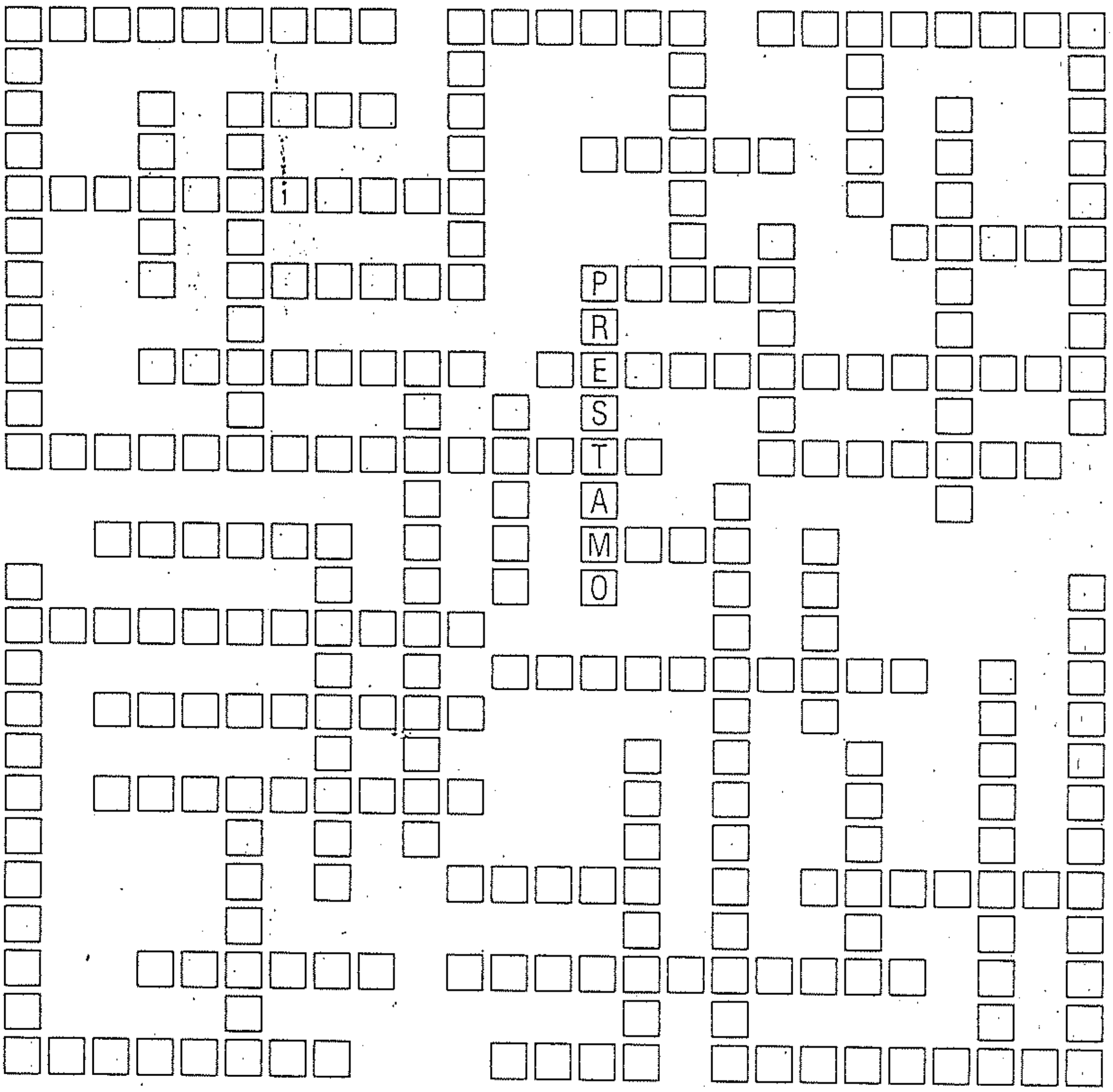
81

4



Comercio





4 Aval
Mora
Puja

5 Banco
Carta
Cupón
Glose
Plaza
Renta
Tanto
Vendí

6 Agente
Boleta
Cédula
Factor
Oferta
Pliego

7 Agencia
Balanza
Carpeta
Pérdida
Reventa

8 Agiotage
Factoría
Hipoteca
Memorial
~~Préstamo~~

9 Al contado
Dividendo
Marchante
Numulario
Principal
Solvencia

10 Aceptación
Exportador
Negociador
Subalterno

11 Adquisición
Dependiente
Exportación
Negociación

12 Comisionista
Contracambio
Letra abierta

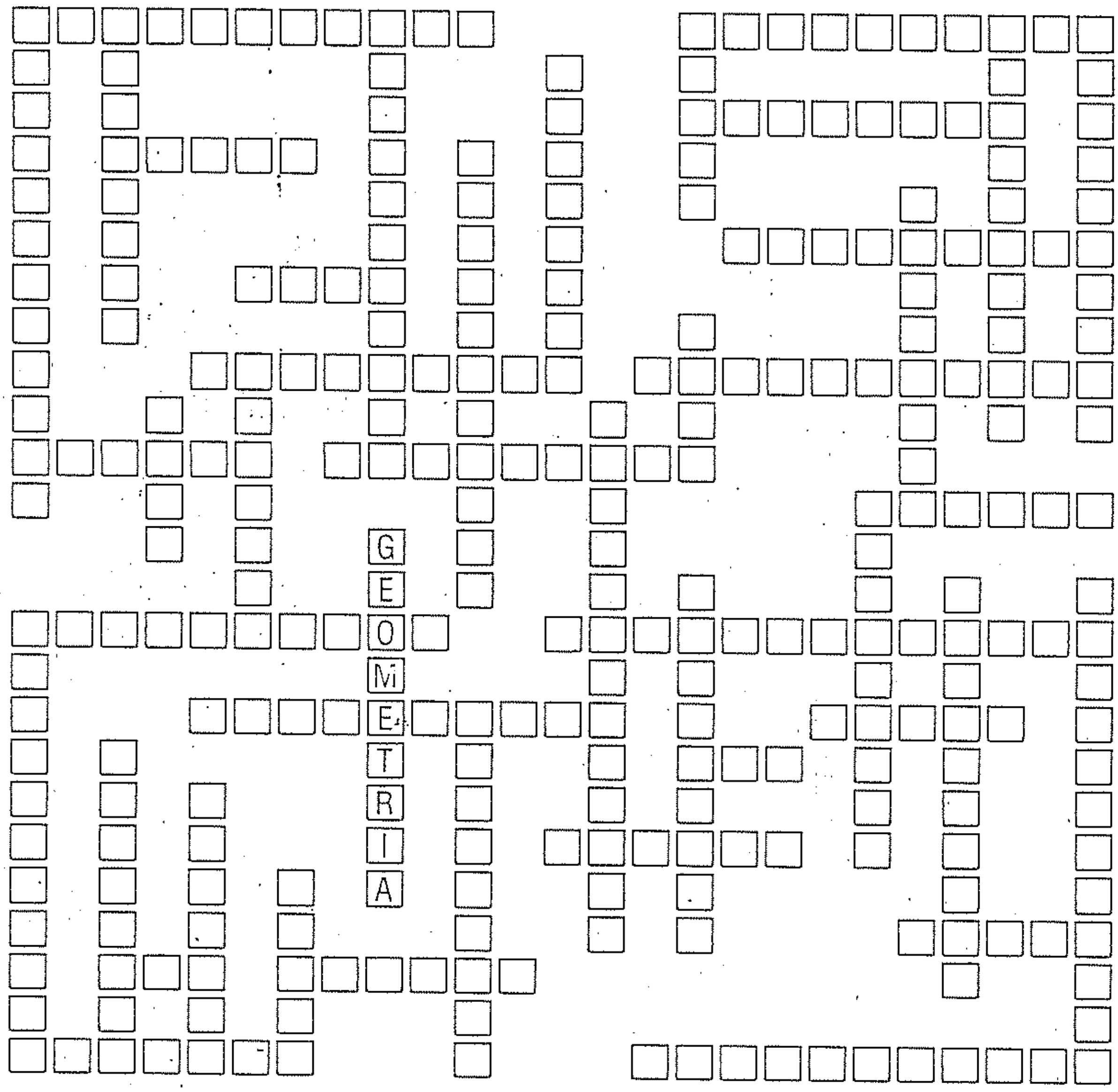
13 Levantamiento

14 Capitalización

15 Establecimiento

30

Matemáticas...



3 Eje
Tri
4 Cono
Huso
Suma
5 Curva
Igual
Nonio
Radio

5 Sordo
6 Ángulo
Cordal
Sagita
Unidad
7 Apotema
Función
Ordinal
8 Cuaterno

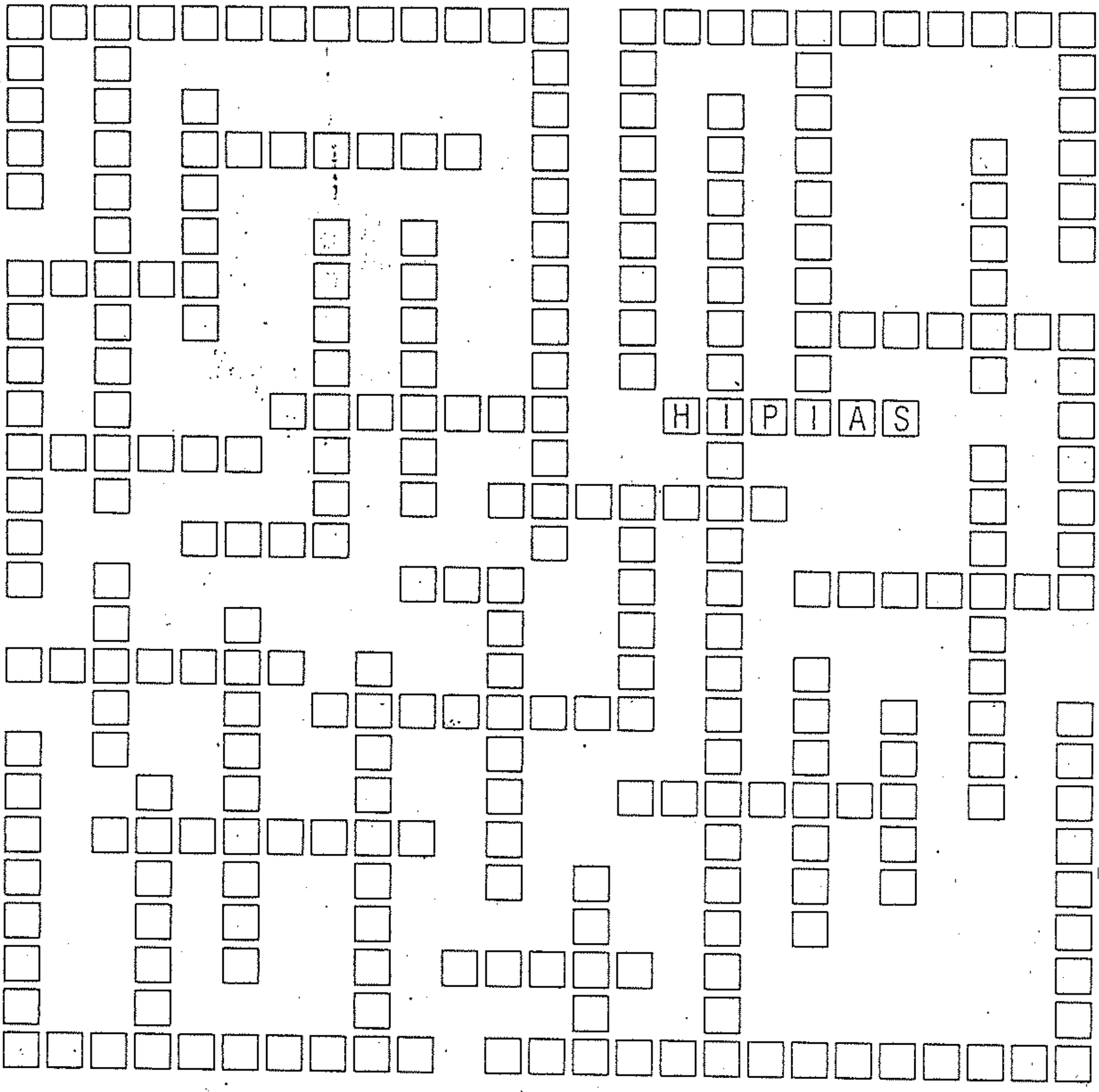
8 Facultad
Inscrito
Pirámide
Rodadura
9 Cardioide
Cosecante
Enunciado
~~Geometría~~
Inflexión

9 Postulado
Resultado
10 Asimétrico
Cuadrático
Desviación
Ecuatorial
Oscilación
Superficie
11 Agrimensura

11 Congruencia
Discontinuo
Integración
Prismatoide
Trescientos
12 Combinatoria
Proporcional
13 Paralelogramo
Veintiseiseno

31

...y matemáticos



3 Lie
4 Papo
5 Apell
Borel
Hooke
Nonio
Theon
Wolff
6 Bachet
Fermat
~~Hipias~~

6 Moivre
Proclo
Staudt
7 Alhacen
Cremona
Dositeo
Fourier
Gerbert
Hilbert
Lambert
Menecmo

7 Plucker
Russell
Tolomeo
8 Antifono
Backluno
Clairaut
Einstein
Lebesgue
Mercator
9 Arya Batha
Descartes

9 Kronecker
Peuerbach
10 Beldomandi
Tartaoglia
Torricelli
11 Aristoxenos
12 Caratheodory
13 Alberto Durero
Nicolás de Cusa
14 Adelardo de Bath
23 Mohamed Ibn Musa Abu Djefar

TÉRMINOS ESTADÍSTICOS

4 letras

Tasa

5 letras

Censo
Error
Media
Razón
Tabla

6 letras

Ajuste
Escala
Índice
Puntos
Sondeo

7 letras

Gráfico
Mediana
Muestra

8 letras

Análisis
Curtosis
Diagrama
Encuesta
Muestreo
Promedio
Varianza

9 letras

Asimetría
Atributos
Intervalo
Población
Recorrido
Regresión
~~Tendencia~~
Variables

10 letras

Coordenada
Decremento
Dispersión
Histograma
Inferencia
Puntuación
Tabulación

11 letras

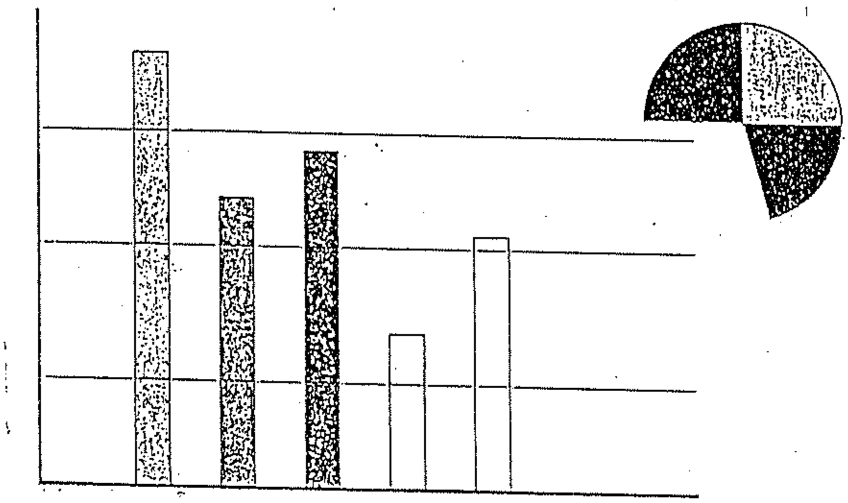
Covariación
Ponderación

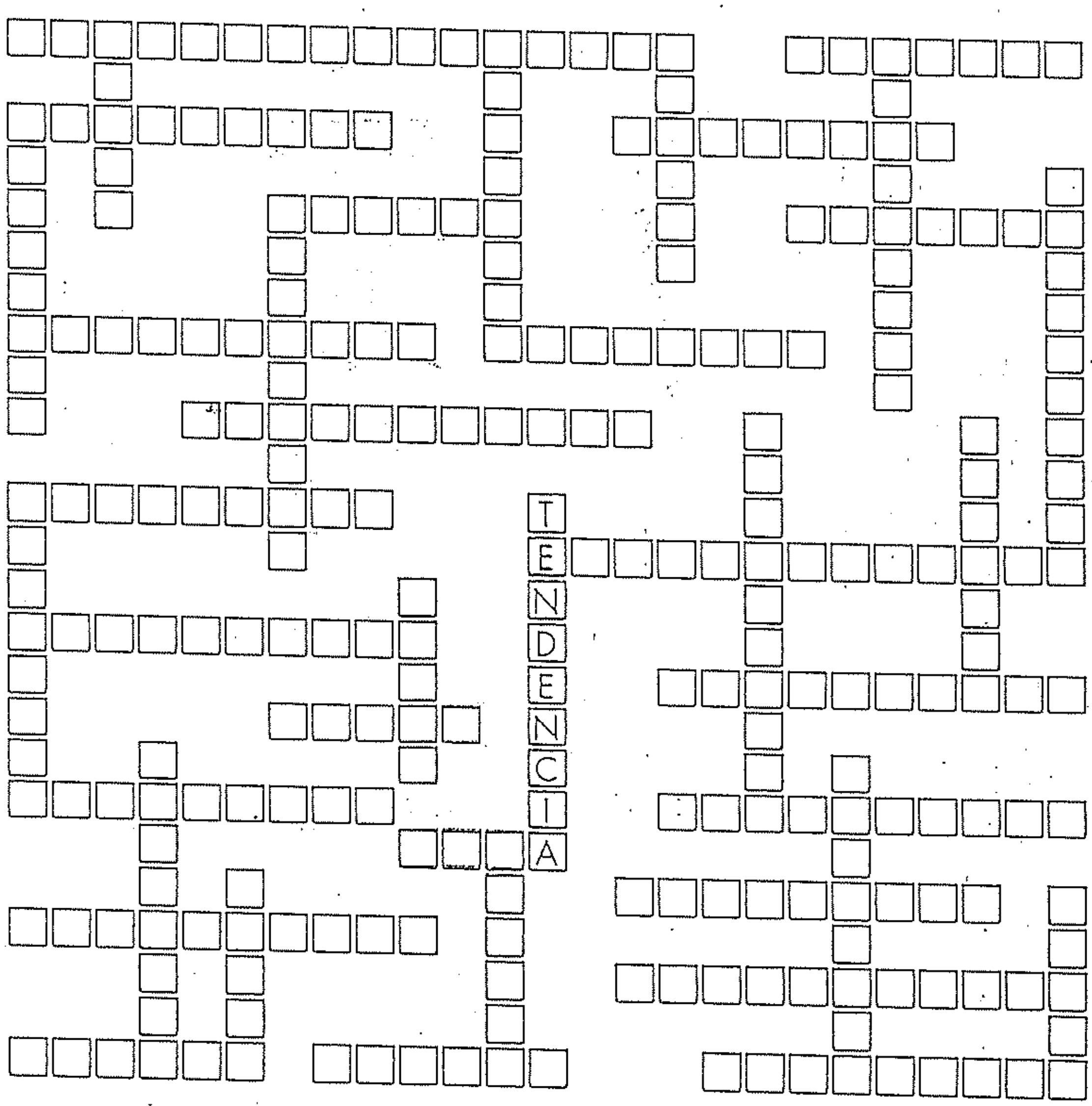
13 letras

Extrapolación

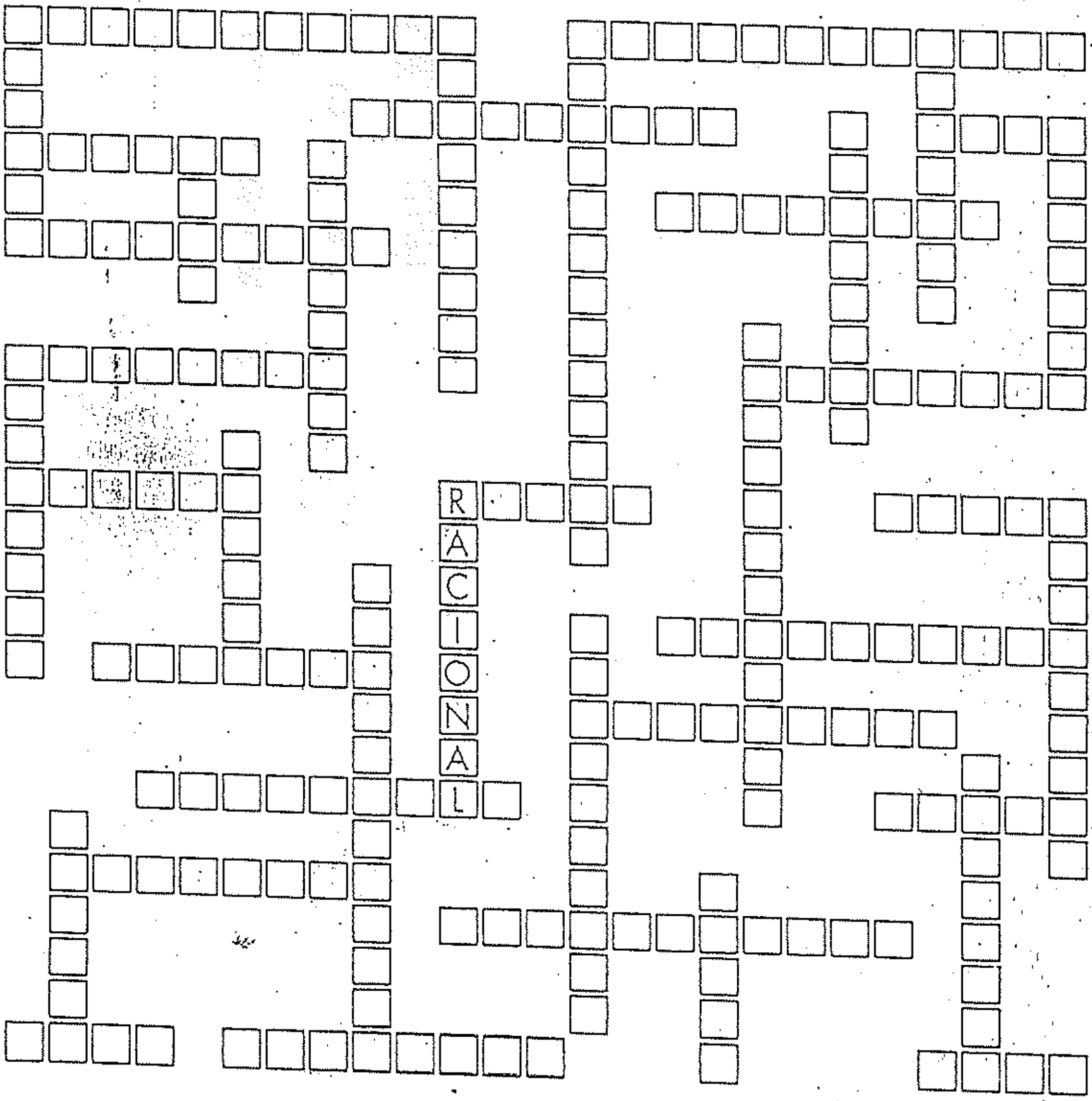
16 letras

Interdependencia





CÁLCULO



4 letras

Raíz
Real
Seno
Suma

5 letras

Grado
Razón
Resta
Valor

6 letras

Coseno
Entero
Límite
Módulo
Número

7 letras

Abscisa
Álgebra
Monomio

8 letras

Integral
Minuendo
Ordenada
Parábola
Potencia
Problema
Producto
~~Racional~~
Tangente
Trinomio

9 letras

Exponente
Expresión
Hipérbola
Logaritmo
Numerador
Operación

10 letras

Cotangente
Multinomio

11 letras

Coeficiente
Permutación

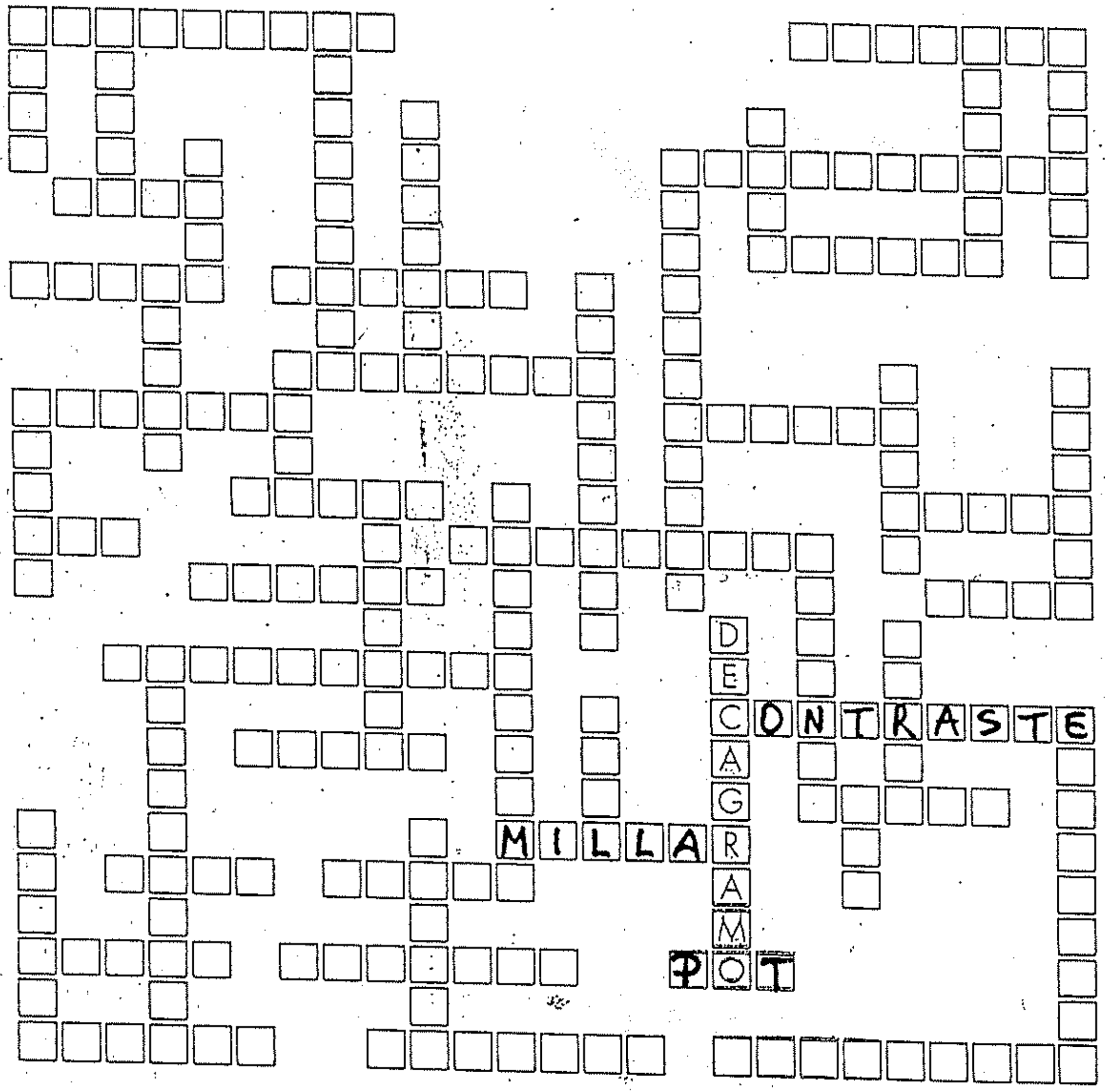
12 letras

Combinatoria
Determinante
Probabilidad

13 letras

Discriminante

PESOS



3 letras
Bes
Mas
Pot

4 letras
Cate
Fajo
Kilo
Nelo
Onza
Pico
Tael
Tara

5 letras
Áureo
Brulo
Cahíz
Carga
Gramo
Grano
Libra
Marco
Óbolo
Quilo
Salma
Tomín

6 letras
Adarme
Alcoba
Arrate
Arroba
Carobo
Dinero
Docena
Dracma
Millar
Ochava
Támara

7 letras
Arienzo
Arrelde
Coclear
Condrín
Destara
Quilate
Silicua

8 letras
Tonelada

9 letras
Contraste
Cuarterón
Cuartilla
~~Decagramo~~
Decigramo
Escrúpulo
Kilogramo
Miligramo

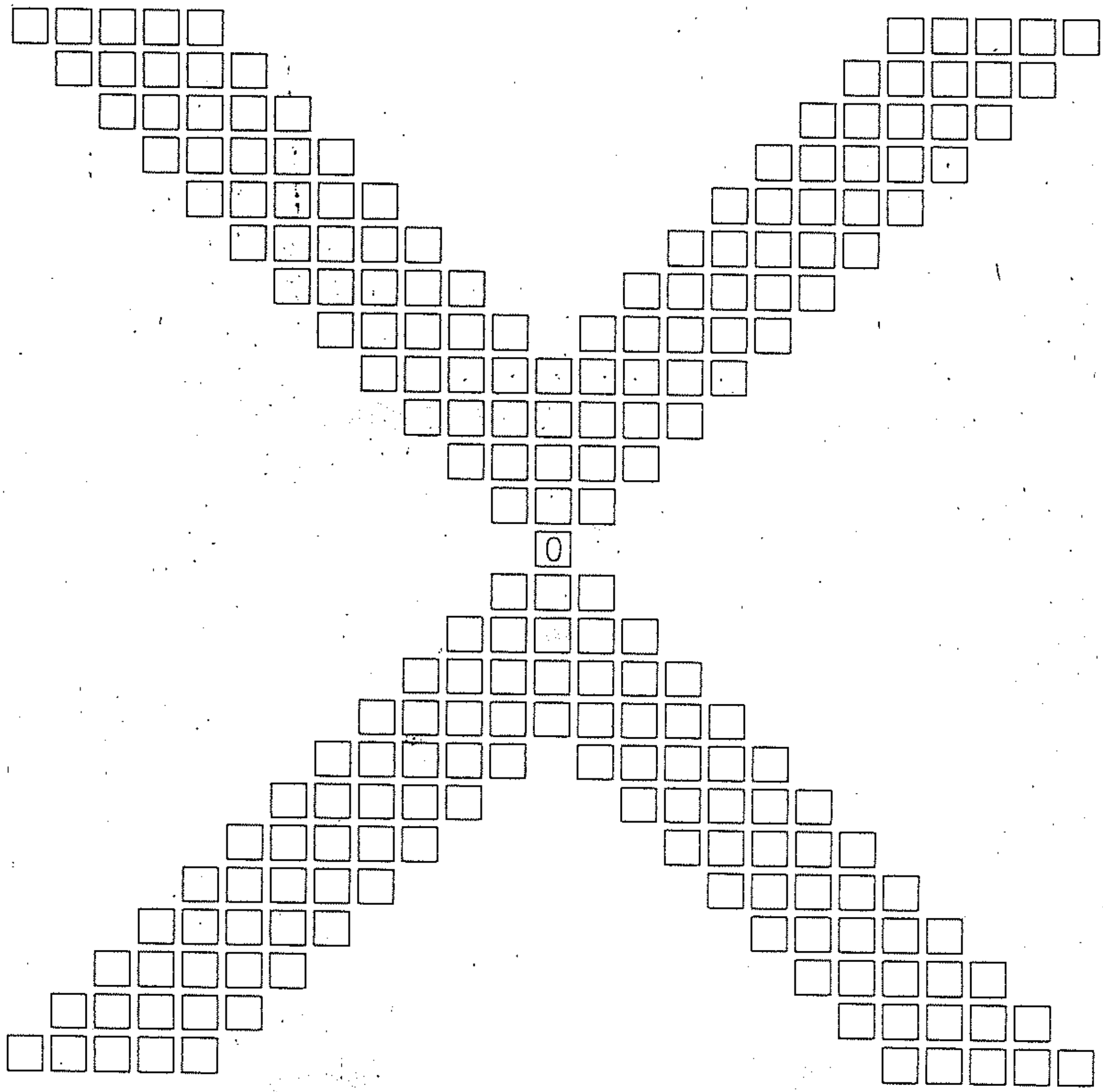
10 letras
Centigramo
Específico
Hectogramo
Quilogramo

11 letras
Centipondio

Existen 3 palabras de 9 letras que comienzan con C pero sólo una "CONTRASTE" cuya última letra "E" es la primera de otra palabra de 9 letras 87

13

en X



3 L.
Alá
Alí
Ama
Efe
Púa
Rad

4 L.
Abel
Anet
Aten
Toen

5 L.
Acata
Adega
Adela
Ágata
Aguan
Ajera
Alijo
Anexo
Arado
Árida
Ática
Átona
Añojo
Baasa
Babel
Badén
Banjo
Barco
Barón
Berna
Bidón
Canje
Claro
Degas
Egara
Egeno
Emana
Erizo
Eroga
Galán
Gaudí
Gudea
Gulag
Harén
Huida
Ihram
Largo
Liana
Magog
Marea
Midas
Milán
Miren
Naama
Nuera
Ocaña
Odesa
Odian
Ónice
Osado
Otras
Óxido
Porra
Ranat
Saína
Salta
Suene
Tabla
Tatúo
Teide
Total
Tubas
Vaina
Vanda
Zaire
Zanja

7 L.
América
Egineta

9 L.
Amazónica
Gramófono
Inauguren

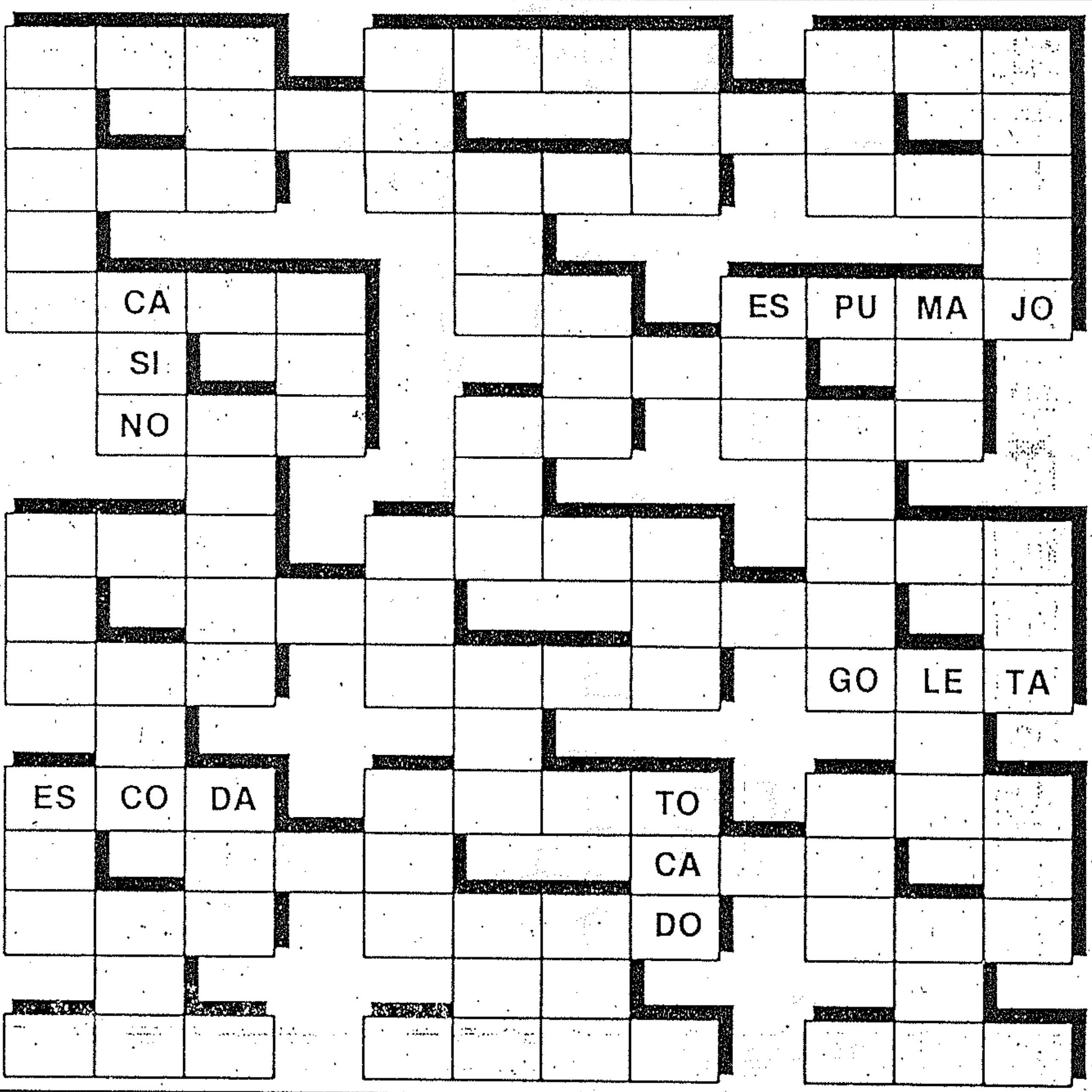
Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

5 Sílabas
Caracolejo
Lexicólogo
Recogedero
Vegetativo

4 Sílabas
Corajina
Espumajo
Mocetona
Modosito
Motonave
Nacarado
Rocadero
Sobadera
Sometido

3 Sílabas
Batido
Bizaza
Camilo
Camino
Cáñamo
Casino
Cícero
Comida
Corona
Curado
Dádora
Damita
Dativo
Demora
Devota
Dórico
Escoda
Esteta
Estilo
Género
Goleta
Larice
Lesivo
Locura
Lógico
Málaga
Mazazo
Mérito
Mocoso
Modoso
Nácara
Nacido
Novela
Peluca
Perolo
Rabino
Ratero
Redoma
Rémora
Ribete
Rodela
Talega
Tanino
Tarima
Tesoro
Típico
Tirado
Tisana
Tocado
Velada
Veleta

2 Sílabas
Lama
Nota
Risa



Coloque en el diagrama los siguientes números:

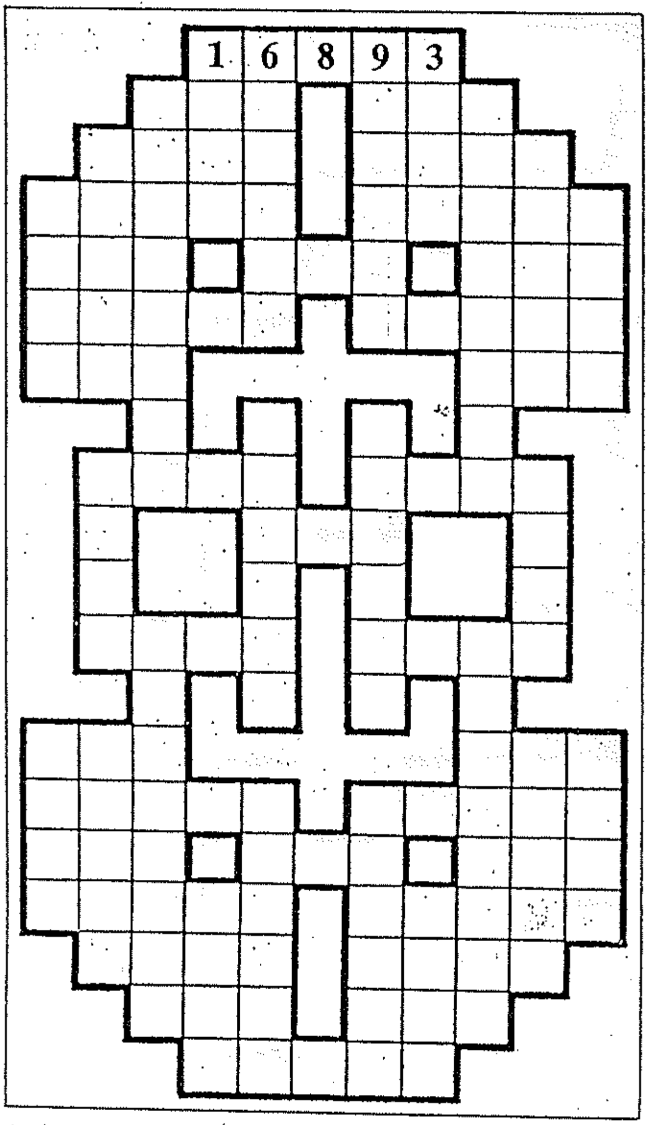
3 DIGITOS
076
214
298
352
417
489
508
541
563
694
721
730
824
973
981

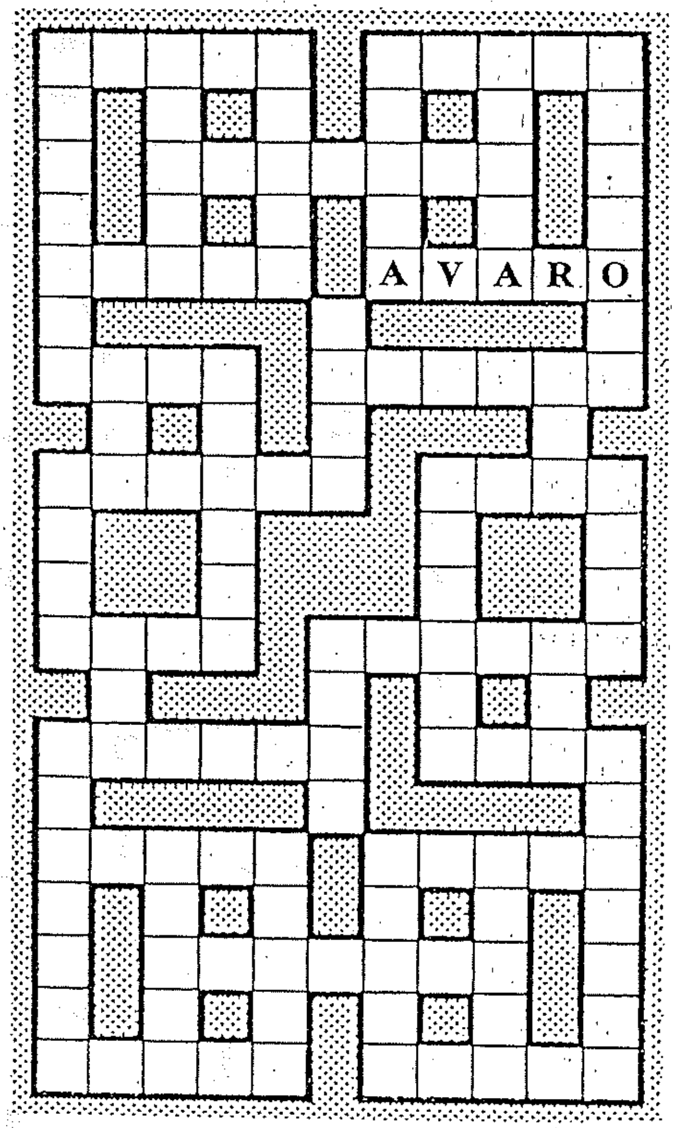
4 DIGITOS
0250
0347
0623
0914
1276
2371
2378
2396
2681
3147
3186
3692
3924
4932
8234
8542
9317
9650

5 DIGITOS
12790
16495
16893
20913
25801
30249
35467
49523
52746
72043
72561
90264
95821
96525

6 DIGITOS
145267
648703
891732
945046
950169
965242

8 DIGITOS
31735785
35821492
40985729
83419702





Coloque en el diagrama las palabras siguientes:

3 LETRAS
AVE
COZ
HOZ
MAR

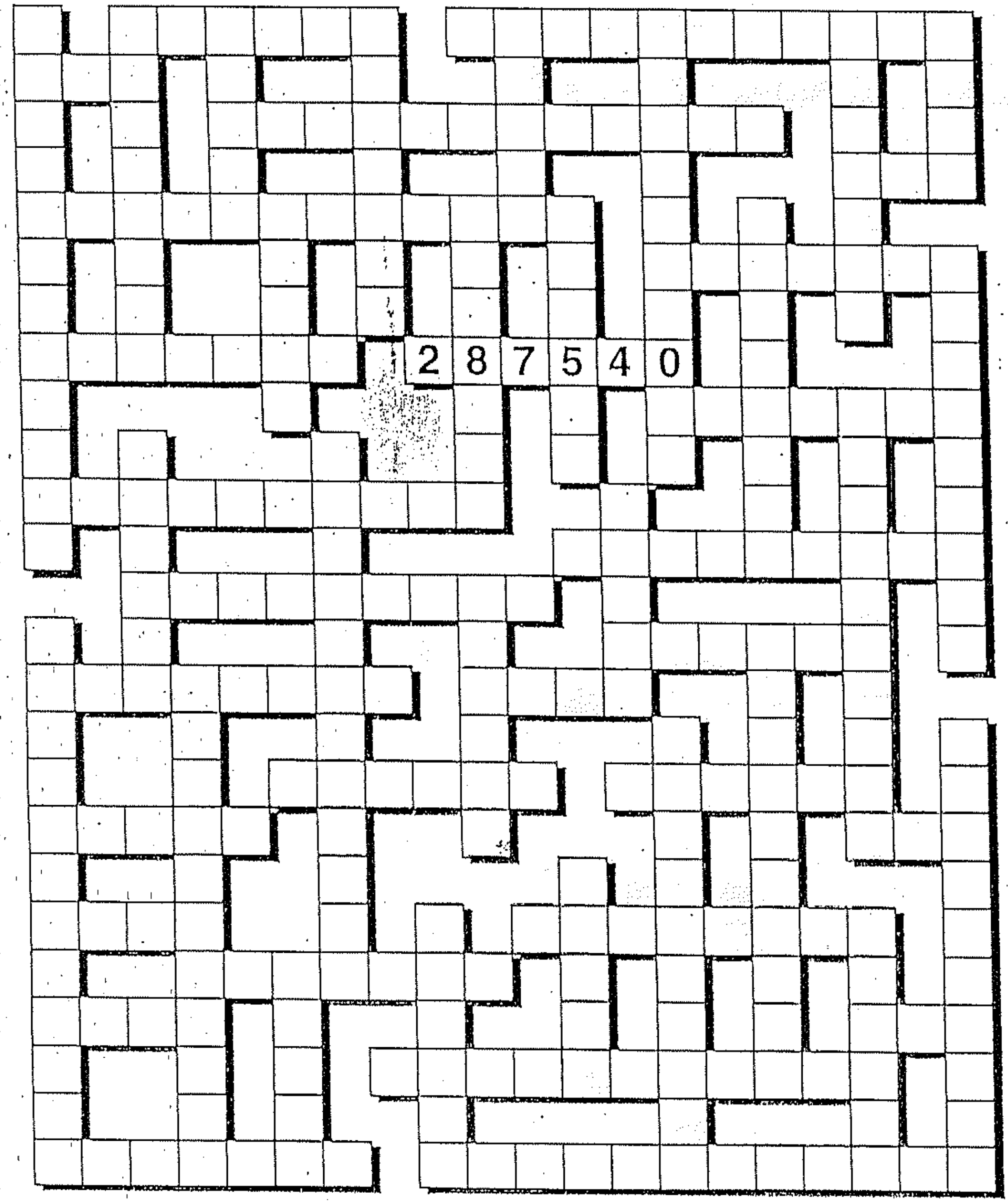
4 LETRAS
ACTO
AMAT
HITO
OCHO
OJEN
PAZO
TENA
TRES

5 LETRAS
ARADO
ASTIL
AVARO
BANDA
BATAN
BROMA
BUFET
CIRCE
ELITE
FLAMA
LIMAS
NURSE
RENOS
RIGOR
TELON
TROPA

6 LETRAS
AZIMUT
CLICHE
HILVAN
PIOLET
TIEMPO
TRUENO

7 LETRAS
AMATEUR
GRISONA
LAMENTO
NOVICIA
SINCERO
TRIPODE

Ensamble numérico



Inserte en el esquema los números que se dan, de forma que se crucen correctamente.

3 cifras: 123 - 519 - 750 - 909

4 cifras: 2567 - 4283 - 4287 - 4756

5 cifras: 21346 - 25347 - 34543 - 34907 - 56412 - 71094 - 80243

6 cifras: 247186 - 275268 - 298713 - 410982 - 516728 - 534172 - 542167 - 874429 - 976542

7 cifras: 1253678 - 1874592 - 3211245 - 3257984 - 3286715 - 4978703 - 6720543 - 6725431

8 cifras: 22243871 - 24610432 - 29651307 - 82205714

9 cifras: 112245672 - 123456789 - 185439211

10 cifras: 2413199478 - 2903561039 - 4701239871 - 4936854213 - 9786021377 - 9971854438

11 cifras: 15742865304 - 21793546822 - 4820576711

12 cifras: 241567218010 - 291876431005 - 493785213340 - 627835422411 - 669718503821 - 891337675429

COMMENT RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE NOMBRES PLACÉS ?

Vous allez reconstituer une grille de nombres dont nous vous donnons la liste mais pas la place ! Pour chaque grille, un NOMBRE DE DÉPART *vous est donné, déjà placé au bon endroit, ici* **45730**, *inscrit horizontalement à la 11^e ligne. Il est biffé dans la liste. «4», chiffre du nombre de départ, est le 3^e d'un nombre de 6 chiffres à placer verticalement. Voyons la liste des nombres de 6 chiffres: seul* **724195** *répond à cette condition. Nous pouvons le placer dans la grille. A vous de poursuivre les déductions Bon amusement!*

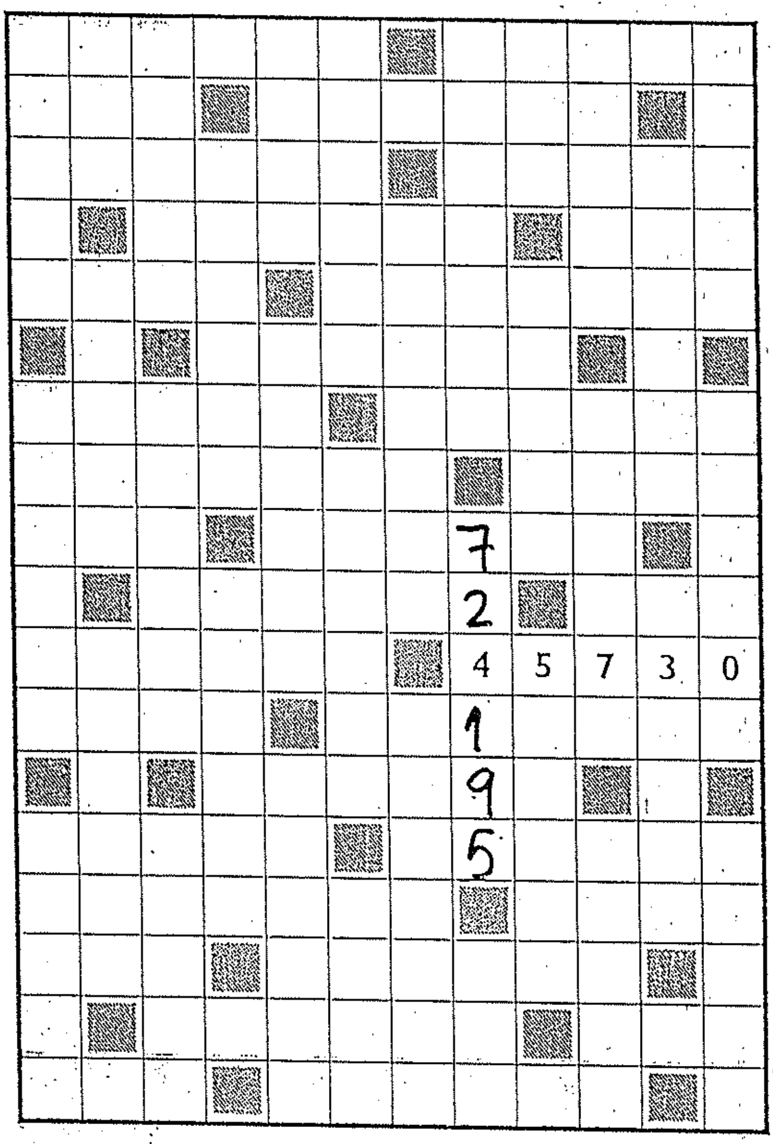
3
187
211
213
324
430
515
551
658
662
977

4
2224
3323
4916
6948
7801
8843

5
13023
22116
26141
31910
39199
~~45730~~
46247
53114
60024
65417
71600
80681
86365
91950
98797

6
133492
135062
201188
343874
385747
387463
453496
486473
489811
501784
506735
536159
557375
587108
660899
669442
~~724195~~
757165
757454
758420
799350
827570
831764
872278
897792
907966
941503
943410
988412

7
4478916
4929226
5146359
6410053
7844733
8126130
9080168



3

121
161
216
290
400
440
469
659
693
700
702
730
779

4

2512
3236
3536
3549
4538
4647
5835
6067
6155
6357
7279
8135
8138
8644
8739

5

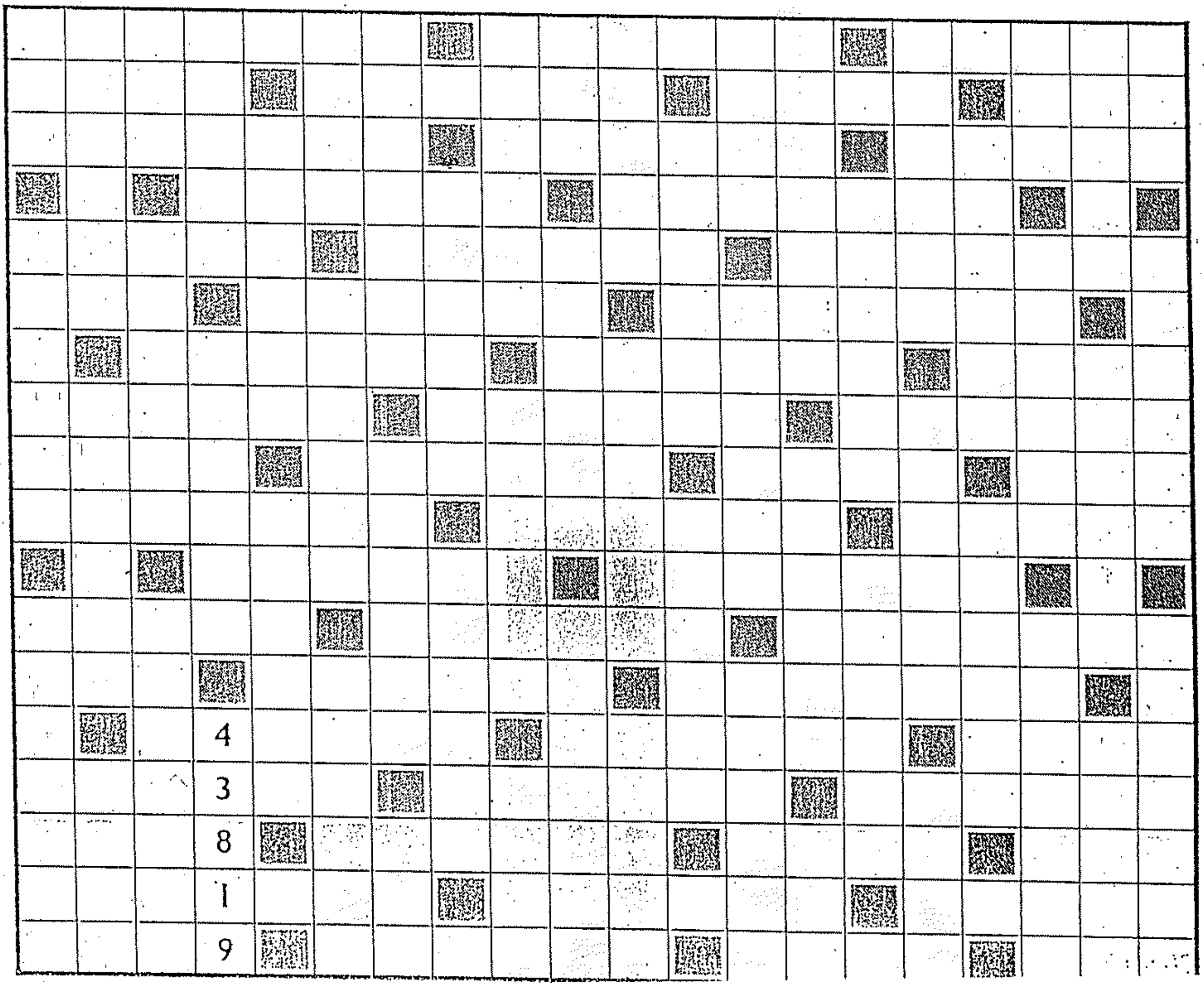
23737
24312
27198
27650
30269
33778
38069
~~43819~~
50509
57968
71970
92937

6

124975
180637
199206
205897
222812
264165
268669
269144
276924
277521
292597
322396
361932
369198
425661
426755
426876
457710
495909
508300
525723
525939
526526
546443
552764
576133
581824
586058
587471
588498
588836
602355
632537
646588
650994
662279
674477
713887
727358
767709
798683
806952
809170
810869
842126
857289
878899
889420
929042
951912
956274
982835
983474
987691

7

1948265
2210966
2343540
3194711
3273658
3695228
4359093
4512832
4923794
5493497
5520483
7212426
8578682
9052387
9181989
9816831
9840162



93

3

212
246
247
294
328
374
396
444
495
591
605
671
683
694
791
904

4

2853
2934
3332
5322
5530
5868
7622
9686
9944

5

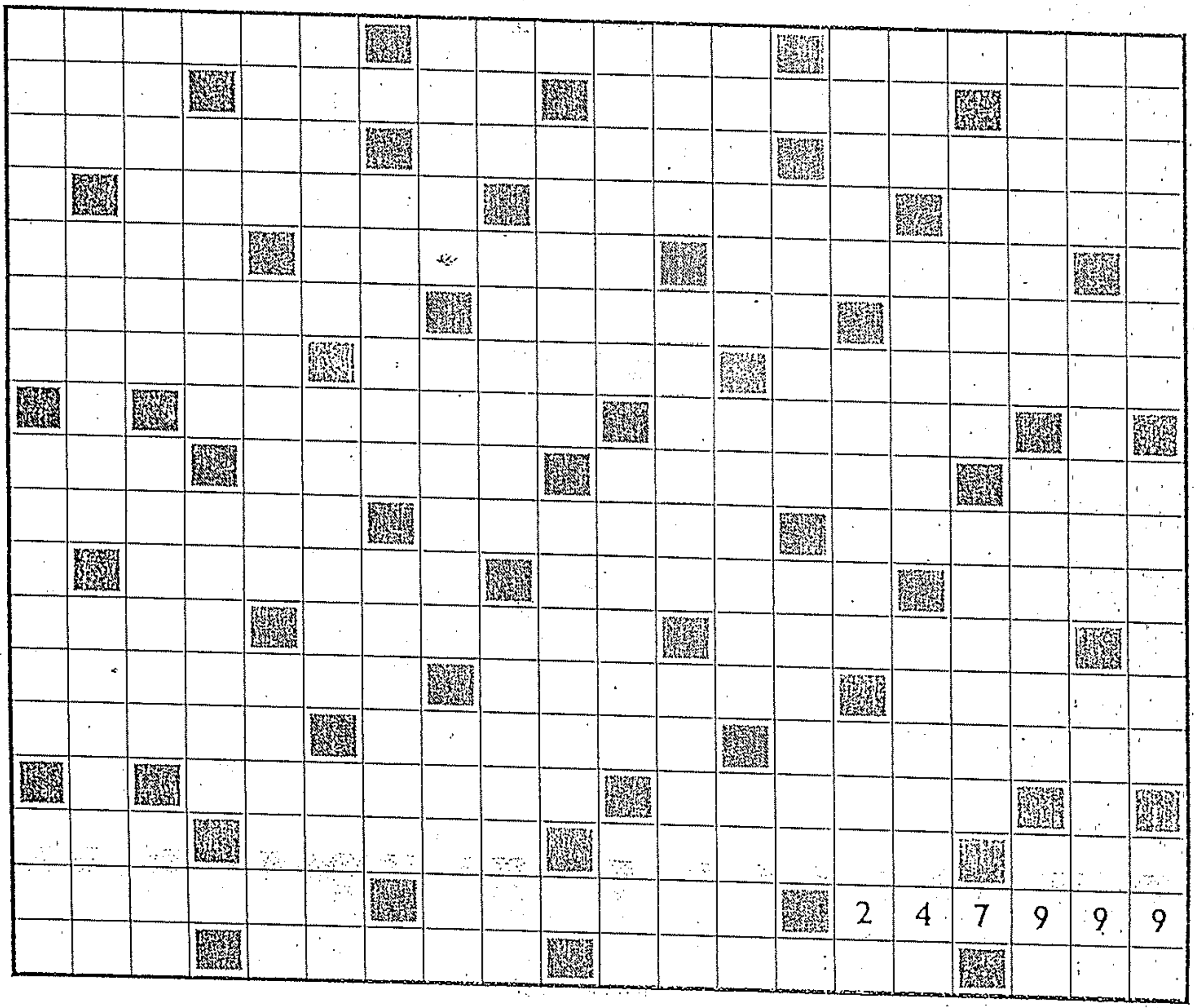
11425
19098
30706
33600
39501
40054
53730
72381
83351
87139
87682
96930

6

101436
103654
105790
105950
113231
133895
210498
213813
244005
~~247999~~
263377
274229
282555
309695
320136
337593
348919
349494
412400
416156
469486
488340
500403
500747
509700
526978
541452
595171
620682
623710
626460
628644
640409
644453
657796
658893
663171
674144
680325
682831
698372
706262
718261
739598
746823
762508
762592
780573
803270
811859
816569
821157
822878
833852
893327
919220
929306
961453
962682
982775

7

1646237
1682336
2511973
3189342
4136455
5010035
5308989
5427740
7150239
7306110
7828081
9324201
9333984
9883444



INDOMINO

INSTRUCCIONES

Con las 28 fichas de un juego completo de dominó construimos los cincuenta y dos tableros distintos de este juego.

Cada tablero representa a un "indominó" independiente. Los valores de las fichas aparecen escritos con números en vez de con los clásicos puntitos de los juegos de dominó.

3	6	6	1	1	4	0
5	2	1	4	2	5	4
3	2	3	3	4	6	3
4	5	5	6	1	0	4
2	6	5	1	2	0	4
6	3	0	0	5	0	2
4	0	1	6	5	1	1
0	2	3	2	3	6	5

Deduzca, para cada tablero, dónde está ubicada cada una de las 28 fichas. Tenga en cuenta que las mismas pueden ocupar una posición horizontal o vertical, encastrándose entre ellas, a manera de mosaico.

A medida que vaya determinando la ubicación de las fichas, puede ir tachándolas en la lista que figura a la derecha de cada tablero, donde aparece la totalidad de las fichas a usar.

Como ayuda, cada esquema cuenta con alguna ficha ya ubicada o alguna línea de límite entre una ficha y otra.

Obviamente no debe usar una ficha dos veces ni tampoco le deben quedar fichas sin usar.

0 0
0 1   1 1
0 2   1 2   2 2
0 3   1 3   2 3   3 3
~~0 4~~   1 4   2 4   3 4   4 4
0 5   1 5   2 5   3 5   4 5   5 5
0 6   1 6   2 6   3 6   4 6   5 6   6 6

COMO RESOLVERLO

El juego se resuelve por búsqueda sistemática y atajos sagaces.

Si, por ejemplo, 3 y 5 son vecinos en un único sitio del tablero, allí tendrá determinada la ficha 3-5. Si hay varias colocaciones posibles para una ficha, su determinación se hará como consecuencia de otros hallazgos.

En el caso del ejemplo aparece ya ubicada la ficha 4-0. Este invalida las otras ubicaciones 4-0 que pudieran existir. Por lo tanto, allí podremos ubicar líneas de limite de fichas. Esto nos brinda dos ubicaciones obligatorias: la de la ficha 0-2 del extremo inferior izquierdo y la 4-6, adyacente a ésta. Y seguidamente podemos marcar las ubicaciones prohibidas de estas fichas ya halladas. Luego encontraremos las fichas que tienen una única posiblidad de ubicación. En este caso: 2-2, 3-3, 4-4 y 6-6. Ahora volvimos a obtener algunas posiciones obligadas: 3-5, 3-4, 2-6, 5-5, 1-4, 1-1, 1-2 y 5-6.

3	6	6	1	1	4	0
5	2	1	4	2	5	4
3	2	3	3	4	6	3
4	5	5	6	1	0	4
2	6	5	1	2	0	4
6	3	0	0	5	0	2
4	0	1	6	5	1	1
0	2	3	2	3	6	5

3	6	6	1	1	4	0
5	2	1	4	2	5	4
3	2	3	3	4	6	3
4	5	5	6	1	0	4
2	6	5	1	2	0	4
6	3	0	0	5	0	2
4	0	1	6	5	1	1
0	2	3	2	3	6	5

A partir de aquí, ya quedan muy pocas ubicaciones que deducir. ¿Se anima a terminarlo solo?

0 0
0 1   ~~1 1~~
~~0 2~~   ~~1 2~~   ~~2 2~~
0 3   1 3   2 3   ~~3 3~~
~~0 4~~   ~~1 4~~   2 4   ~~3 4~~   ~~4 4~~
0 5   1 5   2 5   ~~3 5~~   4 5   ~~5 5~~
0 6   1 6   ~~2 6~~   3 6   ~~4 6~~   ~~5 6~~   ~~6 6~~

1

1	4	5	5	4	6	0
2	0	1	5	3	5	3
1	3	1	2	5	1	0
6	0	3	6	0	6	4
4	2	3	6	2	3	4
5	6	2	2	4	0	2
6	0	5	6	5	1	3
2	0	3	1	4	1	4

0 0						
0 1	1 1					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
~~0 6~~	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

2

3	0	1	4	1	4	5
6	6	3	3	5	5	6
2	1	2	6	1	1	1
3	6	5	2	5	4	4
0	1	0	2	0	3	0
2	6	6	4	0	3	2
3	5	4	2	3	1	2
6	4	4	0	5	0	5

0 0						
0 1	~~1 1~~					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

3

1	0	2	6	5	5	3
2	5	4	5	6	4	3
3	4	3	6	0	0	2
5	6	2	4	5	6	2
3	0	1	0	3	2	1
0	1	5	4	0	5	1
3	4	6	3	4	2	0
1	2	6	1	4	1	6

0 0						
0 1	1 1					
0 2	~~1 2~~	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

4

1	6	2	5	6	0	6
4	4	6	4	3	0	4
0	4	2	1	4	5	2
6	1	0	6	5	3	0
3	2	6	0	3	3	4
5	1	6	4	1	1	1
0	2	5	2	3	5	0
5	5	3	1	3	2	2

0 0						
0 1	1 1					
0 2	~~1 2~~	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

5

0	1	6	6	2	6	5
2	4	5	1	0	2	6
1	1	4	4	1	1	4
5	0	1	3	6	2	5
1	4	0	0	3	3	6
6	0	2	4	5	3	2
3	3	2	3	0	6	3
5	2	0	4	5	5	4

0 0						
0 1	1 1					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	~~2 5~~	3 5	4 5	5 5	
0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

6

1	6	1	0	4	3	5
0	6	4	3	1	5	5
6	3	5	6	2	1	1
6	6	0	4	2	5	4
2	6	0	4	5	3	0
4	6	3	0	4	1	5
2	2	3	2	1	1	2
2	0	3	3	0	4	5

0 0						
0 1	1 1					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	1 6	2 6	3 6	~~4 6~~	5 6	6 6

7

1	0	1	6	0	5	4
4	3	3	3	1	3	5
2	4	3	6	0	6	4
3	5	6	3	5	2	6
0	4	2	3	5	0	1
2	5	2	6	1	4	4
1	5	1	6	5	6	0
0	2	1	4	2	2	0

0 0						
0 1	1 1					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	~~1 6~~	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

8

0	2	4	5	4	5	1
3	3	0	2	3	1	6
5	1	0	1	1	4	2
6	1	5	3	0	2	5
6	1	3	2	0	0	6
4	2	6	4	4	5	4
6	0	5	6	3	5	0
1	6	3	3	2	2	4

0 0						
0 1	1 1					
0 2	1 2	2 2				
0 3	1 3	2 3	3 3			
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4		
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	
0 6	~~1 6~~	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

9

0	1	4	6	6	0	2
0	3	6	4	3	6	4
5	1	2	3	5	5	6
2	3	5	1	6	0	2
1	3	6	3	1	5	1
4	0	1	1	2	5	0
2	6	4	5	4	5	3
0	3	2	2	4	0	4

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | 2 3 | 3 3
0 4 | 1 4 | 2 4 | 3 4 | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5
0 6 | ~~1 6~~ | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

10

0	3	2	4	0	3	4
1	2	2	6	5	1	5
2	4	1	3	2	5	6
6	6	5	2	4	4	6
3	5	0	5	1	0	1
4	2	2	4	1	6	1
3	0	0	6	5	5	1
6	0	3	3	0	4	3

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | 2 3 | 3 3
0 4 | 1 4 | 2 4 | 3 4 | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5
0 6 | ~~1 6~~ | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

11

1	2	4	3	4	3	4
6	1	0	4	0	3	0
2	4	6	4	5	4	6
5	1	3	2	3	2	3
1	5	3	6	2	1	0
2	3	1	0	2	5	6
6	5	1	0	6	6	4
1	0	5	5	2	0	5

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | 2 3 | 3 3
0 4 | ~~1 4~~ | 2 4 | 3 4 | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5
0 6 | 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

12

4	4	0	2	4	0	5
2	4	5	3	6	5	2
3	1	0	1	3	0	6
1	5	6	4	1	6	5
6	1	6	2	3	0	6
1	4	5	3	4	5	4
2	0	3	1	1	5	2
3	3	6	2	0	0	2

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | 2 3 | 3 3
0 4 | ~~1 4~~ | 2 4 | 3 4 | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5
0 6 | 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

49

1	1	1	0	1	1	3
5	2	2	3	3	5	6
6	0	4	5	6	4	6
3	6	$\boxed{3}$	6	2	6	5
3	0	$\boxed{4}$	1	4	0	2
3	3	0	2	4	5	4
5	2	2	5	4	5	0
2	1	4	0	6	1	0

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | 2 3 | 3 3
0 4 | 1 4 | 2 4 | ~~3 4~~ | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5
0 6 | 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

50

4	4	1	0	0	5	0
3	1	6	5	0	2	2
1	6	$\boxed{2}$	2	2	0	4
5	6	$\boxed{3}$	5	6	3	5
1	4	3	4	6	1	3
1	1	3	6	0	0	2
4	3	5	5	0	4	6
4	6	3	5	2	2	1

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | ~~2 3~~ | 3 3
0 4 | 1 4 | 2 4 | 3 4 | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5
0 6 | 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

51

3	3	0	5	6	4	0
4	1	3	1	2	4	6
6	0	2	$\boxed{5}$	4	0	0
2	0	1	$\boxed{3}$	2	5	1
3	5	1	5	6	6	2
4	6	3	2	3	1	3
5	5	2	0	4	0	4
6	4	2	1	5	6	1

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | 2 3 | 3 3
0 4 | 1 4 | 2 4 | 3 4 | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | ~~3 5~~ | 4 5 | 5 5
0 6 | 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

52

3	0	3	1	0	2	1
1	4	2	3	6	5	6
1	6	4	6	4	2	0
2	6	0	3	4	3	5
5	3	2	4	5	3	5
4	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	5	0	1	4
5	1	0	1	6	2	2
0	0	2	6	4	1	6

0 0
0 1 | 1 1
0 2 | 1 2 | 2 2
0 3 | 1 3 | 2 3 | 3 3
0 4 | 1 4 | 2 4 | 3 4 | 4 4
0 5 | 1 5 | 2 5 | ~~3 5~~ | 4 5 | 5 5
0 6 | 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6

CLASIFICACIONES

INSTRUCCIONES

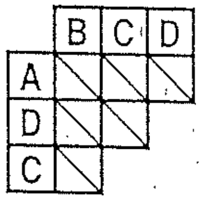
Cada esquema representa los resultados de seis encuentros de un cuadrangular de fútbol.

Deduzca los resultados de esos seis encuentros, cuyas tablas de posiciones aparecen seguidamente.

Tenga presente el significado de cada columna: **G**, partidos ganados; **E**, partidos empatados; **P**, partidos perdidos; **F**, goles a favor; y **C**, goles en contra. Cada partido da 2 puntos al ganador, 0 al derrotado y 1 punto a cada uno si es empate.

Ayúdese con los pequeños esquemas de la derecha para ir anotando las soluciones.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	3	0	6
B	1	1	1	1	1	3
C	0	2	1	0	1	2
D	0	1	2	0	2	1

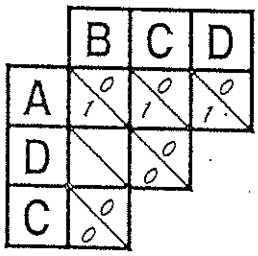


COMO RESOLVERLO

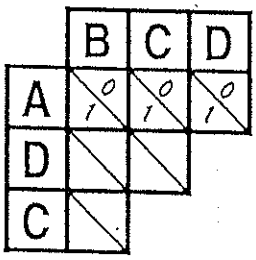
Para empezar a resolver este juego, es importante tener claro que cada cuadrangular (es decir, cada esquema) encierra los resultados de seis encuentros, ya que cada equipo se enfrentó con los otros tres.

Los encuentros serán, por lo tanto, **A-B**, **A-C**, **A-D**, **B-C**, **B-D** y **C-D**. Esta es, justamente, la representación que aparece en el cuadro auxiliar a la derecha de cada esquema.

En el juego del ejemplo, podríamos comenzar fijándonos que A ganó los tres encuentros que disputó. Además, tiene sólo tres goles a favor, por lo que en cada encuentro metió un gol. Es decir que el resultado de los partidos en que jugó A fue **1-0**.

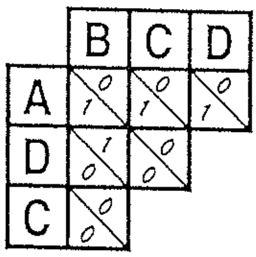


Esto ya nos da el partido perdido de B y de C y uno de los dos que perdió D. Si prestamos atención ahora a los goles en contra, vamos a notar que con lo deducido hasta ahora, ni B ni C tuvieron otros, mientras que D tuvo dos, por lo que falta ubicar uno. Pero con esto ya obtenemos otros dos resultados, ya que C tampoco tuvo goles a favor:



Para deducir ahora el resultado del partido que nos queda (**B-D**), debemos fijarnos nuevamente en los puntajes: según la tabla de posiciones, **B** ganó un partido, empató otro y perdió otro. Por lo tanto, en el caso que nos ocupa ahora **B** le ganó a **D** (que perdió dos y empató uno y hasta ahora sólo llevaba uno perdido y uno empatado). Volviendo a la tabla de posiciones, **B** tuvo un gol a favor y uno en contra. Y como hasta ahora **B** tiene un gol en contra y ninguno a favor, obviamente el resultado del partido **B-D** es **1-0**. Para comprobarlo, podemos corroborar que el puntaje del equipo **D** también haya quedado acorde a la tabla de posiciones: ningún gol a favor y dos goles en contra. ¡Bingo!

¿Nos siguió? De ser así, considérese ya lo suficientemente preparado para enfrentar las Clasificaciones que lo esperan.



53

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	1	1	1	4	2	3
C	0	2	1	2	3	2
D	0	2	1	1	4	2

	B	C	D
A			
D			
C			

54

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	0	1	5	5	4
B	1	1	1	3	1	3
C	1	1	1	2	2	3
D	0	2	1	1	3	2

	B	C	D
A			
D			
C			

55

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	2	1	4
B	1	1	1	3	1	3
C	0	3	0	0	0	3
D	0	2	1	1	4	2

	B	C	D
A			
D			
C			

56

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	1	5
B	1	1	1	1	2	3
C	1	0	2	3	2	2
D	0	2	1	1	4	2

	B	C	D
A			
D			
C			

57

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	0	5
B	2	1	0	3	1	5
C	1	0	2	3	6	2
D	0	0	3	3	6	0

	B	C	D
A			
D			
C			

58

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	1	1	1	3	1	3
C	1	1	1	4	1	3
D	0	1	2	0	7	1

	B	C	D
A			
D			
C			

59

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	0	3	0	1	1	3
C	0	2	1	2	3	2
D	0	2	1	1	2	2

	B	C	D
A			
D			
C			

60

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	2	0	5
B	2	0	1	2	1	4
C	1	1	1	1	1	3
D	0	0	3	0	3	0

	B	C	D
A			
D			
C			

61

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	3	1	4
B	1	1	1	4	3	3
C	0	3	0	0	0	3
D	0	2	1	0	3	2

	B	C	D
A			
D			
C			

62

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	6	1	5
B	2	0	1	2	1	4
C	0	2	1	1	2	2
D	0	1	2	0	5	1

	B	C	D
A			
D			
C			

63

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	3	1	5
B	1	1	1	3	2	3
C	0	3	0	2	2	3
D	0	1	2	0	3	1

	B	C	D
A			
D			
C			

64

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	4	0	6
B	2	0	1	2	1	4
C	1	0	2	1	3	2
D	0	0	3	0	3	0

	B	C	D
A			
D			
C			

65

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	5	0	6
B	2	0	1	6	3	4
C	0	1	2	0	4	1
D	0	1	2	0	4	1

	B	C	D
A			
D			
C			

66

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	3	1	5
B	2	0	1	3	2	4
C	1	1	1	6	6	3
D	0	0	3	3	6	0

	B	C	D
A			
D			
C			

67

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	0	5
B	2	0	1	2	1	4
C	1	0	2	1	4	2
D	0	1	2	0	2	1

	B	C	D
A			
D			
C			

103

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	6	2	6
B	1	1	1	2	2	3
C	1	0	2	2	4	2
D	0	1	2	0	2	1

	B	C	D
A			
D			
C			

104

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	1	0	4
B	1	1	1	3	3	3
C	1	1	1	3	2	3
D	0	2	1	2	4	2

	B	C	D
A			
D			
C			

105

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	0	1	2	2	4
B	2	0	1	6	4	4
C	1	1	1	4	2	3
D	0	1	2	0	4	1

	B	C	D
A			
D			
C			

106

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	4	1	5
B	2	0	1	5	3	4
C	1	0	2	2	5	2
D	0	1	2	0	2	1

	B	C	D
A			
D			
C			

107

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	3	1	4
B	1	1	1	3	2	3
C	1	1	1	1	1	3
D	1	0	2	1	4	2

	B	C	D
A			
D			
C			

CLASIFICACIONES

Deduzca los resultados de los seis encuentros de cada uno de los cuadrangulares de fútbol cuyas tablas de posiciones aparecen seguidamente. Recuerde: G, partidos ganados; E, partidos empatados; P, partidos perdidos; F, goles a favor; y C, goles en contra. Cada partido da 2 puntos al ganador, 0 al derrotado y 1 punto a cada uno si es empate. Ayúdese con los pequeños esquemas de la derecha para anotar las soluciones.

1.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	7	1	5
B	1	2	0	2	1	4
C	1	0	2	1	5	2
D	0	1	2	0	3	1

	B	C	D
A			
D			
C			

2.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	3	0	5
B	1	2	0	5	1	4
C	0	2	1	1	3	2
D	0	1	2	0	5	1

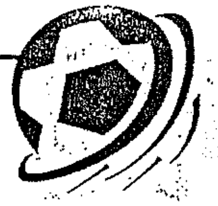
	B	C	D
A			
D			
C			

3.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	1	2	0	1	0	4
B	1	2	0	1	0	4
C	1	0	2	1	2	2
D	0	2	1	0	1	2

	B	C	D
A			
D			
C			

Clasificaciones



Deduzca los resultados de los seis encuentros de cada uno de los cuadrangulares de fútbol cuyas tablas de posiciones aparecen seguidamente. Recuerde: **G**, *partidos ganados;* **E**, *partidos empatados;* **P**, *partidos perdidos;* **F**, *goles a favor; y* **C**, *goles en contra. Cada partido da 2 puntos al ganador, 0 al derrotado y 1 punto a cada uno si es empate. Ayúdese con los pequeños esquemas de la derecha para anotar las soluciones.*

1.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	0	1	3	3	4
B	1	2	0	3	1	4
C	1	1	1	3	1	3
D	0	1	2	0	4	1

A : B ☐☐	B : C ☐☐
A : C ☐☐	B : D ☐☐
A : D ☐☐	C : D ☐☐

2.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	3	0	0	5	0	6
B	2	0	1	3	2	4
C	1	0	2	2	5	2
D	0	0	3	0	3	0

A : B ☐☐	B : C ☐☐
A : C ☐☐	B : D ☐☐
A : D ☐☐	C : D ☐☐

3.

Eq.	G	E	P	F	C	Pts.
A	2	1	0	6	2	5
B	2	0	1	2	1	4
C	1	1	1	3	3	3
D	0	0	3	2	7	0

A : B ☐☐	B : C ☐☐
A : C ☐☐	B : D ☐☐
A : D ☐☐	C : D ☐☐

EL SABUESO

INSTRUCCIONES

Un buen sabueso ha recorrido esmeradamente cada uno de los campos cuadriculados que conforman este juego. Al día siguiente llega usted y sólo encuentra algunos rastros dispersos.

Reconstruya exactamente los recorridos del sabueso sabiendo que:

1) Cada tablero contiene un recorrido diferente e independiente de los demás.

2) El sabueso ha avanzado a lo largo de números consecutivos, pasando de una casilla a otra vecina, en horizontal o en vertical (nunca en diagonal).

3) Cada recorrido empieza en un número que puede estar entre 1 y 25, y es algo que también usted deberá descubrir (los números que aparecen en las cuadrículas como pistas no son necesariamente el inicio o el final del recorrido).

4) El sabueso no ha dejado casillas sin visitar; es decir, ha recorrido todo el tablero.

		50	15		
	19				
					36
		28			

COMO RESOLVERLO

Una buena manera de empezar a resolver este juego es fijarse, dentro de los números-pista que aparecen, cuál es el par que menos diferencia numérica tiene.

En este caso, el **15** y el **19**. El recorrido a hacer entre ambos números puede ser uno de estos dos:

A

		50	15		
			16		
	19	*18*	*17*		
					36
		28			

B

		50	15		
		17	*16*		
	19	*18*			
					36
		28			

Nuestro próximo paso será dibujar el camino desde el **19** hasta el **28**, y de ahí, hasta el **36**. En este momento podremos deducir cuál de nuestras dos opciones anteriores es la correcta: Si lo hacemos partiendo de la opción **A**, el esquema quedaría así:

		50	15		
21	*20*		*16*		
22	19	*18*	*17*		
23	*26*	*27*	*30*	*31*	36
24	*25*	28	*29*		

La casilla libre entre el **20** y el **16** podría ocuparse con el **51**, pero no podríamos completar el camino desde el **31** al **36** sin dejar casillas vacías. Esto nos permite deducir que la opción **B** era la correcta.

Siguiendo con la idea de encontrar el camino hacia el número más cercano e intentando no dejar casillas vacías y aisladas, llegamos desde el **28** hasta el **36**.

Para que la casilla del extremo inferior derecho no quede vacía, allí deberemos ubicar obligatoriamente al **35**. Volvemos a tener una sola manera de hacerlo:

		50	15		
21	*20*	*17*	*16*		
22	19	*18*	*31*	*32*	
23	*26*	*27*	*30*	*33*	36
24	*25*	28	*29*	*34*	*35*

De aquí en más sólo nos resta completar las casillas restantes con el recorrido de números que va desde el **36** hasta el **50**.

En este caso, como las casillas que quedan suman trece (exactamente los números necesarios para ir del **36** al **50**), no deberemos seguir el camino más allá del **50** ni tampoco empezar el recorrido antes del **15**, cosa que sí puede suceder en alguno de los juegos.

¿Se anima a completarlo solo?

108

			6		
	11		1		
	14		36		
	21		27		

109

		25	10	5	
				12	
				21	
		40			

110

	37	34			
				29	24
42	19				
7	18				

111

			14		
5		11	28		
		36	29		19
40					

112

	40	27			
			7		
	42				
		11			
			13		

113

				8	
	32	1	6		
		36	19		

114

12					5
25					18
26					19
39					32
40					

115

					19
	38				
			41		
		43			
				32	
9	28				

116

	1			10	
	18			5	
	19			22	

117

		3	6		
	27			8	
	38	25	16		

118

			27		
		25		35	
	7				31
1		9			

119

11					46
13	20	33	30	27	44

120

					46
			14		
	11				
19					

121

		36			
		31		7	
		30	1	8	
		21		15	

122

	35	38	19	18	
				7	
	30	31	42	9	

123

20	35			30	29
19	14			39	44
			9		

124

					31
	10		34		
					45
			14		
		18			

125

	5				
17					
28					23
30		40			

168

			24		
	1				
			27	36	
		5			

169

	7			16	
		19	26		
				30	
			42		

170

13					
			21		
			28		
48			45		
			42		

171

		11			28
	33			46	
15					
		42			
	36				
				22	

172

26					
	1				
				5	
					13
					36

173

		42			
		7			
	13	12			
	18	19			

LA AMENAZA

INSTRUCCIONES

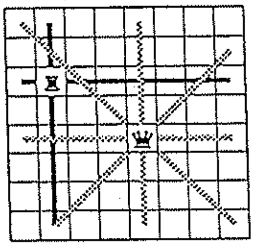
En cada tablero, las letras J, K, L, M y N representan a un rey, una dama, una torre, un alfil y un caballo de ajedrez, aunque no necesariamente en este orden. Obviamente en cada tablero la representación es distinta, aunque por casualidad se puede llegar a repetir en algún caso.

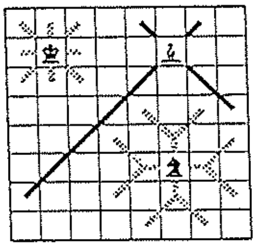
Los números en los tableros indican cuántas de esas piezas amenazán a la casilla que contiene al número.

Decubra, para cada tablero, qué pieza es cada letra.

Para poder resolver este juego no es necesario que sepa jugar al ajedrez. Tan solo debe conocer cuál es el movimiento de cada una de las piezas que participan: la **torre** se mueve el número de casillas que quiera pero sólo en horizontal y vertical; el **rey** lo hace hacia cualquier dirección pero sólo de a una casilla por vez; la **dama** lo hace también en cualquier dirección y todas las casillas que desee; el **alfil** se mueve sólo en diagonal, el número de casillas que quiera y el **caballo** se mueve en forma de L, hacia cualquier lado. El caballo es la única pieza que puede saltar por sobre las demás. Esto es importante para tener en cuenta, ya que una dama, por ejemplo, no puede amenazar a una casilla si en la mitad del recorrido hay otra ficha ubicada. Los números, en cambio, no obstaculizan, ya que son sólo datos, no fichas.

Para más claridad, aquí van dos esquemas con los movimientos señalados:





COMO RESOLVERLO

Tomemos un juego de ejemplo:

				J			
		1	2				
		K					
	L						
		M					
			0	3			
				N			

Para empezar a resolverlo, es importante considerar el **0** que allí figura. Significa que ni la **M** ni la **N** son rey, dama ni alfil (ya que, de lo contrario, estarían amenazando a esa casilla y no figuraría con un 0); por lo que entre ellas está la **torre** y el **caballo**.

Para que la casilla que tiene el número 3 esté amenazada por tres piezas, hay que fijarse qué piezas pueden hacerlo. Las únicas que están en condiciones de amenazar son la **N**, la **J** y la **M**. Esta última para hacerlo debe ser necesariamente el **caballo**. Por lo tanto la **N** representa a la **torre**. Ahora nos resta deducir a qué fichas representan las tres letras restantes. La **J** necesita amenazar tanto a la casilla que contiene el número **2** como a la del número **3**. La única figura que puede hacerlo es la **dama**.

Ahora resta encontrar las fichas que representan la **K** y la **L**. Si la **K** fuera el **alfil**, la casilla con el **1** no estaría amenazada por ninguna ficha. Por lo tanto, la **K** es el **rey** y, por descarte, la **L** es el **alfil**.

Y ésta es, finalmente, la solución correcta:

♔ = K ♕ = J ♖ = N

♗ = L ♞ = M

Podrá encontrar varios caminos para llegar al mismo resultado. Pero la solución siempre es única.

174

		0				J	
			K		L		
		M		N			
				0		0	

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

175

		1					
				0		J	
			K		L		
		M		N			
				0			
			0				

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

176

J	K		1				0
L	M						
	0						N
							0

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

177

J		K					
			1				
L		M	0				N
		1					

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

178

				2			
		0	J	K			
		L	M	N			
		1					

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

179

			J		K		
	L		M		N	0	
			3				

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

180

	J		0			1	
K		L					
	M	1					N

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

181

		J		0	0	0	
K				L			M
		N					
				1			

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

182

				J			
			0	0			
		K				L	
						0	
				M			
N							

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

183

				J		2	
		0	K		L		
	0			M			
N							

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

184

		0			J		
			K		0		0
	L					M	
		N					
		0					

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

185

				J			
		K				L	
				2			
0	M	0		2			
		N					

♔ = ♕ = ♖ =

♗ = ♘ =

230

			J				
K						L	
			0				
			M	2			
			N				

♚ = ♛ = ♜ =

♝ = ♞ =

231

			J				
	K				L	0	
			M		1		0
0			N				

♚ = ♛ = ♜ =

♝ = ♞ =

232

					J	2	
	K		3		L		M
					0		
					N		
				1			

♚ = ♛ = ♜ =

♝ = ♞ =

233

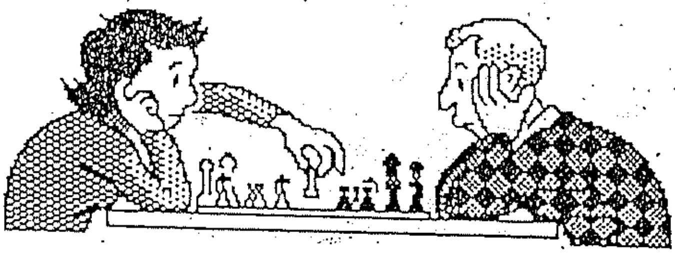
		0				2	
					J		
		K			L	M	
					N		
				1			
						0	

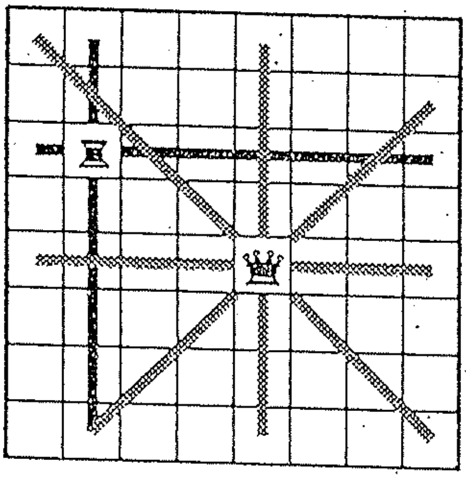
♚ = ♛ = ♜ =

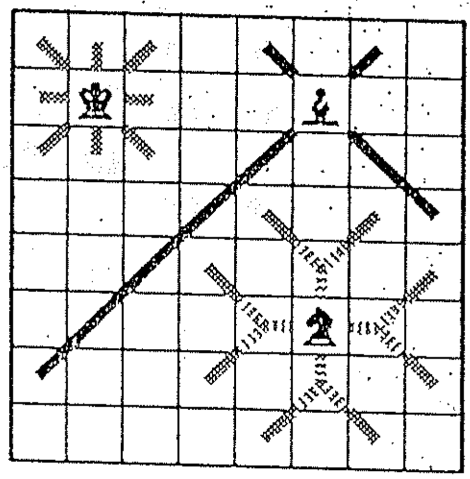
♝ = ♞ =

LA AMENAZA

En cada tablero, las letras J, K, L, M y N representan un rey, una dama, una torre, un alfil y un caballo de ajedrez, aunque no necesariamente en este orden. Los números indican cuántas de tales piezas amenazan esa casilla. Descubra, para cada tablero, qué pieza es cada letra. En los esquemas superiores aparecen, para quienes los ignoran, los movimientos de cada ficha de ajedrez.





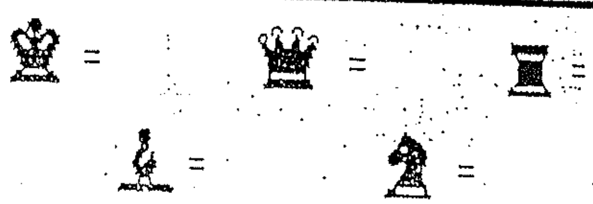


A

			J				
				0			
		K	L	M			
				1			
				1			
			N				

B

			J				
	K		L	0	M		
			2				
			N	2			

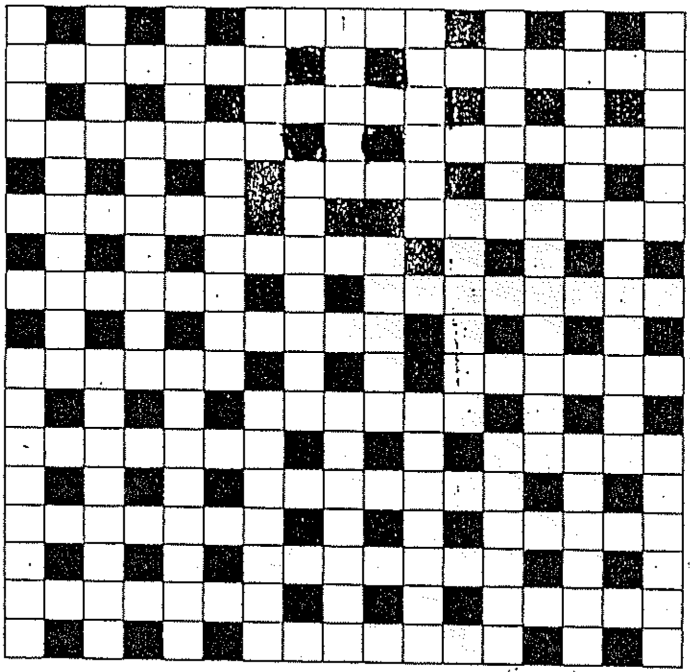


117

QUIJOTE

CRUZEX

Acomode las palabras de la lista en el diagrama, de manera que se crucen correctamente.



4 Letras
Caos
Foca
Galo
Odre
Tren

5 Letras
Abuso
Ansia
Apodo
Chile
Frisa
Isipo
Olivo
Ovalo
Ubeda

6 Letras
Atanor
Ballet
Canoas
Carbón
Condón
Cráter
Epocas
Faunos
Impuso
Iterar
Mártir
Osiris
Torsos

7 Letras
Abrigar
Andorra
Aptitud
Cábalas
Cartago
Coronar
Escapar
Evasivo
Fístula
Ladeada
Narciso
Narigón
Numeral
Obrarán
Obsesos
Océanos
Plátano
Romería
Ruleros
Sonetos

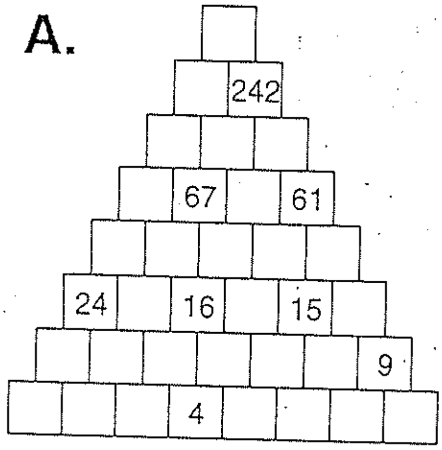
8 Letras
Centella
Normando
Oníricas
Princesa

QUIJOTE

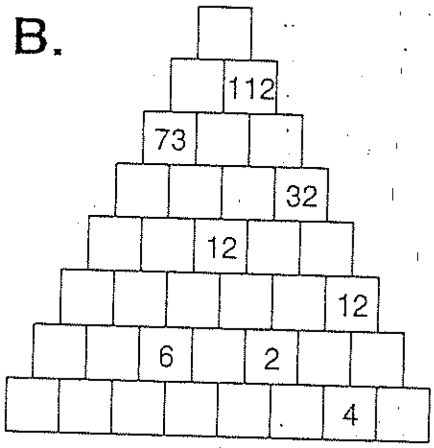
PIRAMIDES NUMERICAS

Complete las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga la suma de los dos números de las casillas inferiores. Como datos se dan, en cada caso, algunos números ya indicados.

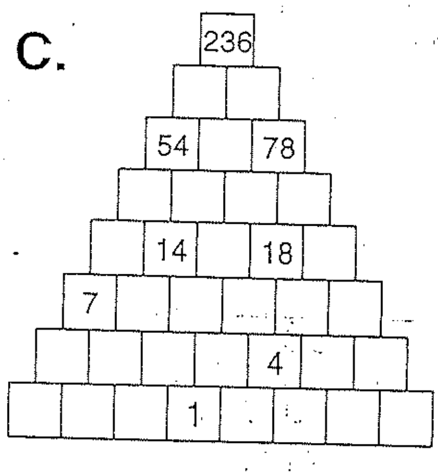
A.



B.

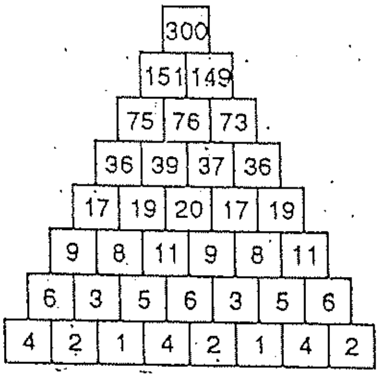


C.

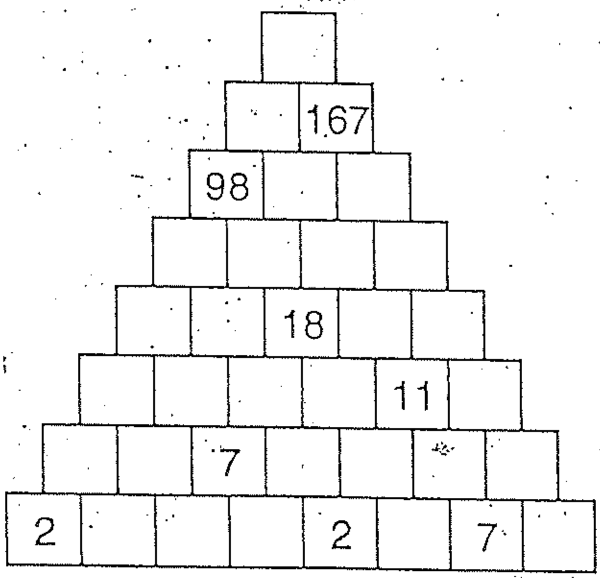


PIRAMIDES NUMERICAS

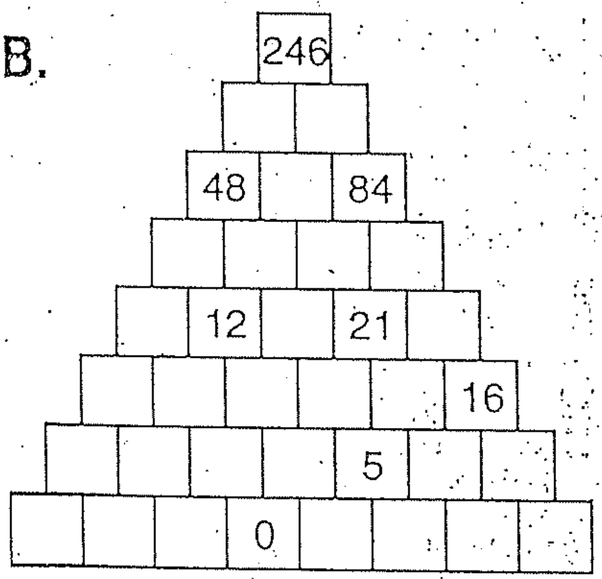
Complete las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga las sumas de los dos números de las casillas inferiores. Como datos se dan, en cada caso, algunos números ya indicados, y como ejemplo, una pirámide ya resuelta.



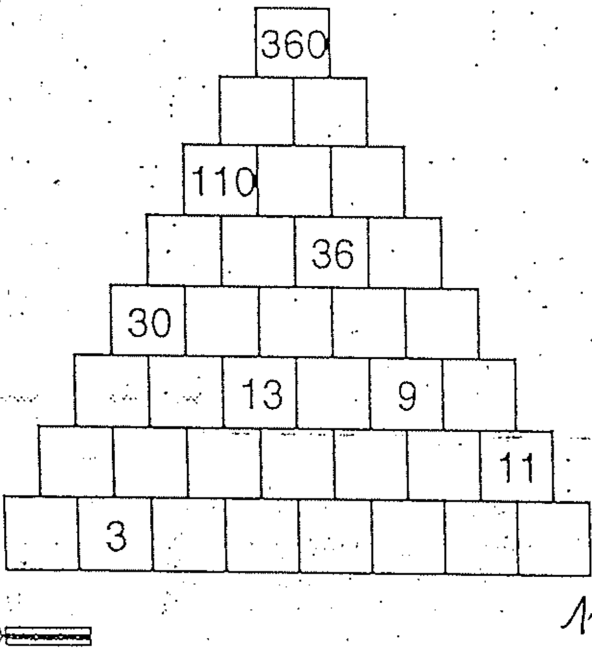
A.



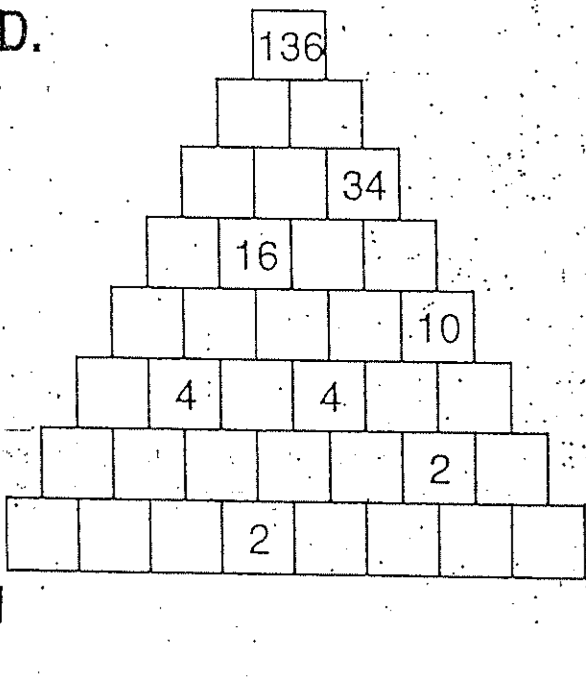
B.



C.



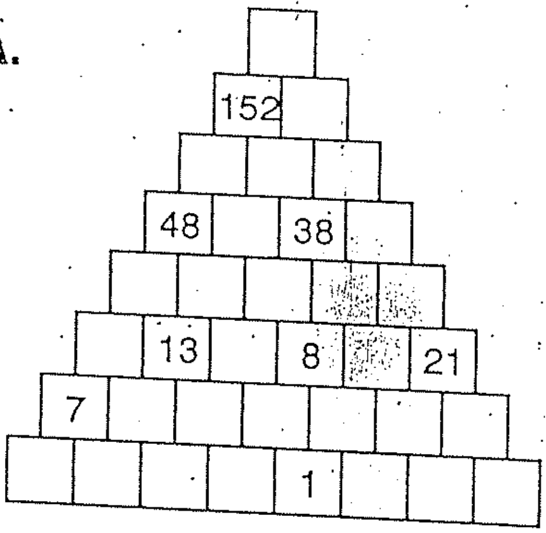
D.



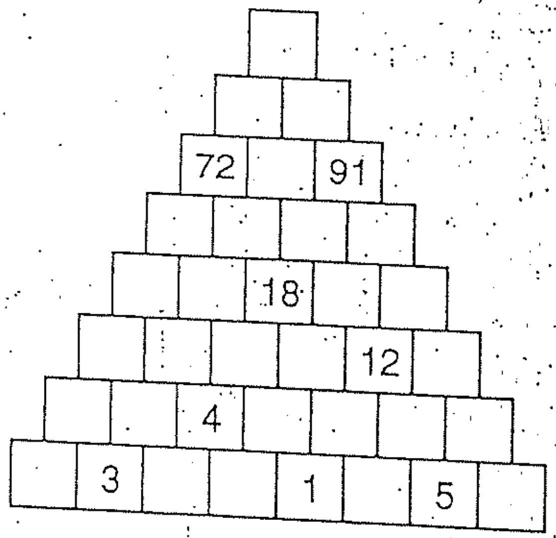
PIRAMIDES NUMERICAS

Complete las pirámides colocando un número de una o más cifras en cada casilla, de modo tal que cada casilla contenga las sumas de los dos números de las casillas inferiores. Como datos se dan, en cada caso, algunos números ya indicados.

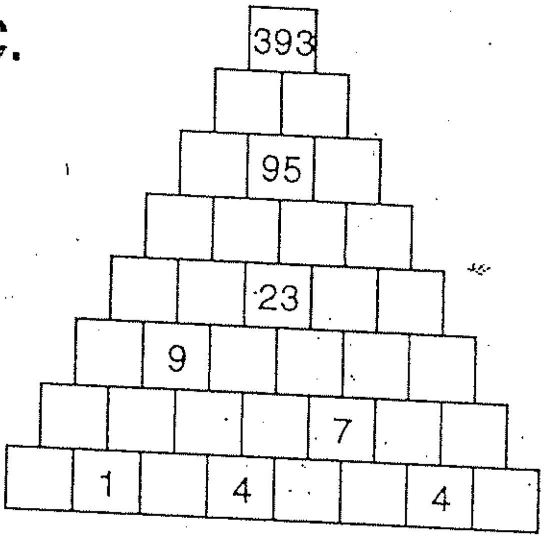
A.



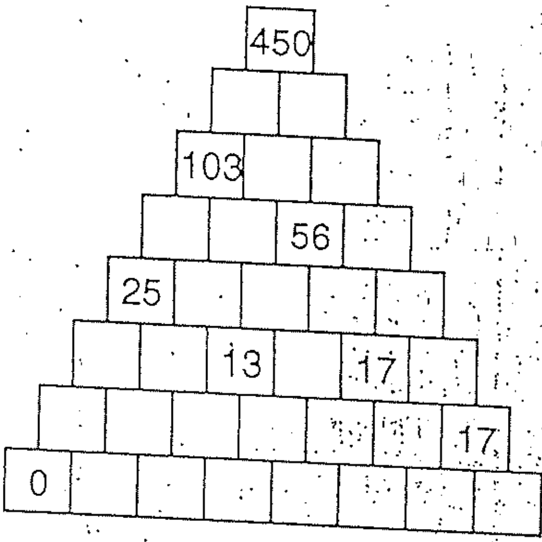
B.



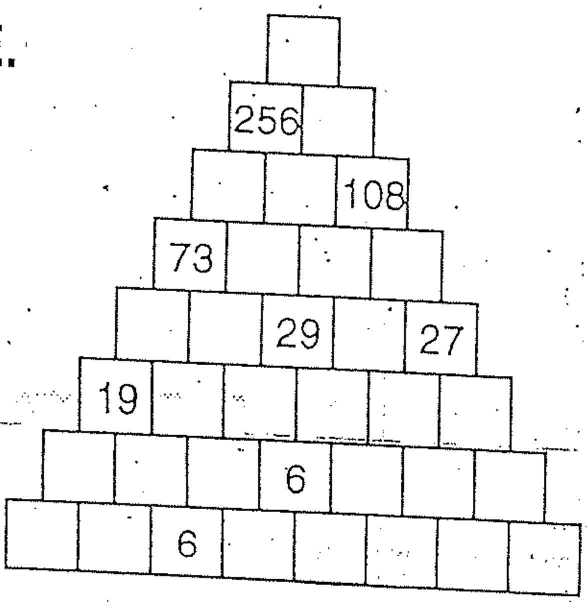
C.



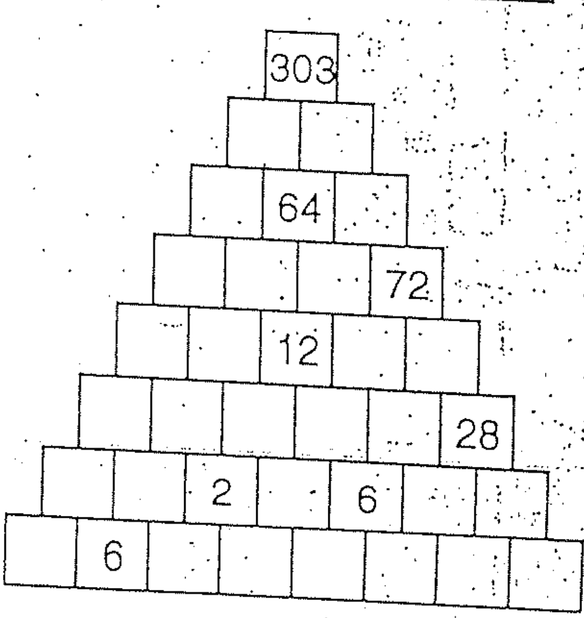
D.



E.



F.



120

L	E	V
X		
	X	
X		X
X		
		X
6	5	3

Pronóstico matemático

Esta puede ser una tarjeta ganadora, siempre que se complete sin que haya dos cruces seguidas en la misma columna. Al pie se indica la cantidad de cruces.

L	E	V
X	X	
5	7	2

Pronóstico matemático

En esta boleta de Prode los pronósticos dependen de una condición: no debe haber dos cruces seguidas en la misma columna. Al pie se indica la cantidad de cruces.

L	E	V
X		
	X	
	X	X
	X	
X		
5	5	4

Pronóstico matemático

En esta boleta de Prode se sabe cuántos locales, empates y visitantes resultan. Debe completarse de modo que no haya dos cruces seguidas en la misma columna.

L	E	V
X		
X		X
	X	
4	4	6

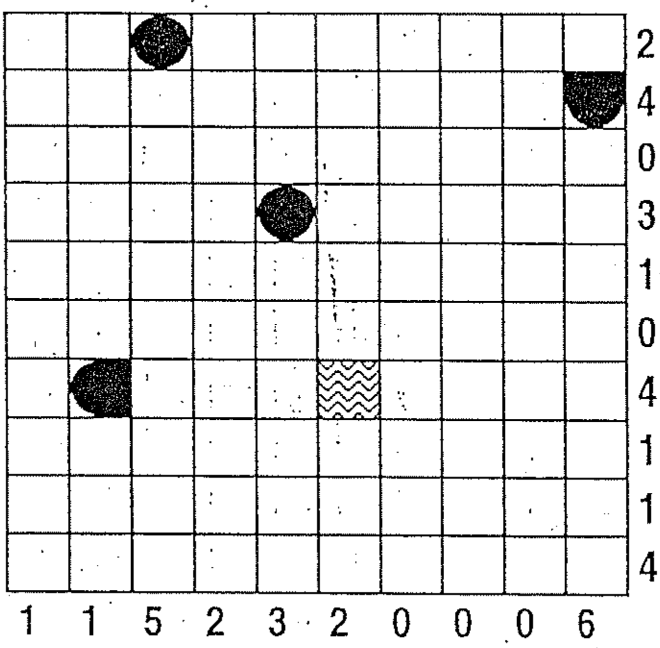
Pronóstico matemático

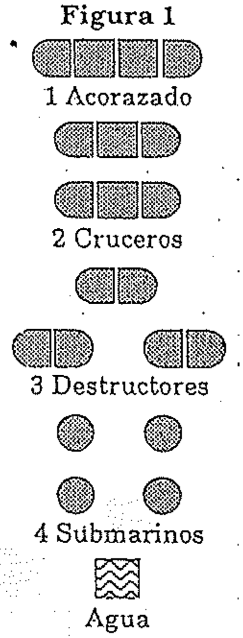
En esta boleta se conocen las sumas de cruces, pero hay una sola manera de completarla de modo que no haya dos seguidas en la misma columna. Los números abajo indican la suma de cada columna.

BATALLA NAVAL

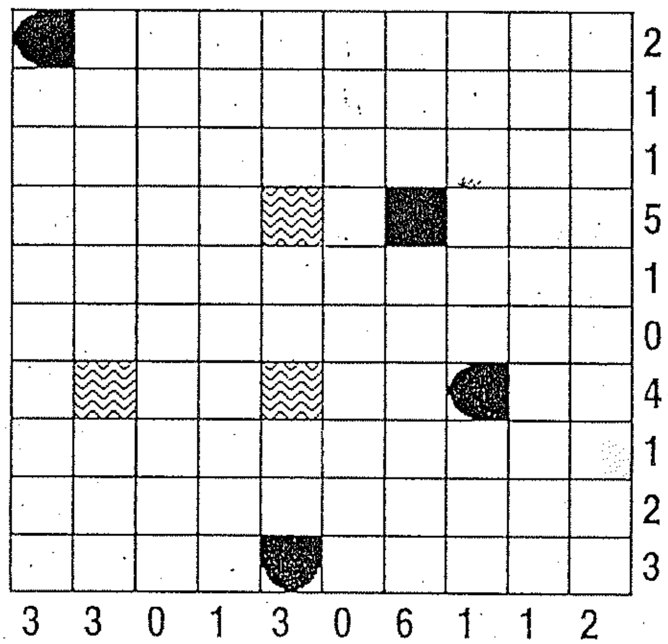
En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota, y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.). Además, al pie de cada columna y al costado derecho de cada fila, se indica con números cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor de cada barco hay agua.

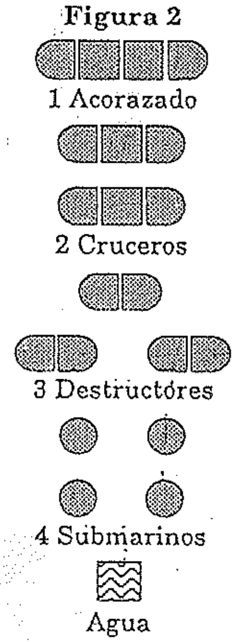
A





B

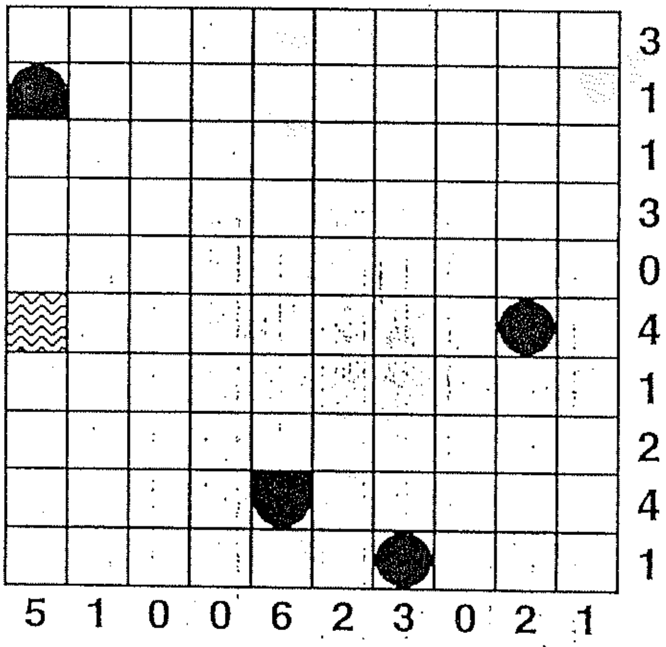


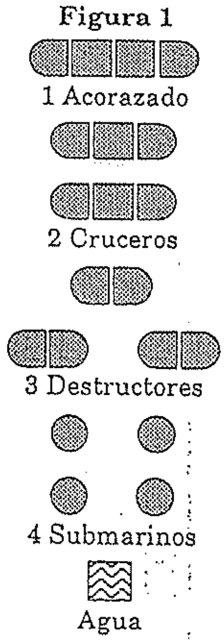


BATALLA NAVAL

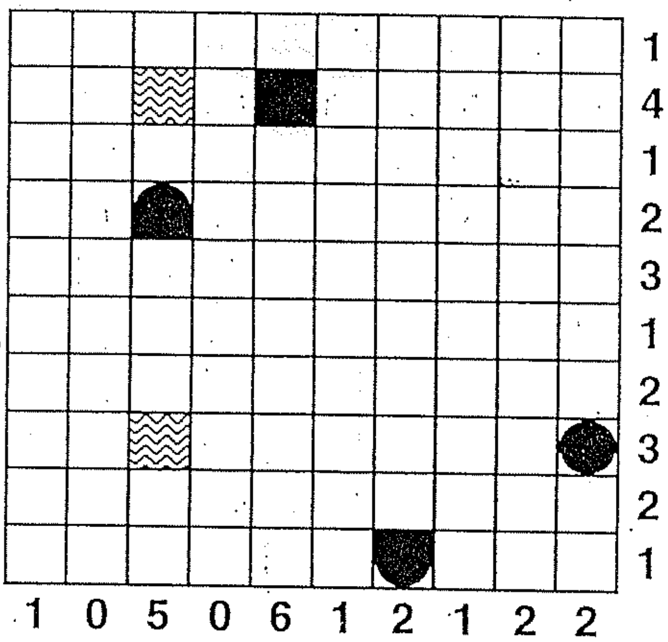
En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota, y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.). Además, al pie de cada columna y al costado derecho de cada fila, se indica con números cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor de cada barco hay agua.

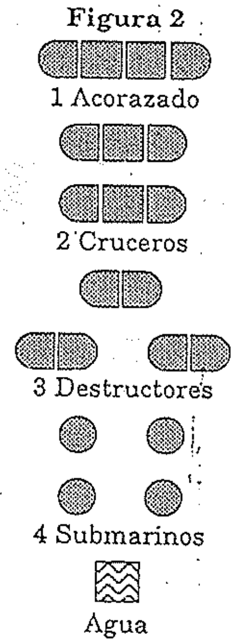
A





B





BATALLA NAVAL

En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. Sólo se conocen algunos de los cuadros ocupados por la flota, y algunos de los que están invadidos por agua (tal como se indica en el interior de cada tablero. Fíjese que las formas le indican si se trata de una punta de barco, de un submarino completo, etc.). Además, al pie de cada columna y al costado derecho de cada fila, se indica con números cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la situación de la flota. Tenga en cuenta que en todos los cuadros alrededor de cada barco hay agua.

A

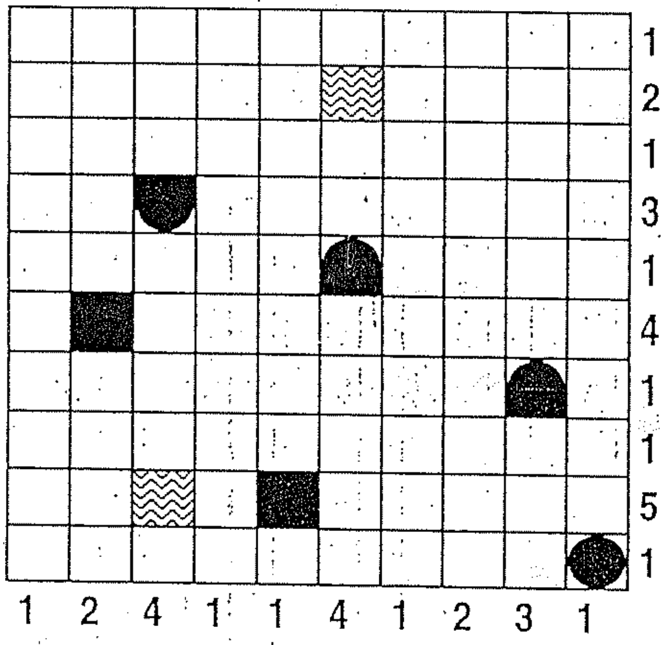
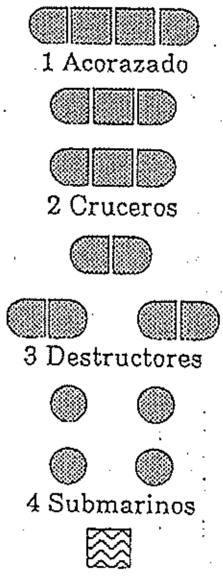


Figura 1



B

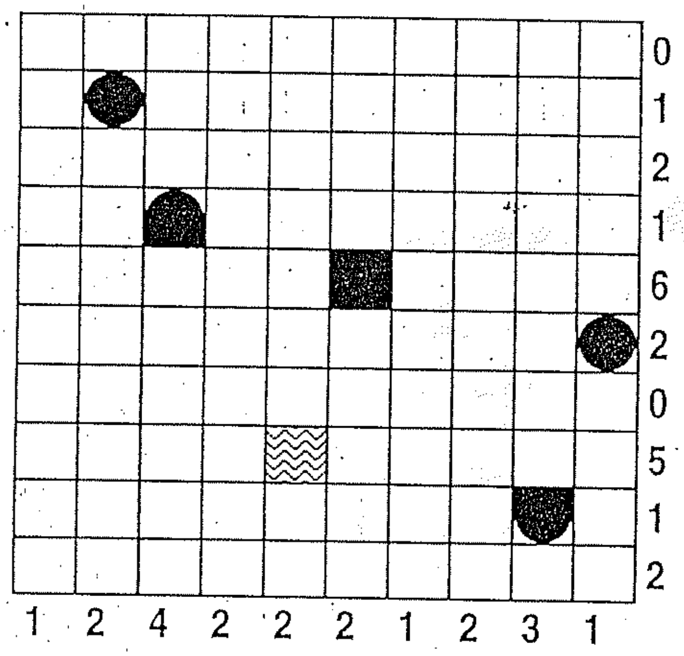
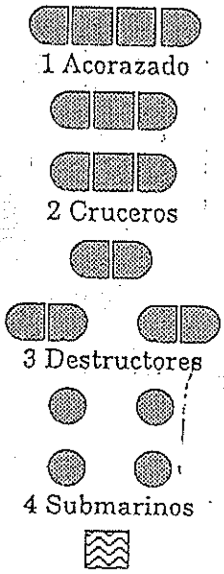


Figura 2

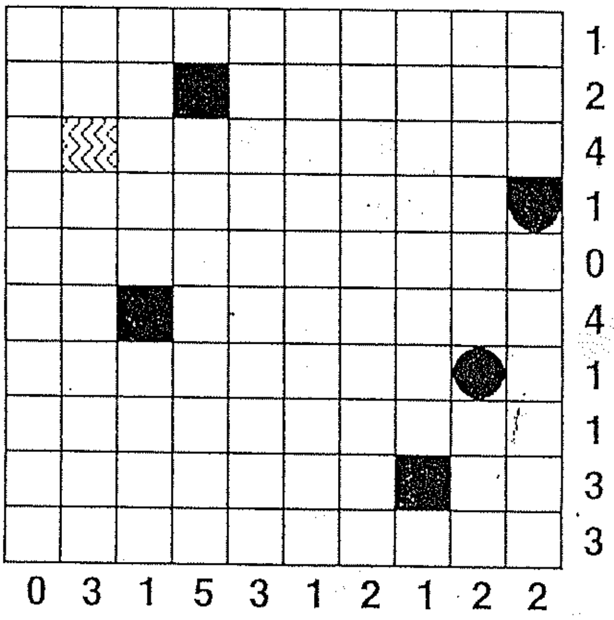


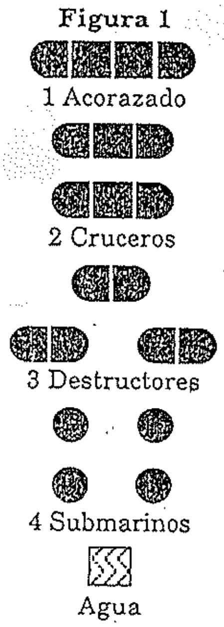
125

BATALLA NAVAL

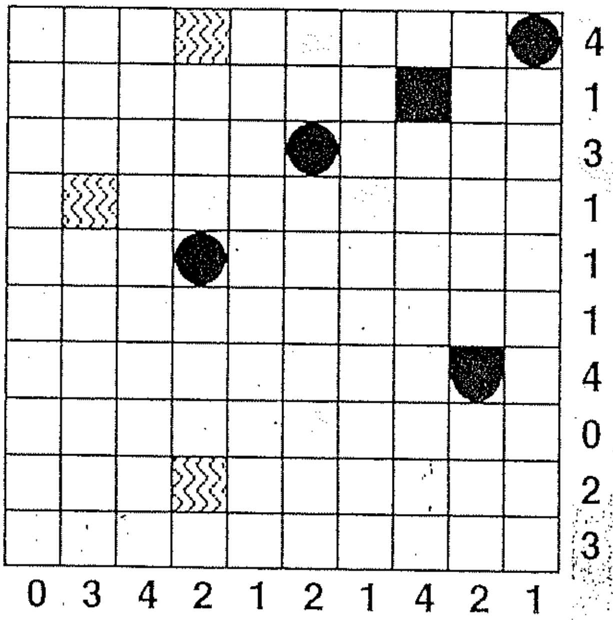
En cada tablero hay escondida una flota completa, igual a las que se muestran en las figuras 1 y 2. En cada uno se dan algunos de los cuadros invadidos por la flota, y otros que sólo tienen agua. Además, al pie de cada columna y al costado de cada hilera, se indica cuántos cuadros ocupa la flota en esa columna o hilera. Deduzca, para cada tablero, la ubicación de la flota. Tenga en cuenta que los barcos en ningún caso se tocan entre sí.

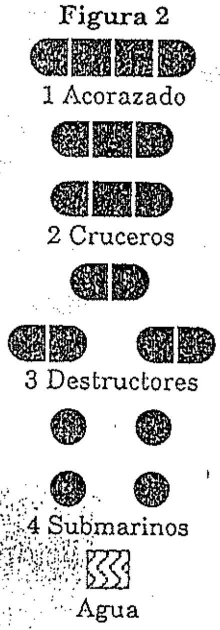
A.





B.

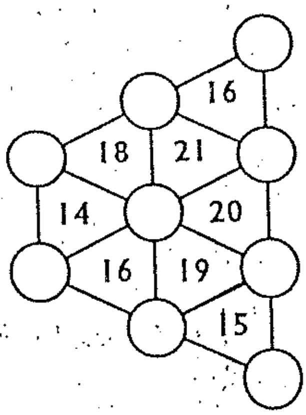




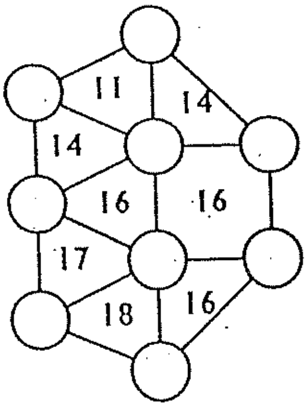
Figuras mágicas

En cada caso, ubique en los círculos los números del 1 al 9, sin repetirlos, para que los vértices de cada región sumen lo que en el centro de la región se indica.

A



B



Cripto-aritmética

En cada caso, sustituya cada letra por un dígito distinto para llegar a una correcta suma numérica. Cuando una letra se repite deberá repetir el dígito correspondiente. Cada suma tiene un código propio.

A. Cantado. Use los dígitos del 1 al 8.

```
    V O Z
  + V O Z
    V O Z
  -------
  C O R O
```

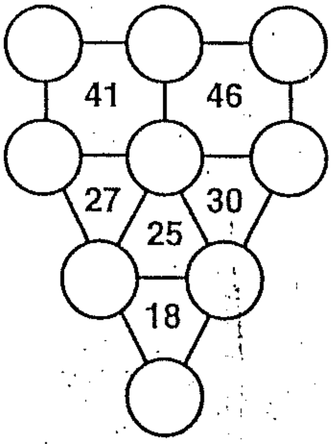
B. Encerrado. Use los dígitos del 1 al 9 para obtener la CARCEL más grande posible.

```
    P R E S O
  + R E J A S
  -----------
  C A R C E L
```

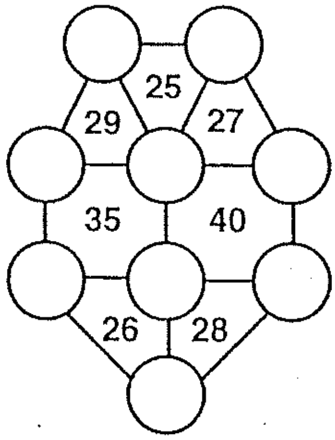
FIGURAS MAGICAS

En cada caso, ubique en los círculos los números del 5 al 13, sin repetirlos, para que los vértices de cada región sumen lo que en el centro de la región se indica.

A



B



CRIPTOARITMETICA

En cada caso, sustituya cada letra por un dígito distinto para llegar a una correcta suma numérica. Tenga en cuenta que una letra que se repite obliga a repetir el dígito correspondiente, y que cada suma tiene un código propio.

A. Aritmético. Use los dígitos del 3 al 9.

```
   N O N
+  N O N
   -----
   P A R
```

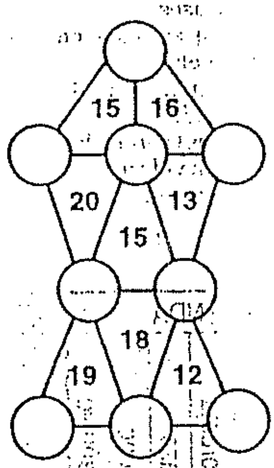
B. Para bailar. Use los dígitos del 0 al 9.

```
   V A L S E S
+          E N
       V I E N A
  -------------
 S T R A U S S
```

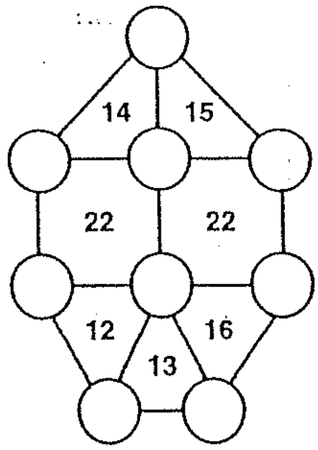
FIGURAS MAGICAS

En cada caso, ubique en los círculos los números del 1 al 9, sin repetirlos, para que los vértices de cada región sumen lo que en el centro de la región se indica.

A



B



CRIPTOARITMETICA

En cada caso, sustituya cada letra por un dígito distinto para llegar a una correcta suma numérica. Tenga en cuenta que una letra que se repite obliga a repetir el dígito correspondiente, y que cada suma tiene un código propio

A. Gramatical. Use los dígitos del 2 al 8.

```
  LETRA
+ LETRA
-------
 FRASE
```

B. Para escuchar. Use los dígitos del 0 al 6.

```
   ONDA
+  OIDO
-------
  RADIO
```

NUMERO OCULTO

Cada esquema da pistas con las que usted podrá deducir un número compuesto por cuatro cifras distintas (elegidas del 0 al 9), que no empieza con cero. En la columna B (de Bien) indicamos cuántos dígitos hay allí en común con el número buscado y en la misma posición. En la columna R (de Regular) se indica la cantidad de dígitos en común pero en posición incorrecta.

A

				B	R
				4	0
4	2	1	8	0	1
7	0	5	1	0	2
6	8	9	0	2	0
7	8	5	9	1	2

B

				B	R
				4	0
9	2	4	7	1	1
8	4	9	7	0	2
5	1	6	8	2	0
7	1	2	8	3	0

C

				B	R
				4	0
1	2	7	9	0	2
3	6	1	2	1	0
5	9	4	3	1	1
4	9	6	1	1	1

D

				B	R
				4	0
2	1	6	8	2	0
6	1	8	7	1	2
4	8	7	6	0	2
7	6	3	4	2	0

Número oculto

Cada esquema da pistas con las que usted podrá deducir un número compuesto por cuatro cifras distintas (elegidas del 0 al 9), que no empieza con cero. En la columna B (de Bien) indicamos cuántos dígitos hay allí en común con el número buscado y en la misma posición. En la columna R (de Regular) se indica la cantidad de dígitos en común pero en posición incorrecta. Si en algún caso encuentra tres de los cuatro dígitos que forman el número misterioso y no da con el restante (que no es ninguno de los dígitos que intervienen en los números-pista) deberá buscar cuál es el dígito que no forma parte de dichos números-pista. Si se trata de un único número ausente, ése será el cuarto dígito buscado.

A

	B	R
	4	0
7 8 0 4	2	0
3 0 1 9	0	3
3 4 0 6	1	0
1 9 8 4	1	1

B

	B	R
	4	0
2 7 5 9	2	0
7 3 8 0	0	1
2 3 9 6	0	3
1 9 3 6	0	3

C

	B	R
	4	0
1 2 9 3	0	2
6 1 7 5	1	0
5 9 0 6	1	2
6 9 5 8	1	1

D

	B	R
	4	0
7 1 3 9	1	1
3 1 7 9	2	0
9 3 6 4	0	3
4 0 2 8	0	0

E

	B	R
	4	0
1 9 4 6	1	1
4 3 6 5	1	0
6 4 5 1	0	1
2 8 3 4	0	0

F

	B	R
	4	0
6 9 8 3	2	2
2 0 4 9	0	1
4 6 1 5	0	1
4 9 6 3	3	0

Qu'est-ce qu'un jeu de nombres fléchés?

Les problèmes de nombres fléchés sont construits à partir d'un principe simple: la case fléchée vous indique 6, en face de 2 cases? Vous aurez à inscrire dans ces cases, en fonction des autres nombres fléchés, 5+1, 1+5, 2+4 ou 4+2, soit la décomposition en 2 nombres du total 6.

Seules interdictions: pas de répétition de nombres pour un même total. Pas de 3+3, donc. Et pas de répétition de sommes dans une même grille: si vous avez déjà utilisé dans la grille la réponse 5+1, il ne vous reste plus que les 2 possibilités 2+4 et 4+2.

Les calculs sont simples: on n'additionne que les chiffres de 1 à 9 (pas de zéro, donc). Le reste est affaire de logique.

Et pour simplifier vos débuts ou vous venir en aide lorsque vous êtes bloqués, deux précieuses aides sont prévues:

- un tableau de décomposition des nombres, afin de découvrir les bonnes combinaisons et de faire les bonnes additions, vous attend en pages centrales.
- un explicatif approfondi des problèmes de nombres fléchés, avec quelques trucs utiles, se trouve dans les dernières pages, avant les solutions.

Et pour commencer, un petit problème, avec sa solution:

	12 ↓	29 ↓		28 ↓	19 ↓	15 ↓
11 →			24 →			
14 →			10 → / 16 ↓			
22 →						
38 →						

SOLUTION

	2	9		9	8	7
	6	8		7	2	1
	1	5	7	4	3	2
	3	7	9	8	6	5

NOMBRES FLÉCHÉS N° 6

	33↓	16↓		23↓	15↓	12↓	18↓	35↓
9→	8	1	20→	9	2	3	1	5
7→	4	3	28→ / 6↓	8	3	9	2	6
18→	5	4	2	6	1	12→ / 8↓	4	8
18→	9	6	3	29→	5	7	8	9
10→	7	2	1	15→	4	1	3	7

Chasse-chiffres

JEU N° 7

■ *Ce jeu consiste en la recherche logique d'un nombre caché. Pour découvrir celui-ci, il suffit de comparer les indices situés à côté des nombres donnés: un chiffre sur fond bleu indique le nombre de chiffres communs et À LA MÊME PLACE que dans le nombre caché; le chiffre sur fond noir indique, PARMI LES CHIFFRES RESTANTS, le nombre d'éléments communs entre le nombre concerné et le nombre à découvrir.*

4	0	3

1	9	3	1	
9	5	4		1
5	1	0		1
0	1	3	1	1

4	3	6	1	
4	2	5	1	1
2	0	9	1	
9	7	1		1

1	9	6	1	
5	6	7		2
6	4	0	1	
9	5	3	1	

4	5	8	1	
6	4	1		2
2	6	7	1	
5	9	6	1	

6	0	3		2
4	5	2		1
3	0	2		2
1	7	4	1	

6	7	3	1	1
6	2	7		1
1	4	2	1	
3	2	1		1

Nombres fléchés

Chaque nombre inscrit dans une CASE BLEUE représente la somme des chiffres (de 1 à 9) à placer dans les cases blanches indiquées par la flèche. Reconstituez ainsi toute la grille, sachant que:
a) le chiffre ZÉRO n'est JAMAIS UTILISÉ.
b) POUR UNE MÊME SOMME, on utilisera des CHIFFRES TOUS DIFFÉRENTS (par exemple, si l'on a 8 dans une case bleue et deux cases blanches indiquées par la flèche, on ne peut en aucun cas inscrire deux fois le chiffre 4; on doit choisir entre 1+7, 6+2 et 3+5).
c) une MÊME SÉQUENCE de chiffres, QUEL QU'EN SOIT L'ORDRE, ne peut apparaître qu'UNE SEULE FOIS.

	32 ↓	33 ↓	7 ↓	19 ↓	21 ↓		11 ↓	15 ↓	19 ↓
33 →						12 →			
17 →						7 → / 10 ↓			
17 →			6 → / 12 ↓				6 → / 7 ↓		
23 →				34 →					
15 →				16 →					

	29 ↓	16 ↓	10 ↓		29 ↓	10 ↓	8 ↓	18 ↓	34 ↓
11 →				33 →					
14 →				18 → / 18 ↓					
12 →			9 → / 8 ↓				7 → / 3 ↓		
33 →						9 →			
18 →						19 →			

NOMBRES FLÉCHÉS N° 14

Nombres fléchés

Chaque nombre inscrit dans une CASE BLEUE représente la somme des chiffres (de 1 à 9) à placer dans les cases blanches indiquées par la flèche. Reconstituez ainsi toute la grille, sachant que:

a) le chiffre ZÉRO n'est JAMAIS UTILISÉ.

b) POUR UNE MÊME SOMME, on utilisera des CHIFFRES TOUS DIFFÉRENTS (par exemple, si l'on a 8 dans une case bleue et deux cases blanches indiquées par la flèche, on ne peut en aucun cas inscrire deux fois le chiffre 4; on doit choisir entre 1+7, 6+2 et 3+5).

c) une MÊME SÉQUENCE de chiffres, QUEL QU'EN SOIT L'ORDRE, ne peut apparaître qu'UNE SEULE FOIS.

	24 ↓	12 ↓	19 ↓	12 ↓	37 ↓		8 ↓	32 ↓	14 ↓	11 ↓
35 →						11 →				
16 →						25 → / 4 ↓				
20 →				15 → / 6 ↓					29 ↓	30 ↓
11 →			9 → / 8 ↓				17 → / 15 ↓			
	31 ↓	13 → / 18 ↓				29 → / 19 ↓				
7 →				11 → / 12 ↓				14 → / 27 ↓		
26 →					19 → / 17 ↓					
9 →			20 → / 13 ↓				11 → / 16 ↓			
30 →						28 →				
15 →						23 →				

NOMBRES FLÉCHÉS N° 36

Voyez les explications page 16.

	21	10		12	22		10	32	28	14
11			14			18				
8			11 / 15			27 / 3				
19				10 / 8			23 / 12			
	16	13 / 8			15 / 10					
9			9 / 19			6 / 9			37	26
21				8 / 41				12 / 22		
10					32 / 7					
	14	25 / 4					15 / 13			
6			5 / 6			12 / 18				
20					12 / 34			17 / 16		
	25	26 / 14					10 / 13			
43									11	20
10			9 / 5			26 / 11				
7				9			12			
21				15			10			

NOMBRES FLÉCHÉS N° 30

Voyez les explications page 16.

	6 ↓	20 ↓	34 ↓	30 ↓	13 ↓	16 ↓		4 ↓	26 ↓	12 ↓
22 →							17 →			
37 →							12 → / 42 ↓			
26 →					17 → / 27 ↓			10 → / 5 ↓		
	20 ↓	22 → / 18 ↓				10 → / 3 ↓				
23 →				12 → / 17 ↓					33 ↓	18 ↓
5 →			15 → / 33 ↓					14 → / 10 ↓		
22 →						27 → / 21 ↓				
25 →					16 → / 15 ↓					
14 →				20 → / 22 ↓				8 → / 13 ↓		
	17 ↓	29 → / 35 ↓					21 → / 21 ↓			
27 →					15 → / 19 ↓				13 ↓	24 ↓
6 →			29 → / 7 ↓							
9 →				14 → / 9 ↓				12 → / 10 ↓		
32 →						11 →				
20 →						14 →				

Possibilités de décompositions de sommes de nombres différents.

3	1 + 2				
4	1 + 3				
5	1 + 4 2 + 3				
6	1 + 5 2 + 4	1 + 2 + 3			
7	1 + 6 2 + 5 3 + 4	1 + 2 + 4			
8	1 + 7 2 + 6 3 + 5	1 + 2 + 5 1 + 3 + 4			
9	1 + 8 2 + 7 3 + 6 4 + 5	1 + 2 + 6 1 + 3 + 5 2 + 3 + 4			
10	1 + 9 2 + 8 3 + 7 4 + 6	1 + 2 + 7 1 + 3 + 6 1 + 4 + 5 2 + 3 + 5	1 + 2 + 3 + 4		
11	2 + 9 3 + 8 4 + 7 5 + 6	1 + 2 + 8 1 + 3 + 7 1 + 4 + 6 2 + 3 + 6 2 + 4 + 5	1 + 2 + 3 + 5		
12	3 + 9 4 + 8 5 + 7	1 + 2 + 9 1 + 3 + 8 1 + 4 + 7 1 + 5 + 6 2 + 3 + 7 2 + 4 + 6 3 + 4 + 5	1 + 2 + 3 + 6 1 + 2 + 4 + 5		
13	4 + 9 5 + 8 6 + 7	1 + 3 + 9 1 + 4 + 8 1 + 5 + 7 2 + 3 + 8 2 + 4 + 7 2 + 5 + 6 3 + 4 + 6	1 + 2 + 3 + 7 1 + 2 + 4 + 6 1 + 3 + 4 + 5		
14	5 + 9 6 + 8	1 + 4 + 9 1 + 5 + 8 1 + 6 + 7 2 + 3 + 9 2 + 4 + 8 2 + 5 + 7 3 + 4 + 7 3 + 5 + 6	1 + 2 + 3 + 8 1 + 2 + 4 + 7 1 + 2 + 5 + 6 1 + 3 + 4 + 6 2 + 3 + 4 + 5		
15	6 + 9 7 + 8	1 + 5 + 9 1 + 6 + 8 2 + 4 + 9 2 + 5 + 8 2 + 6 + 7 3 + 4 + 8 3 + 5 + 7 4 + 5 + 6	1 + 2 + 3 + 9 1 + 2 + 4 + 8 1 + 2 + 5 + 7 1 + 3 + 4 + 7 1 + 3 + 5 + 6 2 + 3 + 4 + 6	1 + 2 + 3 + 4 + 5	
16	7 + 9	1 + 6 + 9 1 + 7 + 8 2 + 5 + 9 2 + 6 + 8 3 + 4 + 9 3 + 5 + 8 3 + 6 + 7 4 + 5 + 7	1 + 2 + 4 + 9 1 + 2 + 5 + 8 1 + 2 + 6 + 7 1 + 3 + 4 + 8 1 + 3 + 5 + 7 1 + 4 + 5 + 6 2 + 3 + 4 + 7 2 + 3 + 5 + 6	1 + 2 + 3 + 4 + 6	
17	8 + 9	1 + 7 + 9 2 + 6 + 9 2 + 7 + 8 3 + 5 + 9 3 + 6 + 8 4 + 5 + 8 4 + 6 + 7	1 + 2 + 5 + 9 1 + 2 + 6 + 8 1 + 3 + 4 + 9 1 + 3 + 5 + 8 1 + 3 + 6 + 7 1 + 4 + 5 + 7 2 + 3 + 4 + 8 2 + 3 + 5 + 7 2 + 4 + 5 + 6	1 + 2 + 3 + 4 + 7 1 + 2 + 3 + 5 + 6	
18	1 + 8 + 9 2 + 7 + 9 3 + 6 + 9 3 + 7 + 8 4 + 5 + 9 4 + 6 + 8 5 + 6 + 7	1 + 2 + 6 + 9 1 + 2 + 7 + 8 1 + 3 + 5 + 9 1 + 3 + 6 + 8 1 + 4 + 5 + 8 1 + 4 + 6 + 7 2 + 3 + 4 + 9 2 + 3 + 5 + 8 2 + 3 + 6 + 7 2 + 4 + 5 + 7 3 + 4 + 5 + 6	1 + 2 + 3 + 4 + 8 1 + 2 + 3 + 5 + 7 1 + 2 + 4 + 5 + 6		
19	2 + 8 + 9 3 + 7 + 9 4 + 6 + 9 4 + 7 + 8 5 + 6 + 8	1 + 2 + 7 + 9 1 + 3 + 6 + 9 1 + 3 + 7 + 8 1 + 4 + 5 + 9 1 + 4 + 6 + 8 1 + 5 + 6 + 7 2 + 3 + 5 + 9 2 + 3 + 6 + 8 2 + 4 + 5 + 8 2 + 4 + 6 + 7 3 + 4 + 5 + 7	1 + 2 + 3 + 4 + 9 1 + 2 + 3 + 5 + 8 1 + 2 + 3 + 6 + 7 1 + 2 + 4 + 5 + 7 1 + 3 + 4 + 5 + 6		
20	3 + 8 + 9 4 + 7 + 9 5 + 6 + 9 5 + 7 + 8	1 + 2 + 8 + 9 1 + 3 + 7 + 9 1 + 4 + 6 + 9 1 + 4 + 7 + 8 1 + 5 + 6 + 8 2 + 3 + 6 + 9 2 + 3 + 7 + 8 2 + 4 + 5 + 9 2 + 4 + 6 + 8 2 + 5 + 6 + 7 3 + 4 + 5 + 8 3 + 4 + 6 + 7	1 + 2 + 3 + 5 + 9 1 + 2 + 3 + 6 + 8 1 + 2 + 4 + 5 + 8 1 + 2 + 4 + 6 + 7 1 + 3 + 4 + 5 + 7 2 + 3 + 4 + 5 + 6		
21	4 + 8 + 9 5 + 7 + 9 6 + 7 + 8	1 + 3 + 8 + 9 1 + 4 + 7 + 9 1 + 5 + 6 + 9 1 + 5 + 7 + 8 2 + 3 + 7 + 9 2 + 4 + 6 + 9 2 + 4 + 7 + 8 2 + 5 + 6 + 8 3 + 4 + 5 + 9 3 + 4 + 6 + 8 3 + 5 + 6 + 7	1 + 2 + 3 + 6 + 9 1 + 2 + 3 + 7 + 8 1 + 2 + 4 + 5 + 9 1 + 2 + 4 + 6 + 8 1 + 2 + 5 + 6 + 7 1 + 3 + 4 + 5 + 8 1 + 3 + 4 + 6 + 7 2 + 3 + 4 + 5 + 7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	
22	5 + 8 + 9 6 + 7 + 9	1 + 4 + 8 + 9 1 + 5 + 7 + 9 1 + 6 + 7 + 8 2 + 3 + 8 + 9 2 + 4 + 7 + 9 2 + 5 + 6 + 9 2 + 5 + 7 + 8 3 + 4 + 6 + 9 3 + 4 + 7 + 8 3 + 5 + 6 + 8 4 + 5 + 6 + 7	1 + 2 + 3 + 7 + 9 1 + 2 + 4 + 6 + 9 1 + 2 + 4 + 7 + 8 1 + 2 + 5 + 6 + 8 1 + 3 + 4 + 5 + 9 1 + 3 + 4 + 6 + 8 1 + 3 + 5 + 6 + 7 2 + 3 + 4 + 5 + 8 2 + 3 + 4 + 6 + 7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7	
23	6 + 8 + 9	1 + 5 + 8 + 9 1 + 6 + 7 + 9 2 + 4 + 8 + 9 2 + 5 + 7 + 9 2 + 6 + 7 + 8 3 + 4 + 7 + 9 3 + 5 + 6 + 9 3 + 5 + 7 + 8 4 + 5 + 6 + 8	1 + 2 + 3 + 8 + 9 1 + 2 + 4 + 7 + 9 1 + 2 + 5 + 6 + 9 1 + 2 + 5 + 7 + 8 1 + 3 + 4 + 6 + 9 1 + 3 + 4 + 7 + 8 1 + 3 + 5 + 6 + 8 1 + 4 + 5 + 6 + 7 2 + 3 + 4 + 5 + 9 2 + 3 + 4 + 6 + 8 2 + 3 + 5 + 6 + 7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7	
24	7 + 8 + 9	1 + 6 + 8 + 9 2 + 5 + 8 + 9 2 + 6 + 7 + 9 3 + 4 + 8 + 9 3 + 5 + 7 + 9 3 + 6 + 7 + 8 4 + 5 + 6 + 9 4 + 5 + 7 + 8	1 + 2 + 4 + 8 + 9 1 + 2 + 5 + 7 + 9 1 + 2 + 6 + 7 + 8 1 + 3 + 4 + 7 + 9 1 + 3 + 5 + 6 + 9 1 + 3 + 5 + 7 + 8 1 + 4 + 5 + 6 + 8 2 + 3 + 4 + 6 + 9 2 + 3 + 4 + 7 + 8 2 + 3 + 5 + 6 + 8 2 + 4 + 5 + 6 + 7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7	

25	1 + 7 + 8 + 9 2 + 6 + 8 + 9 3 + 5 + 8 + 9 3 + 6 + 7 + 9 4 + 5 + 7 + 9 4 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 5 + 8 + 9 1 + 2 + 6 + 7 + 9 1 + 3 + 4 + 8 + 9 1 + 3 + 5 + 7 + 9 1 + 3 + 6 + 7 + 8 1 + 4 + 5 + 6 + 9 1 + 4 + 5 + 7 + 8 2 + 3 + 4 + 7 + 9 2 + 3 + 5 + 6 + 9 2 + 3 + 5 + 7 + 8 2 + 4 + 5 + 6 + 8 3 + 4 + 5 + 6 + 7	1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 8 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7	
26	2 + 7 + 8 + 9 3 + 6 + 8 + 9 4 + 5 + 8 + 9 4 + 6 + 7 + 9 5 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 6 + 8 + 9 1 + 3 + 5 + 8 + 9 1 + 3 + 6 + 7 + 9 1 + 4 + 5 + 7 + 9 1 + 4 + 6 + 7 + 8 2 + 3 + 4 + 8 + 9 2 + 3 + 5 + 7 + 9 2 + 3 + 6 + 7 + 8 2 + 4 + 5 + 6 + 9 2 + 4 + 5 + 7 + 8 3 + 4 + 5 + 6 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 9 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 8 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 8 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7	
27	3 + 7 + 8 + 9 4 + 6 + 8 + 9 5 + 6 + 7 + 9	1 + 2 + 7 + 8 + 9 1 + 3 + 6 + 8 + 9 1 + 4 + 5 + 8 + 9 1 + 4 + 6 + 7 + 9 1 + 5 + 6 + 7 + 8 2 + 3 + 5 + 8 + 9 2 + 3 + 6 + 7 + 9 2 + 4 + 5 + 7 + 9 2 + 4 + 6 + 7 + 8 3 + 4 + 5 + 6 + 9 3 + 4 + 5 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 9 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7	
28	4 + 7 + 8 + 9 5 + 6 + 8 + 9	1 + 3 + 7 + 8 + 9 1 + 4 + 6 + 8 + 9 1 + 5 + 6 + 7 + 9 2 + 3 + 6 + 8 + 9 2 + 4 + 5 + 8 + 9 2 + 4 + 6 + 7 + 9 2 + 5 + 6 + 7 + 8 3 + 4 + 5 + 7 + 9 3 + 4 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 9 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 9 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 9 1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
29	5 + 7 + 8 + 9	1 + 4 + 7 + 8 + 9 1 + 5 + 6 + 8 + 9 2 + 3 + 7 + 8 + 9 2 + 4 + 6 + 8 + 9 2 + 5 + 6 + 7 + 9 3 + 4 + 5 + 8 + 9 3 + 4 + 6 + 7 + 9 3 + 5 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 6 + 8 + 9 1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 9 1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 9 1 + 2 + 5 + 6 + 7 + 8 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8
30	6 + 7 + 8 + 9	1 + 5 + 7 + 8 + 9 2 + 4 + 7 + 8 + 9 2 + 5 + 6 + 8 + 9 3 + 4 + 6 + 8 + 9 3 + 5 + 6 + 7 + 9 4 + 5 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 9 1 + 2 + 5 + 6 + 7 + 9 1 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 1 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8

31	1 + 6 + 7 + 8 + 9 2 + 5 + 7 + 8 + 9 3 + 4 + 7 + 8 + 9 3 + 5 + 6 + 8 + 9 4 + 5 + 6 + 7 + 9	1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 9 1 + 2 + 5 + 6 + 8 + 9 1 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 1 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8	
32	2 + 6 + 7 + 8 + 9 3 + 5 + 7 + 8 + 9 4 + 5 + 6 + 8 + 9	1 + 2 + 5 + 7 + 8 + 9 1 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 1 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8	
33	3 + 6 + 7 + 8 + 9 4 + 5 + 7 + 8 + 9	1 + 2 + 6 + 7 + 8 + 9 1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9 1 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 2 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	
34	4 + 6 + 7 + 8 + 9	1 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 1 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 2 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9 2 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9	1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	
35	5 + 6 + 7 + 8 + 9	1 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 2 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9	1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	
36		1 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9	1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9	1+2+3+4+5+6+7+8
37		2 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9	1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9	1+2+3+4+5+6+7+9
38		3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9	1 + 2 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9	1+2+3+4+5+6+8+9
39		4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9	1 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9	1+2+3+4+5+7+8+9
40	1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9		1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9	
41	2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9		1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9	
42	3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9		1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9	
43	1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9			
44	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9			
45	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9			

Editorial

Chère lectrice, cher lecteur,

En achetant *Logigraphe*, vous entrez dans un nouveau monde du jeu, vous découvrez une nouvelle source de plaisir ludique: la logique visuelle.

Avec ce nouveau concept développé par Sport Cérébral, vous exercerez vos talents de logicien et vous verrez les énigmes se dévoiler peu à peu sous vos yeux.

Commencez par le jeu-titre de cette revue: le Logigraphe, que les lecteurs de nos revues de logique, *Logigram*, *Logiplus* et *Nombres fléchés* connaissent bien et apprécient. En combinant logiquement les données chiffrées, vous pourrez remplir la grille et voir ainsi apparaître au fil de votre raisonnement le dessin-solution.

Avec le Squelettres, vous découvrirez le "squelette" de la grille, c'est-à-dire ses cases noires, en interprétant logiquement les données chiffrées qu'elle contient. Il vous suffira ensuite d'y placer les mots d'une liste thématique. Quant au Logicube, il fera appel à la logique géométrique.

Enfin, *Logigraphe* vous offre les Classiques des jeux de chiffres et de logique: Nombres fléchés, Nombres placés, Chasse-chiffres, Tricodage.

Voilà de quoi satisfaire les appétits variés des nombreux adeptes de la logique et du jeu!

A bientôt pour le n° 6, à paraître fin septembre.

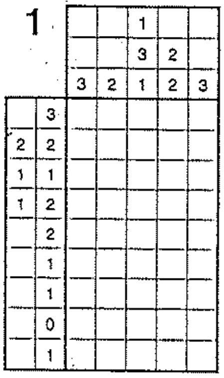
La Rédaction

Explicatif

Le Logigraphe

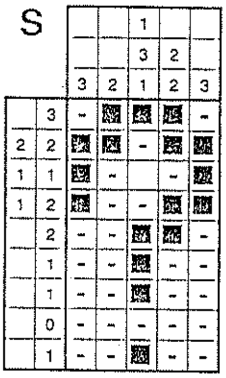
Le principe de ce jeu est de placer de manière logique des cases noires dans une grille pour découvrir un dessin-solution.
Les nombres à gauche des grilles donnent les longueurs des ensembles de cases noires à placer dans la rangée correspondante. Les nombres au-dessus des grilles donnent les hauteurs des ensembles de cases noires à placer dans la colonne correspondante. Bien entendu, chaque ensemble de cases noires est séparé par une case blanche au moins!

1

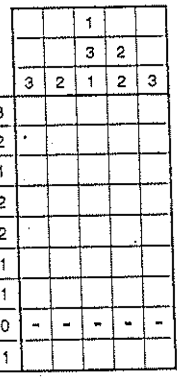


Pour pouvoir arriver à la solution (Grille S) en partant de la grille 1, nous vous proposons le raisonnement suivant. Il va de soi qu'il en existe d'autres.

S



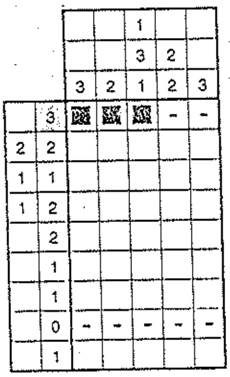
2



Le chiffre 0 de la 8e rangée indique qu'il n'y a pas de cases noires dans cette rangée, donc rien que des cases blanches (indiquées ici par des traits).

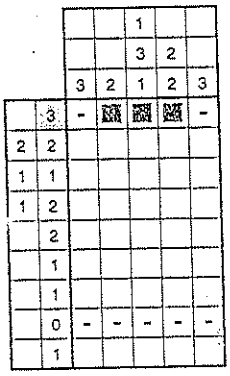
Le chiffre 3 de la 1re rangée indique qu'il y a 3 cases noires accolées. Dans ce cas, il y a 3 possibilités:

A



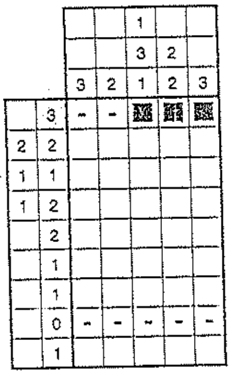
ou

B



ou

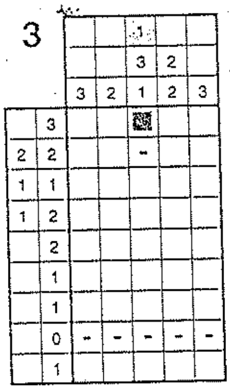
C



On constate qu'une case est noire dans les 3 cas: on l'indique dans la grille.

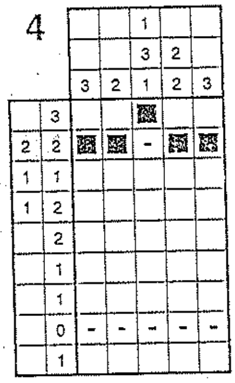
Si on compare cette case dont on est certain avec les chiffres des colonnes, au-dessus de la grille, on constate que cette case correspond au premier chiffre 1 de la 3e colonne: on peut donc inscrire une case blanche dans la grille, juste en-dessous de cette case noire.

3



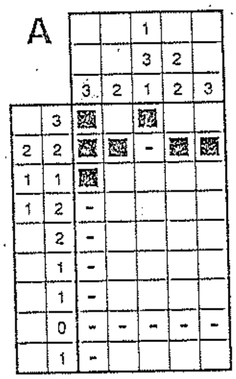
Les deux chiffres de la 2e rangée, 2 2, indiquent qu'il y a 2 groupes de 2 cases noires accolées, séparées par au moins 1 case blanche. Dans ce cas, il n'y a qu'une solution:

4

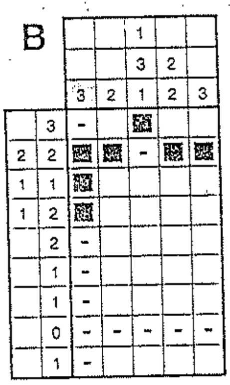


Pour le chiffre 3 de la 1re colonne, il ne reste que 2 possibilités, vu que la 2e rangée est certaine:

A

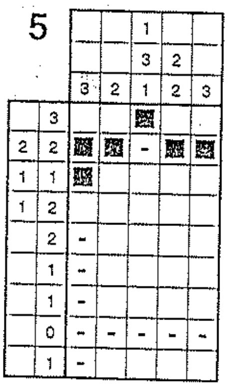


B

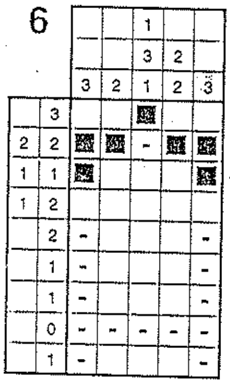


On en déduit une case noire et 5 cases blanches, puisqu'elles se retrouvent dans les 2 possibilités. On suit le même raisonnement pour la 5e colonne.

5



6

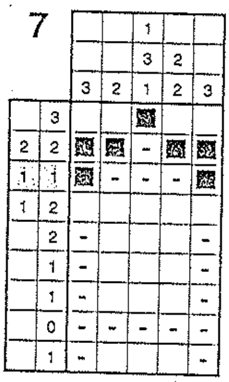


Ces nouvelles cases noires impliquent trois cases blanches pour la 3e rangée: en effet, les chiffres 1 1 indiquent qu'il n'y a que 2 cases noires, séparées par 1 ou plusieurs cases blanches.

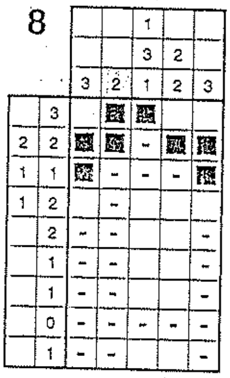
L'une de ces nouvelles cases blanches nous permet de déduire une case noire dans la 2e colonne, que l'on peut compléter par une série de cases blanches.

A vous de continuer!

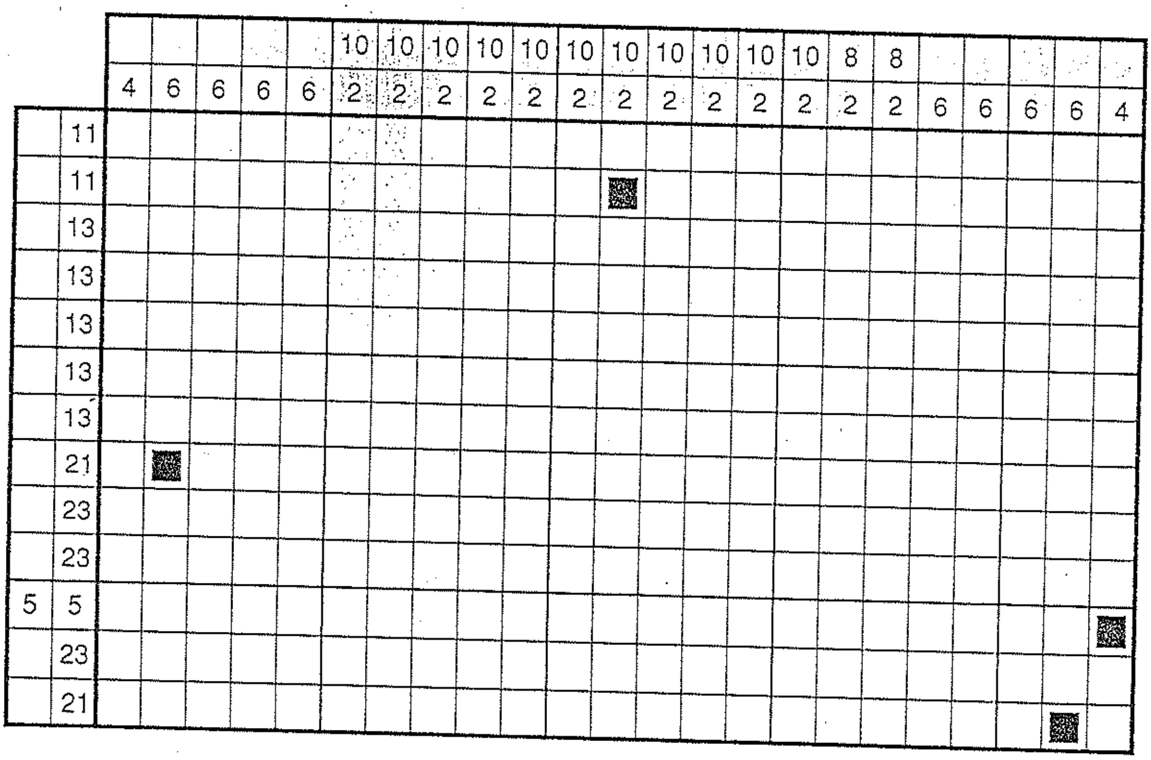
7



8



LOGIGRAPHE N° 1



LOGIGRAPHE N° 2

										1	2		2							
			1						2	1	1	3	2	2	3	2	1	2	2	
1	2	4	3	6	3	2	2	2	2	2	3	7	3	5	3	2	1	1	1	1

		2	4
		5	2
		3	2
			3
			1
			11
		5	5
2	1	1	2
		3	3
		4	4
			11
			9

LOGIGRAPHE N° 3

													2				1	
		1	1			3	3	3				6	2				2	2
2	1	9	9	1	8	3	3	3	8	1		2	1	10		10	2	6

					2
			3	3	3
	2	5	3	1	1
	2	5	1	1	1
2	1	1	1	1	1
	2	1	1	3	3
	2	1	1	3	3
2	1	1	1	1	1
	2	5	1	1	1
1	2	5	1	1	3
		4	3	3	3
				1	1

LOGIGRAPHE N° 4

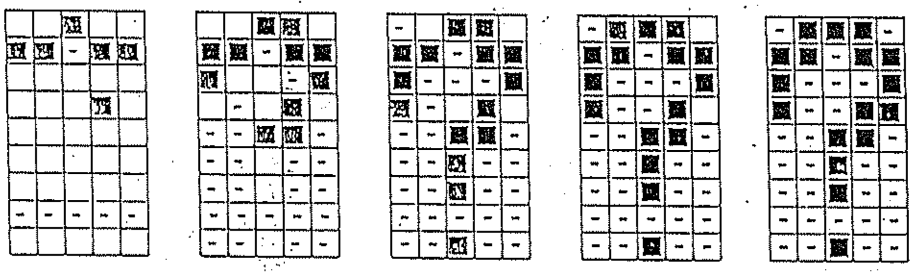
												2	2	2						
						2	2	2				2	2	2						
					2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2			2		
					2	1	1	2	5	5	5	1	1	1	2			1	2	
	2	2		11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		18	1	1	
	1	1		5	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	4	1	
7	1	1	18	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	7	3	1	3	7

			15
			15
		2	2
		2	2
		2	2
		2	2
		2	2
		2	2
		2	2
			15
			15
	4	3	4
	4	5	4
	1	15	1
1	2	2	1
	5	3	5
1	2	2	1
			21
		1	1
		1	3
		12	1
	1	1	1
	1	1	3
1	1	1	1
		12	3

LOGIGRAPHE N° 10

Le principe de ce jeu est de placer de manière logique des cases noires dans une grille pour découvrir un dessin-solution.
Les nombres à gauche des grilles donnent les longueurs des ensembles de cases noires à placer dans la ligne correspondante. Le nombres au-dessus des grilles donnent les hauteurs des ensembles de cases noires à placer dans la colonne correspondante. Bien entendu, chaque ensemble de cases noires est séparé par une case blanche au moins!
Exemple: si dans une grille de 7 cases de largeur, vous disposez à gauche des nombres 2 1 2, vous pouvez placer 2 cases noires, 1 blanche, 1 noire, 1 blanche et enfin 2 noires. Dans la plupart des cas cependant, ce n'est pas aussi facile, à vous d'analyser chaque ligne, de placer les cases noires et blanches déterminées à coup sûr, puis d'analyser les colonnes, placer les cases, puis revenir aux lignes et ainsi de suite.
Pour illustrer le principe du jeu, nous avons représenté ci-dessous les 5 phases de résolution de la première grille en notant en bleu les découvertes de chaque phase et en noir celles des phases précédentes. Cachez-les si vous ne voulez pas d'aide.

				1		
				3	2	
		3	2	1	2	3
	3					
2	2					
1	1					
1	2					
	2					
	1					
	1					
	0					
	1					



					3	11			12	11						13	10			4	4	7			1		
				5	4	1	11	15	2	1	11	10	10	10	16	2	1	11	10	3	2	1	10	8	4	2	2
		2	2																								
	4	4	1																								
		12	3																								
	13	2	2																								
		15	6																								
		15	4																								
		17	4																								
		1	20																								
		1	19																								
		1	19																								
	1	14	3																								
4	3	2	2																								
	3	2	2																								
2	1	1	2																								
1	1	1	1																								
1	2	2	2																								
2	2	2	2																								

LOGIGRAPHE N° 40

									2	2					1	1	1	1		
	3	2	2	3				8	4	4	8		1	1	3	2	2	3	1	
5	2	1	1	2	7	7	11	2	1	1	2	11	7	7	2	1	1	2	5	1

			4
			6
		2	10
			6
			6
			18
			20
2	5	5	2
1	3	3	1
1	3	3	1
2	5	5	2
			18

LOGIGRAPHE N° 41

						1	1	1	2	3				1						
						1	1	1	1	3	2	1	1	1						
7	7	7	7	5	11	1	1	1	1	2	1	1	1	1	11	5	7	7	7	7

			3
			11
	1	1	1
4	1	1	4
	6	1	6
	6	1	6
		11	7
		6	6
		6	6
4	1	1	4
	1	1	1
			11

LOGIGRAPHE N° 42

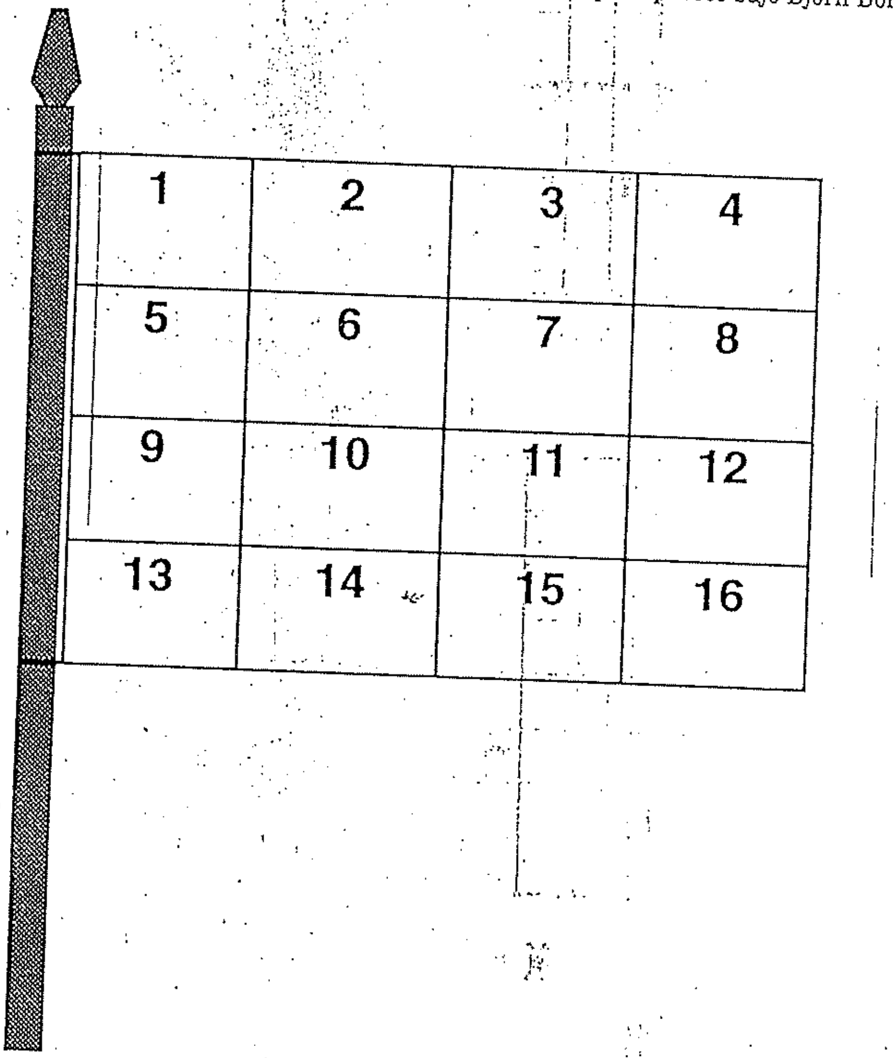
										1									
					1		1	1		3	1		1						
			1	1	2		3	3	1	9	3	22	2		1	1			
3	13	28	13	3	1	22	1	9	17	1	6	1	1	1	3	13	28	13	3

				16
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
1	1	3	1	1
1	1	3	1	1
1	1	3	1	1
1	1	1	1	1
1	1	3	1	1
		3	7	3
		3	7	3
		3	9	3
3	2	3	2	3
3	1	3	1	3
3	1	3	1	3
		3	9	3
		3	4	3
	3	1	1	3
	3	1	1	3
	5	1	1	5
		5	4	5
			5	5

BANDERA DE CAMPEONES

Carlitos eligió las mejores fotos de sus 16 campeones predilectos, compró un poco de tela, y fue hasta la fotocopiadora laser más cercana para dejar estampados a sus ídolos en esta singular bandera. Usando las pistas y la figura, descubra en qué lugar aparece cada cabballero.

1. Hay cuatro campeones de ajedrez (Fischer, Karpov, Kasparov y Spassky), cuatro de Fórmula 1 (Clark, Fangio, Fittipaldi y Prost), cuatro de fútbol (Beckenbauer, Cruyff, Maradona y Pelé), y cuatro de tenis (Agassi, Borg, Lendl y Vilas).
2. En cada fila y cada columna hay fotos de cuatro disciplinas diferentes.
3. Fangio está en un cuadro impar, justo bajo Pelé y a la izquierda de un tenista.
4. Jim Clark, Franz Beckenbauer, Garry Kasparov y Guillermo Vilas aparecen en este orden, de arriba hacia abajo.
5. Maradona está en la casilla número 10. En esa misma diagonal aparecen dos campeones de ajedrez.
6. La foto de Spassky está justo a la izquierda de la de Agassi y ésta, justo sobre la de Bobby Fischer.
7. Beckenbauer, Prost y Fittipaldi aparecen en diagonal, en este orden.
8. Anatoli Karpov aparece bajo Björn Borg.



JUEGOS DE LOGICA: COMO RESOLVERLOS

Los juegos de lógica son todos aquellos que se pueden resolver por pura deducción. En los enigmas de Quién es Quién, donde se trata de correlacionar ciertas características (nombre, apellido, profesión, edad, etc.) le proponemos el uso de diagramas de múltiple entrada. Aquí le decimos cómo se puede ir resolviendo un caso sencillo.

TE PARA TRES

Tres amigas se reúnen a tomar el té. Deduzca nombre, apellido y actividad de cada una.

1. Beatriz no es García.
2. López trabaja como secretaria en una oficina.
3. La actriz se llama Claudia.
4. La maestra no es Méndez.

(En estos juegos no hay dos variables con una misma cualidad. Es decir que aquí tenemos tres mujeres con nombres y apellidos distintos y con trabajos también distintos.)

SOLUCION

En el esquema vamos a indicar con una cruz (X) las relaciones que no valen y que entonces quedan eliminadas y con un círculo (O) las relaciones correctas.

Por pista 1 colocamos una X en el cruce de Beatriz con García:

		APELLIDO			ACTIVID.		
		García	López	Méndez	Actriz	Maestra	Secretaria
NOMBRE	Alicia						
	Beatriz	X					
	Claudia						
ACTIVID.	Actriz						
	Maestra						
	Secretaria						

La pista 2 nos da una relación correcta: López es secretaria. Colocamos un O en el cruce de secretaria con López. Al marcar un O en un sector, todas las casillas de su horizontal y su vertical deben llenarse con X pues quedan eliminadas. En este caso, en el sector ACTIVIDAD-APELLIDO, colocamos las X en las casillas secretaria-García, secretaria-Méndez, actriz-López y maestra-López. El esquema queda así:

		APELLIDO			ACTIVID.		
		García	López	Méndez	Actriz	Maestra	Secretaria
NOMBRE	Alicia						
	Beatriz	X					
	Claudia						
ACTIVID.	Actriz		X				
	Maestra		X				
	Secretaria	X	O	X			

Incorpore usted en el esquema los datos correspondientes a las pistas 3 y 4. Si siguió nuestras indicaciones, el esquema deberá verse así:

		APELLIDO			ACTIVID.		
		García	López	Méndez	Actriz	Maestra	Secretaria
NOMBRE	Alicia				X		
	Beatriz	X			X		
	Claudia				O	X	X
ACTIVID.	Actriz		X				
	Maestra		X	X			
	Secretaria	X	O	X			

En el sector ACTIVIDAD-APELLIDO quedan ahora determinadas dos relaciones correctas: maestra-García y actriz-Méndez. Incorpore usted los O correspondientes. Observe que Claudia es la actriz y que la actriz es Méndez, por lo tanto Claudia es Méndez. Así obtiene otra relación correcta.

Usted está en condiciones de completar la solución. Compare su respuesta con la nuestra:

NOMBRE	APELLIDO	ACTIVIDAD
Alicia	García	Maestra
Beatriz	López	Secretaria
Claudia	Méndez	Actriz

Si este juego lógico le gusta, Logic le apasionará

Instrucciones

☆ Traslade los datos numerados a las casillas del esquema.

☆ Los datos negativos márquelos con una cruz (X) en el cruce correspondiente.

☆ Los datos positivos, con un círculo (O).

☆ Cada dato positivo le permite automáticamente marcar otros negativos. (Fíjese en los ejemplos).

☆ Después de anotados todos los datos, utilice su deducción para completar el resto.

DATOS

UN VERANO MOVIDITO

Todos nuestros vecinos han vuelto de las vacaciones bien bronceados, alegres y con bonitos trofeos obtenidos al ganar los torneos organizados en las playas. Deduzca dónde triunfó cada familia.

1. Los Marini no fueron al "Riazor" ni al otro balneario donde se jugó el torneo de pelota a paleta.
2. La familia que ganó el torneo de voley playero ocupaba una carpa verde.
3. Ni las carpas del "Marbella" son azules, ni las del "Atlántico" son amarillas.
4. Los López (que no ocuparon una carpa amarilla) participaron en el torneo de tejo.

		BALNEARIO			CARPAS			TORNEO DE		
		"Atlántico"	"Marbella"	"Riazor"	Amarillas	Azules	Verdes	Pelota	Tejo	Voley
FAMILIA	López							X	O	X
	Marini								X	
	Palmieri								X	
TORNEO DE	Pelota									
	Tejo									
	Voley									
CARPAS	Amarillas									
	Azules									
	Verdes									

Solución en pág. 66

UN ALTO EN EL CAMINO

Sólo tres viajeros se han detenido en el único bar de la polvorienta ruta. Deduzca qué bebió y qué comió cada uno, sabiendo que:

1. Al ver el aspecto de la salchicha que estaba comiendo John (que no bebió agua), el del jeep pidió otra cosa para acompañar su cerveza.
2. Kevin (que no pidió huevos y jamón) estacionó su camión entre el jeep y la moto.
3. El primer parroquiano pidió whisky y el último, huevos y hamburguesa.

VIAJERO	VEHICULO	BEBIDA	HUEVOS Y
Dave			
John			
Kevin			

¡MUSICA, MUSICA!

Vivir en un edificio con tres vecinos músicos tiene sus encantos... y sus inconvenientes. Deduzca qué estudia y cuántas horas practica cada uno, sabiendo que:

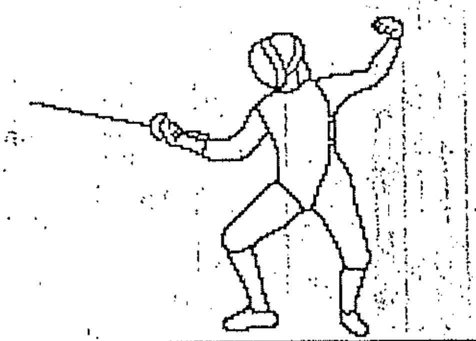
1. Entre los tres, practican exactamente 12 horas.
2. El que estudia clarinete vive dos pisos más abajo que quien practica durante 5 horas.
3. Lepont vive dos pisos más arriba que el pianista.
4. El violinista vive en el 8° y practica una hora menos que Marasco (que no vive en el 6°).
5. García practica una hora más que el del 4°.

VECINO	PISO	ESTUDIA	HORAS
García			
Lepont			
Marasco			

DE CAPA Y ESPADA

Practicando esgrima con sus criados, varios nobles recibieron algunos arañazos. Deduzca dónde y con qué arma hirió cada empleado a su patrón.

1. Ni Jaspers usaba florete, ni el otro que hirió al duque usaba espada.
2. El del sable apenas rozó la mejilla de su patrón, que no es el marqués.
3. Jurgens no trabaja para el conde ni para el otro noble que resultó herido en la nariz.
4. Jenkins no trabaja para el marqués ni para el otro hombre que quedó herido en el mentón.



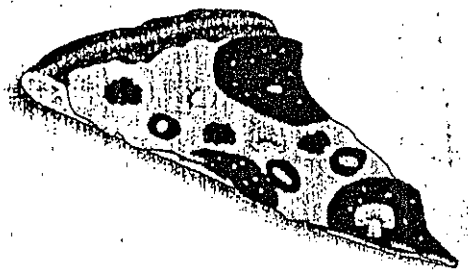
		HIRIO A			EN			CON		
		Conde	Duque	Marqués	Mejilla	Mentón	Nariz	Espada	Florete	Sable
CRIADO	Jaspers									
	Jenkins									
	Jurgens									
CON	Espada									
	Florete									
	Sable									
EN	Mejilla									
	Mentón									
	Nariz									

CRIADO	HIRIO A	EN	CON

PIZZA A DOMICILIO

Carlitos trepó a su moto y corrió a entregar las pizzas encargadas por varias familias que viven en un mismo edificio. Deduzca cuánto recibió como propina cada vez.

1. Quienes le dieron 1,50 $ viven tres pisos más abajo que los Romero.
2. Ni los Morales ni los otros del 8° pidieron pizza de anchoas.
3. Los que pidieron pizza de morrones le dieron 50 centavos menos que los del 5° piso.
4. Los del 2° (que no se apellidan Franco) encargaron la pizza de palmitos.
5. Los Morales le dieron 50 centavos más que los Romero.



		FAMILIA			PISO			PROPINA		
		Franco	Morales	Romero	2º	5º	8º	0,50 $	1,00 $	1,50 $
PIZZA	Anchoas									
	Morrones									
	Palmitos									
PROPINA	0,50 $									
	1,00 $									
	1,50 $									
PISO	2º									
	5º									
	8º									

PIZZA	FAMILIA	PISO	PROPINA

Abuelas ejemplares

Después de criar a los hijos y mientras mima a los nietos, cada una de estas señoras decidió seguir por fin su vocación y comenzó a estudiar. Deduzca las relaciones correctas sabiendo que este "quién es quién" es un poco diferente pues las pistas no son afirmaciones, sino que todas expresan una condición: cada una indica que "si pasa tal cosa, entonces sucede tal otra". En el recuadro le explicamos cómo manejarse con los condicionales, lo cual ayudará a extraer conclusiones. Guiándose por estas reglas, vaya viendo cuáles datos pueden ser verdaderos y cuáles falsos. Si aparece alguna contradicción, es señal de que el camino seguido no lleva a la solución. En este caso, revise lo andado y comience de nuevo.

1. Si la mayor estudia teatro, entonces Mercedes estudia pintura.
2. Si Mercedes estudia pintura, entonces Ofelia es la menor.
3. Si Ofelia es la menor, entonces la que tiene más nietos estudia teatro.
4. Si la que tiene más nietos estudia teatro, entonces la menor es la que tiene más nietos.
5. Si la de 61 años no tiene 8 nietos, entonces la mayor estudia teatro.
6. Si la mayor no tiene 8 nietos, entonces Nélida estudia canto.
7. Si Nélida estudia canto, entonces la de 62 años estudia violín.
8. Si Nélida no tiene 62 años, entones la que tiene 10 nietos estudia pintura.
9. Si la de 61 años no estudia pintura, entonces Mercedes tiene 10 nietos.

COMO USAR LAS PISTAS

- Cada pista tiene la forma "SI pasa **A**, entonces pasa **B**".
- Cuando **A** es verdadero, por fuerza **B** también lo es.
- Cuando **A** es falso, no se pueden sacar conclusiones sobre **B**: **B** puede ser verdadero o falso.
- Cuando **B** es falso, **A** también es falso.
- Cuando **B** es verdadero, no se pueden sacar conclusiones sobre **A**: **A** puede ser verdadero o falso.

		Edad				Nietos				Estudia			
		60	61	62	63	8	9	10	11	Canto	Pintura	Teatro	Violín
Abuela	Mercedes												
	Nélida												
	Ofelia												
	Paula												
Estudia	Canto												
	Pintura												
	Teatro												
	Violín												
Nietos	8												
	9												
	10												
	11												

154

LA CIGÜEÑA NO ESPERA

En las horas de la tarde de ayer nacieron cinco hermosos bebés en la Clínica Nac & Mientos. Establezca a qué hora nació cada uno, qué peso acusó la balanza y quién fue el médico obstetra.

1. El bebé de la mamá asistida por el doctor Linares pesó más que el de la mamá atendida por el doctor Campoy.
2. Rodrigo nació a las 16:00.
3. El Dr. Santos tomó parte en el alumbramiento del bebé de 3,400 kg. de peso (que no es Rodrigo).
4. Flavio, que no pesó 3,600 kg., nació a las 14:00. Intervino en el parto el Dr. Vega.
5. El bebé de la mamá que asistió el Dr. Macetti llegó al mundo a las 18:00 con un peso de 3,700 kg. No se llama Ariel.
6. Sebastián, que pesó 3,500 kg., nació antes que Ariel.

		HORA					PESO EN KILOS					OBSTETRA				
		14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	3,300	3,400	3,500	3,600	3,700	Campoy	Linares	Macetti	Santos	Vega
BEBE	Ariel															
	Diego															
	Flavio															
	Rodrigo															
	Sebastián															
OBSTETRA	Campoy															
	Linares															
	Macetti															
	Santos															
	Vega															
PESO EN KILOS	3,300															
	3,400															
	3,500															
	3,600															
	3,700															

BEBE	HORA	PESO EN KILOS	OBSTETRA

EL HOMBRE OCUPADO

Soy un importante ejecutivo y, para demostrarlo, voy a abrir mi agenda delante de los lectores. Como se ve, la semana que viene es muy agitada para mí. Descubra cuál es mi actividad diaria, a qué hora y en qué ciudad.

1. El lunes no estoy en Miami.
2. La junta de Barcelona comienza una hora más tarde que la conferencia.
3. Dos días después del congreso tengo que estar en París, justo a las 18 horas.
4. Un compromiso (que no es el seminario) es el miércoles a las 17:00 horas.
5. El jueves estoy en Buenos Aires, pero no para la entrevista.
6. La reunión de Belgrado (que no es un congreso) es a las 15:00 horas (pero no el martes).

		DIA					HORA					CIUDAD				
		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	Barcelona	Belgrado	Buenos Aires	Miami	París
COMPROMISO	Conferencia															
	Congreso															
	Entrevista															
	Junta															
	Seminario															
CIUDAD	Barcelona															
	Belgrado															
	Buenos Aires															
	Miami															
	París															
HORA	14:00															
	15:00															
	16:00															
	17:00															
	18:00															

COMPROMISO	DIA	HORA	CIUDAD

FORMAS EXACTAS

Cinco profesoras nos dieron problemas matemáticos que requieren una solución con una figura geométrica. Descubra qué elementos necesitamos para cada materia y en qué tipo de material deben presentarse los trabajos.

1. El círculo en tinta es para la carpeta de física.
2. La profesora de dibujo (que tiene alergia a las tizas) considera antiestético las figuras hexagonales.
3. Las rectas del pentágono deben trazarse con marcador.
4. El modo más fácil de hacer un hexágono es utilizando una regla.
5. El compás (que no es necesario para aritmética) tiene una punta con tiza.
6. El triángulo (hecho con la ayuda de una escuadra) no puede diseñarse con témperas.
7. El transportador se usa para la carpeta de álgebra.

		FIGURA					INSTRUMENTO					PINTURA				
		Círculo	Cuadrado	Hexágono	Pentágono	Triángulo	Calculadora	Compás	Escuadra	Regla	Transportad.	Lápiz	Marcador	Témpera	Tinta	Tiza
MATERIA	Algebra															
	Aritmética															
	Dibujo															
	Física															
	Geometría															
PINTURA	Lápiz															
	Marcador															
	Témpera															
	Tinta															
	Tiza															
INSTRUMENTO	Calculadora															
	Compás															
	Escuadra															
	Regla															
	Transportador															

MATERIA	FIGURA	INSTRUMENTO	PINTURA

DESDE ESTAS SOLEADAS PLAYAS

Así comienza cada uno de los mensajes que el pobre Juan recibió esta semana. Acompáñelo mientras espera que las mujeres de la familia regresen de las vacaciones, y deduzca las relaciones correctas sabiendo que este "quién es quién" es un poco diferente pues las pistas no son afirmaciones, sino que todas expresan una condición: cada una indica que "si pasa tal cosa, entonces sucede tal otra". En el recuadro le explicamos cómo manejarse con los condicionales, lo cual ayudará a extraer conclusiones. Guiándose por estas reglas, vaya viendo cuáles datos pueden ser verdaderos y cuáles falsos. Si aparece alguna contradicción, es señal de que el camino seguido no lleva a la solución. En este caso, revise lo andado y comience de nuevo.

1. Si Matilde está en Miami, entonces el telegrama llegó desde Cancún.
2. Si el telegrama llegó desde Cancún, entonces la madre está en Capri.
3. Si la madre está en Capri, entonces Irene es la esposa.
4. Si Irene es la esposa, entonces Matilde es la madre.
5. Si Victoria no está en Cancún, entonces Matilde está en Miami.
6. Si Victoria está en Cancún, entonces la tía está en Ibiza.
7. Si la tía está en Ibiza, entonces la postal llegó desde Miami.
8. Si la postal llegó desde Miami, entonces Carolina envió un e-mail.
9. Si Carolina envió un e-mail, entonces la madre envió una carta.
10. Si la madre envió una carta, entonces la hija está en Cancún.

COMO USAR LAS PISTAS

- Cada pista tiene la forma "Si pasa A, entonces pasa B".
- Cuando A es verdadero, por fuerza B también lo es.
- Cuando A es falso, no se pueden sacar conclusiones sobre B: B puede ser verdadero o falso.
- Cuando B es falso, A también es falso.
- Cuando B es verdadero, no se pueden sacar conclusiones sobre A: A puede ser verdadero o falso.

		ES LA				DESDE				MANDO			
		Esposa	Hija	Madre	Tía	Cancún	Capri	Ibiza	Miami	Carta	E-mail	Postal	Telegrama
PARIENTA	Carolina												
	Irene												
	Matilde												
	Victoria												
MANDO	Carta												
	E-mail												
	Postal												
	Telegrama												
DESDE	Cancún												
	Capri												
	Ibiza												
	Miami												

158

BIENES BIEN REPARTIDOS

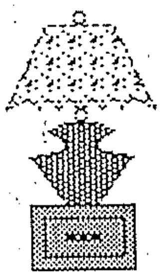
Cuando el albacea leyó el testamento de Don Silvester Lonely, un huraño anciano que acaba de morir, muchos quedaron sorprendidos. Deduzca quiénes heredaron sus bienes, sabiendo que este "quien es quién" es un poco diferente pues las pistas no son afirmaciones, sino que todas expresan una condición: cada una indica que "si pasa tal cosa, entonces sucede tal otra". En el recuadro, le explicamos cómo manejarse con los condicionales, lo cual ayudará a extraer conclusiones. Guiándose por estas reglas, vaya viendo cuáles datos pueden ser verdaderos y cuáles falsos. Si aparece alguna contradicción, es señal de que el camino seguido no lleva a la solución. En este caso, revise lo andado y comience de nuevo.

1. Si Graves no heredó los muebles, entonces el empleado heredó los cuadros.
2. Si el empleado heredó los cuadros, entonces Moffitt es el empleado.
3. Si Dennis es el amigo, entonces el vecino heredó la casa.
4. Si Graves heredó los muebles, entonces Dennis es el amigo.
5. Si Moffitt es el empleado, entonces Graves heredó los muebles.
6. Si el vecino heredó la casa, entonces el empleado heredó las joyas.
7. Si el empleado no heredó los cuadros, entonces Charles se apellida Jackson.
8. Si Charles se apellida Jackson, entonces Moffitt heredó las joyas.
9. Si Moffitt es el empleado, entonces Horace es el sobrino.
10. Si Aldus heredó las joyas, entonces Dennis se apellida Graves.

COMO USAR LAS PISTAS

- Cada pista tiene la forma "Si pasa A, entonces pasa B".
- Cuando A es verdadero, por fuerza B también lo es.
- Cuando A es falso, no se pueden sacar conclusiones sobre B: B puede ser verdadero o falso.
- Cuando B es falso, A también es falso.
- Cuando B es verdadero, no se pueden sacar conclusiones sobre A: A puede ser verdadero o falso.

		APELLIDO				RELACION				HEREDO			
		Blair	Graves	Jackson	Moffitt	Amigo	Empleado	Sobrino	Vecino	Casa	Cuadros	Joyas	Muebles
NOMBRE	Aldus												
	Charles												
	Dennis												
	Horace												
HEREDO	Casa												
	Cuadros												
	Joyas												
	Muebles												
RELACION	Amigo												
	Empleado												
	Sobrino												
	Vecino												



XIX Reunión de Educación Matemática (Unión Matemática Argentina),
Salta (Argentina), 16 – 20 de septiembre de 1996.

EL METODO DE BIFURCACION Y SU APLICACION EN EL METODO PROGRESIVO–REGRESIVO. UNA METODOLOGIA QUE INCENTIVA LA CREATIVIDAD EN MATEMATICA

Domingo Alberto TARZIA

Departamento Matemática, FCE, Univ. Austral
Paraguay 1950, (2000) Rosario.
Tel.: (041) 814990 ; Fax: (041) 810505 ;
E–mail: tarzia@uaufce.edu.ar
y CONICET.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia del método de bifurcación para resolver problemas y realizar demostraciones en Matemática. Es un valioso complemento para la aplicación del método progresivo, y por ende del método progresivo – regresivo.

El método de bifurcación consiste en el siguiente principio: "LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA PUEDE REALIZARSE A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE N ($N \geq 1$) PROBLEMAS MÁS SIMPLES QUE EL PRIMERO Y ASÍ SUCESIVAMENTE".

El método de bifurcación puede ser interpretado, en algún sentido, como la justificación lógica – matemática del método de tanteo el cual se utiliza cuando no se conoce cómo resolver un problema o demostrar una proposición. La aplicación del método de bifurcación permite detectar si un problema tiene una o varias soluciones y, en consecuencia, da una metodología para hallar todas las soluciones de dicho problema. Dicha metodología incentiva la creatividad en Matemática.

Se presentan numerosos ejemplos, con diversas dificultades, a través de los cuales se puede apreciar la potencialidad del método de bifurcación, ya sea en su forma simple o en su forma condicionada.

INTRODUCCIÓN.

Una de las mayores dificultades en la resolución de problemas y en la realización de demostraciones en Matemática es la de encarar la resolución del problema o la de demostrar una proposición, es decir encontrar una metodología de trabajo o concebir un plan que a través de su ejecución se logrará la solución deseada. Dicha dificultad se acrecienta enormemente cuando la solución no es única. Por ende es de fundamental importancia encontrar una metodología que permita encontrarlas a todas.

El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia del método de bifurcación para resolver problemas y realizar demostraciones en Matemática. Es un valioso complemento para la aplicación del método progresivo, y por ende del método progresivo – regresivo.

El método de bifurcación consiste en el siguiente principio: "LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA PUEDE REALIZARSE A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE N $(N \geq 1)$ PROBLEMAS MÁS SIMPLES QUE EL PRIMERO Y ASÍ SUCESIVAMENTE".

El método de bifurcación puede ser interpretado, en algún sentido, como la justificación lógica – matemática del método de tanteo el cual se utiliza cuando no se conoce cómo resolver un problema o demostrar una proposición. La aplicación del método de bifurcación permite detectar si un problema tiene una o varias soluciones y, en consecuencia, da una metodología para hallar todas las soluciones de dicho problema. Dicha metodología incentiva la creatividad en Matemática, que se logra a través de la resolución de problemas que tengan muchas soluciones.

El presente estudio se restringirá a la resolución de problemas, muchos de los cuales son muy simples (para nivel primario), que permitirán apreciar la potencialidad del método de bifurcación.

Se presentan numerosos ejemplos, con diversas dificultades, que serán resueltos a través del método de bifurcación. Se clasifica de dos maneras: forma simple o forma condicionada. La clasificación se define de manera que la bifurcación sea independiente (forma simple) o dependiente (forma condicionada) de que una cierta condición o restricción se verifique.

I. FORMA SIMPLE DEL MÉTODO DE BIFURCACIÓN (BIFURCACIÓN SIMPLE).

A continuación se enunciarán seis problemas, para los cuales (algunos tienen varias soluciones) la aplicación del método de bifurcación es decisivo. La resolución de los problemas se encuentran al final del texto.

I.1) Utilizando solamente una vez las cifras 2, 4, 5, 6 y 7, complete la siguiente operación y encuentre todas las soluciones:

		6	.....	.....	1
+		7	9	7	.....
	1	4	.....	9	......

Definición: Un cuadrado se dice mágico respecto de la operación suma cuando la suma de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

I. 2) Complete el siguiente cuadrado mágico con los números naturales, del 1 al 9, con constante 15. ¿ La solución es única ?

8	.....	.....
.....	5	.....
.....	.....	.....

I. 3) Reemplace cada letra (A , D , M , N , O , R , S , U) por un número natural, del 1 al 9, de modo que se verifique el resultado dado teniendo en cuenta que a una misma letra le corresponde siempre el mismo número.

	S	U	M	A	N	D	O
+			S	U	M	A	R
	9	8	3	1	5	0	7

Se solicita:

(i) Halle todas las posibles soluciones en el caso en que a letras diferentes correspondan números diferentes.

(ii) ¿ Qué sucede si los números correspondientes a letras diferentes pueden repetirse ?

I. 4) Reemplace cada letra (H , E , S) por un número entero, del 0 al 9, de modo que se verifique:

$$(HE)^2 = SHE$$

I. 5) La última línea del cuadro debe llenarse con cuatro de los números que aparecen más arriba. En cada línea se indica cuantos números en común tiene ese grupo con el que falta. La B de "bien" significa que los números aparecen en la misma posición, y la R de "regular", que están en posición cambiada. Con nB y mR se indican, desde la columna de la derecha, que existen n números en posición correcta y m números en posición regular. ¿Cuál es la combinación correcta?

4	1	5	2	–	2 B
5	1	3	2	1 R	2 B
5	1	2	6	2 R	1 B
1	2	3	4	3 R	–
?	?	?	?	–	4 B

I. 6) La última línea del cuadro debe llenarse con cinco de los números que aparecen más arriba. En cada línea se indica cuantos números en común tiene ese grupo con el que falta. La B de "bien" significa que los números aparecen en la misma posición, y la R de "regular", que están en posición cambiada. Con nB y mR se indican, desde la columna de la derecha, que existen n números en posición correcta y m números en posición regular. ¿Cuál es la combinación correcta?

1	2	3	4	5	3 R	–
3	6	2	7	1	3 R	–
3	2	8	1	9	3 R	–
2	1	4	6	8	1 R	1 B
5	1	9	2	7	3 R	–
2	3	5	9	6	2 R	–
?	?	?	?	?	–	5 B

II. FORMA CONDICIONADA DEL MÉTODO DE BIFURCACIÓN. (BIFURCACIÓN CONDICIONADA).

El método de bifurcación en su forma condicionada aparece cuando la bifurcación se debe realizar siempre y cuando una cierta condición o restricción se verifica.

A continuación se enunciará un problema, que tiene varias soluciones, para el cual la aplicación del método de bifurcación, en su forma condicionada, es decisivo. La resolución del problema se encuentra al final del texto.

II. 7) Cada letra utilizada (A, C, E, I, M, N, T) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera de obtener la mayor MACANA posible, siendo:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & M & A & T & E \\ + & M & A & T & I & C & A \\ \hline & M & A & C & A & N & A \end{array}$$

para los siguientes casos:

(i) A letras diferentes deben corresponder números diferentes;
(ii) A letras diferentes pueden corresponder números iguales.

A continuación se indican las resoluciones de los siete problemas a través de la aplicación del método de bifurcación. En algunos casos, la demostración detallada se omite por ser trivial o muy larga.

I.1) Resolución.- Se supone que la solución, si existe, viene dada por:

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & \alpha & \beta & 1 \\ + & 7 & 9 & 7 & \gamma \\ \hline 1 & 4 & \varepsilon & 9 & \delta \end{array}$$

(a) $\beta = 2$.

(b) Bifurcación:

$$\gamma = \begin{cases} 4 \Rightarrow \dots\dots\dots & \exists \text{ solución} \\ 5 \Rightarrow \dots\dots\dots & \text{No} \\ 6 \Rightarrow \dots\dots\dots & \exists \text{ solución} \\ 7 \Rightarrow \dots\dots\dots & \text{No} \end{cases}$$

Conclusión: Existen 2 soluciones dados por:

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 7 & 2 & 1 \\ + & 7 & 9 & 7 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 9 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 6 & 5 & 2 & 1 \\ + & 7 & 9 & 7 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 9 & 7 \end{array}$$

I.2) Resolución.- Se supone que la solución, si existe, viene dada por:

8	a_{12}	a_{13}
a_{21}	5	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

(a) $a_{33}=2$.

(b) Bifurcación: Eligiendo el elemento a_{32} se tienen 6 casos:

$a_{32} =$
- 1 $\Rightarrow$ ...... No
- 3 $\Rightarrow$ ...... No
- 4 $\Rightarrow$ ...... No
- 6 $\Rightarrow$ ...... No
- 7 $\Rightarrow$ ...... $\exists$ solución
- 9 $\Rightarrow$ ...... $\exists$ solución

Conclusión: Existen 2 soluciones

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Observación.- Si en lugar de elegir el elemento que va en una determinada casilla (a_{23} en nuestro caso) se elige las casillas a las que puede ir el número 9, entonces el problema se bifurca en dos, es decir $a_{23}=9$, $a_{32}=9$ que permiten obtener las dos soluciones.

1.3. ii) Resolución:

(a) $S=9$

(b) $U=7$

(c) $M=3$

(d) $N=1$

(e) $A=4$

(f) Resulta:

$$\begin{array}{rcc} & D & O \\ + & 4 & R \\ \hline 1 & 0 & 7 \end{array}$$

Bifurcación:

$D =$
- 5
  - $O=9$, $R=8$ (∃ solución)
  - $O=8$, $R=9$ "
- 6
  - $O=1$, $R=6$ "
  - $O=2$, $R=5$ " $\Longleftarrow$
  - $O=3$, $R=4$ "
  - $O=4$, $R=3$ "
  - $O=5$, $R=2$ " $\Longleftarrow$
  - $O=6$, $R=1$ "

Conclusión: Existen 8 soluciones

(i) Existen 2 soluciones de las obtenidas en (ii), las cuales están marcadas con $\Longleftarrow$

I.4) <u>Resolución</u>.- $E^2 \equiv E \pmod{10} \Rightarrow$

<u>Bifurcación</u>:

$$E = \begin{cases} 0 \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \text{No} \\ 1 \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \text{No} \\ 5 \Rightarrow \cdots\cdots\cdots H=2,\ S=6 \ (\exists \text{ solución}) \\ 6 \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \text{No} \end{cases}$$

<u>Conclusión</u>: Existe una única solución

$$(25)^2 = 625$$

I.5) <u>Resolución</u>.- Se supone que la solución, si existe, viene dada por: $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$.

La primera fila implica <u>bifurcación</u>:

$\alpha=4,\ \beta=1 \Rightarrow$ .... No

$\alpha=4,\ \gamma=5 \Rightarrow$ .... No

$\alpha=4,\ \delta=2 \Rightarrow$ .... No

$\beta=1,\ \gamma=5 \Rightarrow$ .... No

$\beta=1,\ \delta=2 \Rightarrow$ .... $\exists$ solución

$\gamma=5,\ \delta=2 \Rightarrow$ .... No

<u>Conclusión</u>: Existe una única solución

$$3 \quad 1 \quad 6 \quad 2$$

I.6) <u>Resolución</u>.- Se supone que la solución, si existe, viene dada por: $\alpha \; \beta \; \gamma \; \delta \; \varepsilon$.

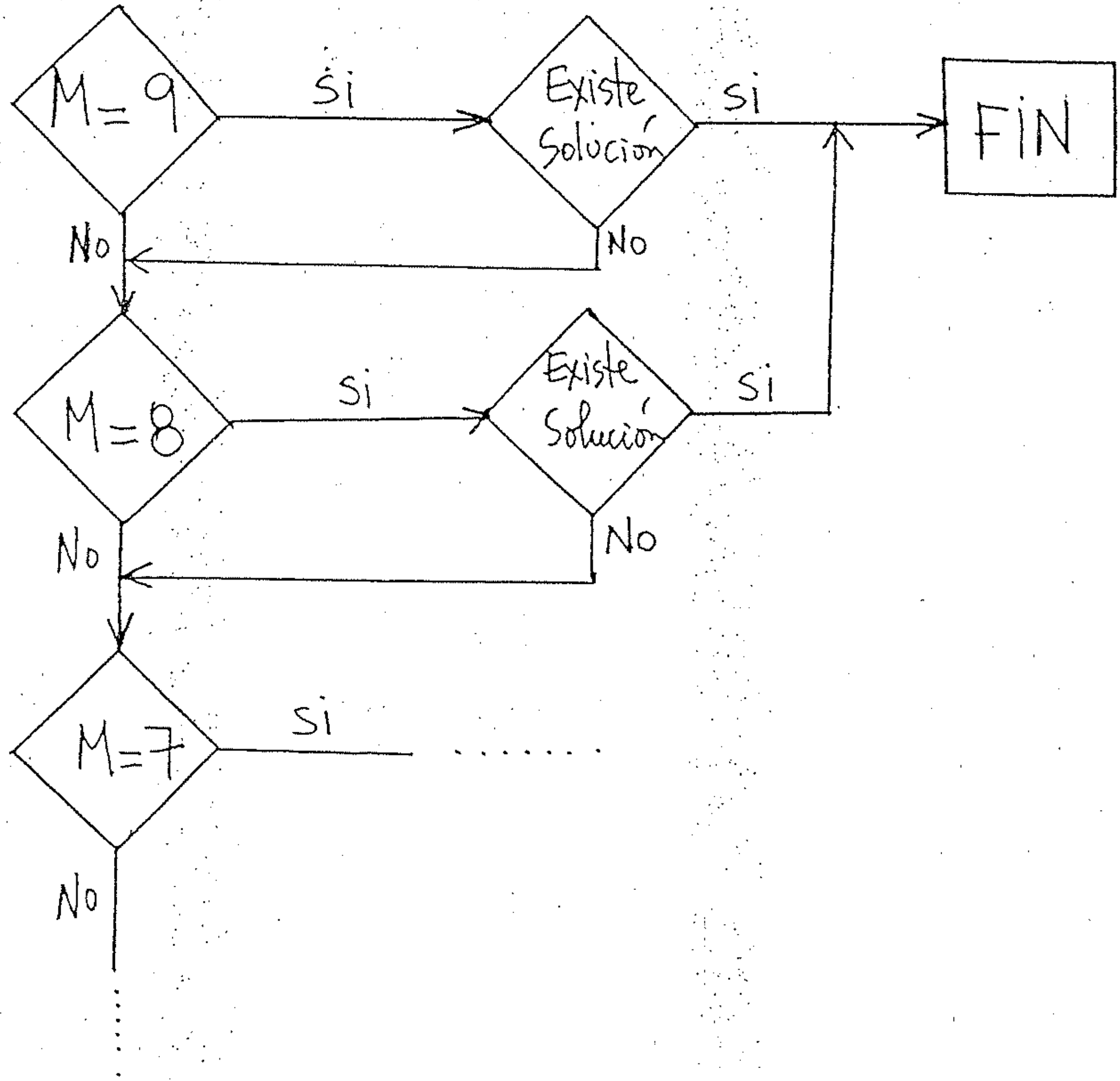
La cuarta fila implica <u>bifurcación</u>:

- $\alpha = 2 \Rightarrow$ .... No
- $\beta = 1 \Rightarrow$ .... No
- $\gamma = 4$
  - el 2 está regular $\Rightarrow$ .... No
  - el 1 está regular $\Rightarrow$ .... No
  - el 6 está regular $\Rightarrow$ .... No
  - el 8 está regular $\Rightarrow$ .... No
- $\delta = 6 \Rightarrow$ un elemento del $\{2,1,4,8\}$ está regular
  - el 2 está regular $\Rightarrow$ ..... No
  - el 1 está regular $\Rightarrow$ ..... No
  - el 4 está regular $\Rightarrow$ ..... No
  - el 8 está regular $\Rightarrow$ ..... No
- $\varepsilon = 8 \Rightarrow$ un elemento del $\{2,1,4,6\}$ está regular
  - el 2 está regular $\Rightarrow$ ..... No
  - el 1 está regular $\Rightarrow$ ..... $\exists$ solución
  - el 4 está regular $\Rightarrow$ ..... No
  - el 6 está regular $\Rightarrow$ ..... No

<u>Conclusión</u>: Existe una única solución

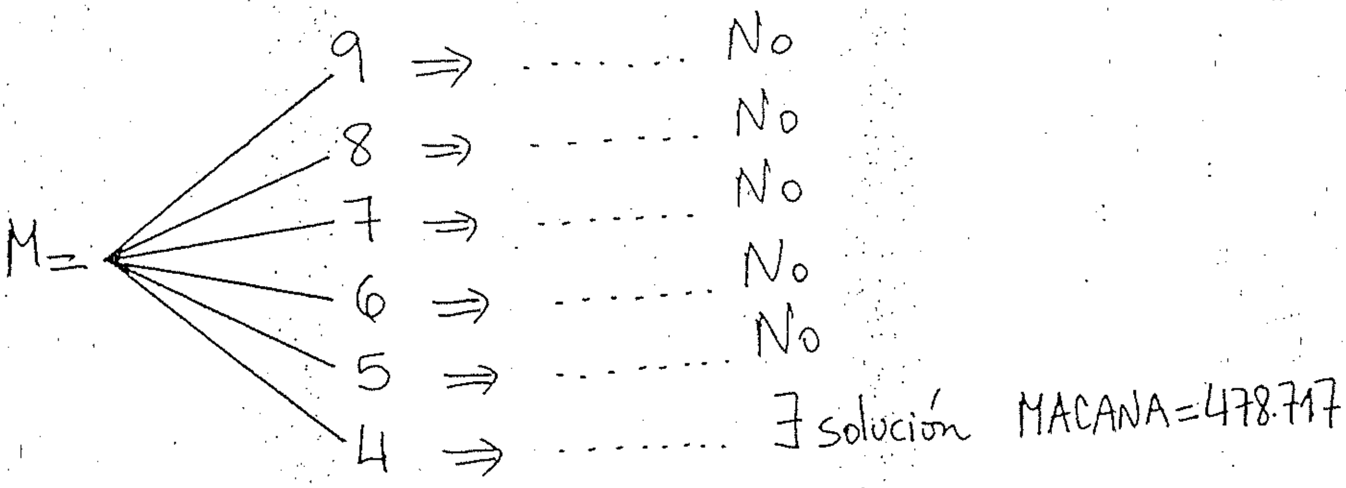
7 5 1 3 8

II.7) Resolución.- La mayor MACANA implica bifurcación condicionada:



(ii) Para M=9 existe solución MACANA = 999.999

(i)



Conclusión: Existe una única solución: 478.717 para (i) y 999.999 para (ii).

BIBLIOGRAFÍA

• M. de GUZMÁN – J. COLERA – A. SALVADOR, "Matemáticas. Bachillerato 1", Anaya, Madrid (1993).

• OMA – Olimpíada Matemática Argentina, Red Olímpica, Buenos Aires.

• Olimpíada Matemática Ñandú, Red Olímpica, Buenos Aires.

• G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas", Trillas, México (1994).

• Revista La Nación, Buenos Aires.

• L.A. SANTALO, "Matemática 1. Iniciación a la creatividad", Kapelusz, Buenos Aires (1993).

• D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).

• D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", Partes I y II, Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral, Rosario (1995).

• D.A. TARZIA, "Matemática", Curso 3er. Ciclo del área Matemática para la Educación General Básica (Ley Federal de Educación), Red de Formación Docente Continua, Ministerio de Educación de la Prov. de Córdoba, Departamento de Matemática, FCE, UA, Rosario (1996) (80 páginas).

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)–814990 ; FAX: (041)–810505
E–Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

POSGRADO EN DIRECCIÓN DE EMPRESAS PDG'98

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA

"ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA. PROBLEMAS, TRABAJOS PRÁCTICOS Y CASOS"

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Abril 1998

PLAN A DESARROLLAR

En el presente módulo se presentan:

• un resumen de las definiciones y propiedades básicas en la teoría de la probabilidad y estadística [Me];

• la matemática de las distribuciones de probabilidades mas frecuentes (variables aleatorias discretas: binomial y Poisson; variables aleatorias continuas: normal y exponencial);

• se plantean actividades sobre probabilidad condicionada y tablas de contingencia (diagramas de arbol), probabilidad geométrica y probabilidad dinámica [CLGGLM];

• se plantean problemas, trabajos prácticos y casos no clásicos sobre el tema [CLGGLM, Kr, Me, Mi, SpBo, Th].

Para finalizar el tema se presentan:

• un modelo de fidelidad de marca para marketing y sus consecuencias matemáticas [Ta].

• las referencias básicas de la bibliografía utilizada.

I. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD.

Ejemplos de experimentos no determinísticos.

Se tratará de entender lo que se considera un experimento "aleatorio" o "no determínistico". (Más precisamente se darán ejemplos de fenómenos para los cuales los modelos no determínisticos son apropiados. Esta es una distinción que el lector deberá mantener presente. Así se refieren frecuentemente a experimentos no determínisticos o aleatorios, cuando de hecho se está hablando de un modelo no determínistico para un experimento.) No se pretende dar una definición precisa de diccionario para este concepto. En su lugar se darán numerosos ejemplos que la ilustran.

E_1: Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.
E_2: Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.
E_3: Se lanza una moneda cuatro veces y se observa la sucesión de caras y sellos obtenidos.
E_4: Se fabrica una lámpara eléctrica. Luego se prueba su duración conectándola en un portalámparas y se cuenta el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.
E_5: Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.
E_6: Se lanza un proyectil. Después de un tiempo determinado t, se anotan las tres componentes de la velocidad v_x, v_y, v_z.
E_7: Un termógrafo marca la temperatura continuamente en un período de 24 horas. En un sitio y en una fecha señalados, "leer" dicho termógrafo.

¿Qué tienen en común los experimentos anteriores? Los siguientes aspectos son importantes para la descripción de un *experimento aleatorio.*

(a) Es posible repetir cada experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente la condiciones.
(b) Aunque en general no se puede indicar cuál será un resultado *particular*, se puede describir el conjunto de *todos* los resultados *posibles* del experimento.
(c) A medida que el experimento se repite los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, como el experimento se repite un *gran* número de veces, aparece un patrón definido o regularidad. Esta regularidad hace posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual se analiza el experimento.

El espacio muestral.

Definición. Con cada experimento ϵ del tipo que se ha considerado, se define el *espacio muestral* como el conjunto de *todos* los resultados posibles de ϵ. Usualmente se designa este conjunto como S. (En nuestro contexto, S representa el conjunto universal descripto anteriormrnte).

Se Considerará cada uno de los experimentos anteriore y se describirá el espacio muestral de cada uno. El espacio muestral S_i se referirá al experimento E_i.

- $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- $S_3 = \{$todas las sucesiones posibles de la forma a_1, a_2, a_3, a_4 donde $a_i = C$ ó S según si aparece cara o ceca en el i-ésimo lanzamiento$\}$.
- $S_4 = \{t \mid t \geq 0\}$.
- $S_5 = \{10, 11, 12, ...\}$.
- $S_6 = \left\{(v_x, v_y, v_z) \,/\, v_x, v_y, v_z \text{ son números reales}\right\}$.
- $S_7 =$ Este espacio muestral es el más importante de los que aquí se considera. Prácticamente se debe suponer que la temperatura en cierta localidad específica nunca puede subir o bajar con relación a ciertos valores, digamos M y m. Fuera de esta restricción, se debe admitir la posibilidad de que aparezca cualquier gráfica con determinadas carácterísticas. Es posible que ésta no tenga saltos (esto es, representará una función continua). Además, la gráfica tendrá ciertas características de suavidad que pueden resumirse en forma matemática al decir que la gráfica representa una función diferenciable. Así, finalmente se puede enunciar que el espacio muestral es

$$\{f \mid f \text{ es una función diferenciable, que satisface } m \leq f(t) \leq M, \text{ para todo tiempo } t\}.$$

Será importante analizar de nuevo el *número* de resultados en un espacio muestral. Surgen tres posibilidades: el espacio muestral puede ser finito, infinito numerable, o infinito no numerable. Refiriéndose a los ejemplos anteriores, notemos que S_1, S_2 y S_3 son finitos, S_5 es infinito numerable y S_4 , S_6 y S_7 son infinitos no numerables.

Eventos. Un evento A (respecto a un espacio muestral particular S asociado con un experimento ϵ) es un conjunto de resultados posibles. En la terminología de conjuntos, *un evento es un subconjunto del espacio muestral S*. En vista de lo expuesto previamente, esto significa que S es también un evento y también lo es el conjunto vacío $\emptyset$. Cualquier resultado individual también puede considerarse como un evento.

Los siguientes son ejemplos de eventos. Otra vez se referirá a los experimentos antes anotados: A_i se referirá a un evento asociado con el experimento E_i:

- A_1Un número par ocurre; esto es, $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
- $A_2\{2\}$; es decir, ocurren dos caras.
- A_3: {CCCC, CCCS, CCSC, CSCC, SCCC}; es decir, salen más caras (C) que cecas (S).
- A_4: $\{t \mid t < 3\}$; es decir, la lámpara se quema en menos de tres horas.

Cuando el espacio muestral S es finito o infinito numerable, *todo* subconjunto se puede considerar como un evento. Sin embargo, si S es infinito no numerable, aparece una dificultad teórica. Resulta que no cualquier subconjunto concebible se puede considerar como un evento. Por razones que escapan al nivel de esta presentación, ciertos subconjuntos "no admisibles" deben ser excluidos. Por fortuna, tales conjuntos no admisibles en realidad no aparecen en las aplicaciones y, por tanto, no interesarán aquí. En lo que sigue se supondrá tácitamente que cada vez que se mencione un evento será de la clase que está permitido considerar. Se pueden usar ahora los diversos métodos para combinar conjuntos (es decir, eventos) y obtener los nuevos conjuntos (es decir, eventos) que se presentó con anterioridad:

(a) Si A y B son eventos, $A \cup B$ es el evento que ocurre si y sólo si A ó B (o ambos) ocurren;

(b) Si A y B son eventos, $A \cap B$ es el evento que ocurre si y sólo si A y B ocurren;

(c) Si A es un evento, A^c es el evento que ocurre si y sólo si A *no* ocurre;

(d) Si $A_1, \ldots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre;

(e) Si $A_1, \ldots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\cap_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos A_i ocurren simultáneamente.

(f) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es cualquier colección finita (numerable) de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre.

(g) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es cualquier colección infinita (numerable) de eventos, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos A_i ocurren simultáneamente.

(h) Supóngase que S representa el espacio muestral asociado con un experimento ϵ y realizamos ϵ dos veces. Entonces S x S se puede utilizar para representar todos los resultados de esas dos repeticiones. Es decir, $(s_1, s_2) \in S \times S$ significa que s_1 resultó cuando se realizó ϵ la primera vez y s_2 cuando se realizó ϵ la segunda vez.

(i) Evidentemente, el ejemplo h se puede generalizar. Se considera n repeticiones de un experimento ϵ cuyo espacio muestral es S. Entonces $S \times S \times \ldots \times S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_i \in S,\ i = 1, \ldots, n\}$ representa el conjunto de todos los resultados posibles cuando ϵ se realiza n veces. En cierto sentido, S x S x ... x S es un espacio muestral en sí mismo, o sea el espacio muestral asociado con n repeticiones de ϵ.

Eventos mutuamente excluyentes.

Definición. Se dice que dos eventos, A y B son *mutuamente excluyentes* si no pueden ocurrir juntos. Se expresa esto escribiendo $A \cap B = \emptyset$; es decir, la intersección de A y B es el conjunto vacío.

Frecuencia Relativa. Se supone que se repite n veces el experimento ϵ, y sean A y B dos eventos asociados con ϵ. Sean n_A y n_B el número respectivo de veces que el evento A y el evento B ocurrieron en las n repeticiones.

Definición. Se llama *frecuencia relativa* del evento A en las n repeticiones de ϵ al número dado por $f_A = n_A/n$.

La frecuencia relativa f_A tiene las siguientes propiedades importantes, que son verificables fácilmente:

1) $0 \leq f_A \leq 1$.

2) $f_A = 1$ si y sólo si A ocurre cada vez en las n repeticiones.

3) $f_A = 0$ si y sólo si A no ocurre en las n repeticiones.

4) Si A y B son dos eventos que se excluyen mutuamente y si $f_{A \cup B}$ es la frecuencia relativa sociada al evento $A \cup B$, entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

5) f_A, basada en las n repeticiones del experimento y considerada para una función de n, "converge" en cierto sentido probabilístico a P(A) (probabilidad del evento A) cuando $n \to +\infty$.

Probabilidad de un evento.

Definición. Sea ϵ un experimento y S un espacio muestral asociado con ϵ. Con cada evento A se asocia un número real, designado con P(A) y llamado *probabilidad de* A, el cual satisface las siguientes propiedades:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P(S) = 1$.

3) Si A y B son dos eventos que se excluyen mutuamente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4) Si A_1, A_2, ..., A_n, ... son eventos que se excluyen mutuamente dos a dos, entonces

$$P(\cup_{i=1}^{\infty}) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$$

Teorema. (i) Si $\emptyset$ es el conjunto vacío, entonces $P(\emptyset) = 0$.

(ii) Si A^c es el evento complementario de A, entonces

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

(iii) Si A y B son eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(iv) Si A, B, y C son tres eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(v) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

II. EL ESPACIO MUESTRAL FINITO.

Se consideran sólo experimentos para los cuales el espacio muestral S consta de un número finito de elementos. La suposición que más comúnmente se hace para espacios muestrales finitos es que todos los resultados son igualmente probables. De ninguna manera esta suposición puede darse como un hecho; deberá justificarse con cuidado. En dicho caso, se puede definir la probabilidad de un evento de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\text{número de maneras en que } \epsilon \text{ puede ocurrir favorable a A}}{\text{número de maneras en que } \epsilon \text{ puede ocurrir}}.$$

Es importante comprender que la expresión anterior de P(A) es sólo una consecuencia de la suposición de que todos los resultados son igualmente probables y sólo es aplicable cuando se satisface esta suposición. Sin duda no sirve como una definición general de probabilidad.

Métodos de enumeración.

A) Principio de multiplicación. Se supone que un procedimiento, designado como 1, puede hacerse de n_1 maneras. Se supone que un segundo procedimiento, designado como 2, se puede hacer de n_2 maneras. También se supone que cada una de las maneras de efectuar 1 puede ser seguida por cualquiera de las maneras de efectuar 2. Entonces el procedimiento que consta de 1 seguido por 2 se puede hacer de $n_1 n_2$ maneras.

Observación. Obviamente este principio puede extenderse a cualquier número de procedimientos. Si hay k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede hacer de n_i maneras, $i = 1, 2, \ldots, k$ entonces el procedimiento que consiste en 1, seguido por 2 ,..., seguido por el procedimiento k puede hacerse de $n_1 n_2 \ldots n_1$ maneras.

B) Procedimiento de adición. Se supone que un procedimiento, designado con 1, se puede hacer de n_1 maneras. Se supone que un segundo procedimiento, designado con 2, se puede hacer de n_2 maneras. Se supone además que *no* es posible que *ambos*, 1 y 2, se hagan juntos. Entonces, el número de maneras de como se puede hacer 1 ó 2 está dado por $n_1 + n_2$.

Observación. También este principio puede generalizarse como sigue: si hay k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede hacer en n_i maneras, $i = 1, 2,..., k$, entonces el número de maneras como se puede hacer el procedimiento 1, ó el procedimiento 2 ó ... ó el procedimiento k está dado por $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, suponiendo que los procedimientos no se pueden realizar en forma conjunta.

C) Permutaciones.

a) Se supone que se tiene n objetos diferentes. ¿De cuántas maneras, se notará nPn, se pueden agrupar (permutar) estos objetos? En general, se considera el esquema siguiente. Agrupar los n objetos es equivalente a ponerlos, en algún orden específico, en una caja con n compartimientos. La primera casilla se puede llenar de cualquiera de las n maneras, la segunda de cualquiera de $(n-1)$ maneras, ..., y la última casilla de sólo una manera. Por tanto, aplicando el principio de multiplicación anterior, se ve que la caja se puede llenar de $n\,(n-1)(n-2)\ \ldots\ 1$ maneras.

Así el número de permutaciones de n objetos diferentes está dado por la expresión:

$$nPn = n!$$

b) De nuevo se considera n objetos diferentes. Esta vez se desea escoger r de esos objetos, $0 \leq r \leq n$, y se permuta el r elegido. Se indica el número de manera de hacerlo con nPr. Se recurre otra vez al esquema anterior de llenar una caja que tiene n compartimientos; ahora se detiene el proceso después que se ha llenado el compartimiento r-ésimo. Así, el primer compartimiento puede llenarse de n maneras, el segundo de $(n-1)$ maneras, ..., y el r-ésimo compartimiento de $n-(r-1)$ maneras. De este modo se puede realizar el procedimiento completo, usando de nuevo el principio de multiplicación, y se obtiene

$$n\,(n-1)(n-2)\ \ldots.\ (n-r+1)$$

maneras. Usando la notación factorial, se puede escribir

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Esta expresión también se conoce como *arreglo o variación*.

D) Combinaciones. Se considera nuevamente n objetos diferentes. Esta vez se está interesado en contar el número de maneras como se puede escoger r de esos n objetos sin considerar el orden.

Para obtener el resultado general se recuerda la fórmula derivada anteriormente: el número de maneras de elegir r objetos entre n y permutar los r elegidos es igual a $n!/(n-r)!$ Sea C el número de maneras de elegir r entre n, sin considerar el orden. (Esto es, el número buscado es C.) Se observa que una vez que se han escogido los r artículos, hay $r!$ maneras de permutarlos. Por tanto, aplicando una vez más el principio de multiplicación, junto con el resultado anterior, se obtiene la expresión:

$$C\, r! = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Así, el número de maneras de elegir r entre n objetos diferentes, sin considerar el orden, está dado por

$$C = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

que se conoce como el número combinatorio de n tomado de a r.

Se generaliza el problema anterior. Supóngase que se tiene N artículos. Si se elige n de esos al azar, sin sustitución, hay $\binom{N}{n}$ muestras posibles diferentes, todas las cuales tienen la misma probabilidad de ser escogidas. Si los N artículos están formados de r_1 A's y r_2 B's (con $r_1 + r_2 = N$) entonces la probabilidad de que los n artículos elegidos contengan exactamente s_1 A's y $(n - s_1)$ B's está dada por

$$\frac{\binom{r_1}{s_1}\binom{r_2}{n-s_1}}{\binom{N}{r}}.$$

La anterior se llama *probabilidad hipergeométrica.*

Observación: Es muy importante especificar, cuando se habla de escoger artículos al azar, si se lo hace con o sin sustitución. En una descripción más realista se propondrá esta última. Por ejemplo, cuando se inspecciona un número de artículos manufacturados con el propósito de descubrir cuántos defectuosos podría haber, en general, no se pretende inspeccionar el mismo artículo dos veces. Previamente se ha observado que el número de maneras de escoger r objetos entre n, sin considerar el orden está dado por $\binom{n}{r}$. El número de maneras de escoger r artículos entre n, con sustitución, está dado por n^r. Aquí se está interesado en el orden en que se escogieron los artículos.

E) Permutaciones cuando no todos los objetos son diferentes. En todos los métodos de enumeración presentados se ha supuesto que todos los objetos considerados eran diferentes (esto es, distinguibles). Sin embargo, no siempre este es el caso. Se supone, entonces, que se tiene n objetos tales que hay n_1 de una clase, n_2 de una segunda clase,..., n_k de una k-ésima clase, donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Entonces, el número de permutaciones de estos n objetos está dada por

$$\frac{n!}{n_1!\; n_2!\; \ldots\; n_k!}$$

Nótese que si todos los objetos son diferentes, se tiene $n_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, y, por tanto, la fórmula anterior se reduce a $n!$, el resultado obtenido en forma previa.

III. PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA.

Probabilidad condicional. Sean A y B dos eventos asociados con un experimento ϵ. Se indica con $P(B/A)$ la *probabilidad condicional del evento B, dado que A ha ocurrido.* Cada vez que se calcula $P(B/A)$, esencialmente se está calculando $P(B)$ respecto al espacio muestral reducido A, en vez de espacio muestral original S. Cuando se calcula $P(B)$ se pregunta qué tan probable es que se esté en B, sabiendo que se debe estar en S, y cuando se evalua $P(B/A)$ se pregunta qué tan probable es que se esté en B, sabiendo que se debe estar en A (es decir, el espacio muestral se ha reducido de S a A.).

Definición. Se define

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

siempre que sea $P(A) > 0$.

Definición. Se dice que los eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ representan una partición del espacio muestral S si:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$;

b) $\cup_{i=1}^{k} B_i = S$

c) $P(B_i) > 0$, $\forall$ i=1, ..., k.

En otras palabras , cuando se efectúa el exprimento ϵ, ocurre uno y sólo uno de los eventos B_i. Sea A algún evento respecto a S y sea $B_1, B_2, ..., B_k$ una partición de S, con lo cual se puede escribir:

$$A = \cup_{i=1}^{k} (A \cap B_i) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup .... \cup (A \cap B_k)$$

y por ende, se tiene:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$$

Sin embargo, cada término $P(A \cap B_i)$ se puede expresar como $P(A/B_i)\,P(B_i)$ y, por lo tanto, se obtiene el llamado *teorema de la probabilidad total*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)\, P(B_i) = P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2) + ... + P(A/B_k)\, P(B_k).$$

Observación. Este resultado representa una relación muy útil, ya que cuando se busca $P(A)$ frecuentemente puede ser difícil calcularlo de manera directa. Sin embargo, con la información adicional de que B_i ha ocurrido, se puede calcular $P(A/B_i)$ y por ende se puede entonces usar la fórmula anterior.

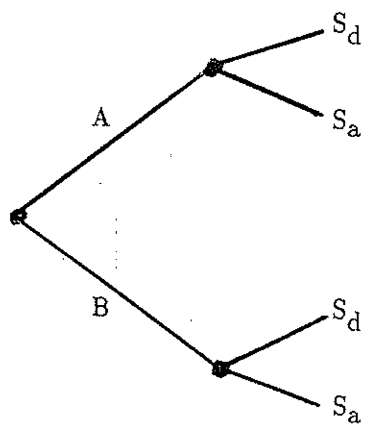
Por otro lado, cuando se necesite calcular $P(B_i/A)$ se podrá calcular esta probabilidad como una conscuencia de lo anterior. Sean $B_1, ..., B_k$ una partición del espacio muestral S y A un evento asociado con S. Aplicando la definición de probabilidad condicional, se puede escribir:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\ P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)\ P(B_i)} \quad ,\ i = 1, ..., k\ .$$

Este resultado se conoce como *Teorema de Bayes*. También se le llama fórmula para la probabilidad de las "causas". Puesto que las B_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos B_i ocurre. (Esto es, uno de los eventos B_i debe ocurrir y solamente uno.) Por lo tanto, la fórmula anterior da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una "causa"), dado que el evento A ha ocurrido. Para aplicar este teorema se debe conocer los valores de las $P(B_i)$, con $i = 1, ..., k$. Muy a menudo esos valores no son conocidos y esto limita la aplicabilidad del resultado.

La siguiente ilustración del Teorema de Bayes dará la oportunidad de introducir la idea de *diagrama de árbol*, método muy útil para analizar ciertos problemas. Supóngase que varias cajas de caramelos son de dos tipos A y B. El tipo A contiene 70% de caramelos dulces y 30% de caramelos ácidos, mientras que en el tipo B dichos porcentajes están invertidos. Más aún, supóngase que el 60% de todas las cajas de caramelos son del tipo A, mientras que el resto son del tipo B.

Ahora se está ante el siguiente problema de decisión. Usted recibe una caja de dulces de tipo desconocido. Se le permite sacar una muestra de caramelo (una situación ciertamente no real, pero que permite presentar las ideas importantes sin mucha complicación y con esta información debe decir si cree que se le ha sido ofrecido una caja del tipo A o del tipo B. El siguiente " diagrama de árbol" (llamado así por las diversas trayectorias o ramas que aparecen) ayudará a analizar el problema (S_d y S_a indican la elección de un caramelo dulce o ácido respectivamente).



Se pueden realizar algunos cálculos simples:

$$P(A)= 0{,}60\ ; \qquad P(B)= 0{,}40\ ; \qquad P(S_d/A)= 0{,}70\ ;$$

$$P(S_a/A)= 0{,}30\ ; \qquad P(S_d/B)= 0{,}30\ ; \qquad P(S_a/B)= 0{,}70\ .$$

Lo que en realidad se desea conocer son las siguientes probabilidades

$$P(A/S_d), \qquad P(A/S_a), \qquad P(B/S_d) \quad \text{y} \quad P(B/S_a).$$

Esto es, suponiendo que realmente se escogió un caramelo dulce, ¿qué decisión estaríamos más inclinados a hacer?

Para ello se deben comparar $P(A/S_d)$ y $P(B/S_d)$. Utilizando la fórmula de Bayes se tiene:

$$P(A/S_d) = \frac{P(S_d/A)\ P(A)}{P(S_d/A)\ P(A)\ +\ P(S_d/B)\ P(B)} = (0{,}7)(0{,}6)\ /\ [(0{,}7)(0{,}6) + (0{,}3)(0{,}4)] = 7/9.$$

Un cálculo similar da $P(B/S_d) = 2/9$. De este modo, con base en la evidencia que se tiene (es decir, la obtención de un caramelo dulce) es 3,50 veces más probable que se trate de una caja del tipo A que del tipo B. Por lo tanto, se decidiría, posiblemente, que el caramelo se obtuvo de una caja tipo A. (Por supuesto, se podría estar equivocado. Lo interesante del análisis anterior es que se elige la alternativa que parece más probable con base en los pocos datos que se tiene).

En términos del diagrama de árbol, lo que realmente se necesitaba (y se hizo) en los cálculos precedentes fue un análisis "hacia atrás". Esto es, dado lo que se observa, en este caso S_d, ¿qué tan probable era escoger el tipo A?

Eventos independientes. Dos eventos A y B que no pueden ocurrir de manera simultánea verifican que $A \cap B = \emptyset$. Tales eventos se designaron mutuamente excluyentes. Si A y B son mutuamente excluyentes entonces $P(A/B)=0$, porque la ocurrencia de B impide la ocurrencia de A. Por otra parte, para el caso particular $A \subseteq B$ se tendrá que $P(B/A)=1$.

En algunos de los casos anteriores, sabiendo que B ocurrió, se tiene una información precisa sobre la probabilidad de la ocurrencia de A. Sin embargo, hay muchos casos en los cuales se sabe que si un evento B ocurre, no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de otro evento A.

Definición. Se dice que A y B son dos *eventos independientes* si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)\ .$$

Observación. Esta definición es esencialmente equivalente a la que antes se sugirió, es decir, que A y B son independientes si $P(B/A)=P(B)$ y $P(A/B) = P(A)$. Esta última forma es un poco más intuitiva, porque afirma precisamente lo que se ha estado tratando de decir antes: A y B son independientes si el conocimiento de la ocurrencia de A no influye de modo alguno en la probabilidad de ocurrencia de B.

Definición. Se dice que los tres eventos, A, B y C, son mutuamente independientes si y sólo si todas las condiciones siguientes se satisfacen:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)\ , \qquad P(A \cap C) = P(A)\ P(C)\ ,$$
$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)\ , \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)\ .$$

Finalmente se generaliza esta noción a n eventos a través de la siguiente definición.

Definición. Los n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ son mutuamente independientes si y sólo si se tiene

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ..... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\ P(A_{i_2})\ ....\ P(A_{i_k})\ ,\ \forall\ k=2, 3, ..., n\ .$$

IV. VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES.

Definición. Sea ϵ un experimento y S el espacio muestral asociado con él. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $s \in S$, un número real X (s), se le llama *variable aleatoria.*

Definición. Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X (es decir su recorrido) es finito o infinito numerable, se llama a X una *variable aleatoria discreta.* Esto es, se pueden anotar los valores posibles de X como $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. En el caso finito, la lista termina y en el caso infinito numrable, la lista continúa indefinidamente.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta, es decir que el recorrido de X consta, a lo más, de un número de valores, $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ que es infinito numerable. Con cada resultado posible x_i se asocia un número $p(x_i) = P(X=x_i)$, llamado *probabilidad de x_i*. Los números $p(x_i)$, i=1,2, ... deben satisfacer las condiciones siguientes:

a) $p(x_i) \geq 0 \ , \forall \, i$,

b) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

La función p que antes se definió, se llama *función de probabilidad (o función de probabilidad puntual) de la variable aleatoria X.* La colección de pares $(x_i , p(x_i))$, i=1, 2, ... , algunas veces se llama distribución de probabilidad de X.

Definición. Se considera un experimento ϵ y sea A un evento asociado con ϵ. Se supone que $P(A) = p$, y por lo tanto, $P(A^c) = 1 - p$. Se considera n repeticiones independientes de ϵ. Por lo tanto, el espacio muestral consiste en todas las sucesiones posibles $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, donde cada a_i es A ó A^c, según A ó A^c ocurra en la i-ésima repetición de ϵ (hay 2^n de tales sucesiones). Aún más, se supone que $P(A) = p$ es el mismo para todas las repeticiones. Se define la variable aleatoria X como sigue: X es igual al número de veces que ocurrió el evento A. Se llama a X una variable aleatoria binomial con los parámetros n y p. Sus valores posibles obviamente son el 0, 1, 2, ..., n. (Decimos en forma equivalente que X tiene una *distribución binomial*). Las repeticiones individuales de E se llamarán ensayos de Bernoulli.

Definición. Se dice que X es una *variable aleatoria continua,* si existe una función f, llamada *función de densidad de probabilidad* (fdp) de X, que satisface las siguientes condiciones:

a) $f(x) \geq 0 \ , \forall \, x$,

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$

c) Se tiene que $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx$, $\forall \, a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$.

Definición. Sea X una variable aleatoria, discreta o continua. Se llama *función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X* (abreviada fda) a la función dada por la expresión

$$F(x) = P(X \leq x) .$$

Teorema. a) Si X es una variable aleatoria discreta, entonces F viene dada por

$$F(x) = \sum_{i} p(x_i) ,$$

donde la suma se toma sobre todos los índices i que satisfacen $x_i \leq x$.

b) Si X es una variable aleatoria continua con función de probabilidad f, entonces F viene dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds .$$

Más aún:

i) La función F no es decreciente. Esto es, si $x_1 \leq x_2$ entonces se tiene que $F(x_1) \leq F(x_2)$.

ii) Se tienen los siguientes límites:

$$F(-\infty) = 0 , \qquad F(\infty) = 1 .$$

c) Sea F la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua con función de distribución f. Entonces, se tiene que f es la derivada de F, es decir:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}(x) ,$$

para todo x en el cual F es diferenciable.

d) Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \cdots$, y se supone que es posible rotular dichos valores de modo que $x_1 < x_2 < \ldots$. Sea F la función de distribución acumulativa de X. Entonces,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) .$$

Observación. Una advertencia sobre la terminología puede ser de utilidad. Esta terminología, aunque no es nuy uniforme, ha llegado a estandarizarse. Cuando se habla de la distribución de probabilidades de una variable aleatoria X se indica su fdp f si X es continua, o su función de probabilidad puntual p definida para $x_1, x_2, \ldots$ si X es discreta. Cuando se habla de la función de distribución acumulativa, o algunas veces sólo de la función de distribución, siempre se refiere a F, donde $F(x) = P(X \leq x)$.

V. CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS.

Valor esperado o esperanza matemática.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, y sea $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Entonces el *valor esperado* de X (o *esperanza matemática* de X) que se denota con E(X), se define como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i)$$

si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i)$ converge absolutamente, es decir si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p(x_i) < \infty$. Este número también se designa como *valor promedio* de X.

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad f. El *valor esperado* de X se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Nuevamente puede suceder que esta integral (impropia) no converja. Por lo tanto, se dice que E(X) existe si y sólo si la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\, dx$$

es finita.

Varianza.

Definición. Sea X una variable aleatoria. Se define la *varianza* de X, que se denota con Var(X), V(X) ó σ_X^2 como sigue:

$$\sigma_X^2 = V(X) = E\Big([X - E(X)]^2\Big).$$

La raíz cuadrada positiva de V(X) se llama *desviación estándar* de X y se designa con σ_X.

Teorema. Sea X una variable aleatoria. la varianza de X puede expresarse como

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

Desigualdad de Chebyshev. Sea X una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y sea c un número real cualquiera. Entonces, si $E(X-c)^2$ es finita y $\in$ es cualquier número positivo, se tiene

$$P[|X - c| \geq \in] \leq \frac{1}{\in^2} E(X-c)^2.$$

Las formas siguientes, equivalentes a la desigualdad anterior, son inmediatas:

(a) Al considerar el evento complementario se obtiene:

$$P[|X - c| < \in] \geq 1 - \frac{1}{\in^2} E(X-c)^2.$$

(b) Al elegir $c = \mu$ se obtiene

$$P[|X - \mu| < \in] \geq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\in^2}.$$

(c) Al elegir $c = \mu$ y $\in = k\sigma$, donde $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) > 0$, se obtiene

$$P[|X - c| \geq k\sigma] \geq k^{-2}.$$

Esta última forma indica especialmente cómo la varianza mide el "grado de la concentración" de la probabilidad próxima a $E(X) = \mu$.

VI. MATEMÁTICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

A. Distribuciones discretas:

1) Distribución binomial :

Se define :

$$P(r) \equiv \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

como la probabilidad de que sucedan r éxitos en n pruebas donde :

$r \in \{0,1,2, \dots ,n\}$: variable aleatoria que representa el número de aciertos ;
$n \in \mathbb{N}$: tamaño de la muestra o número de lanzamientos ;
$p \in (0,1)$: probabilidad de un acierto ;
$q = 1-p \in (0,1)$: probabilidad de un fracaso ;
parámetros : n , p ; $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$: número combinatorio .

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) P determina una distribución de probabilidad pues :

$$\sum_{r=0}^{n} P(r) = 1 \quad \text{(Utilice el binomio de Newton)} .$$

(ii) La media aritmética , esperanza o momento de orden 1 está dada por :

$$E \equiv \sum_{r=0}^{n} r\, P(r) = np .$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por :

$$\sum_{r=0}^{n} r^2\, P(r) = np(q+np) .$$

(iv) La varianza está dada por :

$$\sum_{r=0}^{n} (r-E)^2\, P(r) = \sum_{r=0}^{n} r^2\, P(r) - E^2 = npq$$

y la desviación estándar por $\sqrt{npq}$.

(v) Si se considera que $np = m \in \mathbb{R}^+$ (fijo) se obtiene el siguiente límite :

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ np = m}} P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!} \quad \text{(Ver (2))} .$$

2) Distribución de Poisson :

Se define

$$P(x) \equiv \frac{e^{-m}\, m^x}{x!}$$

como la probabilidad de que sucedan x eventos por unidad de medida donde :

$x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: variable aleatoria que representa el número de ocurrencias por unidad de medida;
$m \in \mathbb{N}$: número promedio de ocurrencias por unidad de medida ;
parámetro : m .

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) P determina una distribución de probabilidad pues :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(k) = 1 \qquad \text{(Utilice la serie de potencias } e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \text{ con radio de convergencia } +\infty \text{).}$$

(ii) La media aritmética , esperanza o momento de orden 1 está dada por :

$$E \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(k) = m \,.$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, P(k) = m^2 + m \,.$$

(iv) La varianza está dada por :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k-E)^2\, P(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, P(k) - E^2 = m$$

y la desviación estándar por $\sqrt{m}$.

B. Distribuciones continuas.

3) Distribución normal :

La función de densidad de probabilidad está dada por :

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (\text{Normal } N(\mu,\sigma))$$

donde

$x \in \mathbb{R}$: variable aleatoria continua ;
parámetros : $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) f genera una distribución de probabilidad pues :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 \qquad (\text{Utilice la sustitución } t = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}) .$$

(ii) La media aritmética, esperanza o momento de primer orden está dada por

$$E \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \mu .$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \mu^2 + \sigma^2 .$$

(iv) La varianza está dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - E^2 = \sigma^2 ,$$

y la desviación estándar por σ.

(v) El cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ transforma la función $f = f(x)$ (Normal $N(\mu,\sigma)$) en $g = g(z)$ (Normal $N(0,1)$).

(vi) La gráfica de la función $f = f(x)$ es una campana (campana de Gauss) que tiene las siguientes características (pasar de la variable x a la variable z ó t cuando sea conveniente) :

(a) Moda : $Mo \equiv \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Máx}}\ f(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (f'(\mu) = 0 \,,\, f''(\mu) < 0)$;

(b) Mediana : $Md \equiv f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ pues

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\, dx = \int_{\mu}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

(c) f es cóncava en $(-\sigma, \sigma)$, es convexa en $(-\infty, -\sigma) \cup (\sigma, +\infty)$ y tiene puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$ $\;(f''(\mu \pm \sigma) = 0)$.

(d) Se tienen las siguientes probabilidades de que la variable aleatoria pertenezca a ciertos intervalos importantes :

$$P(|x| \leq \sigma) = P(|z| \leq 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0{,}6827 \;;$$

$$P(|x| \leq 1{,}645\,\sigma) = P(|z| \leq 1{,}645) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1,645}^{1,645} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0{,}90 \;;$$

$$P(|x| \leq 1{,}96\,\sigma) = P(|z| \leq 1{,}96) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1,96}^{1,96} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0{,}95 \;;$$

$$P(|x| \leq 2\sigma) = P(|z| \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0{,}9545 \;;$$

$$P(|x| \leq 2{,}58\,\sigma) = P(|z| \leq 2{,}58) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2,58}^{2,58} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0{,}99 \;;$$

$$P(|x| \leq 3\sigma) = P(|z| \leq 3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0{,}9973 \,.$$

e) Calcule el primer cuartil Q_1, el tercer cuartil Q_3, y la desviación cuartílica.

4) Distribución exponencial:

La función de densidad de probabilidad está dada por :

$$f(t) \equiv \lambda\, e^{-\lambda t} \quad ,$$

donde :

$t > 0$: variable aleatoria que representa el tiempo entre llegadas sucesivas ;
$\lambda > 0$: es la tasa promedio de llegadas (similar al parámetro m de Poisson) ;
$\frac{1}{\lambda}$: es el tiempo promedio entre llegadas
parámetro : λ .

Se puede extender la definición de la función f a todo el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ de la siguiente manera :

$$f(t) \equiv \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \,, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Verifique que se tienen las siguientes relaciones :

(i) f genera una distribución de probabilidad pues :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}\, du = 1$$

(ii) La media aritmética, esperanza o momento de orden 1 está dada por :

$$E \equiv \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} u\, e^{-u}\, du = \frac{1}{\lambda} \qquad \left(\text{utilice} \int_0^{+\infty} u\, e^{-u}\, du = 1\right).$$

(iii) El momento de orden 2 está dado por

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\, du = \frac{2}{\lambda^2} \qquad \left(\text{utilice} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\, du = 2\right).$$

(iv) La varianza está dada por

$$\int_0^{+\infty} (t - E)^2 f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\, dt - E^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

y la desviación estándar por $\frac{1}{\lambda}$.

(v) Las probabilidades acumuladas "más que" están dadas por :

$$P(t>a) \equiv \int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt = e^{-\lambda a} \quad , \quad \forall\, a \geq 0\,.$$

(vi) Calcule el primer, segundo y tercer cuartil, y la desviación cuartílica.

(vi) La distribución de probabilidad exponencial es del tipo J invertida (grafique la función $f=f(t)$) .

(vii) La distribución de probabilidad exponencial no tiene memoria pues se tiene la siguiente relación para la probabilidad condicional :

$$P(t>b/t>a) \equiv \frac{P(t>b)}{P(t>a)} = P(t>(b-a)).$$

Actividad Nº 13: Probabilidad condicionada y tablas de contingencia

Material

No es necesario.

Tablas de contingencia

Comenzamos por dos problemas en los que se introduce un modo de presentar los datos de gran interés para el cálculo de probabilidades:

Problema 1. Diagnósticos

Una revista médica publica que para diagnosticar las lesiones de hígado existen dos procedimientos: "el histológico" y el "gráfico". El segundo procedimiento no es tan preciso como el primero, pero conlleva menor riesgo.

Para verificar la bondad del procedimiento gráfico se estudiaron con él 1.160 lesiones de hígado, comprobándose más tarde si el diagnóstico fue correcto o no.

Los datos obtenidos fueron distintos según que la lesión fuera maligna o benigna. He aquí la tabla:

TABLA 1	Diagnostico correcto	Diagnostico incorrecto	TOTALES
Lesiones malignas	418	38	456
Lesiones benignas	608	96	704
TOTALES	1.026	134	1.160

a) Interpreta el significado de cada uno de los números de la tabla.

b) Para juzgar la precisión del procedimiento es importante conocer la proporción de cada caso respecto al total de 1.160 lesiones. Expresa la tabla anterior en frecuencias relativas y en porcentajes; es decir, completa las dos tablas de la página siguiente:

TABLA 2	C	I	TOTAL
M	0´36		
B			
TOTAL			

TABLA 3	C	I	TOTAL
M	36		
B			
TOTAL			

¿Cómo son los sucesos C e I entre sí? ¿Y los M y B?

c) Se va a diagnosticar a un paciente por el procedimiento gráfico. ¿Qué probabilidades asignarás a los siguientes sucesos aleatorios

C y M; C y B; I y M; I y B; C, I?

d) ¿Qué probabilidad asignas al suceso "lesión maligna diagnosticada correctamente"? ¿Y al suceso "lesión benigna diagnosticada correctamente"? ¿Son independientes los sucesos C y M?

Para responder a estas preguntas recuerda que según vimos en la actividad número 10, si dos sucesos son independientes se verificaba que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2)$$

Mientras que si son dependientes se verifica que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2/S1)$$

de donde se tiene:

$$P(S2/S1) = P(S1 \text{ y } S2) / P(S1)$$

Problema 2. Accidentes de tráfico

Con objeto de que disminuya el número de accidentes de circulación es preciso tomar diversos tipos de medidas: campañas de información en prensa, radio y televisión; mejora de la seguridad pasiva de los vehículos; mejora del trazado y señalización de las vías (calles y carreteras); vigilancia por parte de los agentes de tráfico, etc.

Para ello es necesario disponer de información, disponer de datos. El Instituto Nacional de Estadística (INE), en su Anuario de 1975 publicó para el año 1973 los siguientes datos:

TABLA 4	En carretera	En zona urbana	TOTALES
Con victimas	34.092	32.295	66.387
Solo daños materiales	11.712	20.791	32.503
TOTALES	45.804	53.086	98.890

a) Completa la siguiente tabla de porcentajes, obtenida a partir de la anterior:

TABLA 5	A	no A	TOTALES
B	34		67
no B			33
TOTALES	46	54	100

b) Como sabes que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$$

calcula en este problema P(B/A) y P(B/no A) y decide si A y B son independientes. ¿Es P(B/A) = P(B)?.

Las tablas 1, 2, 3 del problema del diagnóstico, y las 4 y 5 del de los accidentes de tráfico reciben el nombre de **tablas de contingencia**, pues en ellas figuran todas las posibilidades, o contingencia, de los sucesos compuestos que son intersección de otros sucesos, esto es:

$$A \text{ y } B = A \cap B;\ A \text{ y no } B = A \cap \overline{B};\ \text{no } A \text{ y } B = \overline{A} \cap B;\ \text{no } A \text{ y no } B = \overline{A} \cap \overline{B}$$

El esquema de dichas tablas es el siguiente:

TABLA 6	A	$\overline{A}$	**Totales**
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
Totales	$P(A)$	$P(\overline{A})$	**1**

y pueden figurar en ellas, en lugar de probabilidades, frecuencias relativas o porcentajes.

Estas tablas además de darnos probabilidades de forma directa nos permiten el cálculo de probabilidades de sucesos condicionados; por ejemplo P(B/A) y P(B/no A).

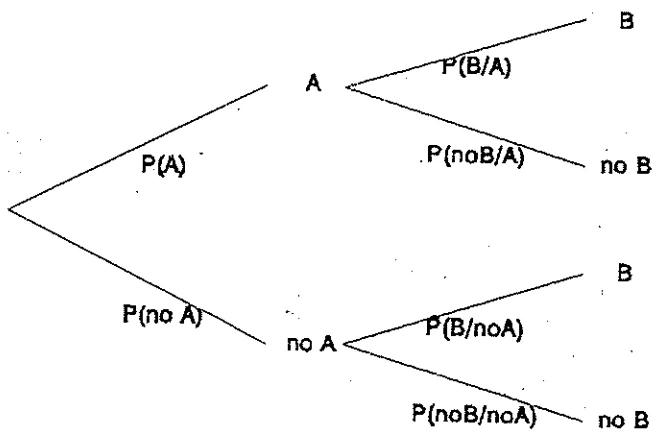
Existen tablas de contingencia más complicadas. Si consideramos que los accidentes pueden ser leves, graves o mortales; en carretera o en zona urbana, el diagrama de contingencia será:

TABLA 7	L	G	M	TOTALES
C				
U				
TOTALES				1

Lo fundamental de estas tablas es que los sucesos L, G y M sean incompatibles dos a dos y su unión sea el espacio muestral, y que los sucesos C y U también lo sean y compongan el espacio muestral.

Relación entre los diagramas de contingencia y los de árbol

La tabla 6 se puede poner en forma de diagrama de árbol de la forma siguiente:



Multiplicando las probabilidades de las distintas ramas que van hasta un punto dado, por ejemplo B, se obtiene la probabilidad de la intersección de los sucesos que se encuentran por el camino:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \text{ y no } B) = P(A) \cdot P(\text{no } B/A)$$

etc.

Los diagramas de contingencia y los de árbol están íntimamente relacionados: dado uno de ellos podemos construir el otro. Esto es muy importante, ya que unas veces los datos del problema permiten construir rápidamente uno de ellos y a partir de él podemos construir el otro diagrama, que nos dará la respuesta.

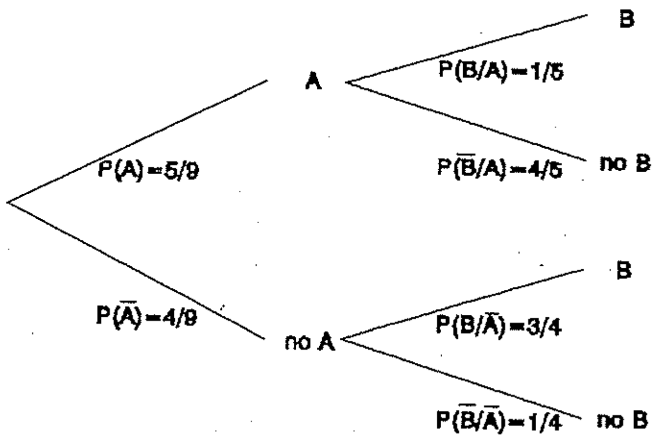
Teniendo en cuenta que:

$$P(B/A) = P(A \text{ y } B) / P(A) \qquad [1]$$

y dado el diagrama de contingencia:

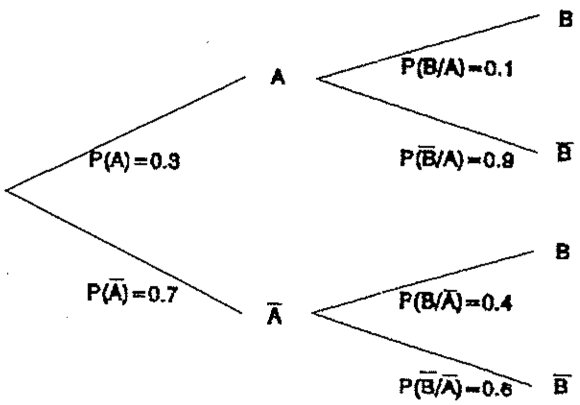
	A	no A	Totales
B	P(A y B)=1/9	P(no A y B)=3/9	P(B)=4/9
no B	P(A y no B)=4/9	P(no A y no B)=1/9	P(no B)=5/9
Totales	P(A)=5/9	P(no A)=4/9	1

puedes construir el de árbol:



Sin más que hacer en cada caso el cociente indicado en la expresión [1].

Recíprocamente, dado el diagrama de árbol, puedes construir el diagrama de contingencia:



Obtenemos, multiplicando los números de una misma rama, las probabilidades P(A y B), P(A y no B), P(no A y B), P(no A y no B), es decir, el diagrama de contingencia.

	A	$\overline{A}$	**Totales**
B	$P(A \cap B) =$ 0´03	$P(\overline{A} \cap B) =$ 0´28	$P(B) =$ 0´31
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) =$ 0´27	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$ 0´42	$P(\overline{B}) =$ 0´69
Totales	$P(A) =$ 0´30	$P(\overline{A}) =$ 0´70	**1**

Problemas a resolver

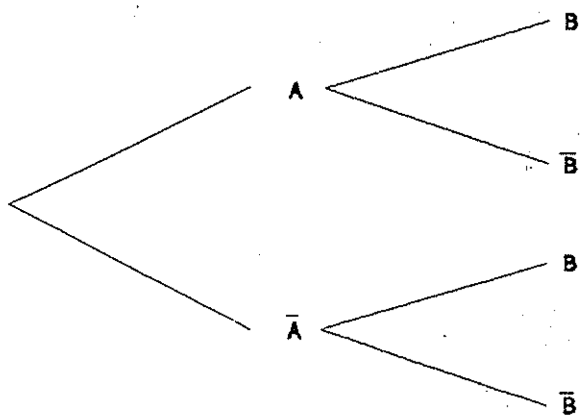
Ahora que ya conocemos los diagramas de contingencia y las relaciones con los diagramas de árbol te vamos a proponer varios problemas que resolverás aplicando lo que has aprendido en esta actividad.

1º

a) Dado el siguiente diagrama de contingencia

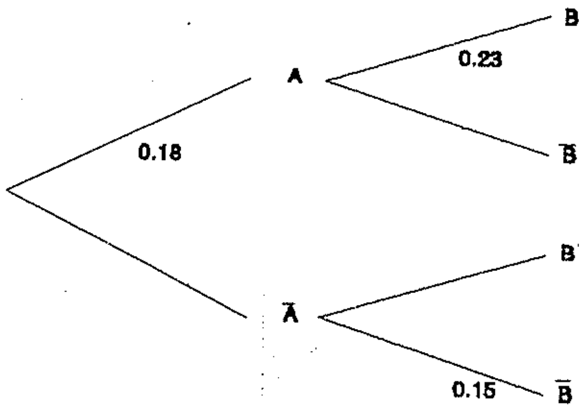
	A	**no A**	**Totales**
B	0,41	0,10	0,51
no B	0,30	0,19	0,49
Totales	0,71	0,29	1

construye el diagrama en árbol.



26

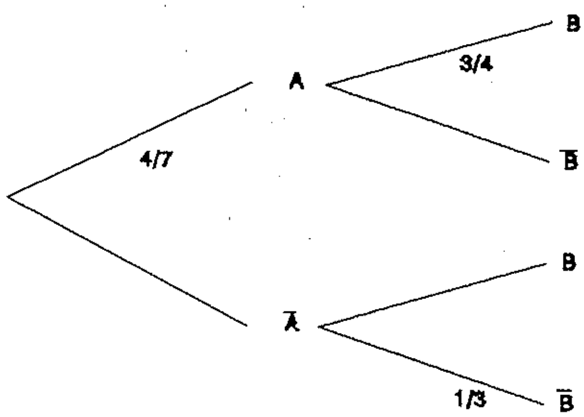
b) Dado el siguiente diagrama en árbol



construye el diagrama de contingencia:

	A	no A	Totales
B			
no B			
Totales			1

2º Completa el siguiente diagrama de probabilidades:



Construye con él una tabla de contingencia y a partir de ella un nuevo diagrama de árbol poniendo el suceso B en primer lugar.

3º Disponemos de dos cajas, M y N, la caja M contiene 7 bolas negras y 3 blancas, y la N 5 negras y 3 blancas. Se saca una bola al azar de una de las dos cajas, también al azar, y resulta ser blanca. Calcular la probabilidad de que proceda de la caja M.

4º Se han observado 50 enfermos de piel tratados con un nuevo antibiótico y otros 70 enfermos no tratados. Anotamos las curaciones al cabo de 2 semanas, los resultados han sido:

	Tratados	No tratados
Curados	40	20
No Curados	10	50

Si se emplean estos datos para asignar probabilidades,

a) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado haya sido tratado?
b) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado no haya sido tratado?

5º Una determinada empresa se dedica a la fabricación de cubiertas para las ruedas de los automóviles. Por los controles de calidad que esta empresa lleva a cabo se puede concluir diciendo que el 5% de las cubiertas producidas son defectuosas. En el laboratorio de control de calidad hay instalado un dispositivo que detecta el 90% de las cubiertas defectuosas, pero también califica como defectuosas el 2% de las correctas. El empresario está interesado en conocer las siguientes probabilidades:

* Probabilidad de que sea correcta una cubierta calificada como defectuosa por el dispositivo.
* Probabilidad de que sea defectuosa una cubierta calificada por el dispositivo como correcta.

¿Puedes ayudarle tú?

Nota: Consideremos los sucesos:

A = "Ser correcta"
B = "Ser calificada como correcta"
no A = "Ser defectuosa"
no B = "Ser calificada defectuosa"

El problema pregunta: P(A/no B) y P(no A/B). Para resolver el problema puedes construir primero el diagrama de árbol, el diagrama de contingencia y finalmente responder a las probabilidades pedidas a través del diagrama de contingencia.

$$P(A/\text{no } B) = P\ (A \text{ y no } B)\ /\ P(\text{no } B)$$

$$P(\text{no } A/B) = P\ (B \text{ y no } A)\ /\ P(B)$$

6º En un municipio hay tres partidos políticos: Progresista, Liberal y Moderado. Se efectúa un referéndum para decidir si un cierto día se declara fiesta local. He aquí los resultados en %, en función del partido al que votó cada ciudadano en las últimas elecciones:

		ÚLTIMAS ELECCIONES			
		Pr	Lib	Mod	Abs
REFERÉNDUM	SI	15 %	25 %	12 %	8 %
	NO	25 %	5 %	8 %	2 %

a) ¿Qué porcentaje votó a cada partido en las últimas elecciones?

b) ¿Qué probabilidad hay de que una persona tomada al azar haya votado Sí en el referéndum, P(Sí)?

c) Calcular las siguientes probabilidades:

P(Pr/Sí) P(Sí/Pr) P(Lib/Sí) P(Sí/Lib)
P(Mod/Sí) P(Sí/Mod) P(Abs/Sí) P(Sí/Abs)

d) Los sucesos "votar moderado en la última votación" y "votar Sí en el referéndum" son dependientes o independientes?

Contenidos implícitos en esta actividad

- Tablas de contingencia.
- Probabilidad condicionada.
- Relación entre los diagramas de contingencia y diagramas de árbol.

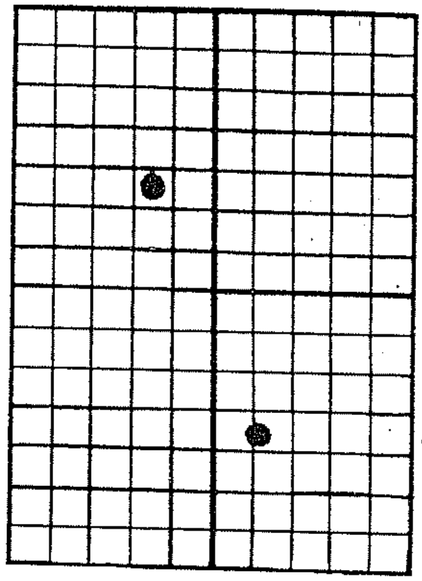
Actividad Nº 16: Probabilidad geométrica

Reglas del juego

Este juego consiste en experimentar al fenómeno aleatorio "lanzar una moneda de cien pesetas sobre una cuadrícula de 60 x 60 mm". Cada alumno realizará el experimento cien veces.

Materiales necesarios

Cada alumno necesita:
- Una moneda de 100 pesetas.
- Una cuadrícula de 60 x 60 mm, que obtendrás uniendo cuatro hojas DIN A4, como muestra la figura, y después haciendo el cuadriculado:
- Unos folios para ir anotando los resultados, conclusiones o conjeturas.



Desarrollo del juego

1º- ¿Puedes formular alguna conjetura sobre qué es lo que ocurrirá al lanzar una moneda de cien pesetas sobre una cuadrícula de 60 x 60 mm?.

2º- Sobre una cuadrícula lanzas la moneda cien veces y anotas el número de veces que la moneda toca alguna de las líneas de la cuadrícula.

Llamamos al suceso "la moneda toca alguna de las líneas de la cuadrícula", suceso S. Con los datos de la experiencia, rellena la siguiente tabla:

	f(S)	$f_r(S)$
SUCESO "S"		
	100 Lanzamientos	

3º- Recogemos los datos obtenidos por todos los alumnos de la clase y los colocamos en la siguiente tabla:

	f(S) Frecuencias absolutas de los Alumnos	$f_r(S)$ Frecuencia relativa total
S		
	100 X N lanzamientos	

$$f_r(S) = \frac{\text{suma de las frecuencias absolutas}}{100 \times N} \; ; \; N = \text{número de Alumnos}$$

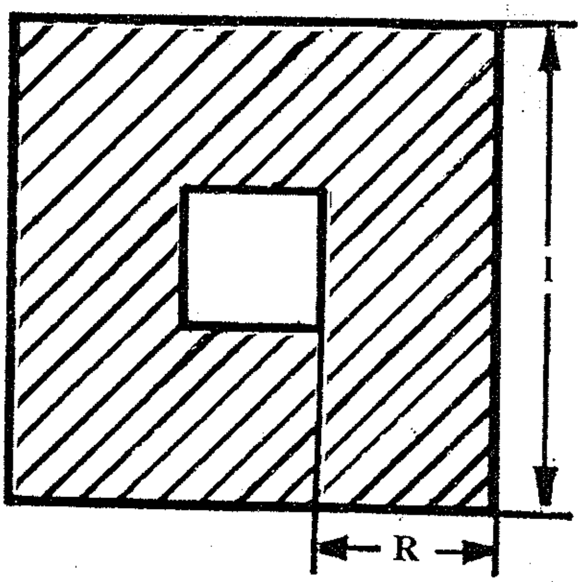
A la vista de los resultados obtenidos en la última tabla, ¿qué probabilidad asignarás al suceso S? Razónalo.

4º Recuerda la ley de Laplace, que utilizamos para el cálculo de probabilidades cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$P(S) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Con esta ley también calcularemos **probabilidades geométricas**, como vas a ver a continuación.

Si tomamos un cuadrado de la cuadrícula, la moneda pisará alguna línea de la cuadrícula si su centro cae dentro del área rayada:



l = 60 mm.
R = radio de la moneda.
ϕ = diámetro de la moneda = 24,5 mm.

Según la ley de Laplace la probabilidad de que al lanzar la moneda pise alguna línea de la cuadrícula será:

$$P(S) = \frac{\text{área de la zona rayada}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{l^2 - (l-2R)^2}{l^2} =$$

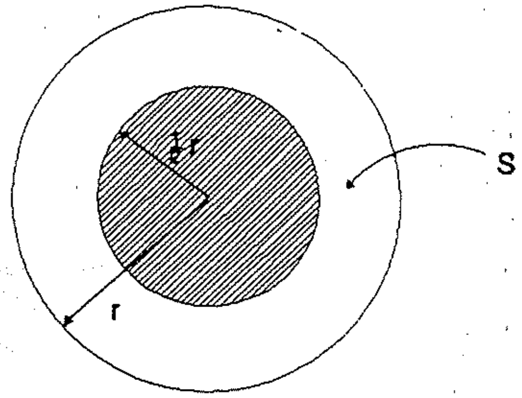
$$= \frac{l^2}{l^2} - \frac{(l-2R)^2}{l^2} = 1 - \left(\frac{l-2R}{l}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{\phi}{l}\right)^2$$

$$P(S) = 1 - \left(1 - \frac{24'5}{60}\right)^2 = 0'65$$

5º- Compara el resultado anterior con el que se obtuvo, de forma experimental, en el punto 3 y comenta la primera ley de los grandes números.

6º- Con el fin de que veas cómo se hacen los cálculos de probabilidades geométricas te resolveremos varios problemas.

Problema 1: En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Hallar la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.



Denotamos por S el conjunto de los puntos interiores al círculo de radio r y denotamos por A el conjunto de puntos interiores al círculo concéntrico de radio 1/2 de r. Así A está formado por aquellos puntos de D que están más cercanos a su centro que a su circunferencia.

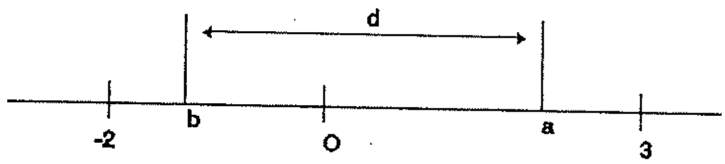
La probabilidad pedida vale:

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

Problema 2: Sobre una línea recta se seleccionan al azar los puntos a y b tales que

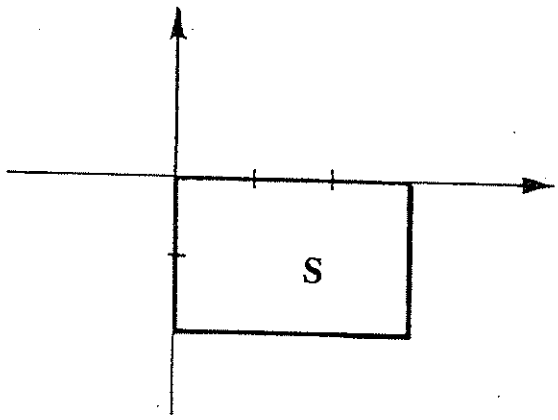
$$-2 \le b \le 0 \quad y \quad 0 \le a \le 3$$

como se muestra en la figura siguiente:



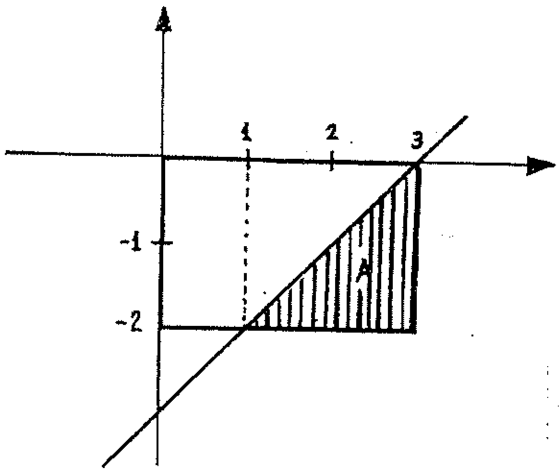
Hallar la probabilidad de que la distancia d entre a y b sea mayor que 3.

Los puntos (a,b) posibles son los que se muestran en el diagrama siguiente:



e incluidos en el rectángulo.

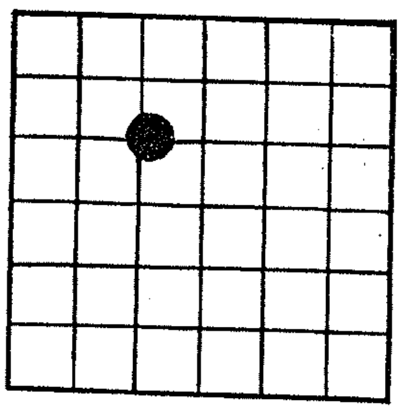
El conjunto de puntos favorables (a,b) serán aquellos para los cuales $d = a - b \geq 3$ y son los puntos de S que caen por debajo de la línea $x - y = 3$ y forman por tanto la superficie sombreada.



En consecuencia:

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

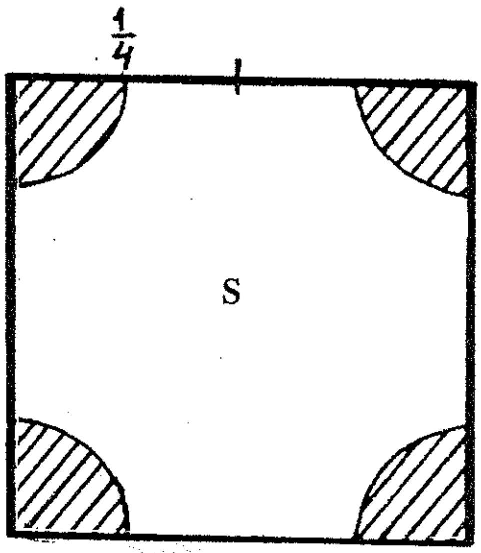
Problema 3: Se tiene una cuadrícula de 1 x 1 cm. Se lanza un disco sobre ella de 1/2 cm de diámetro al azar. Hallar la probabilidad de que el disco cubra un punto de intersección de la cuadrícula.



33

Tomamos un cuadrado de la cuadrícula y sea S el conjunto de los puntos interiores a este cuadrado.

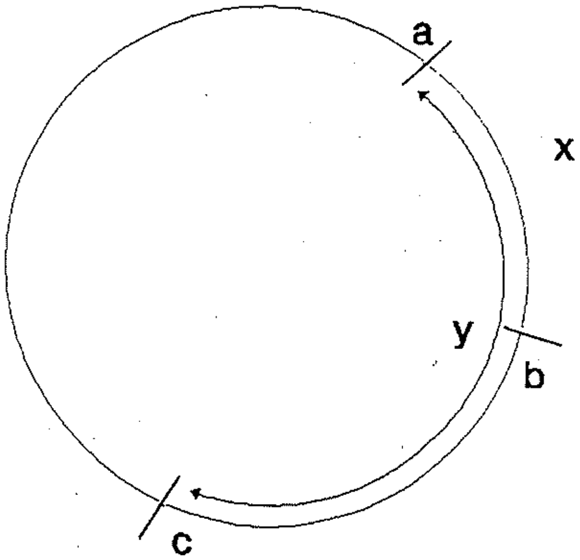
Denotamos por A el conjunto de puntos de S de distancia a las esquinas 1/4 cm. Así si el centro del disco cae en S cubrirá un punto de intersección de la cuadrícula sí y sólo sí su centro cae en un punto de A.



A= sombreada

Según esto:

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1^2} = \frac{\pi}{16}$$



Problema 4: Tres puntos a, b, c de una circunferencia se escogen al azar. Hallar la probabilidad de que los puntos caigan sobre el mismo semicírculo.

Supongamos que la longitud de la circunferencia sea 2s. Denotamos por x la longitud del arco ab en el sentido del movimiento de las agujas del reloj y denotamos por y la longitud del arco ac en el mismo sentido. Se debe cumplir:

$$0 < x < 2s$$

$$0 < y < 2s$$

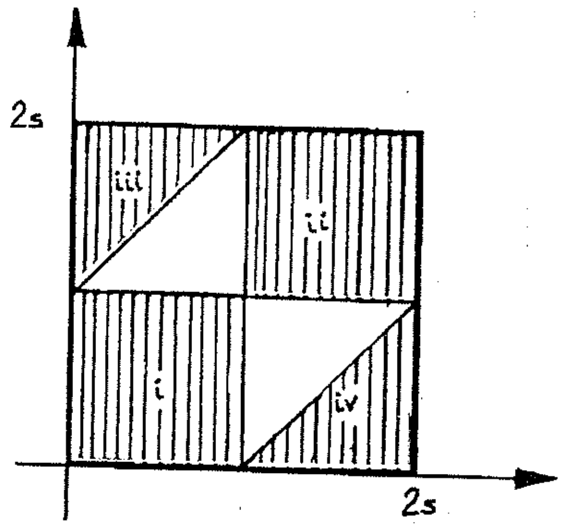
Sea S el conjunto de los puntos de R^2 para los cuales se cumplen las condiciones anteriores: Sea A el subconjunto de S para los cuales se cumplen las condiciones siguientes:

i) $x,y < s$

ii) $x,y > s$

iii) $x < s,\ y - x > s$

iv) $y < s,\ x - y > s$



Entonces A consta de aquellos puntos para los cuales se cumple que a, b, c caen sobre el semicírculo. Así

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{3\,s^2}{4\,s^2} = \frac{3}{4}$$

Problema 5: Dado un segmento cualquiera, hallar la probabilidad de obtener, por trisección, los tres lados de un triángulo.

Entendemos por trisección la elección de dos puntos al azar del interior del segmento. Es evidente que no supone restricción alguna identificar al segmento con el intervalo [0,1]. La elección de dos puntos en el segmento es entonces la elección de dos números tales que

$$x \in (0,1)$$

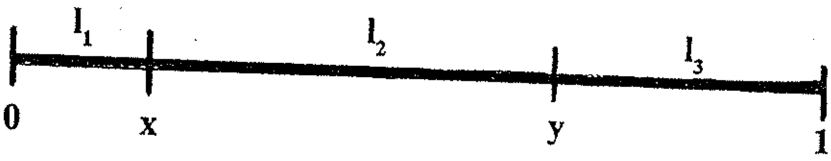
$$y \in (0,1)$$

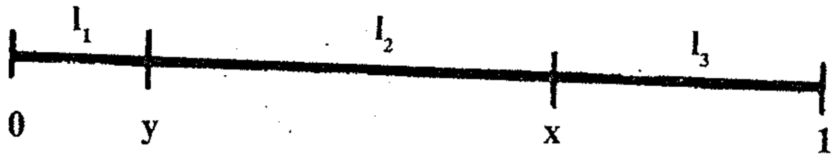
$$x \neq y.$$

La condición necesaria y suficiente para que con tres segmentos

35

se pueda formar un triángulo es que la longitud de cada uno de los segmentos sea menor que la suma de los otros dos. Refiriendo estas condiciones a los números x e y obtenemos:

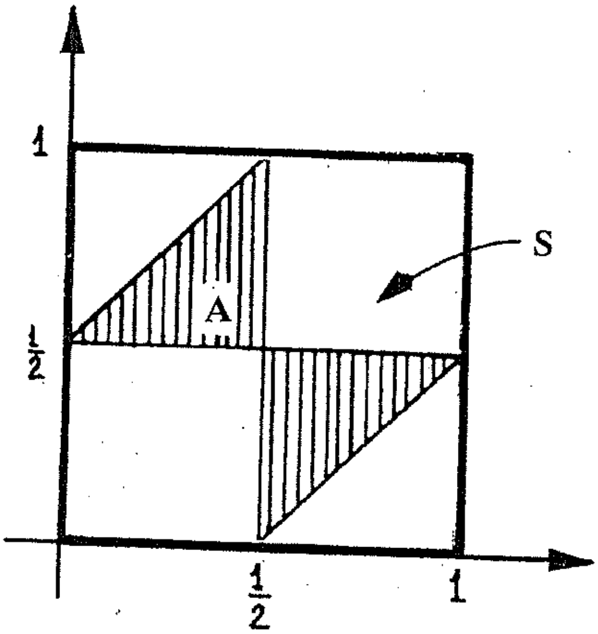




$$x<y;\ 0<x<\frac{1}{2};\ y-x<\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}<y<1$$

$$y<x;\ 0<y<\frac{1}{2};\ x-y<\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}<x<1$$

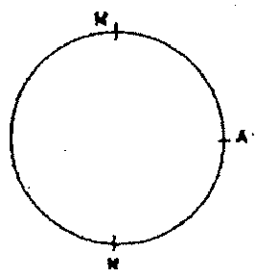
Interpretando geométricamente estas condiciones, identificando (x,y) con un punto del plano, resulta que los puntos que verifican la condición pertenecen a la parte rayada de la figura:

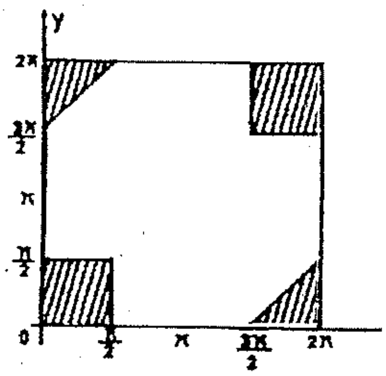


La probabilidad es por tanto:

$$P(A)=\frac{\text{área de }A}{\text{área de }S}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{1}=\frac{1}{4}$$

36





Problema 6: En una circunferencia se escogen al azar tres puntos A, B y C.

Calcular la probabilidad de que los tres estén situados en un mismo arco de 90º.

Supuesto elegido el punto A tomémoslo como origen de medida de longitudes de arco en una circunferencia que podemos suponer de radio 1.

El punto B se puede escoger de forma que la longitud x del arco AB esté comprendida en

$$[0, \frac{\pi}{2}] \bigcup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$$

Elegido el punto B, la medida del arco AC verificará:

a) *Si* $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ *entonces* $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ *o bien* $x - \frac{\pi}{2} + 2\pi \le 2\pi$

b) *Si* $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ *se verificará* $\frac{3\pi}{2} \le y \le 2\pi$ *o bien* $0 \le y \le x + \frac{\pi}{2} - 2\pi$

En consecuencia (x,y) ha de ser un punto de la parte rayada de la figura, cuyo área es

$$2\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{4}$$

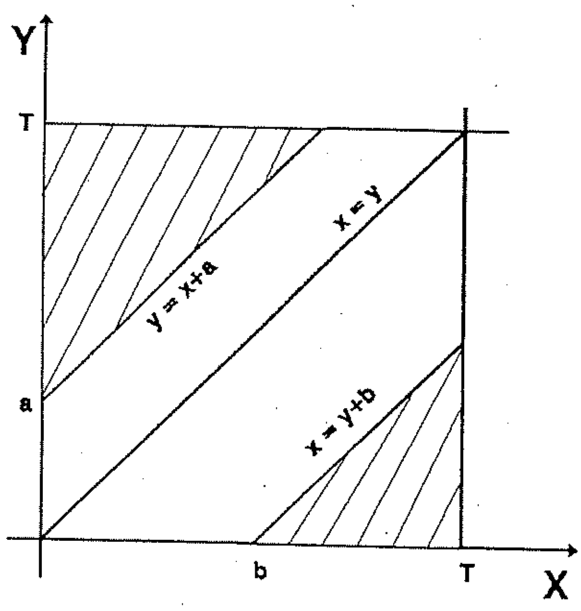
La probabilidad buscada es

$$\frac{\frac{3\pi^2}{4}}{4\pi^2} = \frac{3}{16}$$

Problema 7: Un tren llega a una estación en un instante al azar del intervalo (0,T), parando **a** minutos. A la misma estación acude un autobús al azar e independientemente en el mismo intervalo y parando **b** minutos, **a** y **b** < T.

1) Calcular la probabilidad de que el tren llegue antes que el autobús.
2) Determinar la probabilidad de que se encuentren.
3) Suponiendo que se encuentren en la estación, determinar la probabilidad de que el tren llegue antes que el autobús.

Interpretaremos el problema geométricamente.



Sean x el instante de llegada del tren e y el de llegada del autobús.

1) Es la probabilidad del suceso x < y:

$$P=\frac{\frac{1}{2}T^2}{T^2}=\frac{1}{2}$$

2) Es la probabilidad de la suma de los sucesos:

$$x < y < x+a$$
$$y < x < y+b;$$

luego

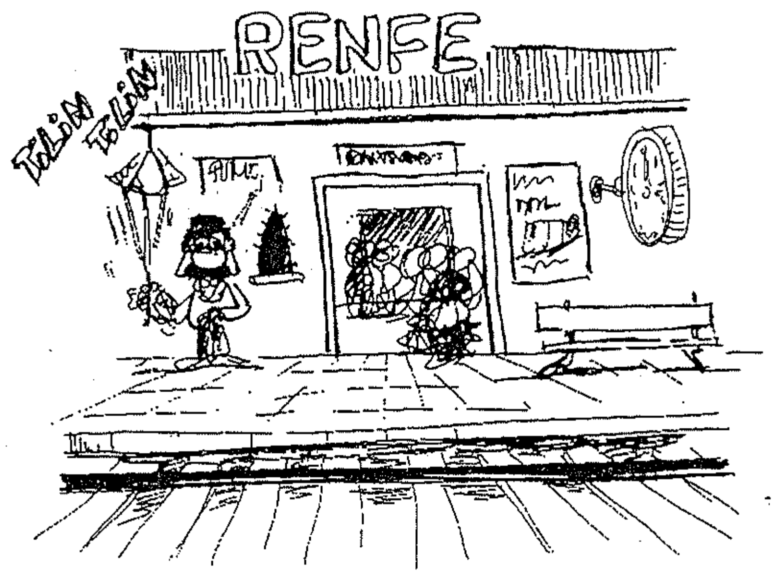
$$P=\frac{\frac{1}{2}T^2-\frac{1}{2}(T-a)^2}{T^2}+\frac{\frac{1}{2}T^2-\frac{1}{2}(T-b)^2}{T^2}=\frac{(a+b)\,T-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}{T^2}$$

3) Es

$$P=\frac{\frac{1}{2}T^2-\frac{1}{2}(T-a)^2}{(a+b)\,T-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}=\frac{aT-\frac{1}{2}a^2}{(a+b)\,T-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

Contenidos implícitos de esta actividad

- Probabilidades geométricas.



Actividad Nº 18
Probabilidad dinámica

Reglas del juego

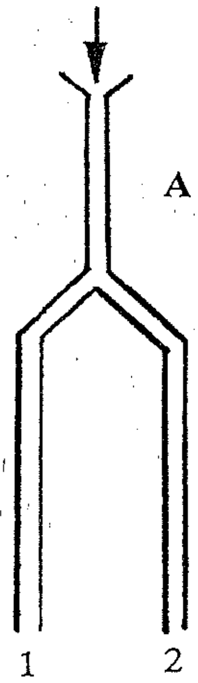
Utilizando fichas, simular situaciones de problemas de probabilidad.

Materiales necesarios

Un gran número de fichas.

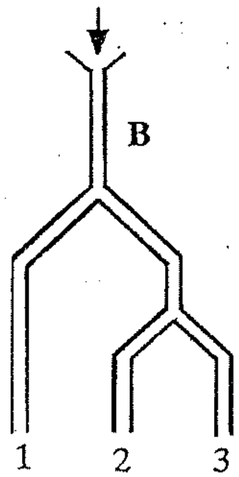
Etapas del desarrollo del juego

Embudos



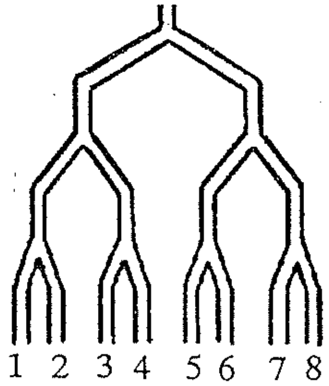
Si dejamos caer un gran número de bolitas, perdigones, fichas, etc, en los embudos A y B que aparecen dibujados observaremos que ocurre lo siguiente:

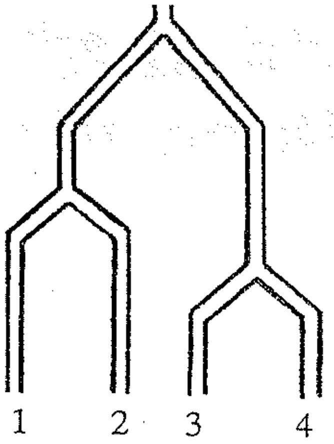
Las posibilidades que tiene un objeto de ir por un camino u otro es igual en cada bifurcación; como en cada bifurcación aparecen dos ramas, la probabilidad de que un objeto pase por cada una de ellas es 1/2 en cada cruce; expresado en porcentaje, el 50%.

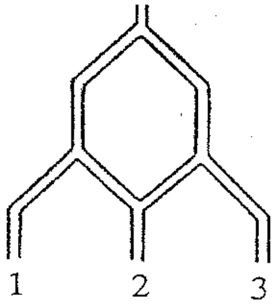


Así, si lanzamos 100 objetos por el embudo A, esperamos que aproximadamente sean 50 los que salen por el canal 1 y otros 50 por el canal 2. Si los 100 lanzamientos los realizamos en el embudo B, esperamos que aproximadamente 50 caigan por el canal 1 y 25 por los canales 2 y 3.

Supón que ahora dejamos caer un montón de perdigones en cada uno de los embudos C, D y F. En estos casos, ¿qué proporción de perdigones esperas que salga por cada canal?





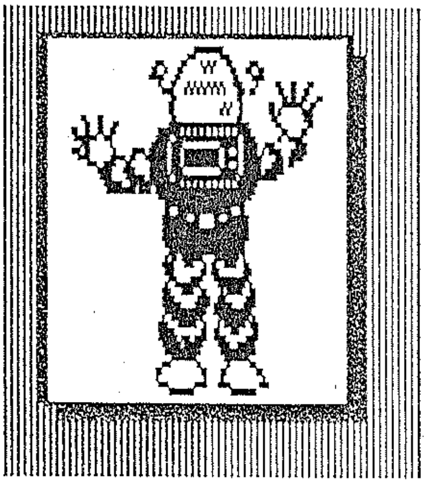


Embudo C

Embudo D

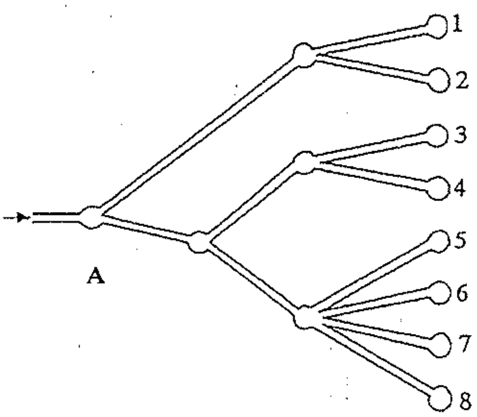
Embudo E

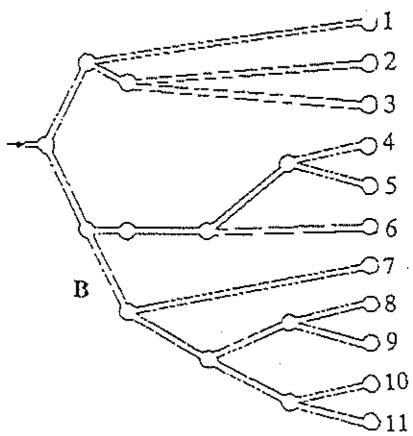
Laberintos



Se pone un robot en un laberinto y empieza a explorarlo. En cada bifurcación es igual de probable que el robot continúe por un camino que por otro (excepto que no puede retroceder por el mismo camino por el que ha llegado). Hay trampas al final de los caminos. ¿En cuál de las trampas es más probable que acabe el robot, o son todas igualmente probables?

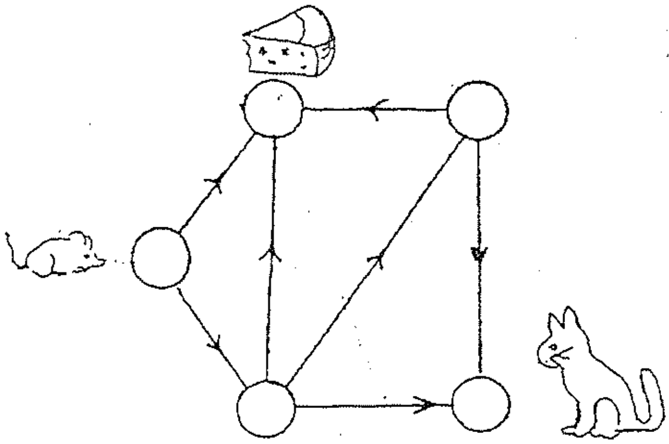
Imagina que repetimos la experiencia muchas veces ¿En qué proporción de ocasiones caerá en cada trampa? Resuelve, para cada uno de los laberintos dibujados.



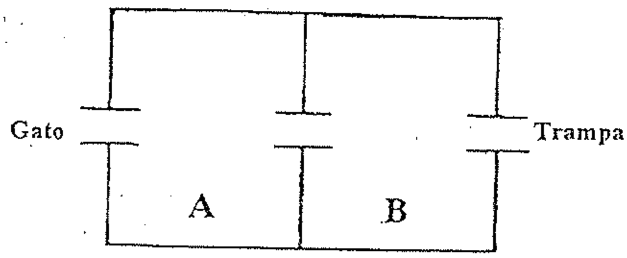


Ratones

A).- Se introducen doce ratones por la entrada del laberinto de la figura, que tiene dos salidas, una en la que hay un gato y otra en la que se encuentra un queso. Si el ratón llega a donde está el queso, se lo come y sale libre, pero si va a parar a la salida donde se encuentra el gato, es comido por éste.



¿Cuántos ratones se salvarán? ¿Cuántos serán comidos por el gato? ¿Y si hay 24 ó 36 ratones? ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se coma el queso? ¿Cuál la de que sea comido por el gato?



B).- Un ratón se mueve entre dos habitaciones A y B. Si sale de A es atrapado por el gato, mientras que si sale de B cae en una trampa, como se ve en el diagrama. Inicialmente parte de la habitación A y su movimiento se realiza de la siguiente forma: de A a B con probabilidad 3/4, de B a A con probabilidad 7/8. Hallar la probabilidad de que: a) lo coja el gato, b) lo coja la trampa.

C).- Un ratón puede estar en 6 posiciones (como se indica en la figura) de forma que si está en la posición i, luego se mueve a las posiciones i+1 o i-1 con probabilidades 2/3 y 1/3 respectivamente, pero si llega a las posiciones 1 o 6 queda atrapado en sendas trampas. En este paseo aleatorio, si el ratón parte de la posición 3 determinar las probabilidades de ser atrapado en las trampas 1 y 6.

Estrategias

D).- Un jugador necesita cinco millones de pesetas para pagar una deuda, pero solo tiene un millón y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma mas rápida posible a su objetivo. Estudiar la estrategia a seguir por el jugador y calcular la probabilidad que tiene de conseguirlo.

VII. PROBLEMAS CON PROBABILIDADES

1) Ir a dos fábricas. Un ingeniero trabaja en dos fábricas A y B. Los ómnibus que lo llevan a las fábricas parten del mismo lugar. A las horas exactas sale el que lo lleva a la fábrica A, y a las horas y cuarto el que lo lleva a la fábrica B. Si sale de su casa sin preocuparse de la hora y toma el primer ómnibus que llega, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a cada una de las fábricas?

2) Nueva sociedad. Un grupo financiero estudia el lanzamiento de una nueva sociedad con una inversión de \$ 500.000. De acuerdo a sus expertos, tres casos solamente pueden ocurrir:

- La sociedad se desarrolla rápidamente obteniendo el 30 % del mercado. Se tiene una ganancia de \$ 800.000 con una probabilidad del 10 %;
- La sociedad comienza normalmente obteniendo el 10 % del mercado. Se tiene una ganancia de \$ 200.000 con una probabilidad del 70 %;
- La sociedad cierra después de una tentativa infructuosa. Los expertos estiman al 20 % la probabilidad de esta eventualidad.

¿ Cuál es la ganancia esperada ?

Observación. La ganancia esperada no corresponde a la ganancia de ninguna de las tres posibilidades. Ella indica solamente la ganancia media que se obtendría con la hipótesis irreal que se podría ejecutar la inversión un número grande de veces. Esta medida permite tomar en cuenta la ganancia de cada posibilidad futura teniendo en cuenta como peso la probabilidad de dicha realización. En otras palabras, la ganancia esperada es la media aritmética (esperanza) de las ganancias de cada posibilidad, ponderadas por su probabilidad respectiva.

3) Oscar y sus dos tías. Oscar tiene dos tías a quienes visita cada viernes por la noche. Cada una de ellas vive sobre la ruta de la línea de ómnibus B, una en dirección sur y la otra en dirección norte. Cada viernes, alrededor de las 7 de la tarde, Oscar camina hacia la parada y toma el primer ómnibus que pasa, en una dirección o en la opuesta. En ambas direcciones la frecuencia es de 10 minutos. Al cabo de algún tiempo, una de las tías llama a Oscar reclamando que sólo había ido una vez, mientra que ha visitado 9 veces a su hermana. ¿Cómo se explica esto?

4) Gracia de un condenado a muerte. En el lejano reino de Juegolandia, a los condenados a muerte se les concedía la gracia de que su vida dependiera de que sacaran una bola blanca de una bolsa que contenía 50 bolas blancas y 50 negras. Pero en cierta ocación, un reo pidió la gracia de que se le dejara distribuir las bolas de otro modo antes de hacer el sorteo. Tras algunas discusiones, se le concedió la gracia y preparó dos bolsas: en una colocó una sola bola blanca; en otra bolsa colocó 49 blancas y 50 negras. ¿Cuál resultó de este modo la probabilidad de sacar blanca?

5) Azar en el círculo. En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Halle la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.

6) Azar de un disco en una cuadrícula. Se tiene una hoja cuadriculada con cuadrados de 1cm x 1cm. Se lanza sobre ella, al azar, un disco de 1/4 cm de radio. Halle la probabilidad de que el disco cubra un

punto de intersección de la cuadrícula.

7) Un jugador arriesgado. Un jugador necesita cinco millones para pagar una deuda, pero solo tiene un millón y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma más rápida posible a su objetivo. Estudie la estrategia a seguir por el jugador y calcule la probabilidad que tiene de conseguirlo.

8) Azar en una recta. Sobre una línea recta se seleccionan al azar los puntos a y b tales que:

$$-2 \leq b \leq 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq a \leq 3 \ .$$

Halle la probabilidad de que la distancia entre a y b sea mayor que 3.

Definición.– Dados dos números positivos a y b, se definen la media aritmética MA y la media geométrica MG de la siguiente manera :

$$\mathrm{MA} = \frac{a+b}{2} \qquad ; \qquad \mathrm{MG} = \sqrt{ab} \ .$$

9) (i) Demuestre que :

(a) $\mathrm{MG} \leq \mathrm{MA}$; (b) $\mathrm{MG} = \mathrm{MA} \Leftrightarrow a = b$; (c) $x\,(1-x) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall\ x \in [0,1]$.

(ii) ¿Cuál es el rectángulo de área máxima que tiene por perímetro p?

(iii) La población de la Argentina está dada en la siguiente tabla:

año	población (en millones de habitantes)
1960	20
1970	23
1980	28
1990	33

(a) Calcule las medias aritmética y geométrica de la población de los años 1960 y 1980. Compare los valores hallados con los que nos brinda la tabla para el año 1970.

(b) Idem (a) para los años 1970 y 1990.

(c) Estime el número de habitantes que tendría la Argentina en el año 2000, utilizando solamente los datos de la tabla.

Observación.– Los resultados obtenidos con la MA y la MG no son muy diferentes. En general, para problemas referentes al crecimiento o decrecimiento de poblaciones la MG da resultados más aproximados a la realidad. Naturalmente que éstos son valores estimados, es decir, aproximados, pues pueden ocurrir fenómenos (catástrofes, gran inmigración o emigración) que los haga variar.

VIII. TRABAJOS PRACTICOS Y CASOS.

TRABAJO PRACTICO 1: Estrategias con urnas y bolas.

Una urna contiene α bolas blancas y β bolas negras; se sabe que $\alpha + \beta \geq 3$. Los jugadores A y B juegan un juego con la urna y las bolas. Se consideran dos estrategias:

(I) El jugador A toma al azar una bola de la urna. Si es blanca entonces él gana, en caso contrario pierde;

(II) El jugador A toma al azar una bola y la tira afuera de la urna sin mirarla. El jugador B toma entonces una bola negra. Luego, A toma otra bola de la urna. Si esta segunda bola es blanca entonces A gana. En caso contrario, pierde.

(i) Calcule la probabilidad de ganar que tiene el jugador A en las estrategias I y II.

(ii) ¿ Cuál de las dos estrategias es preferible para el primer jugador A?

TRABAJO PRACTICO 2: El tren y el ómnibus. Un tren llega a una estación en un instante del intervalo (0,T) al azar, parando α minutos. A la misma estación acude un ómnibus al azar, independientemente del tren, en el mismo intervalo de tiempo (0, T) parando β minutos (con $\alpha < T$ y $\beta < T$).

(i) Calcule la probabilidad de que el tren llegue antes que el ómnibus;

(ii) Determine la probabilidad de que se encuentren;

(iii) Suponiendo que se encuentren en la estación, determine la probabilidad de que el tren llegue antes que el ómnibus;

(iv) Analice los resultados anteriores dando diferentes valores a α y a β.

TRABAJO PRACTICO 3: El duelo triangular. Tres políticos A, B y C deciden resolver sus diferencias mediante un duelo a pistola bajo las siguientes reglas. Luego de sortear quien dispara en primer, segundo y tercer lugar, los tres se ubican en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero. Se conviene que cada uno disparará un tiro por turno, continuando en el orden sorteado hasta que dos de ellos queden fuera de combate. Cada uno puede disparar en la dirección que desee. Además, conocen que las precisiones de tiro de A, B y C son de 100%, 80% y 50% respectivamente.

Suponiendo que cada uno adopta la estrategia más favorable y que nadie muere a causa de una bala perdida que no había sido disparada contra él,

(i) ¿Quién tiene más chances de sobrevivir?

(ii) ¿Cuáles son las probabilidades de cada uno? Demuestre que se tiene que:

$$P_A = \frac{3}{10} \; ; \qquad P_B = \frac{8}{45} \; ; \qquad P_C = \frac{47}{90} \, .$$

(iii) Suponiendo que C no dispara al aire, calcule las probabilidades de cada uno de sobrevivir.

(iv) Si la precisión de C es del x % ¿Cuál es el mínimo valor de x que garantice la victoria a C?

Observación: dado que A y B son los mejores tiradores, ambos tratarán de eliminarsese el uno contra el otro, luego, la mejor estrategia para C es disparar al aire hasta uno A ó B caiga. De este modo, C tiene el primer disparo contra el sobreviviente con una chance del 50 % de vencer.

TRABAJO PRACTICO 4. La compañía X está tratando de decidir sobre la compra de una máquina nueva, la cual se utilizará exclusivamente en la fabricación de cierto producto. Actualmente existen dos máquinas que pueden ser satisfactorias para el fin perseguido.

Si se compra la máquina A, se invertirán \$ 10.000 y se ahorrará \$ 1 por unidad, en relación con el proceso de producción que se utiliza en la actualidad. Si se compra la máquina B, se invertirán \$60.000 y se ahorrarán \$3 por unidad producida. Ambas máquinas tienen una vida útil de 5 años. Las condiciones futuras del mercado son algo inciertas y se han resumido en las siguientes estimaciones sobre la probabilidad correspondiente a un volumen total de ventas dado, para los próximos 5 años:

Ventas Totales (en unidades)		*Probabilidad*
10000	....	0,10
20000	....	0,30
30000	....	0,40
40000	....	0,20

Sin tomar en cuenta el problema de la actualización financiera de los ingresos futuros, ¿cuál es la máquina que debería comprar la empresa X? ¿Cuáles son los ahorros esperados correspondientes a cada una de esas acciones alternativas?

CASO 1: Producción óptima de productos por semana. Se supone que la demanda D, por semana, de cierto producto es una variable aleatoria con determinada distribución de probabilidades, $P(D = n) = p(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Supóngase que el costo para el proveedor es \$ C_1 por artículo, mientras que él lo vende a \$ C_2. Cualquier artículo que no se venda al término de la semana, debe almacenarse con un costo de \$ C_3 por artículo. Si el fabricante decide producir N artículos al comienzo de la semana, entonces:

(i) ¿Cuál es su utilidad esperada por semana?

(ii) ¿Para qué valor de N es máxima la ganancia esperada?

(iii) Se supone además que para la demanda aleatoria D es apropiada la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(D = n) = \frac{1}{5}, \; n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Entonces calcule, en este caso, la expresión de la utilidad esperada por semana. Calcule el N óptimo para el caso concreto de $C_1 = 3$, $C_2 = 9$, $C_3 = 1$.

CASO 2: Postres preparados. Un fabricante de postres planifica el lanzamiento de un nuevo tipo de plan. Le ofrecen dos posibilidades:

- venderlo a un precio elevado para hacer un producto de prestigio;
- venderlo a un precio accesible (barato) para realizar una venta masiva y obtener una importante ganancia por cantidad.

Su competidor principal tiene también un proyecto de este tipo, pero al presente no se conoce todavía cuál será su decisión. Tres posibilidades del futuro pueden ser consideradas, y sus consecuencias están descriptas en el cuadro 1 siguiente:

Unidad: $ 10.000	precio bajo ($)	precio elevado ($)	probabilidad del evento
No competencia (NC)	20	−2	0,50
Competencia con buena reacción del mercado (CBR)	5	25	0,20
Competencia con débil reacción del mercado (CDR)	−10	10	0,30

(i) Represente el árbol de decisión correspondiente al problema del fabricante;

(ii) ¿Cuál es la mejor decisión a tomar, y cuánto es su esperanza de ganancia (o ganancia esperada)?;

(iii) ¿Qué permite conocer con certeza, cuál de las tres posibilidades del futuro ocurrirá? En otras palabras, cuál es el monto a pagar por la encuesta que nos permita pasar de información imperfecta (dada por el cuadro anterior) a información perfecta.

(iv) Un asesor externo, de quién se conoce la seguridad de sus estudios, propone sus servicios para prever la reacción de la competencia y del mercado; las previsiones del experto están dadas en el siguiente cuadro 2:

RR: Reacción real

RP: Reacción prevista

RR RP	NC	CBR	CDR
NC	0,80	0,10	0,10
CBR	0,10	0,70	0,20
CDR	0,10	0,30	0,60

Observación. Cuando hay competencia y se tiene una débil reación del mercado (caso CDR), el experto prevé:

NC en el 10 % de los casos (probabilidad 0,10)

CBR en el 30 % de los casos (probabilidad 0,30)

CDR en el 60 % de los casos (probabilidad 0,60).

Si el análisis del experto cuesta $ 15.000 ¿Conviene contratarlo?

CASO 3: Curso de idioma. Una empresa lanza un curso de idioma por CD (discos compactos). La demanda puede ser de 1000, 2000, 3000, 4000 ó 5000 unidades. La creación del curso costó \$100.000. El juego de CD cuesta \$200 y se vende a \$400. Como todos los CD a producir deben ser realizados en el mismo momento, la sociedad debe decidir el número de cursos a producir. Por razones de prestigio, los cursos que no se pudieron vender, no pueden venderse en liquidación.

I) Formulación del problema. El problema puede ser representado por una matriz, en la cual cada fila corresponde a una decisión de la empresa, y cada columna corresponde a una posibilidad futura de demanda. De acuerdo a los datos anteriores coloque en la intersección de cada fila y cada columna el beneficio (o pérdida) correspondiente (en unidades de \$ 1.000 para facilitar las operaciones).

P D	1000	2000	3000	4000	5000
1000					
2000					
3000					
4000					
5000					

D: Demanda de CD ; P: Producción de CD

II) A continuación se estudiarán varios criterios que permitirán elegir la solución adecuada:

(a) El criterio maximin. Su interés principal, además de su simplicidad, reside en su óptica conservadora: se elige la estrategia para la cual la ganancia mínima es la más grande posible. Este criterio tiene por objetivo principal dar una garantía: "se va a ganar al menos tanto", o "se va a perder a lo sumo tanto".

Sea $g(p_i, d_j)$ la ganancia obtenida para un nivel de producción de p_i unidades (i=1,...,5) y una demanda de d_j unidades (j = 1, ..., 5). Entonces

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j)$$

será la ganancia más pequeña posible para la producción p_i dada (i = 1, ..., 5).

La estrategia maximin es la que maximiza estos mínimos, es decir halla el nivel de producción p_i de manera tal que se tenga

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio maximin, es decir ¿Cuál es el nivel de producción p_i (i = 1, ..., 5) a elegir y la ganancia a obtener?

(b) El criterio maximax. Este criterio es, por el contrario, extremadamente optimista. Se elige la estrategia que aporta la mayor ganancia, en el mejor de los casos posibles. La estrategia p_i a elegir es la dada por

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Max}}\ g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Max}}\ g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio maximax.

Observación: Este criterio es de un uso poco frecuente.

(c) Criterio de Laplace. Se utiliza cuando la probabilidad de cada posibilidad futura parece ser la misma (constante) o que se ignoran sus probalidades. Este criterio consiste en elegir la estrategia que maximiza la ganancia esperada, dando la misma probabilidad a cada posibilidad futura. La estrategia p_i (i=1, ..., 5) a elegir es la dada por

$$G(p_i) = \underset{k}{\mathrm{Max}}\ G(p_k)$$

donde $G(p_i)$ es la ganancia esperada de la estrategia p_i (con n posibilidades futuras con probabilidad $1/n$ cada una; en nuestro caso se tiene que $n = 5$), es decir:

$$G(p_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\, g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio de Laplace.

(d) Criterio del minimax (conocido también como del lamento o costo de oportunidad mínimo, es decir que sea mínimo lo que se deja de ganar).

Se supone que se conoce a priori la demanda. Se busca hallar la estrategia que permita obtener la mejor ganancia para esta demanda. En la columna correspondiente a esta demanda se reemplaza cada ganancia por la diferencia entre dicha ganancia y la ganancia correspondiente a la producción optimal para la demanda. Se obtiene de esta manera una tabla identificando, para la demanda dada, el lamento o lo que se deja de ganar, correspondiente a una producción no óptima para esta demanda.

Calcule la estrategia del criterio minimax.

Observación: Ningún criterio es en sí mismo, mejor que otro. Todo depende de la situación en la que se encuentre la empresa. El sólo criterio que se puede, más o menos, eliminar es el maximax.

III) Arboles de decisión.

La empresa que lo edita tiene 6 posibilidades de acción:

- no lanzar el producto (nunca debe olvidarse esta posibilidad nula);
- producir 1.000 juegos de CD;
- producir 2.000 juegos de CD;
- producir 3.000 juegos de CD;
- producir 4.000 juegos de CD;
- producir 5.000 juegos de CD.

Se distinguirán 5 estados posibles de demanda: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 juegos de CD.

Se supone que se ha realizado un estudio del mercado a fin de predecir mejor la demanda. La encuesta ha producido los resultados siguientes:

Demanda	Probabilidad
1.000	0,10
2.000	0,30
3.000	0,40
4.000	0,15
5.000	0,05

(i) Represente el problema bajo la forma de un árbol de decisión y distinga las 26 situaciones finales posibles.

(ii) Calcule, para cada decisión de producción, la ganancia esperada:

Producción	Ganancia Esperada
1.000	
2.000	
3.000	
4.000	
5.000	

(iii) Reduzca el árbol reemplazando las ramas relativas a las diversas posibilidades de demanda por la ganancia esperada que le corresponde. Por lo tanto, el problema fue llevado a una elección entre las 6 acciones posibles, cada una de las cuales tiene una ganancia esperada, con lo cual se puede eligir la alternativa cuya ganancia esperada sea la más elevada. ¿Cuál es dicha alternativa?

(iv) Valor de la información.

En general, es muy interesante poder determinar cuánto más se podría obtener de ganancia teniendo una mejor información sobre el futuro; de allí la necesidad de información adicional.

Se supone que se puede hacer una cierta publicidad del curso de idioma y que se lo puede vender por subscripción, con lo cual se podrá producir conociendo la demanda por anticipado. Por lo tanto, ¿cuánto se podría invertir en publicidad y en organización para que este estrategia sea rentable?

Se supone, para simplificar, que esto no modifica la demanda, pero permite solamente predecirla. Bajo subscripción, se producirá exactamente la demanda.

(i) Calcule la ganancia esperada si se produce de acuerdo a la demanda obtenida (es el cálculo de la ganancia esperada con información perfecta).

Observación. Por ende, considerando sólo la tabla de probabilidades para cada demanda se pudo calcular anteriormente la ganancia esperada máxima (dada por \$ 350.000 para una producción de 3.000

CD). Por otro lado, con información perfecta, se pudo obtener una ganancia esperada de \$ 450.000. Por lo tanto, la información extra para conocer la demanda exacta vale \$ 100.000, es decir, es el monto máximo que se podrá pagar para el conjunto de gastos relativos a la venta por subscripción.

Siglo XXI, 3 Nº4(1994), p23-25.

Un modelo simple de fidelidad de marca y sus consecuencias

por
Domingo Alberto
Tarzia
Investigador
Principal del
CONICET
Director Depto.
Matemática
U.A. - F.Ç.E.

"La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza..."

Los analistas de mercado se interesan en la preferencia de un cliente hacia una determinada marca, y en el efecto que tiene esa fidelidad o lealtad en la participación de cada marca en el mercado de un determinado producto.

En este trabajo se presenta un modelo simple de lealtad a la marca que corresponde a un producto dado P para el cual existen sólo dos marcas «M_1» y «M_2». Se realizan las siguientes suposiciones (una probabilidad del 85% se expresará matemáticamente a través del número real 0,85%):

(S1) Un cliente que compra la marca «M_1» en un período determinado t tiene una probabilidad a (con $0<a<1$) de comprar nuevamente «M_1» y una probabilidad 1 - a de comprar la marca «M_2» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente t+1;

(S2) Un cliente que compra la marca «M_2» en un período determinado t tiene una probabilidad b (con $0<b<1$) de comprar nuevamente «M_2» y una probabilidad 1 - b de comprar la marca «M_1» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente t+1;

(S3) Las probabilidades dadas anteriormente en (S1) y en (S2) no varían de período en período;

(S4) El comportamiento del comprador de una marca depende sólo de la compra inmediata anterior y es estadísticamente independiente de las otras compras anteriores;

(S5) En un determinado momento t (condición inicial del presente estudio) la marca «M_1» tiene una porción α (con $0 \leq \alpha \leq 1$) del mercado del producto P (en el sentido de las probabilidades) y por ende la marca «M_2» tiene la porción restante $1-\alpha$ del mercado del producto P.

Observación 1: De las hipótesis (S1) y (S2) se desprende que los clientes de la marca «M_2» son más leales que los de la marca «M_1» si y sólo si el porcentaje de los que compran la marca «M_2» en el período t y vuelven a comprar la marca «M_2» en el siguiente período t + 1 es mayor que el porcentaje de los que compran la marca «M_1» en el período t y vuelven a comprar la marca «M_1» en el siguiente período t + 1, lo cual se expresa matemáticamente por la siguiente desigualdad: $b > a$.

Esta propiedad es también válida recíprocamente, es decir, que los clientes de la marca «M_1» son más leales que los de la marca «M_2» si y sólo si $a > b$.

Las dos hipótesis (S1) y (S2) se pueden resumir en la siguiente tabla:

Marca comprada en el período t	Marca comprada en el período t + 1	
	Marca «M_1»	Marca «M_2»
Marca «M_1»	a	1 - a
Marca «M_2»	1 - b	b

Luego de presentar el modelo y sus hipótesis, será de mucho interés que se puedan responder las siguientes preguntas:

(1) ¿Qué porcentaje del mercado del producto P tendrán la marca «M_1» y la marca «M_2» en los períodos de tiempo t + 1, t + 2, t + 3, etc.?

(2) ¿El mercado del producto P tiende a

51

estabilizarse asintóticamente (es decir, cuándo se deja evolucionar el sistema)?

(3) Si la respuesta a (2) es afirmativa, ¿cómo será la convergencia: lenta o rápida?

(4) ¿Las respuestas a las preguntas anteriores (1) a (3) dependerán (y de qué forma) o serán independientes de la posición inicial del mercado del producto P?

Observación 2: Si el mercado del producto P se estabiliza en la posición de equilibrio se tendrá que el número de clientes que dejan la marca «M1» por la marca «M2» quedará balanceado con aquellos que cambian de la marca «M2» hacia la marca «M1».

Observación 3: La respuesta a las preguntas anteriores es de suma importancia para las empresas que producen las dos marcas «M_1» y «M_2» del producto P, a pesar de que en el modelo se supone que las empresas no reaccionan ante cambios del mercado (lo cual obviamente, no es cierto en la realidad). Pero, el presente modelo le brindará a las empresas la necesidad de hacer algo ante un cambio de lealtad a su marca, pues si no reaccionan (no realizan nada en el tiempo) sabrán lo que les sucederá, es decir el porcentaje del mercado que perderán!.

Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema: Si x_n representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M_1» al instante t_n = t+n (por lo tanto, y_n=1-x_n representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M_2» al instante t_n) entonces se tienen los siguientes resultados:

R_1) Se tiene la siguiente relación que da la variación de x_n+1 (porcentaje del mercado que tiene la marca «M_1» al instante t_n+1) en función de x_n:

(1) $x_{n+1}=1-b+(a+b-1)\,x_n\ ,\ \forall\, n\geq 1,$

con la condición inicial x_1 = a;

R2) El porcentaje x_{n+1} de la marca «M_1» del mercado del producto P al instante t_{n+1} viene dado en función de los coeficientes α, a y b de la siguiente manera:

(2)
$$x_{n+1}=(1-b)\ \frac{1-(a+b-1)^n}{2-(a+b)}+(a+b-1)^n\alpha\ ;$$

R3) El porcentaje x_n de la marca «M_1» del mercado del producto P al instante t_n converge al número x ε (0,1) cuando $n\to+\infty$, el cual no depende del coeficiente α y viene dado en función de los coeficientes a y b de la siguiente manera:

(3)
$$x=\lim_{n\to+\infty} x_n=\frac{1-b}{2-a-b}=\frac{1}{1+\frac{1-a}{1-b}}\,.$$

Demostración: La prueba de estos resultados matemáticos (que no se explicitarán aquí) surgen de la utilización de la teoría de árboles de probabilidades, serie geométrica y su suma, principio de inducción matemática, y, sucesión y su límite.

Observación 4: La relación (2) da la expresión de la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ en función de los parámetros a, b y α. Si se tiene el caso particular a+b-1=0 (b=1-a), entonces se deduce que:

(4)
$$x_{n+1}=\frac{1-b}{2-(a+b)}=a\ ,\quad \forall\, n\geq 1\ ,$$

que no depende del coeficiente α y del número de períodos n. Este hecho es lógico pues al ser a+b=1 el mercado está dividido en dos porciones que no varían: una porción del mercado con porcentaje «a» que compra la marca «M_1» y la otra porción del mercado con porcentaje «1-a» que compra la marca «M_2».

Observación 5: Si se tiene el caso límite en que a=b=1 (es decir, los clientes de ambas marcas son leales al 100%) entonces se deduce que:

(5)
$$x_{n+1}=x_n\ ,\ y_{n+1}=y_n\ ,\ \forall\, n\geq 1\ ,$$

que indica que el mercado no varía y permanece constante en la condición inicial, es decir x_n = α, y_n=1-α, ∀n ≥ 1.

Observación 6: Si se tiene el caso particular a=b (ambas marcas tienen la misma fidelidad) entonces se deduce que x=0.50, es decir que las dos marcas «M_1» y «M_2» compartirán el mercado en partes iguales (el 50% para cada una de las dos marcas).

Observación 7: Si se supone que la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ tiene límite x, entonces éste puede calcularse de una manera más simple a través de la relación (1) pues al pasar al límite cuando $n\to+\infty$ se tiene que

(6)
$$x=1-b+(a+b-1)\,x$$

de donde surge (3), pero tiene el inconveniente de no poder dar una expresión de x_n en función de n y de los otros parámetros del sistema: a, b y α.

Consecuencias del modelo:

1) El mercado siempre se estabiliza y la convergencia es, en general, rápida (será tanto más rápida como más pequeño sea el número |a+b-1|);
2) El resultado final, al estabilizarse el mercado, no depende del coeficiente α que indica cómo estaba compuesto inicialmente el mercado del producto P con las dos marcas «M_1» y «M_2»;
3) Si a > b (la fidelidad de la marca «M_1» es mayor que la de «M_2») entonces el mercado evolucionará al límite x, dado por la fórmula (3), siendo x > 0.50;
4) Si a=b=1 (ambas marcas tienen el 100% de fidelidad) entonces el mercado no evoluciona y permanece siempre constante con x_n=α, y_n=1-α, ∀n ≥ 1;
5) Si a=b (ambas marcas tiene igual fidelidad) entonces el mercado evolucionará al límte x=0.50 que indica que cada marca tendrá el 50% del mercado.
6) Si a+b=1 (b=1-a) entonces el mercado sólo evoluciona en el primer período al pasar de x_1=α a x_2=a y luego

permanece siempre constante con $x_{n+1}=a$, $y_{n+1}=1-a=b$, $\forall\, n\geq 1$;

Observación 8: De las consecuencias 2 y 3 anteriores se deduce que la marca que tenga mayor fidelidad obtendrá más del 50% del mercado independientemente de lo que poseía inicialmente.

Ejemplo: Para tener un ejemplo de cómo varía el porcentaje x_n de la marca «M_1» del mercado del producto P (y por ende, el porcentaje $y_n=1-x_n$ de la marca «M_2» del mercado del producto P) se considerará el siguiente caso:

α = 0,50 (el mercado está dividido en partes iguales entre las dos marcas)
a = 0,80 (un 80% de los clientes de la marca «M_1» vuelven a comprar «M_1»)
b = 0,50 (un 50% de los clientes de la marca «M_2» vuelven a comprar «M_2»).

Entonces, aplicando la fórmula (2), para distintos períodos de tiempo, se deduce que:

$x_1=0{,}50$, $x_2=0{,}65$,
$x_3=0{,}695$, $x_4=0{,}7085$,
$x_5=0{,}7126$, $x_6=0{,}7138$,.......
$x=\frac{5}{7} \simeq 0{,}7143$

(la marca «M_1» poseerá el 71,43% del mercado), con lo cual a partir del tercer período (n=3) el mercado se encuentra cerca del valor de estabilización con un error menor al 1%, al ser $x-x_4 \simeq 0{,}0058$.

Al final del trabajo, se presenta una tabla con numerosos casos y en cada uno de ellos se explicitan: $\alpha=x_1$, a, b, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 y $x=\lim_{n\to+\infty} x_n$

El ejemplo anterior se presenta como el primer caso.

Conclusión final:
La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza (si no se efectúa ningún cambio o ninguna reacción por parte de las empresas que producen las marcas «M_1» y «M_2»). Un estudio análogo para n marcas daría conclusiones más realistas, pero que no cambian la filosofía de lo realizado.

Observaciones y consejos finales:

1) El liderazgo en un mercado puede durar poco si ingresa al mercado un nuevo competidor con mayor fidelidad de marca;

2) Debemos preguntarnos: ¿Cuál es la rotación de nuestra cartera de clientes?

3) Tal vez debamos preocuparnos menos por aumentar nuestra participación en el mercado y más por aumentar la fidelidad de nuestros clientes actuales. S. XXI

x1= alpha	a	b	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x=lim xn
0.5	0.8	0.5	0.65	0.695	0.7085	0.71255	0.713765	0.71413	0.714239	0.714286
0.5	0.2	0.5	0.35	0.395	0.3815	0.38555	0.384335	0.3847	0.38459	0.384615
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.2	0.8	0.5	0.56	0.668	0.7004	0.71012	0.713036	0.713911	0.714173	0.714286
0.1	0.8	0.5	0.53	0.659	0.6977	0.70931	0.712793	0.713838	0.714151	0.714286
0.5	0.5	0.8	0.35	0.305	0.2915	0.28745	0.286235	0.285871	0.285761	0.285714
0.5	0.1	0.9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.5	0.3	0.38	0.348	0.3608	0.35568	0.357728	0.356909	0.357143
0.4	0.9	0.9	0.42	0.436	0.4488	0.45904	0.467232	0.473786	0.479028	0.5
0.3	0.9	0.9	0.34	0.372	0.3976	0.41808	0.434464	0.447571	0.458057	0.5
0.2	0.9	0.9	0.26	0.308	0.3464	0.37712	0.401696	0.421357	0.437085	0.5
0.01	0.9	0.9	0.108	0.1864	0.24912	0.299296	0.339437	0.371549	0.39724	0.5

BIBLIOGRAFÍA

- [CLGGLM] M.C. DE LA CRUZ LOPEZ – C. GONZALEZ GARCIA – J. LLORENTE MEDRANO, "Actividades sobre el azar y la probabilidad", Narcea – MEC, Madrid (1993).
- [Kr] S.G. KRANTZ, "Techniques of problem solving", American Math. Soc., Providence (1997).
- [Me] P.L. MEYER, 'Probabilidad y aplicaciones estadísticas", Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (1992).
- [Mi] R. MIATELLO, "Actividades investigativas en la enseñanza", Revista de Educación Matemática, 12 (1997), 19 – 33.
- [SpBo] W.A. SPURR – C.H. BONINI, "Toma de decisiones en administración mediante métodos estadísticos", Editorial Limusa, Mexico (1980).
- [Ta] D.A. TARZIA, "Un simple modelo de fidelidad de marca y sus consecuencias", Revista Siglo XXI, (1994), 3 No. 4 (1994), 23 – 25.
- [Th] H. THIRIEZ, "Initiation au calcul économique", Dunod, Paris (1987).