"RESOLUTION D'UNE EQUATION DU TYPE STOKES"

Domingo Alberto TARZIA

Travail présenté comme MEMOIRE

pour la obtention du:

DIPLÔME D'ÉTUDES APPROFONDIES
D'ANALYSE NUMÉRIQUE

Directeur: Prof. Roland Glowinski

JUIN 1977

"RESOLUTION D'UNE EQUATION DU TYPE STOKES"

INDEX

1- INTRODUCTION. page 1

2- CADRE FUNCTIONNEL ET NOTATIONS. page 2

3- FORMULATION VARIATIONNEL DU PROBLÈME (P). EXISTENCE ET UNICITÉ. page 4

4- DESCOMPOSITION DE L'ESPACE $(L^2(\Omega))^N$. page 10

5- OBTENTION DE LA PRESSION À PARTIR DU PROBLÈME (E). page 12

6- UNE ALGORITHME D'APPROXIMATION DE LA COUPLE $(\vec{u}; p)$. page 14

7- REMARQUE: CAS PARTICULIER N=2. page 19

8- UNE NOUVELLE FORMULATION POUR L'OBTENTION DE $\vec{u}$. page 21

9- THÉORIE DE LA FORMULATION GÉNÉRALE MIXTE. page 25

10- APPLICATION AU PROBLÈME (E'). page 29

REFERENCES. page 32

RESOLUTION D'UNE EQUATION DU TYPE STOKES

1- INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier le problème suivant :
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ régulière.
Étant donné les fonctions $\vec{f}=(f_1,f_2,f_3)$ et $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ trouver des fonctions $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ et p définies dans Ω et solutions de :

$$(P)\begin{cases} -\nu\,\Delta\vec{u}+\vec{\nabla}p+\vec{\omega}\wedge\vec{u}=\vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}\vec{u}=0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{u}=\vec{0} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \qquad (1)$$

où ν est une constante positive.

On sait bien que si $\underline{\vec{\omega}=\vec{0}}$, alors (P) est le problème classique de Stokes en décrivent le mouvement d'un fluide incompressible visqueux confiné dans Ω et soumis à une densité volumique $\vec{f}$ de forces exterieurs dans l'hypothèse où le mouvement est lent. Dans ce cas-là $\vec{u}$ est la vitesse du fluide, p sa pression et ν sa viscosité.

Par simplification on supondra que Ω est convexe.

2- CADRE FUNCTIONNEL ET NOTATIONS

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,/\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i=1,2,3 \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \,/\, \quad v=0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

$(u;v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u \cdot v \, dx$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $|v|_{0,\Omega} = (v;v)^{1/2}_{L^2(\Omega)}$ sa norme

proposition 1

i) $|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2_{0,\Omega} \right)^{1/2}$ est une semi-norme dans $H^1(\Omega)$.

ii) $\|v\|_{1,\Omega} = \left(|v|^2_{0,\Omega} + |v|^2_{1,\Omega} \right)^{1/2}$ est une norme dans $H^1(\Omega)$.

iii) $H^1(\Omega)$ est un espace d'Hilbert sous le produit scalaire

$$(u;v)_{H^1(\Omega)} = (u;v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} ; \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

---

proposition 2 (Inegalité de Poincaré)

Sur $H_0^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ et $|\cdot|_{1,\Omega}$ sont deux normes equivalentes, c'est à dire il existe une constante c telle que :

$$|v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq c \, |v|_{1,\Omega} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

---

proposition 3

Soient $V_1 = (L^2(\Omega))^3$ et $V_2 = (H^1(\Omega))^3$

i) V_1 est un espace d'Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\vec{u} ; \vec{v})_{V_1} = \sum_{i=1}^{3} (u_i ; v_i)_{L^2(\Omega)}$$

où on designe $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ avec $v_i \in L^2(\Omega)$ $\forall i=1,2,3$.
La norme correspondante on la notera par $|\vec{v}|_{0,\Omega} = (\vec{v};\vec{v})^{1/2}_{V_1}$

ii) V_2 est un espace d'Hilbert pour le produit scalaire : ③

$$(\vec{u};\vec{v})_{V_2} = \sum_{i=1}^{3} (u_i;v_i)_{H^1(\Omega)}$$

Sa norme sera notée par $\|\vec{v}\|_{1,\Omega} = (\vec{v};\vec{v})_{V_2}^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_{1,\Omega}^2\right)^{1/2}$

iii) $|\vec{v}|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{3} |v_i|_{1,\Omega}^2\right)^{1/2}$ est une semi-norme dans V_2.

iv) Sur $V = (H_0^1(\Omega))^3$, il y a equivalence des normes $\|\vec{v}\|_{1,\Omega}$ et $|\vec{v}|_{1,\Omega}$; c'est à dire il existe une constante C_1 telle que

$$|\vec{v}|_{1,\Omega} \leq \|\vec{v}\|_{1,\Omega} \leq C_1 |\vec{v}|_{1,\Omega} \quad \forall \vec{v} \in V$$

De plus on peut prendre $C_1 = C$ où C est la constante donnée par la proposition 2.

3 - FORMULATION VARIATIONNEL DU PROBLÈME (P) - EXISTENCE ET UNICITÉ

Théorème 1:
Si $\vec{u}$ est solution de (P) alors $\vec{u}$ est solution de la equation variationnelle:

$$(E)\begin{cases} \partial(\vec{u};\vec{v}) = L(\vec{v}) & \forall \vec{v} \in K \\ \vec{u} \in K \end{cases} \qquad (2)$$

où

$$\begin{cases} K = \{ \vec{v} \in V \,/\, \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \} \text{ est un convexe et fermé de } V \\ \partial(\vec{u};\vec{v}) = \partial_1(\vec{u};\vec{v}) + \partial_2(\vec{u};\vec{v}) \\ \partial_1(\vec{u};\vec{v}) = \nu \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \vec{\nabla} u_i \times \vec{\nabla} v_i \, dx \\ \partial_2(\vec{u};\vec{v}) = \int_\Omega \vec{\omega} \times (\vec{u} \wedge \vec{v}) \, dx \\ L(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f} \times \vec{v} \, dx \end{cases} \qquad (3)$$

Démonstration

i) On a : $\int_\Omega \vec{\nabla} p \times \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in K \qquad (4)$

$$\int_\Omega \vec{\nabla} p \times \vec{v} \, dx = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot v_i \, dx = \sum_{i=1}^{3} \left(-\int_\Omega p \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx + \int_\Gamma p \underbrace{v_i}_{=0} n_i \, d\gamma \right) =$$

$$= -\int_\Omega p \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx = -\int_\Omega p \cdot \underbrace{\operatorname{div} \vec{v}}_{=0} \, dx = 0$$

---

ii) $\forall \vec{v} \in V$ on a : $\int_\Omega \Delta \vec{u} \times \vec{v} \, dx = -\frac{1}{\nu} \partial_1(\vec{u};\vec{v}) \qquad (5)$

$$\int_\Omega \Delta\vec{u}\times\vec{v}\,dx = \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Delta u_i \cdot v_i\,dx = \sum_{i=1}^{3}\left(-\int_\Omega \vec{\nabla}u_i\times\vec{\nabla}v_i\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial\eta}\cdot \underbrace{v_i}_{\overset{\|}{0}}\,d\gamma\right) =$$

5

$$= -\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \vec{\nabla}u_i\times\vec{\nabla}v_i\,dx = -\frac{1}{\nu}\cdot a_1(\vec{u};\vec{v})$$

iii) Si l'on multiplique la equation $-\nu\Delta\vec{u}+\vec{\nabla}p+\vec{\omega}\wedge\vec{u}=\vec{f}$ par $\vec{v}\in K$, puis on integre sur Ω on obtient en utilisant i) et ii)

$$L(\vec{v}) = -\nu\int_\Omega \Delta\vec{u}\times\vec{v}\,dx + \int_\Omega \vec{\nabla}p\times\vec{v}\,dx + \int_\Omega \vec{\omega}\times(\vec{u}\wedge\vec{v})\,dx =$$

$$= a_1(\vec{u};\vec{v}) + a_2(\vec{u};\vec{v}) = a(\vec{u};\vec{v})$$

c'est à dire que $\vec{u}$ verifie :

$$\begin{cases}\vec{u}\in K\\ a(\vec{u};\vec{v}) = L(\vec{v}) \quad \forall\vec{v}\in K\end{cases}$$

Remarques:

i) L est linéaire sur V

ii) a est bilinéaire sur $V\times V$, mais pas symétique

iii) a_1 est bilinéaire et symétique sur $V\times V$ et a_2 est bilinéaire et antisymétique sur $V\times V$.

proposition 4

i) $\vec{f}\in(L^2(\Omega))^3 \Rightarrow L$ continue sur V

ii) $\vec{\omega}\in(L^\infty(\Omega))^3 \Rightarrow a_1$ et a_2 continues sur V

iii) a est V-elliptique

<u>Demonstration</u>

Si $\vec{w}=(w_1;w_2;w_3)$ on notera $\|\vec{w}\| = \left(\sum_{i=1}^{3} w_i^2\right)^{1/2}$ ⑥

i) $$|L(\vec{v})| \leq \int_\Omega |\vec{f}\times\vec{v}|\,dx \leq \int_\Omega \|\vec{f}\|\cdot\|\vec{v}\|\,dx \leq \left(\int_\Omega \|\vec{f}\|^2 dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_\Omega \|\vec{v}\|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= |\vec{f}|_{0,\Omega}\cdot|\vec{v}|_{0,\Omega}$$

---

ii) $$|a_2(\vec{u};\vec{v})| \leq \int_\Omega |\vec{w}\times(\vec{u}\wedge\vec{v})|\,dx \leq \int_\Omega \|\vec{w}\|\cdot\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,dx \leq \|w\|_\infty \int_\Omega \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\,dx \leq$$

$$\leq \|w\|_\infty\cdot\left(\int_\Omega \|\vec{u}\|^2 dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_\Omega \|\vec{v}\|^2 dx\right)^{1/2} = \|w\|_\infty\cdot|\vec{u}|_{0,\Omega}\cdot|\vec{v}|_{0,\Omega}$$

$$|a_1(\vec{u};\vec{v})| \leq \nu \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |\vec{\nabla}u_i\times\vec{\nabla}v_i|\,dx \leq \nu\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \|\vec{\nabla}u_i\|\cdot\|\vec{\nabla}v_i\|\,dx \leq$$

$$\leq \nu.\sum_{i=1}^{3}\left(\int_\Omega \|\vec{\nabla}u_i\|^2 dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_\Omega \|\vec{\nabla}v_i\|^2 dx\right)^{1/2} \leq \nu.\left(\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \|\vec{\nabla}u_i\|^2 dx\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \|\vec{\nabla}v_i\|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \nu.\,|\vec{u}|_{1,\Omega}\cdot|\vec{v}|_{1,\Omega}$$

---

iii) $$a_2(\vec{v};\vec{v}) = 0 \quad \forall\vec{v}\in V$$

$$a_1(\vec{v};\vec{v}) = \nu\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \|\vec{\nabla}v_i\|^2 dx = \nu.\,|\vec{v}|^2_{1,\Omega} \geq \frac{\nu}{C_1^2}\,\|\vec{v}\|^2_{1,\Omega}$$

Alors on a :

$$a(\vec{v};\vec{v}) \geq \frac{\nu}{C_1^2}\,\|\vec{v}\|^2_{1;\Omega}$$

<u>Théorème 2:</u>

Le problème (E) a une solution et une seule $\vec{u}\in K$.

La démonstration provient directement du Théorème suivant, et c'est pour ça que l'on démontrera ci-dessous.

Théorème 3 (de Lions-Stampacchia)

Soit V un espace d'Hilbert sur $\mathbb{R}$.

Soient : $\begin{cases} K \subset V \text{ un convexe, fermé et non vide.} \\ L : V \to \mathbb{R} \text{ une forme linéaire continue} \\ a : V \times V \to \mathbb{R} \text{ une forme bilinéaire, continue}^{(*)} \text{ et } V\text{-elliptique}^{(**)} \end{cases}$

alors le problème

$$(P_0) \quad \begin{cases} a(u; v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

a une solution et une seule.

Démonstration

a) Unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (P_0), c'est à dire :

$$\begin{cases} a(u_1; v-u_1) \geq L(v-u_1) \quad \forall v \in K \\ u_1 \in K \end{cases} \qquad (7)$$

et
$$\begin{cases} a(u_2; v-u_2) \geq L(v-u_2) \quad \forall v \in K \\ u_2 \in K \end{cases} \qquad (8)$$

Si l'on utilise (7) avec $v = u_2 \in K$ et (8) avec $v = u_1 \in K$, on obtient en les aditionnant

$$a(u_1 - u_2; u_2 - u_1) \geq 0 .$$

Il en resulte en utilisant la V-ellipticité de a

$$0 \leq \alpha \|u_2 - u_1\| \leq a(u_2 - u_1; u_2 - u_1) \leq 0$$

d'où $\quad u_1 = u_2$.

(*) a est continue $\Leftrightarrow \exists M > 0 \; / \; |a(u;v)| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u; v \in V$

(**) a est V-elliptique $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 \; / \; a(v;v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V$

b) Existence

$a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire et continue $\Rightarrow \exists\, A : V \longrightarrow V$ continue /

$$a(u;v) = (Au;v) \quad \forall u,v \in V \qquad (9)$$

$L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue $\Rightarrow \exists\, f \in V$ /

$$L(v) = (f;v) \quad \forall v \in V \qquad (10)$$

Alors on a les equivalences suivantes:

$$(P_0) \iff \begin{cases} (Au; v-u) \geq (f; v-u) \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \iff \begin{cases} (Au-f; v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho \cdot (Au-f; v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \;;\; \rho > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left([u - \rho(Au-f)] - u \,;\, v-u \right) \geq 0 \quad \forall v \in K \\ u \in K \;;\; \rho > 0 \end{cases}$$

c'est à dire:

$$u = P_K(u - \rho(Au-f)) \quad ; \; \rho > 0 \qquad (11)$$

où $P_K : V \longrightarrow K$ est l'opérateur de projection orthogonale de V sur K.

Si l'application : $v \in V \longrightarrow G(v) = P_K(v - \rho(Av-f)) \in K$ est une contraction, alors (11) nous donnera un point fixe $u \in K$.

Pour cela soient:

$$\begin{cases} w_1 = G(v_1) = P_K(v_1 - \rho(Av_1 - f)) \\ w_2 = G(v_2) = P_K(v_2 - \rho(Av_2 - f)) \end{cases}$$

$$\|w_2 - w_1\|^2 = \| P_K(v_2 - \rho(Av_2 - f)) - P_K(v_1 - \rho(Av_1 - f)) \|^2 =$$

$$= \| P_K\left((v_2 - v_1) - \rho\, A(v_2 - v_1) \right) \|^2 \leq \| (v_2 - v_1) - \rho\, A(v_2 - v_1) \|^2 = \|v_2 - v_1\|^2 -$$

$$- 2\rho\, (A(v_2 - v_1); v_2 - v_1) + \rho^2 \|A(v_2 - v_1)\|^2 \leq (1 - 2\alpha\rho + M^2\rho^2) \|v_2 - v_1\|^2$$

Alors si l'on prend ρ / $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$ on obtient que l'application G est une contraction, d'où l'existence d'une solution du problème (P_0)

Remarques:

1) Dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, c'est à dire $a(u;v) = a(v;u) \quad \forall u;v \in V$

on a de plus l'equivalence

$$(P_0) \Leftrightarrow \begin{cases} J(u) \leq J(v) & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \qquad \left(J(u) = \min_{v \in K} J(v) \right)$$

où $J(v) = \frac{1}{2} a(v;v) - L(v)$

2) Maintenant le problème (E) a une solution unique $\vec{u} \in K$, qui vérifie

$$\begin{cases} a(\vec{u};\vec{v}) = L(\vec{v}) & \forall \vec{v} \in K \\ \vec{u} \in K \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} V = \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \\ K = \{ \vec{v} \in V / \ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \} \end{cases}$$

Pour obtenir la solution du problème (P) on doit retrouver p, cela sera fait dans le paragraphe 5, mais avant on a besoin de faire une descomposition de l'espace $(L^2(\Omega))^N$, qui sera fait dans le paragraphe 4.

3) En ce qui concerne la régularité de $\vec{u}$, on a:

$$\vec{f} \in (L^2(\Omega))^N \Rightarrow \vec{u} \in K \cap (H^2(\Omega))^N$$

4- DESCOMPOSITION DE L'ESPACE $(L^2(\Omega))^N$

Soit $H=(L^2(\Omega))^N$

Soit $G_0(\Omega) = \{ \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^N \ / \ \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ dans } \Omega \}$

où $D(\Omega)$ indique l'espace des fonctions infiniment differentiables avec supports compacts dans Ω.

Soient $G_1(\Omega)$ l'adhérence de $G_0(\Omega)$ dans la norme de H $\left(G_1(\Omega) = \overline{G_0(\Omega)}^H \right)$

et $G_2(\Omega)$ son complement orthogonal dans H.

Alors on a le théorème suivant:

Théorème 4:

Avec les notations précédents on a:

$$H = G_1(\Omega) \oplus G_2(\Omega) \qquad (12)$$

où $G_2(\Omega)$ est donné par:

$$G_2(\Omega) = \{ \vec{\nabla} v \ / \ v \in H^1(\Omega) \}$$

Démonstration: Voir pages 27-30, LADYZHENSKAYA [5]

on va se donner une autre expression equivalente de $G_1(\Omega)$.

Soit $F_1(\Omega)$ l'adhérence de $G_0(\Omega)$ dans la norme de $(H_0^1(\Omega))^N$ $\left(F_1(\Omega) = \overline{G_0(\Omega)}^{(H_0^1(\Omega))^N} \right)$

Alors on a la proposition suivante:

Proposition 5:

on a: $$K = F_1(\Omega) \qquad (13)$$

où K est donné dans (3).

Démonstration:

Du fait que $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, il est clair que l'on a:

$$F_1(\Omega) \subset K$$

Pour la démonstration de $K \subset F_1(\Omega)$, voir pages 67-68 Lions [6]. 11

Soit $F_1'(\Omega)$ l'adhérence de $G_0(\Omega)$ dans la norme de $(H_0^1(\Omega))^N$ $\left(F_1'(\Omega) = \overline{G_0(\Omega)}^{(H_0^1(\Omega))^N} \right)$

Alors si Ω est borné on a:

$$\begin{cases} F_1(\Omega) = F_1'(\Omega) \\ \text{et il y a équivalence des normes correspondantes.} \end{cases} \tag{14}$$

Remarques:

1) Dans notre cas Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3 (N=3)$, alors l'espace $G_1(\Omega)$ on peut l'écrire comme:

$$G_1(\Omega) = \overline{F_1'(\Omega)}^{H} \tag{15}$$

On utilisera cela dans le paragraphe 5.

2) Dans $N=3$ on a $V_1 = H$ avec les notations précédentes. Ça sera le cas que l'on utilisera dans les paragraphes qui suivent.

5- OBTENTION DE LA PRESSION A PARTIR DU PROBLEME (E)

Soit $S : V \longrightarrow \mathbb{R}$ /

$$S(\vec{v}) = a(\vec{u};\vec{v}) - L(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in V = (H_0^1(\Omega))^3$$

où L et a sont définis dans (3), et $\vec{u} \in K$ la solution du problème (E).

De la proposition 4 partes i) et ii), il en résulte que S est continue sur V.

Du fait que $\vec{u}$ est la solution du problème (E), il en résulte que

$$S(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in K \tag{16}$$

Par ailleurs on peut écrire $S(\vec{v})$ de la façon suivante, en utilisant les expressions de a et L.

$$S(\vec{v}) = \int_\Omega \left[\nu \sum_{i=1}^{3} \vec{\nabla} u_i \times \vec{\nabla} v_i + \vec{\omega} \times (\vec{u} \wedge \vec{v}) - \vec{f} \times \vec{v} \right] dx = (\vec{g};\vec{v})_{V_1} \tag{17}$$

où $\vec{g} = -\nu \Delta \vec{u} + \vec{\omega} \wedge \vec{u} - \vec{f}$

Théorème 5:

Si $S : V \longrightarrow \mathbb{R}$ / $\begin{cases} S(\vec{v}) = (\vec{g};\vec{v})_{V_1} \\ S(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in K \end{cases}$

alors il existe $p_0 \in H^1(\Omega)$ / $\begin{cases} S(\vec{v}) = -\displaystyle\int_\Omega p_0 \cdot \operatorname{div} \vec{v} \, dx \\ g = \vec{\nabla} p_0 \end{cases}$

Demonstration:

En utilisant (13), (14), (15) et (16) on a :

$$(\vec{g};\vec{v})_{V_1} = 0 \quad \forall \vec{v} \in G_1(\Omega) \tag{18}$$

De (18), il en résulte que :

$$\vec{g} \in G_2(\Omega)$$

et du théorème 4 $\quad \exists\, p_0 \in H^1(\Omega) \,/\, \vec{g} = \vec{\nabla} p_0$

De plus, on a :

$$S(\vec{v}) = (\vec{g}\,; \vec{v})_{V_1} = (\vec{\nabla} p_0\,; \vec{v})_{V_1} = -\int_\Omega p_0 \cdot \operatorname{div} \vec{v}\, dx$$

Alors si l'on reviens à (17), en utilisant le théorème 5 en posant $p = -p_0$ on a :

$$-\nu \Delta \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f}$$

c'est à dire que la couple $\vec{u}\,; p$ est solution du problème (P)

<u>Remarque</u> :

L'existence de p est unique sauf constante aditive près, car en appliquant le théorème 5 on n'a que $\vec{\nabla} p_0$ (ou $\vec{\nabla} p$) est unique en utilisant la décomposition (12).

6- Une algorithme d'approximation de la couple $(\vec{u}; p)$

Proposition 6 :

$\forall a_i \in \mathbb{R}$ on a : $\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^2 \leq N \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i^2$

Démonstration

En utilisant l'inegalité $2ab \leq a^2+b^2 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{i<j}^{N} 2 a_i a_j \leq \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + (N-1)\sum_{i=1}^{N} a_i^2 = N \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i^2$$

proposition 7 :

L'application $\operatorname{div} : (H_0^1(\Omega))^N \longrightarrow L^2(\Omega)$ est linéaire et continue ;
et de plus on a :

$$|\operatorname{div} \vec{u}|_{0,\Omega} \leq \sqrt{N} \cdot |\vec{u}|_{1,\Omega} \qquad (19)$$

Démonstration :

on utilise dans la démonstration l'inegalité donnée par la proposition 6.

$$|\operatorname{div} \vec{u}|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega |\operatorname{div} \vec{u}|^2 dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 dx \leq N \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 dx \leq$$

$$\leq N. \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx = N. |\vec{u}|_{1,\Omega}^2$$

Description de l'algorithme (on Suppose que $N=2$ ou 3)

i) p_0 donné dans $H^1(\Omega)$

Si l'on connaît p_n, on calcule $\vec{u}_n$ et p_{n+1} de la façon suivante :

ii) $$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u}_n + \vec{w} \wedge \vec{u}_n = \vec{f} - \vec{\nabla} p_n \\ \vec{u}_n/_\Gamma = \vec{0} \end{cases} \qquad (20)$$

iii) $\quad p_{n+1} = p_n - \rho \operatorname{div} \vec{u}_{n+1} \qquad (21)$

proposition 8:

Étant donné $p_n \in H^1(\Omega)$, alors il existe une solution unique $\vec{u}_n$ de ii)

Démonstration

L'existence et unicité de ii) est celle du problème:

$$(S)\begin{cases} -\nu\,\Delta\vec{u} + \vec{w}\wedge\vec{u} = \vec{g} \\ \vec{u}/_\Gamma = \vec{0} \end{cases}$$

avec $\vec{g} \in \left(L^2(\Omega)\right)^N$, et $\vec{w} \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^N$ où $N=2,3$.

La formulation variationnelle de (S) est donnée par:

$$\begin{cases} a(\vec{u};\vec{v}) = F(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N \\ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} F(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{g} * \vec{v}\, dx \\ a \text{ est donné par } (3) \end{cases}$$

Pour a et F on a les conditions suffisantes pour que le problème (S) ait une solution unique, ce qui démontre la proposition.

Théorème 6.

Si ρ est choisi suffisament petit alors la suite $\vec{u}_n$ converge vers la solution $\vec{u}$ du problème (P) et la suite p_n converge, sauf constante aditive près, vers la solution p du problème (P).

La condition ρ suffisament petit est donné par:

$$\begin{cases} 0 < \rho < \dfrac{2\nu}{N} \\ \text{avec } N=2 \text{ ou } 3. \end{cases}$$

Démonstration

$\vec{u}_n, p_n$ vérifient : $\begin{cases} -\nu\,\Delta\vec{u}_n + \vec{w}\wedge\vec{u}_n + \vec{\nabla}p_n = \vec{f} \\ \vec{u}_n/_\Gamma = \vec{0} \\ p_{n+1} = p_n - \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}_n \end{cases}$ (22)

$\vec{u}, p$ vérifient : $\begin{cases} -\nu\,\Delta\vec{u} + \vec{w}\wedge\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} \\ \vec{u}/_\Gamma = \vec{0} \\ p = p - \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} \end{cases}$ (23)

Soient $\begin{cases} \vec{u}^*_n = \vec{u}_n - \vec{u} \\ p^*_n = p_n - p \end{cases}$ (24)

En retranchant (22) et (24) on obtient :

$$\begin{cases} -\nu\,\Delta\vec{u}^*_n + \vec{w}\wedge\vec{u}^*_n + \vec{\nabla}p^*_n = \vec{0} \\ p^*_{n+1} = p^*_n - \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}^*_n \end{cases} \qquad (25)$$

De la seconde égalité de (25) on obtient :

$$|p^*_{n+1}|^2_{0,\Omega} = \left(p^*_n - \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}^*_n \,;\, p^*_n - \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}^*_n\right)_{L^2(\Omega)} = |p^*_n|^2_{0,\Omega} - 2\rho\left(p^*_n \,;\, \mathrm{div}\,\vec{u}^*_n\right)_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \rho^2 \cdot |\mathrm{div}\,\vec{u}^*_n|^2_{0,\Omega}$$

c'est à dire :

$$|p^*_n|^2_{0,\Omega} - |p^*_{n+1}|^2_{0,\Omega} = 2\rho\cdot\left(p^*_n \,;\, \mathrm{div}\,\vec{u}^*_n\right)_{L^2(\Omega)} - \rho^2 \cdot |\mathrm{div}\,\vec{u}^*_n|^2_{0,\Omega} \qquad (26)$$

Mais, par ailleurs :

$$\left(p^*_n \,;\, \mathrm{div}\,\vec{u}^*_n\right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega p^*_n \cdot \mathrm{div}\,\vec{u}^*_n \,dx = -\int_\Omega \nabla p^*_n \times \vec{u}^*_n \,dx + \int_\Gamma p^*_n \cdot \underbrace{\vec{u}^*_n \times \vec{\eta}}_{\overset{\parallel}{0}} \,d\gamma$$

c'est à dire:

$$(p_n^* ; \operatorname{div} \vec{u}_n^*)_{L^2(\Omega)} = -(\vec{\nabla} p_n^* ; \vec{u}_n)_{(L^2(\Omega))^N} \qquad (27)$$

Si l'on multiplique la première équation de (25) par $\vec{u}_n^*$, et puis on intègre sur Ω on a:

$$0 = -\nu\,(\Delta \vec{u}_n^* ; \vec{u}_n^*)_{(L^2(\Omega))^N} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{u}_n^* ; \vec{u}_n^*)_{(L^2(\Omega))^N}}_{= 0} + (\vec{\nabla} p_n^* ; \vec{u}_n^*)_{(L^2(\Omega))^N} =$$

$$= \nu \sum_{i=1}^{N} (\vec{\nabla} u_{n,i}^* ; \vec{\nabla} u_{n,i}^*)_{(L^2(\Omega))^N} - \nu \int_\Gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_{n,i}^*}{\partial \eta} \cdot \underbrace{u_{n,i}}_{= 0}\, d\gamma + (\vec{\nabla} p_n^* ; \vec{u}_n^*)_{(L^2(\Omega))^N} =$$

$$= \nu\, |\vec{u}_n^*|_{1,\Omega}^2 + (\vec{\nabla} p_n^* ; \vec{u}_n^*)_{(L^2(\Omega))^N}$$

c'est à dire:

$$(\vec{\nabla} p_n^* ; \vec{u}_n^*)_{(L^2(\Omega))^N} = -\nu \cdot |\vec{u}_n^*|_{1,\Omega}^2 \qquad (28)$$

En utilisant (27) et (28) dans (26) on a:

$$|p_n^*|_{0,\Omega}^2 - |p_{n+1}^*|_{0,\Omega}^2 = \rho\left(2\nu |\vec{u}_n^*|_{1,\Omega}^2 - \rho\, |\operatorname{div} \vec{u}_n^*|_{0,\Omega}^2\right) \qquad (29)$$

Comme $\vec{u}_n^* \in H_0^1(\Omega)$ on a par la proposition 7 que:

$$|\operatorname{div} \vec{u}_n^*|_{0,\Omega} \leq \sqrt{N} \cdot |\vec{u}_n^*|_{1,\Omega}$$

Alors, il en résulte:

$$|p_n^*|_{0,\Omega}^2 - |p_{n+1}^*|_{0,\Omega}^2 \geqslant \rho \cdot (2\nu - \rho \cdot N) \cdot |\vec{u}_n^*|_{1,\Omega} \geqslant 0 \quad \text{en prenant}$$

$$0 < \rho < \frac{2\nu}{N}.$$

Il en résulte que la suite $\left(|p_n^*|_{0,\Omega}^2\right)$ est décroissante et bornée inférieurement par 0, donc il existe convergence.

Alors on a: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(|p_n^*|_{0,\Omega}^2 - |p_{n+1}^*|_{0,\Omega}^2\right) = 0$

d'où on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} |\vec{u}_n^*|_{1,\Omega} = 0$$

c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} \vec{u}_n = \vec{u} \quad \text{dans } (H_0^1(\Omega))^N\text{- fort.} \qquad (30)$$

De (30) on déduit :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \Delta\vec{u}_n = \Delta\vec{u} \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N\text{- fort} \\ \text{et} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \vec{\omega}\wedge\vec{u}_n = \vec{\omega}\wedge\vec{u} \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N\text{- fort} \end{cases} \qquad (31)$$

La première conclusion de (31) s'obtient au sens des distributions dans $(H^{-1}(\Omega))^N$- fort mais par la régularité des solutions $\vec{u}_n$ et $\vec{u}$, qui appartient à $(H^2(\Omega))^N$, on a la même conclusion dans $(L^2(\Omega))^N$- fort.

La seconde conclusion de (31) s'obtient du fait suivant :

$$|\vec{\omega}\wedge\vec{u}_n^*|_{0,\Omega} = \int_\Omega |\vec{\omega}\wedge\vec{u}_n^*|^2 dx \leq \int_\Omega \|\vec{\omega}\|^2 \cdot \|\vec{u}_n^*\|^2 dx \leq \|\vec{\omega}\|_\infty \cdot \int_\Omega \|\vec{u}_n^*\|^2 dx =$$

$$= \|\vec{\omega}\|_\infty \cdot |\vec{u}_n^*|_{0,\Omega}^2 \leq c \cdot \|\vec{\omega}\|_\infty \cdot |\vec{u}_n^*|_{1,\Omega}^2$$

où c est la constante donnée par la proposition 2.
En utilisant (31) dans la première équation de (25), il en résulte :

$$\lim_{n\to\infty} \vec{\nabla} p_n = \vec{\nabla} p \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N\text{- fort.} \qquad (32)$$

7 - REMARQUE : CAS PARTICULIER N=2

i) La condition $\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$ dans Ω implique l'existence de ψ telle que

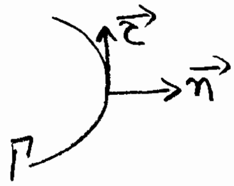
$$\vec{u} = \vec{\nabla}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\\psi\end{pmatrix}$$

c'est à dire :
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ u_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \end{cases}$$

ii)

Par ailleurs $\vec{u}/_{\Gamma}=\vec{0}$ nous donne :

$$\begin{cases} \vec{n} = (n_1 ; n_2) & \text{verseur normal à } \Gamma \\ \vec{\tau} = (\tau_1 ; \tau_2) & \text{verseur tangente à } \Gamma \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tau_1 = -n_2 \\ \tau_2 = n_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}.n_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}.n_2 = -u_2\tau_2 - u_1\tau_1 = -\vec{u}\times\vec{\tau} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

iii) De plus, si l'on tient compte de :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}p = \vec{0} \\ \vec{\nabla}\wedge\Delta\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\-\Delta^2\psi\end{pmatrix} \\ \vec{\nabla}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u}) = \begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{\partial(w;\psi)}{\partial(x_1;x_2)}\end{pmatrix} \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{f} = \begin{pmatrix}0\\0\\g\end{pmatrix} \end{cases}$$

où
$$\begin{cases} \dfrac{\partial(w;\psi)}{\partial(x_1;x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x_1} & \dfrac{\partial w}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ g = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

on peut transformer l'équation :

$$-\nu\Delta\vec{u}+\vec{\nabla}p+\vec{\omega}\wedge\vec{u}=\vec{f}$$

en l'équation.

$$\nu\,\Delta^2\psi+\frac{\partial(\omega;\psi)}{\partial(x_1;x_2)}=g$$

iv) on a $\psi =$ cte sur Γ, car

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot c_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cdot c_2=u_2\,n_2+u_1\,n_1=\vec{u}\times\vec{n}=0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Du fait qu'il aura solution ψ sauf une constante additive près, on peut supposer que: $\psi=0$ sur Γ

v) Alors le problème pour ψ est le suivant:

$$\begin{cases}\nu\,\Delta^2\psi+\dfrac{\partial(\omega;\psi)}{\partial(x_1;x_2)}=g & \text{dans } \Omega\\ \left.\begin{array}{l}\psi=0\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n}=0\end{array}\right\} & \text{sur } \Gamma\end{cases}$$

vi) Une autre cas particulier on l'obtient si l'on prend:

$\vec{\omega}=\vec{\omega_0}$ vecteur constante

alors dans ce cas-là on arrive au problème classique pour le opérateur biharmonique.

$$\begin{cases}\Delta^2\psi=\dfrac{g}{\nu} & \text{dans } \Omega\\ \psi=\dfrac{\partial\psi}{\partial n}=0 & \text{sur } \Gamma\end{cases}$$

Pour cela on peut consulter Glowinski-Pironneau [4]

8- Une nouvelle formulation pour l'obtention de $\vec{u}$

Soit le problème suivant :

$$(E')\begin{cases} \text{trouver } (\vec{u};\lambda)\in V\times L^2(\Omega) \,/ \\ a(\vec{u};\vec{v})+b(\vec{v};\lambda)=L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}\in V \\ \qquad b(\vec{u};\mu)=0 \quad \forall \mu\in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{33}$$

où
$$\begin{cases} V=(H_0^1(\Omega))^3 \\ a: V\times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad L: V\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{donnés dans (3)} \\ b: V\times L^2(\Omega)\longrightarrow \mathbb{R} \,/\quad b(\vec{v};\mu)=\int_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\cdot\mu \, dx \end{cases} \tag{34}$$

on va chercher une relation entre les problèmes (E) donné par (2) et (E') donné par (33)

on rappelle que (E) est donné par :

$$(E)\begin{cases} a(\vec{u};\vec{v})=L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}\in K \\ \vec{u}\in K \end{cases}$$

où $\quad K=\{\vec{v}\in V \,/\, \operatorname{div}\vec{v}=0 \text{ dans } \Omega\}$

Alors, on a la proposition suivante.

<u>proposition 9</u> :

i) $b(\vec{v};\mu)=0 \quad \forall \mu\in L^2(\Omega) \iff \vec{v}\in K$

ii) Si $(\vec{u};\lambda)\in V\times L^2(\Omega)$ est solution de (E'), alors $\vec{u}$ est solution de (E).

iii) Si $\vec{u}\in K$ est solution de (E), alors $\vec{u}$ peut être considéré comme la première composante d'une couple solution de (E').

<u>Démonstration</u>

i) $\begin{cases} b(\vec{v};\mu)=0 & \forall \mu\in L^2(\Omega) \\ \vec{v}\in V \end{cases} \iff \begin{cases} \int_\Omega \operatorname{div}\vec{v}.\,\mu\,dx=0 & \forall\mu\in L^2(\Omega) \\ \vec{v}\in V \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{v}=0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{v}\in V \end{cases} \iff \vec{v}\in K$

ii) $(\vec{u};\lambda)\in V\times L^2(\Omega)$ solution de (E') $\iff \begin{cases} a(\vec{u};\vec{v})+b(\vec{v};\lambda)=L(\vec{v}) & \forall\vec{v}\in V \\ b(\vec{u};\mu)=0 & \forall\mu\in L^2(\Omega) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a(\vec{u};\vec{v})=L(\vec{v}) & \forall\vec{v}\in K \\ \vec{u}\in K \end{cases} \Rightarrow$ $\vec{u}$ est solution de (E).

iii) $\vec{u}$ solution de (E) $\iff \begin{cases} a(\vec{u};\vec{v})=L(\vec{v}) & \forall\vec{v}\in K \\ \vec{u}\in K \end{cases} \Rightarrow$ (En utilisant i))

$\begin{cases} a(\vec{u};\vec{v})+b(\vec{v};\lambda)=L(\vec{v}) & \forall\vec{v}\in V \\ b(\vec{u};\mu)=0 & \forall\mu\in L^2(\Omega) \end{cases}$, $\lambda\in L^2(\Omega)$ $\Rightarrow$

$\vec{u}$ peut être considéré comme la première composante d'une couple solution de (E').

Remarques:

1) Dans la démonstration précédente de iii) on n'a pas pu caractériser le $\lambda\in L^2(\Omega)$; à priori dans cette démonstration-là λ peut être quelconque mais appartenant à $L^2(\Omega)$.

2) Jusqu'à maintenant on ne sait rien sur l'existence et unicité de la solution de (E'). Après on démontrera qu'il en existe une unique solution $(\vec{u};\lambda)\in V\times L^2(\Omega)$.

On va maintenant trouver une relation entre les problèmes (P) donné par (1) et (E') donné par (33).

<u>proposition 10</u>:

$\vec{u}; p$ solution de (P) $\Longleftrightarrow$ $(\vec{u}; -p)$ solution de (E')

<u>Démonstration</u>:

$\Rightarrow$) $(\vec{u}; p) \in V \cap (H^2(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ solution de (P) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \\ \vec{u} \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(\vec{u}; \vec{v}) + \int_\Omega \vec{\nabla} p \times \vec{v}\, dx = L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V \\ \vec{u} \in K \end{cases}$$

En utilisant : $\int_\Omega \vec{\nabla} p \times \vec{v}\, dx = -\int_\Omega \operatorname{div} \vec{v} \cdot p\, dx + \int_\Gamma p \cdot \underbrace{\vec{v} \times \vec{\eta}}_{0}\, d\gamma = -b(\vec{v}; p)$

on obtient

$$\begin{cases} a(\vec{u}; \vec{v}) + b(\vec{v}; -p) = L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V \\ b(\vec{u}; \mu) = 0 \quad \forall \mu \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

c'est à dire que $(\vec{u}; -p)$ est solution de (E').

$\Leftarrow$) $(\vec{u}; \lambda) \in V \times L^2(\Omega)$ solution de (E') $\Rightarrow$ $\vec{u}$ est solution de (E) et de plus $\vec{u} \in V \cap (H^2(\Omega))^3$.

Par ailleurs : $a(\vec{u}; \vec{v}) + b(\vec{v}; \lambda) = L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V \quad \Longleftrightarrow$

$$-\nu \Delta \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u} - \vec{\nabla} \lambda = \vec{f} \text{ dans } V' \text{ (dual de } V)$$

Et en utilisant la regularité de $\vec{u}$ et $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^3$ on obtient :

$$\begin{cases} \lambda \in H^1(\Omega) \\ \text{et } \vec{u}; -\lambda \text{ solution de (P)} \end{cases}$$

Remarques:

1) Dans le paragraphe suivant on fera une théorie générale qui englobe le problème (E') (pour cela voir Brezzi [1], Ciarlet [2]) et puis on l'utilisera dans le cas particulier du problème (E') donné par (33) et (34).

2) De (34), on en voit que:

i) L est linéaire et continue par proposition 4.

ii) a est linéaire, continue et V-elliptique par proposition 4 aussi.

iii) b est bilinéaire et continue car:

$$|b(\vec{v};\mu)| \leq \int_\Omega |\mathrm{div}\,\vec{v}| \cdot |\mu|\,dx \leq |\mathrm{div}\,\vec{v}|_{0,\Omega} \cdot |\mu|_{0,\Omega},$$

et en utilisant (19) on obtient:

$$|b(\vec{v};\mu)| \leq \sqrt{3} \cdot |\vec{v}|_{1,\Omega} \cdot |\mu|_{0,\Omega}$$

9- Théorie de la formulation générale (Mixte)

Soient Q et M deux espaces d'Hilbert.
On notera la norme et produit scalaire sur Q par $\|\cdot\|_Q$ et $(\cdot,\cdot)_Q$ respectivement, et ceux de M par $\|\cdot\|_M$ et $(\cdot,\cdot)_M$.
Soient Q' le dual de Q et M' le dual de M.
Soient :

$$\begin{cases} \alpha : Q\times Q \longrightarrow \mathbb{R} & \text{forme bilinéaire et continue} \\ \beta : Q\times M \longrightarrow \mathbb{R} & \text{forme bilinéaire et continue} \\ \psi : Q \longrightarrow \mathbb{R} & \text{forme linéaire et continue} \\ \varphi : M \longrightarrow \mathbb{R} & \text{forme linéaire et continue} \end{cases} \qquad (35)$$

Alors le problème général est le suivant :

$$(E_0) \qquad \text{trouver } (p;\lambda)\in Q\times M \,/\, \begin{cases} \alpha(p;q)+\beta(q;\lambda)=\psi(q) & \forall q\in Q \\ \beta(p;\mu)=\varphi(\mu) & \forall \mu\in M \end{cases} \qquad (36)$$

Remarques :

1) Il existe $A : Q\longrightarrow Q$ forme linéaire et continue telle que :

$$\begin{cases} (Ap;q)_Q = \alpha(p;q) & \forall p,q\in Q \\ \|A\| \leq \|\alpha\| \end{cases} \qquad (37)$$

2) Il existe $B : Q\longrightarrow M$ forme linéaire et continue telle que :

$$\begin{cases} (Bq;\mu) = \beta(q;\mu) & \forall q\in Q,\ \forall \mu\in M \\ \|B\| \leq \|\beta\| \end{cases} \qquad (38)$$

3) Il existe $B^* : M\longrightarrow Q$ forme linéaire et continue (c'est le opérateur adjoint de B) telle que :

$$(Bq;\mu)_M = (q;B^*\mu)_Q = \beta(q;\mu) \quad \forall q\in Q,\ \forall \mu\in M. \qquad (39)$$

4) Si l'on note avec τ l'isomorphisme de Q' dans Q et avec σ l'isomorphisme de M' dans M, alors on a:

$$(E_0) \Longleftrightarrow \quad \text{trouver } (p;\lambda) \in Q \times M \,/ \quad (E_0') \begin{cases} A(p) + B^*(\lambda) = \tau(\psi) \\ B(p) = \sigma(\varphi) \end{cases} \qquad (40)$$

5) Soit $Z = \ker B = \{ q \in Q \,/\, B(q) = 0 \} = \{ q \in Q \,/\, \beta(q;\mu) = 0 \ \forall \mu \in M \}$ (41)

<u>Définition:</u>

On dit que la forme bilinéaire et continue β vérifie la <u>condition de Brezzi</u> $\Longleftrightarrow \exists \beta_0 > 0 \,/ \quad \sup\limits_{\substack{q \in Q \\ q \neq 0}} \dfrac{|\beta(q;\mu)|}{\|q\|_Q} \geq \beta_0 \cdot \|\mu\|_M \quad \forall \mu \in M$ (42)

On en déduit.

<u>proposition 11:</u>

Si β vérifie la condition de Brezzi, alors on a:

a) $\| B^*\mu \|_Q \geq \beta_0 \|\mu\|_M \quad \forall \mu \in M$

b) $B^* : M \longrightarrow \operatorname{Im} B^*$ est un isomorphisme

c) $\operatorname{Im} B^* = (\ker B)^\perp$

d) $B : Q \longrightarrow M$ est surjectif

<u>Démonstration</u>

a) $\forall \mu \in M$. $\quad \|B^*\mu\|_Q = \sup\limits_{\substack{q \in Q \\ q \neq 0}} \dfrac{|(q; B^*\mu)_Q|}{\|q\|_Q} = \sup\limits_{\substack{q \in Q \\ q \neq 0}} \dfrac{|\beta(q;\mu)|}{\|q\|_Q} \geq \beta_0 \cdot \|\mu\|_M$

b) De a), on en déduit que B^* est injectif et alors $B^* : M \longrightarrow \operatorname{Im} B^*$ est un isomorphisme.

c) on sait que toujours $(\ker B)^\perp = \overline{\operatorname{Im} B^*}$ est vraie.

Par ailleurs on démontre que $\operatorname{Im} B^*$ est fermé en utilisant a)

d) C'est une conséquence de b).

On va maintenant démontrer une théorème qui donne une condition suffisante pour que le problème (E_0) (ou (E_0')) ait une solution unique $(p;\lambda) \in Q \times M$.

Théorème 7 (Brezzi):

Sous les deux hypothèses:

$\begin{cases} i) \ \alpha \text{ est } Z\text{-elliptique} \\ ii) \ \beta \text{ vérifie la condition de Brezzi} \end{cases}$

Alors le problème (E_0) a une solution et une seule.

Démonstration:

On rappelle que:

$$(E_0) \iff \begin{cases} A(p) + B^*(\lambda) = \tau(\psi) & (43) \\ B(p) = \sigma(\varphi) & (44) \\ p \in Q \,,\ \lambda \in M \end{cases}$$

a) on décompose $p \in Q$ de façon: $\begin{cases} p = p_1 + p_2 \,/ \\ p_2 \in \ker B \\ p_1 \in (\ker B)^{\perp} \end{cases}$

Alors (44) $\iff$ $B(p_1) = \sigma(\varphi) \in M$

En utilisant la proposition 11 b), c) et d) on a p_1 unique.

b)

43) $\iff$ $\alpha(p;q) + \beta(q;\lambda) = \psi(q) \quad \forall q \in Q \iff$

$$\alpha(p_0;q) = \psi(q) - \beta(q;\lambda) - \alpha(p_1;q) \quad \forall q \in Q$$

Alors on a: $\alpha(p_0;q) = F(q) \quad \forall q \in Z$ (45)

où $F : Q \longrightarrow \mathbb{R} \,/\ F(q) = \psi(q) - \alpha(p_1;q)$ est une forme linéaire et continue.

par l'hypothèse i) on a p_0 unique

c) il manque trouver $\lambda \in M \,/\quad B^*(\lambda) = \tau(\psi) - A(p)$ (46)

Mais en utilisant (45)

$$\left(\mathcal{C}(\psi)-A(p)\,;\,q\right)_Q = \psi(q) - \alpha(p;q) = 0 \quad \forall q \in Z = \operatorname{Ker} B$$

c'est à dire que $\mathcal{C}(\psi) - A(p) \in (\operatorname{Ker} B)^{\perp} = \operatorname{Im} B^*$

Alors en utilisant proposition 11 b) on a λ unique.

10- Application au problème (E')

Dans le cas du problème (E') on a :
$$\begin{cases} Q = V = (H_0^1(\Omega))^3 \\ M = L^2(\Omega) \\ \alpha = a, \quad \psi = L \\ \beta = b, \quad \varphi = 0 \end{cases}$$

où $\begin{cases} a \text{ et } L \text{ sont définies dans (3)} \\ \text{et } b \text{ est définiee dans (34) par : } b(\vec{v};\mu) = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\cdot\mu \, dx \end{cases}$

De plus on a :
$$\begin{cases} B : V \longrightarrow L^2(\Omega) \ / \ B(\vec{v}) = \operatorname{div}\vec{v} \\ Z = \ker B = K \quad \text{par proposition 9 i)} \end{cases}$$

Theorème 8 :

(E') a une solution et une seule $(\vec{u};\lambda) \in V \times M$, où λ est unique sauf constante additive près.

Démonstration

Pour cela, en tenant compte des proprietés de a et de la proposition 10, il suffit démontrer que la forme bilinéaire b vérifie la condition de Brezzi.

proposition 12 :

b vérifie la condition de Brezzi

Démonstration :

On fera la démonstration en deux parties ; dabord pour $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$ et ensuite pour $\mu \in L^2(\Omega)$

i) Soit $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$

Soit ξ_ε tel que :
$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta^2 \xi_\varepsilon + \Delta \xi_\varepsilon = \mu \\ \xi_\varepsilon|_\Gamma = 0, \ \frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \end{cases} \qquad (47)$$

La formulation Variationnelle de (47) est donnée par :

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot a(\xi_\varepsilon ; v) + b(\xi_\varepsilon ; v) = L(v) & \forall v \in H_0^2(\Omega) \\ \xi_\varepsilon \in H_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{48}$$

où
$$\begin{cases} a(u;v) = \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx \\ b(u;v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx \\ L(v) = -\int_\Omega \mu \cdot v \, dx \end{cases}$$

Par ailleurs $(a(v;v))^{1/2} = \|\Delta v\|_{0,\Omega}$ est une norme équivalente à la norme $\|v\|_{2,\Omega}$ sur $H_0^2(\Omega)$ et $(b(v;v))^{1/2} = |v|_{1,\Omega}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{1,\Omega}$ sur $H_0^1(\Omega)$.

Alors on peut vérifier que le problème (48) a une solution et une seule $\xi_\varepsilon \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, et de plus il existe une constante C_0 telle que

$$\|\xi_\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C_0 \|\mu\|_{0,\Omega} \tag{49}$$

on a:
$$b(\xi_\varepsilon ; \xi_\varepsilon) \leq \|L\| \cdot \|\xi_\varepsilon\|_{0,\Omega}$$

c'est à dire que $\|\xi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq cte$, alors il existe $\xi \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\xi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \xi \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible}$$

D'autre part
$$\varepsilon \cdot a(\xi_\varepsilon ; \xi_\varepsilon) \leq \|L\| \cdot \|\xi_\varepsilon\|_{0,\Omega}$$

d'où il en résulte que
$$a(\varepsilon \xi_\varepsilon ; \varepsilon \xi_\varepsilon) \leq cte \cdot \varepsilon$$

c'est à dire que $\|\varepsilon \cdot \xi_\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq cte \cdot \sqrt{\varepsilon} \leq cte$

Alors on peut passer à la limite dans (48), et il en résulte que:

$$\begin{cases} b(\xi ; v) = L(v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \xi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{50}$$

C'est à dire que ξ vérifie :
$$\begin{cases} \Delta \xi = \mu \\ \xi|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Soit
$$\begin{cases} \vec{v}_\varepsilon = \vec{\nabla} \xi_\varepsilon \in (H_0^1(\Omega))^3 \\ |\vec{v}_\varepsilon|_{1,\Omega} \leq |\xi_\varepsilon|_{2,\Omega} \leq C_0 . \|\mu\|_{0,\Omega} \end{cases}$$

Alors
$$\sup_{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3} \frac{|b(\vec{v};\mu)|}{|\vec{v}|_{1,\Omega}} \geqslant \frac{|b(\vec{v}_\varepsilon;\mu)|}{|\vec{v}_\varepsilon|_{1,\Omega}} \geqslant \frac{1}{C_0} \frac{|b(\vec{\nabla}\xi_\varepsilon;\mu)|}{\|\mu\|_{0,\Omega}} = \frac{1}{C_0} \frac{\left|\int_\Omega \Delta \xi_\varepsilon . \mu \, dx\right|}{\|\mu\|_{0,\Omega}} =$$
$$= \frac{1}{C_0} \frac{\left|\int_\Omega \vec{\nabla}\xi_\varepsilon \times \vec{\nabla}\mu \, dx\right|}{\|\mu\|_{0,\Omega}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{C_0} \frac{\left|\int_\Omega \vec{\nabla}\xi \times \vec{\nabla}\mu \, dx\right|}{\|\mu\|_{0,\Omega}} = \frac{1}{C_0} \frac{\left|\int_\Omega \Delta\xi . \mu \, dx\right|}{\|\mu\|_{0,\Omega}} =$$
$$= \frac{1}{C_0} \|\mu\|_{0,\Omega}$$

---

ii) Soit $\mu \in L^2(\Omega)$, alors il existe $\mu_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que
$$\mu_n \longrightarrow \mu \text{ dans } L^2(\Omega)\text{-fort}$$

on a :
$$\sup_{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3} \frac{|b(\vec{v};\mu)|}{|\vec{v}|_{1,\Omega}} = \sup_{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3} \lim_{n\to\infty} \frac{|b(\vec{v};\mu_n)|}{|\vec{v}|_{1,\Omega}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3} \frac{|b(\vec{v};\mu_n)|}{|\vec{v}|_{1,\Omega}} \geqslant \frac{1}{C_0} \lim_{n\to 0} \|\mu_n\|_{0,\Omega} = \frac{1}{C_0} \|\mu\|_{0,\Omega}$$

C'est à dire que de i) et ii), il en résulte que la forme bilinéaire b vérifie la condition de Brezzi.

References.

[1] F. Brezzi, "on the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers", RAIRO (août 74) R-2, pages 177-199.

[2] P. CiARLET, Cours de 3ème cycle d'Analyse Numérique 1976/77.

[3] R. Glowinski, Cours de 3ème cycle d'Analyse Numérique 1976/77

[4] R. Glowinski - O. PIRONNEAU, "Sur la résolution par une methode "quasi-directe" et par diverses methodes iteratives, d'une approximation par elements finis mixtes du problème de Dirichlet pour l'operateur biharmonique" Rapport 76010, Laboratoire d'Analyse Numérique, LA 189, Université de Paris VI

[5] O. LADYZHENSKAYA, "the mathematical theory of viscous Incompressible flow".

[6]. J. LIONS, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires".