MATHEMATICAE NOTAE, 35 (1991), 25–41.

SOBRE UNA NUEVA VARIANTE PARA EL CALCULO SIMULTANEO DE COEFICIENTES TERMICOS DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO A TRAVES DE UN PROBLEMA DIRECTO O INVERSO DE STEFAN A DOS FASES

Domingo Alberto TARZIA

RESUMEN. — Se considera un cuerpo semi-infinito inicialmente en su fase sólida a una temperatura uniforme $-C < 0$ y al cual se le impone una temperatura constante $B > 0$ en el borde fijo $x = 0$ para $t > 0$. Se considera, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase 0°C y se supone además, que las densidades de masa de las fases sólida y líquida son iguales. Cuando el coeficiente de conducción térmica k_2 de la fase líquida (y en forma análoga, el coeficiente de conducción térmica de la fase sólida k_1) es desconocido, puede plantearse una nueva variante (de la dada en Stampella–Tarzia, Int. J. Engineering Science, 27 (1989), 1407–1419) para el cálculo simultáneo de k_2 y un segundo coeficiente térmico desconocido correspondiente a la fase líquida, sólida o coeficiente que caracteriza la frontera libre que separa ambas fases.

Esta determinación es obtenida a través de un problema de frontera móvil o libre del tipo de Stefan a dos fases (problema de fusión, cuando k_2 es desconocido) con una sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$ del material de cambio de fase de la forma $\theta_{2x}(0,t) = -H_0\, t^{-1/2}$, $t > 0$, con $H_0 > 0$, donde θ_2 representa la temperatura de la fase líquida. En la sobre-condición no aparece el coeficiente k_2 y por ende la medición experimental del flujo de calor es sustituida por la de la pendiente de la temperatura en $x = 0$ caracterizada por el coeficiente H_0 , el cual debe ser calculado experimentalmente a través de un proceso de cambio de fase con las condiciones iniciales y de contorno dadas anteriormente. En los seis posibles casos (de fusión) con k_2 desconocido, se obtienen :

i) Fórmulas analíticas para la determinación simultánea de los correspondientes dos coeficientes térmicos desconocidos.

ii) Desigualdades universales, que relacionan los diversos parámetros del material y de los datos físicos del problema en cuestión.

En la segunda parte del trabajo y para el caso en que k_1 (en lugar de k_2) sea el coeficiente desconocido se estudia un problema de solidificación teniendo presente además la convección inducida por el cambio de densidad de masa en la transición de fase solido-líquida (es decir, $\rho_1 \neq \rho_2$). Se explicitan los resultados correspondientes a la determinación simultánea de k_1 y ρ_2 (densidad de masa de la fase líquida).

ABSTRACT.– When the thermal coefficient of a semi-infinite material is unknown, a new variant (with respect to the one given in Stampella–Tarzia, Int. J. Engineering Science, 27 (1989), 1407–1419) for the simultaneous determination of some of its thermal coefficients can be stated. This statement is attained by means of an inverse or direct two-phase Stefan problem with an over-condition on the fixed face of the phase change material.

Key words : Stefan problem, Free boundary problem, Moving boundary problem, Unknown thermal coefficients, Explicit solutions, Neumann solution.

AMS Subject Classification : 35R35, 35C05, 35R30, 80A22, 80A23.

I.– INTRODUCCION.

Se considera un cuerpo semi-infinito, representado por $x > 0$, que inicialmente se encuentra en su fase sólida a una temperatura uniforme $-C < 0$ y al cual se le impone una temperatura constante $B > 0$ en el borde fijo $x = 0$ para $t > 0$. Si se considera, sin pérdida de generalidad, que la temperature de cambio de fase es 0°C entonces se tiene un problema de conducción del calor con cambio de fase (conocido en la literatura como problema de Stefan). En §II. y §III. se supondrá que la densidad de masa es constante en ambas fases, en cambio en §IV. se considerará el caso de densidades desiguales.

Cuando el coeficiente de conducción térmica, por ejemplo, de la fase líquida k_2 es desconocido, puede plantearse una nueva variante de la dada en [4] para el cálculo simultáneo de k_2 y un segundo coeficiente térmico desconocido correspondiente a la fase líquida, sólida o coeficiente que caracteriza la frontera libre que separa ambas fases. El objetivo del presente trabajo es el de generalizar lo realizado en [7] cuando se consideran dos fases del material. Esta determinación es obtenida a través de un problema de frontera móvil o libre del tipo de Stefan a dos fases (en nuestro caso, un problema de fusión) con una sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$ del material de cambio de fase de la forma [6]:

$$(1) \qquad \theta_{2_x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}} \qquad , t > 0$$

con $H_0 > 0$ el coeficiente que caracteriza el gradiente de temperatura en el borde fijo $x=0$. En la condición (1) no aparece el coeficiente k_2 y por ende, la medición del flujo de calor es sustituida por la de la pendiente de la temperatura en $x = 0$. El coeficiente H_0 debe ser calculado experimentalmente a través de un proceso de cambio de fase con las condiciones iniciales y de contorno mencionadas anteriormente. Esta variante resulta útil desde el punto de vista práctico. Numerosas referencias sobre la determinación de coeficientes pueden encontrarse en [4, 8].

Se supone que la temperatura $\theta = \theta(x,t)$ del material está definida de la siguiente manera :

$$(2) \qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t) > 0 & \text{si} \quad 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \ , \\ 0 & \text{si} \quad x = s(t) \ , t > 0 \ , \\ \theta_1(x,t) < 0 & \text{si} \quad x > s(t) \ , \ t > 0 \ , \end{cases}$$

donde $x = s(t)$ representa la interfase sólida-líquida que separa ambas fases.

Las condiciones, que se deben satisfacer, están dadas por :

$$(3) \qquad \begin{array}{l} \theta_{2_t} - \alpha_2 \, \theta_{2_{xx}} = 0 \ , \qquad 0 < x < s(t) \, , \ t > 0 \ , \\ \theta_{1_t} - \alpha_1 \, \theta_{1_{xx}} = 0 \ , \qquad x > s(t) \, , \ t > 0 \ , \\ s(0) = 0 \ , \\ \theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \\ k_1 \, \theta_{1_x}(s(t),t) - k_2 \, \theta_{2_x}(s(t),t) = \rho \, h \, \dot{s}(t) \ , \qquad t > 0 \ , \\ \theta_1(x,0) = \theta_1(+\infty,t) = - C < 0 \ , \ x > 0 \ , \ t > 0 \ , \\ \theta_2(0,t) = B > 0 \ , \ t > 0 \ , \\ \theta_{2_x}(0,t) = -\dfrac{H_0}{\sqrt{t}} \qquad , t > 0 \ , \end{array}$$

donde el significado de los coeficientes térmicos utilizados está explícitado en la Nomenclatura. La última condición es la sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$ y las restantes son las clásicas de un problema de Stefan.

Se pueden formular los siguientes dos problemas según la función $x = s(t)$ sea, a priori, desconocida (frontera libre) o conocida (frontera móvil) :

Problema P_1 : Dados los datos experimentales B, C, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos k_1 , h, ρ, c_1, $c_2 > 0$, se quiere hallar $\left\{\theta_1(x,t),\ \theta_2(x,t),\ s(t),\ k_2\right\}$ de manera que se satisfagan las condiciones (3).

Problema P_2 : Dados los datos experimentales B, C, $H_0 > 0$ y la frontera de cambio de fase $s(t) = 2\,\sigma\,\sqrt{t}$ con $\sigma > 0$ (coeficiente conocido, que debe ser determinado experimentalmente) se quiere hallar $\left\{\theta_1(x,t),\ \theta_2(x,t),\ k_2\ ,\ j\right\}$ donde j es un coeficiente térmico tomado entre k_1 , h , ρ, c_1 , c_2 (y por ende los otros cuatro coeficientes serán considerados como datos del problema) de manera que se satisfagan las condiciones (3).

En los seis posibles casos (uno en el problema P_1 y cinco en el problema P_2) se obtienen :

i) fórmulas analíticas para la determinación simultánea de las incógnitas en función de los datos del problema, de funciones reales conocidas y de uno o dos parámetros que resultan ser la única solución de ciertas ecuaciones (según sea el caso en estudio).

ii) desigualdades universales que relacionan los diversos parámetros del material y de los datos del problema en cuestión.

iii) en algunos casos se determina, además, que el problema es mal planteado al no existir solución cualesquiera sean los datos.

Parte de estos resultados fueron presentados en el Tercer Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia, Guanajuato (México, 4–7 julio 1988).

II.– SOLUCION DEL PROBLEMA P_1 .

Se obtiene el siguiente resultado :

Teorema 1 .– Cualesquiera sean los datos experimentales B, C, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos k_1, h, ρ, c_1, $c_2 > 0$, el problema P_1 tiene una única solución dada por

$$\text{i)}\ \theta_1(x,t) = \frac{C}{1 - f(\sigma/a_1)}\left(f(\sigma/a_1) - f(x/2\,a_1\sqrt{t}\,)\right) ,$$

$$(4)\qquad \text{ii)}\ \theta_2(x,t) = B\left(1 - \frac{f(x/2\,a_2\sqrt{t}\,)}{f(\sigma/a_2)}\right) ,$$

$$\text{iii)}\ s(t) = 2\,\sigma\,\sqrt{t}\ ,$$

donde los coeficientes k_2 y σ están dados por :

$$\text{(5)} \qquad k_2 = \frac{\rho B^2 c_2}{\pi H_0^2} \frac{1}{f^2(\xi_2)} \quad ,$$

$$\text{(6)} \qquad \sigma = \frac{B}{H_0 \sqrt{\pi}} \frac{1}{G(\xi_2)} \quad ,$$

siendo $\xi_2 > 0$ la única solución de la ecuación

$$\text{(7)} \qquad F(x) = x \ , \ x > 0 \ ,$$

con

$$f(x) \equiv \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) \ du \ \text{(función de error)} \ , \quad G(x) = \frac{f(x)}{x} \quad ,$$

$$\text{(8)} \qquad F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{1 - f(x)} \quad , \quad F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{f(x)} \quad ,$$

$$S(x) = \frac{B}{a_1 H_0 \sqrt{\pi}} \frac{1}{G(x)} \ , \ F(x) = \frac{B c_2}{h \sqrt{\pi}} \ F_2(x) - \frac{C k_1 H_0}{B h \rho a_1} f(x) F_1(S(x)) \ .$$

<u>Demostración</u> .— Substituyendo (4) en (3) y definiendo

$$\text{(9)} \qquad \xi_2 = \frac{\sigma}{a_2} \quad , \quad \xi_1 = \frac{\sigma}{a_1} \quad , \text{ con } a_i = \left(\frac{k_i}{\rho c_i} \right)^{1/2} (\ i = 1, 2\ ) \ ,$$

se obtiene que los coeficientes k_2 y σ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} &\text{i)} \ \frac{k_2 H_0}{\rho h \sigma} \exp(-\xi_2^2) - \frac{C k_1}{\rho h \sigma a_1 \sqrt{\pi}} \ F_1(\xi_1) = 1 \quad , \\ &\text{ii)} \ f(\xi_2) = \frac{B}{H_0 a_2 \sqrt{\pi}} \quad . \end{aligned}$$

Despejando a_2 de (10ii) y teniendo presente que $k_2 = \rho c_2 a_2^2$ se deduce (5). De (10ii) y (9) se obtiene

$$\text{(11)} \qquad \xi_1 = S(\xi_2)$$

y por ende, de (9), se deduce (6). Teniendo en cuenta (11), la ecuación (10i) on incóngnita ξ_2, es equivalente a la ecuación (7) que tiene única solución debido a las siguientes propiedades :

$$
\begin{aligned}
&F_1(0^+) = 1 \ , \quad F_1(+\infty) = +\infty \quad , \quad F_1'(x) > 0 \ , \forall\, x > 0 \ , \\
&F_2(0^+) = +\infty \ , \quad F_2(+\infty) = 0 \quad , \quad F_2'(x) < 0 \ , \forall\, x > 0 \ , \\
(12) \qquad &G(0^+) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ , \quad G(+\infty) = 0 \quad , \quad G'(x) < 0 \ , \forall\, x > 0 \ , \\
&S(0^+) = \frac{B}{2\, a_1\, H_0} \ , \quad S(+\infty) = +\infty \quad , \quad S'(x) > 0 \ , \forall\, x > 0 \ , \\
&F(0^+) = +\infty \ , \quad F(+\infty) = -\infty \quad , \quad F'(x) < 0 \ , \forall\, x > 0 \ .
\end{aligned}
$$

con lo cual se deduce la tesis. Además, la unicidad de solución se tiene por la unicidad de la solución de Neumann para el problema de Stefan a dos fases con datos de temperatura inicial y de borde constantes [3].

III.– SOLUCION DEL PROBLEMA P_2 .

En el problema P_2 pueden presentarse cinco diferentes casos, pues el segundo coeficiente térmico desconocido (además de k_2) puede ser uno cualquiera elegido entre los cinco coeficientes siguientes : k_1 , h, ρ, c_1 , c_2 . Se obtiene el siguiente resultado :

Teorema 2 .– (Determinación simultánea de k_1 y k_2) : La condición necesaria para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y k_1 tenga una única solución es que los datos B, C, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos h, ρ, c_1 , $c_2 > 0$ verifiquen las desigualdades

$$(13) \qquad G(\omega_1) < \frac{B}{\sigma\, H_0 \sqrt{\pi}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ ,$$

donde $\omega_1 = \omega_1(C, \sigma, H_0 , h, c_1 , c_2) > 0$ es la única solución de la ecuación

$$(14) \qquad W_1(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \ ,$$

con W_1 la función definida por la expresión siguiente :

$$(15) \qquad W_1(x) = \exp(-x^2) - \frac{C\, c_1 + h}{\sigma\, H_0\, c_2}\, x^2 \quad .$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

(16) $$k_2 = \frac{\rho\, c_2\, \sigma^2}{\xi_2^2} \quad .$$

(17) $$k_1 = \frac{\rho\, c_1\, \sigma^2}{\xi_1^2} \quad ,$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación :

(18) $$G(x) = \frac{B}{\sigma\, H_0 \sqrt{\pi}} \quad , \; x > 0 \quad ,$$

y $\xi_1 > 0$ es la única solución de la ecuación :

(19) $$\frac{1}{Q(x)} = \frac{h}{C\, c_1} \left(\frac{\sigma\, H_0\, c_2}{h\, \xi_2^2} \exp(-\xi_2^2) - 1 \right) \quad , \; x > 0 \quad ,$$

con Q la función definida por la expresión siguiente :

(20) $$Q(x) = \sqrt{\pi}\, x \exp(x^2)\; (1 - f(x)) \quad .$$

Demostración .- Si se sustituye (4) en (3) y se define ξ_2 y ξ_1 por (9) se obtiene (10i,ii). De (9) se deducen (16) y (17). De (9) y (10ii) se obtiene que ξ_2 satisface la ecuación (18), la cual tiene única solución si y sólo si los datos satisfacen la desigualdad

(21) $$\frac{B}{2\, \sigma\, H_0} < 1 \quad .$$

De (9) y (16) se deduce que ξ_1 satisface la ecuación (19), la cual, debido a las propiedades

(22) $$Q(0^+) = 0 \quad , \quad Q(+\infty) = 1 \quad , \quad Q'(x) > 0 \quad , \forall\, x > 0 \, ,$$

tendrá única solución si y sólo si el segundo miembro de (19) es mayor que 1 , lo cual es equivalente a que ξ_2 verifique la desigualdad

(23) $$\xi_2 < \omega_1$$

donde ω_1 es la única solución de (14). Utilizando el hecho de que la función G es estrictamente decreciente se deduce que existe un único $\xi_1 > 0$, solución de (19) si y sólo si

(24) $$G(\omega_1) < G(\xi_2) = \frac{B}{\sigma\, H_0 \sqrt{\pi}}$$

La condición (13) se obtiene de (21) y (24).

Para los cuatro restantes casos del problema P_2, se enunciarán los resultados que se obtienen y se demostrará sólo el caso de la determinación simultánea de los coeficientes térmicos k_2 y h.

Teorema 3 .— (i) (Determinación simultánea de k_2 y c_2) : La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y c_2 tenga una única solución es que los datos $B, C, \sigma, H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos $h, \rho, c_1, k_1 > 0$ verifiquen la desigualdad

$$\frac{B}{2\,\sigma\,H_0} < 1 \tag{25}$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i;ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

$$k_2 = \frac{\rho\,h\,\sigma}{H_0}\left(1 + \frac{C\,k_1}{\rho\,h\,\sigma\,a_1\sqrt{\pi}}\,F_1\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)\right)\exp(\xi_2^2) \quad , \tag{26}$$

$$c_2 = \frac{h}{\sigma\,H_0}\left(1 + \frac{C\,k_1}{\rho\,h\,\sigma\,a_1\sqrt{\pi}}\,F_1\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)\right)\xi_2^2\,\exp(\xi_2^2) \quad , \tag{27}$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de (18).

(ii) (Determinación simultánea de k_2 y h): La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y h tenga una única solución es que los datos $B, C, \sigma, H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos $\rho, c_1, c_2, k_1 > 0$ verifiquen las desigualdades

$$G(\omega_2) < \frac{B}{\sigma\,H_0\sqrt{\pi}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad , \tag{28}$$

donde $\omega_2 = \omega_2(C, \sigma, H_0, \rho, k_1, c_1, c_2) > 0$ es la única solución de la ecuación

$$W_2(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \; , \tag{29}$$

con W_2 la función definida por la expresión siguiente :

$$\begin{gathered} W_2(x) = \exp(-x^2) - \frac{C\,k_1}{\rho\,H_0\,c_2\,\sigma^2\,a_1\sqrt{\pi}}\,F_1\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)\,x^2 \quad , \\ W_2(0^+) = 1 \quad , \quad W_2(+\infty) = -\infty \quad , \quad W_2'(x) < 0 \quad , \; \forall\, x > 0 \, . \end{gathered} \tag{30}$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

(31) $$k_2 = \frac{\rho\, c_2\, \sigma^2}{\xi_2^2} \quad ,$$

(32) $$h = \sigma\, H_0\, c_2\, \frac{W_2(\xi_2)}{\xi_2^2} \quad ,$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación (18).

(iii) (Determinación simultánea de k_2 y c_1): La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y c_1 tenga una única solución es que los datos B, C, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos ρ, h, c_2 , $k_1 > 0$ verifiquen las desigualdades :

(33) $$G(\omega_3) < \frac{B}{\sigma\, H_0\, \sqrt{\pi}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

donde $\omega_3 = \omega_3(\sigma, H_0 , h, c_2) > 0$ es la única solución de la ecuación

(34) $$W_3(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \ ,$$

con W_3 la función definida por la expresión siguiente :

(35) $$W_3(x) = \exp(-x^2) - \frac{h}{\sigma\, H_0\, c_2}\, x^2 \quad ,$$

$$W_3(0^+) = 1 \quad , \quad W_3(+\infty) = -\infty \quad , \quad W_3'(x) < 0 \ , \ \forall\, x > 0 \, .$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

(36) $$k_2 = \frac{\rho\, c_2\, \sigma^2}{\xi_2^2} \quad ,$$

(37) $$c_1 = \frac{k_1}{\rho\, \sigma^2}\, \xi_1^2 \quad ,$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación (18) y ξ_1 es la única solución de la ecuación

(38) $$V(x) = \frac{\rho\, H_0\, c_2\, \sigma^3 \sqrt{\pi}}{C\, k_1} \; \frac{W_3(\xi_2)}{\xi_2^2} \quad , \quad x > 0$$

con V la función definida por la expresión siguiente :

(39) $$V(x) = x\, F_1(x) \quad ,$$
$$V(0^+) = 0 \quad , \quad V(+\infty) = +\infty \quad , \quad V'(x) > 0 \quad , \quad \forall\, x > 0 \, .$$

(iv) (Determinación simultánea de k_2 y ρ) : La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y ρ tenga una única solución es que los datos B, C, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos h, c_1 , c_2 , $k_1 > 0$ verifiquen las desigualdades (13). En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

(40) $$k_2 = \frac{c_2\, k_1}{c_1} \; \frac{\xi_1^2}{\xi_2^2} \quad ,$$

(41) $$\rho = \frac{k_1}{\sigma^2\, c_1} \; \xi_1^2 \quad ,$$

donde $\xi_2 > 0$ y $\xi_1 > 0$ son respectivamente la solución de las ecuaciones (18) y (19).

Demostración .— (ii) Si se sustituye (4) en (3) y se define ξ_2 y ξ_1 por (9) se obtiene (10i, ii). De (9) y (10ii) se deduce (31) donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación (18) bajo la hipótesis (21) (es decir, la segunda desigualdad de (28)). De (10i) se deduce la expresión (32) donde la función W_2 está definida por (30). Teniendo en cuenta que el coeficiente h debe ser positivo, se tiene la siguiente equivalencia :

(42) $$h > 0 \quad \Leftrightarrow \quad W_2(\xi_2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_2 < \omega_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{B}{H_0\, \sigma \sqrt{\pi}} = G_2(\xi_2) > G(\omega_2) \, ,$$

por ser G_2 una función estrictamente decreciente, donde ω_2 es la única solución de la ecuación (18). De (21) y (42) se deduce (28).

Observación 1 .— Si el coeficiente k_2 es conocido entonces la idea de este trabajo (definido con la constante H_0) para la determinación simultánea de coeficientes térmicos de un material a través de un proceso de cambio de fase coincide con la dada en [4] (definido con la constante h_0) a través de la relación

$$(43) \qquad h_0 = k_2 H_0 .$$

Observación 2 .— En el caso en que todos los coeficientes térmicos del material semi-infinito sean conocidos, entonces la condición (1) (última condición de (3)) es superflua con lo cual la solución de Neumann para datos B y C viene dada por (4), donde el coeficiente $\sigma > 0$, que caracteriza la frontera libre $s(t)$, es la única solución de la ecuación

$$(44) \qquad U(x) = x \quad , x > 0 \quad ,$$

donde U es la función definida por la expresión siguiente :

$$(45) \qquad \begin{gathered} U(x) = \frac{B\, k_2}{\rho\, h\, a_2 \sqrt{\pi}}\; F_2\left(\frac{x}{a_2}\right) - \frac{C\, k_1}{\rho\, h\, a_1 \sqrt{\pi}}\; F_1\left(\frac{x}{a_1}\right), \\ U(0^+) = +\infty \quad , \; U(+\infty) = -\infty \quad , \; U'(x) < 0 \quad , \; \forall\, x > 0 . \end{gathered}$$

En este caso, el coeficiente H_0 viene dado por :

$$(46) \qquad H_0 = -\,\theta_{2_x} \sqrt{t} = \frac{B}{a_2 \sqrt{\pi}\, f\left(\frac{\sigma}{a_2}\right)} \; > \; 0 \quad .$$

Reemplazando (46) en las desigualdades, previamente halladas y que deben ser ciertas para cualquier material, se obtienen propiedades adicionales (en forma de desigualdades) que son siempre verdaderas y que pueden interpretarse como desigualdades para el coeficiente σ (ver, por ejemplo, [4, 6]).

Observación 3 .— Este trabajo simplifica, desde el punto de vista práctico, los datos experimentales requeridos para la aplicación del método al reemplazar la medición del flujo de calor por la de la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x = 0$.

Observación 4 .— Si la temperatura inicial es igual a la del cambio de fase, es decir $C = 0$, entonces los resultados obtenidos aquí coinciden con los obtenidos en [7]. Más aún, para el caso (iv) del Teorema 3 se obtiene : Si los datos B, σ, $H_0 > 0$ verifican la desigualdad (21), entonces existe un único elemento $\xi > 0$ solución de la ecuación (18). Si además, se satisface la condición adicional :

$$(47) \qquad \xi^2 \exp(\xi^2) = \frac{\sigma\, c_2\, H_0}{h}$$

entonces existen infinitas soluciones k_2 y ρ, las cuales vienen dadas por la siguiente relación (en caso contrario, no existe solución) :

$$(48) \qquad \frac{k_2}{\rho} = \frac{\sigma^2\, c_2}{\xi^2}.$$

lo cual resulta ser un complemento a la Observación 7 de [7].

Si el coeficiente desconocido es k_1, en lugar de k_2, entonces la variante explícitada anteriormente puede también aplicarse cambiando el proceso de fusión por el de solidificación. A continuación se analizará este caso considerando además la convección inducida por el cambio de densidad de masa en la transición de fase sólido-líquido (es decir, $\rho_1 \neq \rho_2$).

IV.— SOBRE LA DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS CONSIDERANDO EL CAMBIO DE DENSIDAD DE MASA.

Se considera el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo semi-infinito que se encuentra inicialmente en la fase líquida a una temperatura $D > 0$ y que en el borde fijo $x = 0$ está sometido a una temperatura $-E < 0$.

Si se tiene en cuenta el salto de densidad en la interfase sólido—líquida $x = s(t)$, se supone que la temperatura $\theta = \theta(x,t)$ del material está definida por :

$$(49) \qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_1(x,t) < 0 & \text{si} \quad 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \ , \\ 0 & \text{si} \quad x = s(t) \ , \ t > 0 \ , \\ \theta_2(x,t) > 0 & \text{si} \quad x > s(t) \ , \ t > 0 \ , \end{cases}$$

y se impone en $x = 0$ una sobre-condición del tipo (1), entonces la formulación matemática del problema viene dada por :

$$(50) \qquad \begin{aligned} &\alpha_1\, \theta_{1_{xx}} = \theta_{1_t} \quad , \quad 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \ , \\ &\alpha_2\, \theta_{2_{xx}} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\, \dot{s}(t)\, \theta_{2_x} = \theta_{2_t} \quad , \quad x > s(t) \ , \ t > 0 \ , \\ &\theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \end{aligned}$$

$$k_1\,\theta_{1_x}(s(t),t) - k_2\,\theta_{2_x}(s(t),t) = \rho_1\,h\,\dot{s}(t)\ , \qquad t > 0\ ,$$

$$s(0) = 0$$

(50) $$\theta_2(+\infty,t) = \theta_2(x,0) = D > 0\ ,\ x > 0\ ,\ t > 0\ ,$$

$$\theta_1(0,t) = -\,E < 0\ ,\ t > 0\ ,$$

$$\theta_{1_x}(0,t) = \frac{H_0}{\sqrt{t}}\ ,\ t > 0\ .$$

Si el coeficiente k_1 es desconocido y teniendo en cuenta todo lo realizado anteriormente (para no repetir cálculos similares) se puede plantear el siguiente

Problema P_3 .— Dados los datos experimentales D, E, $H_0 > 0$ y la frontera móvil $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ con $\sigma > 0$ se quiere hallar $\left\{ \theta_1(x,t)\ ,\ \theta_2(x,t)\ ,\ k_1\ ,\ \rho_1 \text{ ó } \rho_2 \right\}$ de manera que se satisfagan las condiciones (50).

La temperatura viene dada por [1, 2, 3, 5] :

$$\theta_1(x,t) = -\,E\left(1 - \frac{f(x/2a_1\sqrt{t})}{f(\frac{\sigma}{a_1})} \right)\ ,$$

(51) $$\theta_2(x,t) = \frac{D}{1 - f(\frac{\sigma}{a_0})}\left(f\Big(\frac{\sigma}{a_2}\,|\,\epsilon\,| + \frac{x}{2\,a_2\,\sqrt{t}} \Big) - f(\frac{\sigma}{a_0}) \right)\ ,$$

$$a_0 = \frac{a_2}{1 + |\,\epsilon\,|}\ ,\quad \epsilon = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}\ ,\quad a_i = \Big(\frac{k_i}{\rho_i\,c_i} \Big)^{1/2} = \alpha_i^2\ \ (i = 1,\,2)\ ,$$

y los dos coeficientes térmicos desconocidos k_1 y ρ_1 ó ρ_2 deben satisfacer el siguiente sistema de dos ecuaciones no-lineales :

(52)

$$\text{i)}\ \frac{k_1\,H_0}{h\,\rho_1}\exp(-\xi_1^2) - \frac{k_2\,D}{h\,\rho_1\,a_2\,\sqrt{\pi}}\,F_1(\xi_0) = \sigma\ ,$$

$$\text{ii)}\ f(\xi_1) = \frac{E}{a_1\,H_0\,\sqrt{\pi}}$$

donde

(53) $$\xi_0 = \frac{\sigma}{a_0}\ ,\qquad \xi_1 = \frac{\sigma}{a_1}\ ,\qquad \xi_2 = \frac{\sigma}{a_2}\ .$$

A continuación, se dará el resultado correspondiente a la determinación simultánea de los coeficientes térmicos k_1 y ρ_2 con la particularidad de que $\rho_1 > \rho_2$, es decir que se incluye a todos los materiales excepto al agua (la determinación de k_1 y ρ_1 es similar a la anterior).

<u>Teorema</u> 4 .– La condición necesaria y suficiente para que el problema P_3 con coeficientes desconocidos k_1 y ρ_2 (con $\rho_1 > \rho_2$) tenga una única solución es que los datos D, E, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos h, ρ_1, c_1, c_2, k_2 verifiquen las desigualdades

$$G(\omega_5) < \frac{E}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} < G(\omega_6) \tag{54}$$

donde $\omega_5 = \omega_5(\sigma, D, H_0, c_1, c_2, h) > 0$ es la única solución de la ecuación :

$$W_5(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \tag{55}$$

y $\omega_6 = \omega_6(\sigma, D, H_0, c_1, c_2, h, \rho_1, k_2) > 0$ es la única solución de la ecuación :

$$W_6(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \tag{56}$$

con W_5 y W_6 las funciones definidas por las expresiones siguientes :

$$\begin{aligned} W_5(x) &= \exp(-x^2) - \frac{h + D\, c_2}{\sigma\, c_1\, H_0}\, x^2 \quad , \\ W_6(x) &= \exp(-x^2) - \frac{x^2}{\sigma\, c_1\, H_0} \left(h + \frac{D\, c_2}{Q\left(\sigma \sqrt{\frac{c_2\, \rho_1}{k_2}} \right)} \right) \quad . \end{aligned} \tag{57}$$

En tal caso, la temperature viene dada por (51) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

$$k_1 = \frac{\sigma^2\, c_1\, \rho_1}{\xi_1^2} \quad , \tag{58}$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1\, c_2\, \sigma^2}{k_2\, \xi_0^2} \quad , \tag{59}$$

donde $\xi_1 > 0$ es la única solución de la ecuación :

$$G(x) = \frac{E}{\sigma\, H_0 \sqrt{\pi}} \quad , \quad x > 0 \quad , \tag{60}$$

y $\xi_0 > 0$ es la única solución de la ecuación :

$$(61) \qquad \frac{1}{Q(x)} = \frac{\sigma\, H_0\, c_1}{D\, c_2\, \xi_1^2}\; W_4(\xi_1) \quad , \quad x > 0 \quad ,$$

con W_4 la función definida por la expresión siguiente :

$$(62) \qquad W_4(x) = \exp(-x^2) - \frac{h}{\sigma\, H_0\, c_1}\; x^2 \quad .$$

Demostración .— Teniendo en cuenta (51) y (53), la ecuación (52ii) es equivalente a (60), la cual tiene única solución si y sólo si el segundo miembro de (60) es menor que $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, es decir

$$(63) \qquad \frac{E}{2\, \sigma\, H_0} < 1 \quad .$$

Mediante diversos cálculos elementales se deducen (58), (59) y

$$(64) \qquad \xi_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\, \xi_0 \quad , \quad a_2 = \frac{k_2}{\sigma\, \rho_1\, c_2}\; \xi_0 \, ,$$

con lo cual la ecuación (52i), con incógnita ξ_0 , es equivalente a la ecuación (61), la cual tiene única solución $\xi_0 > 0$ si y sólo si (ver (22))

$$(65) \qquad \frac{\sigma\, c_1\, H_0}{D\, c_2\, \xi_1^2}\; W_4(\xi_1) > 1 \;\Leftrightarrow\; \xi_1 < \omega_5$$

pues la función W_5 verifica las siguientes propiedades

$$(66) \qquad W_5(0^+) = 1 \quad , \quad W_5(+\infty) = -\infty \quad , \quad W_5{}'(x) < 0 \, , \;\; \forall\, x > 0 \, .$$

Utilizando (60) y el hecho de que la función G es estrictamente decreciente (ver (12)), la condición (65) es equivalente a

$$(67) \qquad G(\omega_5) < \frac{E}{\sigma\, H_0\, \sqrt{\pi}} \quad .$$

Por otra parte, utilizando (61) y el hecho de que la función Q es estrictamente creciente (ver (22)), se tiene la siguiente equivalencia

$$(68) \qquad \rho_1 > \rho_2 \;\Leftrightarrow\; \xi_0 > \sigma \sqrt{\frac{c_2\, \rho_1}{k_2}} \;\Leftrightarrow\; Q(\xi_0) > Q\Big(\sigma \sqrt{\frac{c_2\, \rho_1}{k_2}}\,\Big) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad W_4(\xi_1) < \frac{D\, c_2}{\sigma\, c_1\, H_0} \frac{\xi_1^2}{Q\left(\sigma \sqrt{\frac{c_2\, \rho_1}{k_2}}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad W_6(\xi_1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_1 > \omega_6 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{E}{\sigma\, H_0 \sqrt{\pi}} < G(\omega_6) \quad .$$

Como la condición (68) implica la (63), debido a (22), las condiciones necesarias y suficientes se reducen a (67) y (68), es decir (54).

Observación 5 .— Utilizando las definiciones de W_5 , W_6 y Q , se deduce que se tiene $W_6(\omega_5) < W_5(\omega_5) = 0$, es decir que

(69) $$\omega_6 < \omega_5$$

con lo cual, la doble desigualdad (54) resulta ser coherente.

Observación 6 .— El §IV. resulta ser una nueva variante de la dada en [5] para la determinación de coeficientes térmicos considerando el cambio de densidad de masa ($\rho_1 \neq \rho_2$).

AGRADECIMIENTO.—

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por el CONICET a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física—Matemática", Rosario (Argentina).

NOMENCLATURA

$\alpha = a^2 = \frac{k}{\rho\, c}$: difusividad térmica, c : calor específico,

H_0 : coeficiente que caracteriza el gradiente de temperatura en el borde fijo $x = 0$,

k : conductividad térmica, ρ : densidad de masa,

h : calor latente de fusión por unidad de masa,

$s(t)$: posición de la interfase sólido-líquida al instante t ,

t : variable temporal, x : variable espacial,

σ : coeficiente que caracteriza la frontera móvil o libre $s(t)$,

θ : temperatura, $\xi = \frac{\sigma}{a}$: parámetro adimensional,

$B > 0$, $-E < 0$: temperatura en el borde fijo $x = 0$,

$-C < 0$, $D > 0$: temperatura inicial .

Sub-indices : $i = 1$: fase sólida, $i = 2$: fase líquida.

REFERENCIAS

[1] A.B. BANCORA — D.A. TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free bondary", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 9(1985), 215-222.

[2] H.S. CARSLAW — J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", Oxford Univ. Press (Clarendon), London (1959).

[3] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971).

[4] M.B. STAMPELLA — D.A. TARZIA, "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", Int. J. Engineering Science, 27 (1989), 1407—1419.

[5] C.O. STOICO — D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos en materiales semi-infinitos a través de un proceso con cambio de fase", II Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia, San Pablo (Brasil), 12-15 Mayo 1986, Vol. 2, 348-356.

[6] D.A. TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math., 39 (1981-82), 491-497.

[7] D.A. TARZIA, "A new variant for the simultaneous calculation of some thermal coefficients of a semi-infinite material through a phase-change problem with an over-condition on the fixed fare", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 8 (1984), 227-235.

[8] D.A. TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Láme-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151-1157. See also Adv. Appl. Math., 3 (1982), 74-82.

Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, (2000) Rosario, Argentina.

y

PROMAR (CONICET—UNR), Instituto de Matemática "B. Levi", Avenidad Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.