

SOBRE EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

por

Domingo Alberto TARZIA

RESUMEN. Se presentan algunos ejemplos con solución exacta de una familia de problemas P_α ($\alpha > 0$), definida en [5], la cual converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases cuando $\alpha \rightarrow +\infty$.

ABSTRACT. We give some examples with exact solution of a family of problems P_α ($\alpha > 0$), defined in [5], which converges to the steady-state of the two-phase Stefan problem as $\alpha \rightarrow +\infty$.

1. INTRODUCCION.

En [5;6] se definió una familia de problemas P_α , auxiliares del caso estacionario del problema de Stefan a dos fases [2;3;4], dependiente de un parámetro real $\alpha > 0$.

La formulación variacional correspondiente, para cada $\alpha > 0$, está dada por: (*)

(*) En todo este trabajo se utilizan las mismas notaciones que en [4;5;6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = H^1(\Omega) \quad , \quad K = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = b_0 = k_2 b^+ - k_1 b^- \right\} \quad , \\ a(u;v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad , \quad a_\alpha(u;v) = a(u;v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u v \, d\gamma \quad , \\ \langle f;v \rangle = \langle g;v \rangle - \int_{\Gamma_2} h v \, d\gamma \quad , \quad \langle f_\alpha;v \rangle = \langle f;v \rangle + \alpha \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\gamma \quad . \end{array} \right.$$

PROBLEMA (P_α) :

$$(1) \quad \begin{cases} a_\alpha(u_\alpha; v) = \langle f_\alpha; v \rangle, \quad \forall v \in V \\ u_\alpha \in V \end{cases}$$

con

$$(2) \quad u_\alpha = k_2 \theta_\alpha^+ - k_1 \theta_\alpha^- ,$$

donde θ_α representa la temperatura del material Ω (dominio acotado de \mathbb{R}^3) que puede presentar sus dos fases sólida y líquida, bajo ciertas condiciones de contorno, definidas en [5].

En [5], se demostró la existencia y unicidad de la solución u_α de (1). Además, se estudió el comportamiento de u_α cuando $\alpha \rightarrow +\infty$, obteniéndose:

$$(3) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|u_\alpha - u\|_V = 0 ,$$

donde u es la única solución del:

PROBLEMA (P) :

$$(4) \quad \begin{cases} a(u; v-u) = \langle f; v-u \rangle, \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

con

$$(5) \quad u = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- ,$$

donde θ es la temperatura estacionaria del problema de Stefan a dos fases [4] (*).

OBSERVACION 1:

La frontera libre para los problemas en θ y en θ_α están dadas respectivamente por:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathcal{L} = \{x \in \Omega / \theta(x) = 0\} = \{x \in \Omega / u(x) = 0\} \\ \mathcal{L}_\alpha = \{x \in \Omega / \theta_\alpha(x) = 0\} = \{x \in \Omega / u_\alpha(x) = 0\} \end{cases} .$$

Además, conocidos u_α y u , las funciones θ_α y θ son calculadas a través de (2) y (5) respectivamente. ■

(*) La formulación fuerte de los problemas (P) y (P_α) está dada respectivamente por:

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = g \text{ en } \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = b_0 \\ -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h \end{cases} \quad (P_\alpha) \quad \begin{cases} -\Delta u_\alpha = g \text{ en } \Omega \\ -\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}|_{\Gamma_1} = \alpha(u_\alpha - b_0) \\ -\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h \end{cases} .$$

En II se analizarán ciertos ejemplos, con solución exacta, correspondientes a los problemas (P) y (P_α) .

II ALGUNOS EJEMPLOS DE SOLUCION EXACTA.

PARTE PRIMERA.

A continuación se darán tres ejemplos para los cuales la solución u de (4) y la solución u_α de (1) pueden calcularse explícitamente bajo las siguientes hipótesis (*):

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} g = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \Gamma = \Gamma_1 \quad (\Gamma_2 = \emptyset) \\ \text{la temperatura } b \text{ dada sobre } \Gamma_1 \text{ toma valores} \\ \text{positivos y negativos (**).} \end{array} \right.$$

i) EJEMPLO 1:

Sean

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0; a) \quad , \quad \text{con } a > 0 \\ b(x)/\Gamma_1 = \begin{cases} B > 0 & \text{si } x = 0 \\ -C < 0 & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right. .$$

La solución u de (4) está dada por:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x) = - \frac{k_2 B + k_1 C}{a} x + k_2 B \\ \mathcal{L} = \{s\} \quad , \quad s = \frac{e_0}{n_0} a \\ e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \quad , \quad n_0 = 1 + e_0 \end{array} \right. .$$

La solución u_α de (1) está dada por:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(x) = C_{1\alpha} x + C_{2\alpha} \\ - \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} (0) = \alpha(u_\alpha(0) - b_0(0)) \\ - \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} (a) = \alpha(u_\alpha(a) - b_0(a)) \end{array} \right.$$

donde

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1\alpha} = \alpha(C_{2\alpha} - k_2 B) \\ -C_{1\alpha} = \alpha(C_{1\alpha} a + C_{2\alpha} + k_1 C) \end{array} \right.$$

(*) Por las notaciones y la significación física correspondiente ver [5].

(**) Con esta hipótesis uno está seguro que el problema (P) es siempre a dos fases.

cuya solución es:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1\alpha} = - \frac{k_1 C + k_2 B}{2 + a\alpha} \alpha \\ C_{2\alpha} = \frac{k_2 B(1 + a\alpha) - k_1 C}{2 + a\alpha} \end{array} \right.$$

La frontera libre $\mathcal{L}_\alpha = \{s_\alpha\}$ está dada por:

$$(13) \quad s_\alpha = s + \frac{e_0 - 1}{\alpha n_0}$$

Además, se tienen las siguientes equivalencias:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha > 0 \iff \alpha > \frac{1 - e_0}{a e_0} \\ s_\alpha < a \iff \alpha > \frac{e_0 - 1}{a} \end{array} \right.$$

obteniéndose el:

LEMA 1:

El problema (P_α) es a dos fases $(0 < s_\alpha < a)$ (*) si y solo si

$$(15) \quad \alpha > \max\left(\frac{e_0 - 1}{a}; \frac{1 - e_0}{a e_0}\right)$$

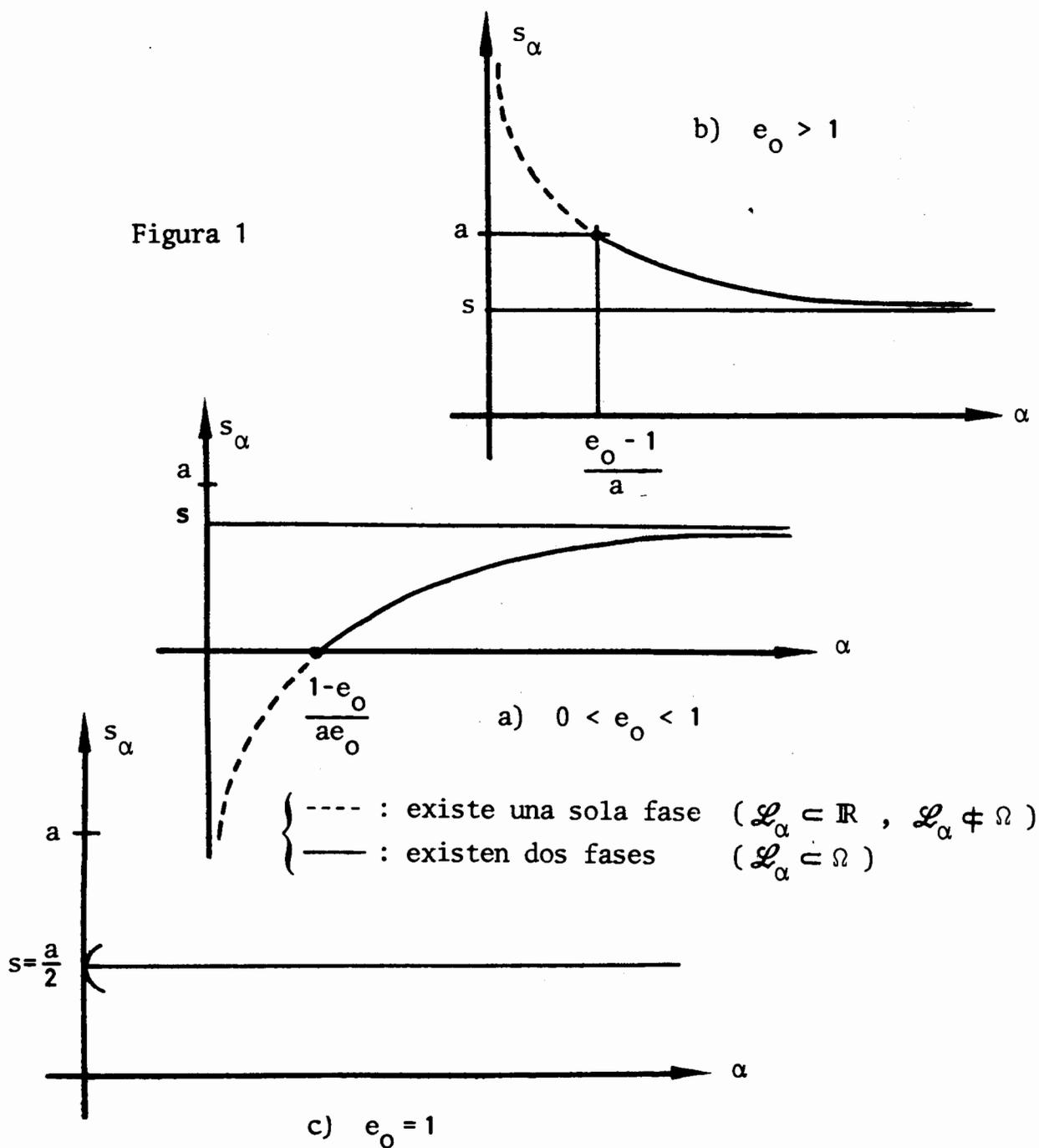
Para el caso particular $e_0 = 1$ ($k_2 B = k_1 C$) se tienen los siguientes resultados:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(x) = \frac{k_2 B \alpha}{2 + a\alpha} (a - 2x) \\ s_\alpha = s = \frac{a}{2}, \quad \forall \alpha > 0 \end{array} \right.$$

El comportamiento de s_α , en función de α , para los tres casos posibles $(0 < e_0 < 1, e_0 = 1, e_0 > 1)$ está dado por las siguientes representaciones gráficas (Figura 1):

(*) Se sabe por (3), que para α suficientemente grande el problema (P_α) es a dos fases. Por lo tanto, es interesante el cálculo del α a partir del cual el problema (P_α) es realmente a dos fases, siendo la frontera libre \mathcal{L}_α interior a Ω .

Figura 1



ii) EJEMPLO 2:

Sean

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \{(r; \omega) / r_1 < r < r_2\} \quad (*) \\ b(r; \omega) / \Gamma_1 = \begin{cases} B > 0 & \text{si } r = r_2 \\ -C < 0 & \text{si } r = r_1 \end{cases} \end{array} \right.$$

La solución u de (4) está dada por:

(*) Corona circular de radios r_1 y r_2 , con $0 < r_1 < r_2$; $(r; \omega)$ representan las coordenadas polares en el plano.

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} u(r) = - \frac{k_2 B \log r_1 + k_1 C \log r_2}{\log \frac{r_2}{r_1}} + \frac{k_2 B + k_1 C}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log r \\ \mathcal{L} = \{r = s\} \quad , \quad \text{con} \quad s = \left(r_2\right)^{\frac{1}{n_0}} \cdot \left(r_1\right)^{\frac{e_0}{n_0}} \\ e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \quad , \quad n_0 = 1 + e_0 \quad \cdot \quad | \end{array} \right.$$

La solución u_α de (1) está dada por:

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(r) = H_\alpha + M_\alpha \log r \\ - \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} (r_1) = \alpha(u_\alpha(r_1) - b_0(r_1)) \\ - \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} (r_2) = \alpha(u_\alpha(r_2) - b_0(r_2)) \end{array} \right.$$

donde H_α y M_α deben satisfacer el sistema:

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_\alpha}{r_1} = \alpha(H_\alpha + M_\alpha \log r_1 + k_1 C) \\ - \frac{M_\alpha}{r_2} = \alpha(H_\alpha + M_\alpha \log r_2 - k_2 B) \end{array} \right.$$

cuya solución es:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} M_\alpha = \frac{k_1 C n_0 \alpha}{\frac{1}{r_0} + \alpha \log \frac{r_2}{r_1}} \quad , \\ H_\alpha = - k_1 C \frac{\alpha n_0 \log s + C_0}{\frac{1}{r_0} + \alpha \log \frac{r_2}{r_1}} \quad , \\ C_0 = \frac{1}{r_2} - \frac{e_0}{r_1} \quad , \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} > 0 \quad . \end{array} \right.$$

La frontera libre $\mathcal{L}_\alpha = \{r = s_\alpha\}$ está dada por:

$$(22) \quad s_\alpha = s \cdot e^{\frac{C_0}{\alpha n_0}} \quad .$$

Además, se tienen las siguientes equivalencias:

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } C_0 > 0 : \\ \text{b) } C_0 < 0 : \\ \text{c) } C_0 = 0 : \end{array} \right. \begin{array}{l} s_\alpha < r_2 \iff \alpha > \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{C_0}{e_0 \log \frac{r_2}{r_1}} \\ s_\alpha > r_1 \iff \alpha > \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{-C_0}{\log \frac{r_2}{r_1}} \\ s_\alpha = s = r_1 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{r_2}{r_1 + r_2}}, \quad \forall \alpha > 0 \end{array}$$

obteniéndose el:

LEMA 2.

El problema (P_α) es a dos fases $(r_1 < s_\alpha < r_2)$ si y solo si

$$(24) \quad \alpha > \max(\alpha_1; \alpha_2) \quad . \blacksquare$$

El comportamiento de s_α , en función de α , para los tres casos posibles $(C_0 > 0, C_0 < 0, C_0 = 0)$ está dado por las siguientes gráficas (Figura 2):

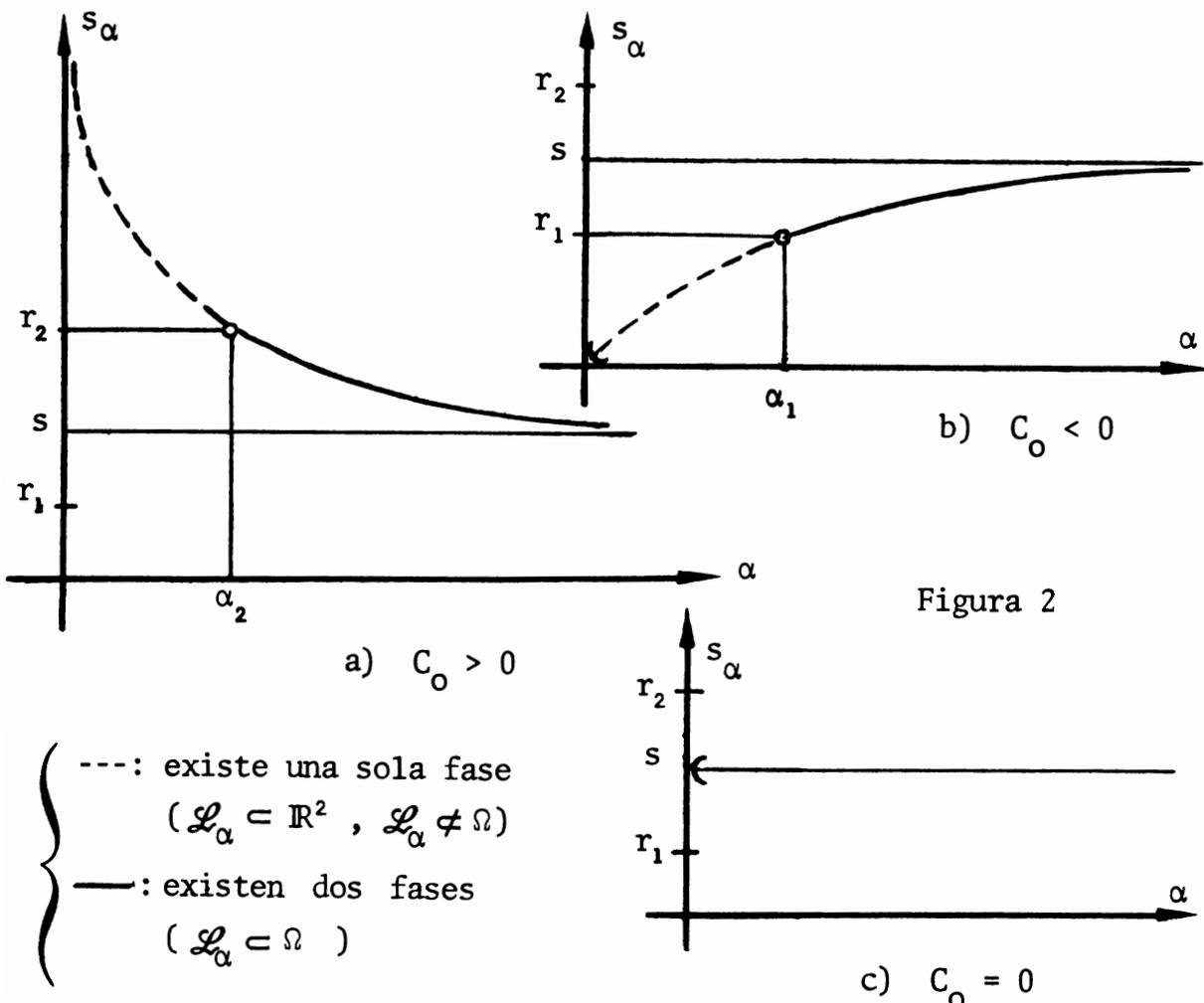


Figura 2

iii) EJEMPLO 3:

Sean

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \{(r; \theta; \varphi) / r_1 < r < r_2\} \quad (*) \\ b(r; \theta; \varphi) / r_1 = \begin{cases} B > 0 & \text{si } r = r_2 \\ -C < 0 & \text{si } r = r_1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

La solución u de (4) es:

$$(26) \quad u(r) = H - \frac{M}{r}$$

donde H y M satisfacen el sistema:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(r_2) = H - \frac{M}{r_2} = k_2 B \\ u(r_1) = H - \frac{M}{r_1} = -k_1 C \end{array} \right.$$

cuya solución es:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = k_1 C \frac{r_1 + e_0 r_2}{r_2 - r_1} \\ M = k_1 C \frac{n_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \\ e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \quad , \quad n_0 = 1 + e_0 \end{array} \right. .$$

La temperatura $\theta(r)$, correspondiente a $u(r)$ a través de (5), y la frontera libre $\mathcal{L} = \{r = s\}$ están dadas por:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(r) = \begin{cases} B \frac{r_2}{r_2 - s} \left(1 - \frac{s}{r}\right) & \text{si } s \leq r \leq r_2 \\ -C \frac{r_1}{s - r_1} \left(\frac{s}{r} - 1\right) & \text{si } r_1 \leq r \leq s \end{cases} \\ s = \frac{r_1 r_2 n_0}{r_1 + e_0 r_2} \quad , \quad \text{con } r_1 < s < r_2 \end{array} \right. .$$

La representación gráfica de $\theta(r)$ es (Figura 3); con lo cual se observa que $\theta \in C^0$ pero $\theta \notin C^1$, resultado ya conocido para los ejemplos 1 y 2, vistos en [4].

(*) Corona esférica de radios r_1 y r_2 , con $0 < r_1 < r_2$; $(r; \theta; \varphi)$ representan las coordenadas esféricas en el espacio \mathbb{R}^3 .

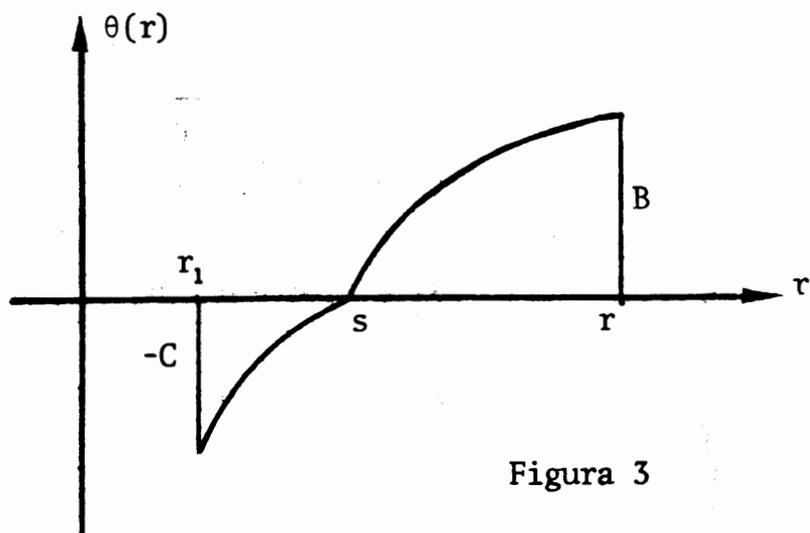


Figura 3

La solución u_α de (1) está dada por:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(r) = H_\alpha - \frac{M_\alpha}{r} \\ -\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}(r_2) = \alpha(u_\alpha(r_2) - k_2 B) \\ -\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}(r_1) = \alpha(u_\alpha(r_1) + k_1 C) \end{array} \right.$$

donde M_α y H_α deben satisfacer el sistema:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{M_\alpha}{r_2^2} = \alpha \left(H_\alpha - \frac{M_\alpha}{r_2} - k_2 B \right) \\ \frac{M_\alpha}{r_1^2} = \alpha \left(H_\alpha - \frac{M_\alpha}{r_1} + k_1 C \right) \end{array} \right.$$

cuya solución es:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_\alpha = \frac{k_1 C n_0}{\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)} \\ H_\alpha = k_1 C \frac{\frac{C_1}{\alpha} + \frac{n_0}{s}}{\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)} \\ C_1 = \frac{e_0}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}, \quad \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} > 0 \end{array} \right.$$

La frontera libre $\mathcal{L}_\alpha = \{r = s_\alpha\}$ es:

$$(33) \quad s_\alpha = \frac{s n_0 \alpha}{C_1 s + n_0 \alpha} \quad (*)$$

cuyo comportamiento está dado por:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } C_1 > 0: \\ \text{b) } C_1 < 0: \\ \text{c) } C_1 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha > r_1 \iff \alpha > \alpha_4, \quad \alpha_4 = C_1 r_{12} \\ 0 < s_\alpha < r_2 \iff \alpha > \alpha_3, \quad \alpha_3 = -\frac{C_1 r_{12}}{e_0} \\ s_\alpha = s = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 + r_2}, \quad \forall \alpha > 0 \quad \cdot \blacksquare \end{array} \right.$$

OBSERVACION 2.

Para el caso $C_1 < 0$, la frontera libre s_α no existe (aún como solución matemática en \mathbb{R}^3) para los valores $0 < \alpha \leq \alpha_*$, con

$$(35) \quad \alpha_* = -\frac{C_1 s}{n_0} = \frac{r_1^2 - e_0 r_2^2}{r_1 r_2 (r_1 + e_0 r_2)}$$

pues para dichos valores de α el correspondiente s_α toma valores negativos (s_α representa un radio). Sin embargo, para $0 < \alpha \leq \alpha_*$, el problema (P_α) es a una fase, que resulta ser en este caso la fase sólida. \blacksquare

OBSERVACION 3.

El valor α_* está caracterizado por las siguientes condiciones:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{\alpha_*} = 0, \\ H_\alpha > 0, \quad \forall \alpha > \alpha_* \\ H_\alpha < 0, \quad \forall \alpha < \alpha_* \quad \cdot \blacksquare \end{array} \right.$$

Se obtiene el:

LEMA 3.

El problema (P_α) es a dos fases ($r_1 < s_\alpha < r_2$) si y solo si

$$(37) \quad \alpha > \max(\alpha_3; \alpha_4) \quad \cdot \blacksquare$$

El comportamiento de s_α , en función de α , para los tres ca

(*) Ver observación 2.

posibles ($C_1 > 0$, $C_1 < 0$, $C_1 = 0$) está dado por las siguientes representaciones gráficas (Figura 4):

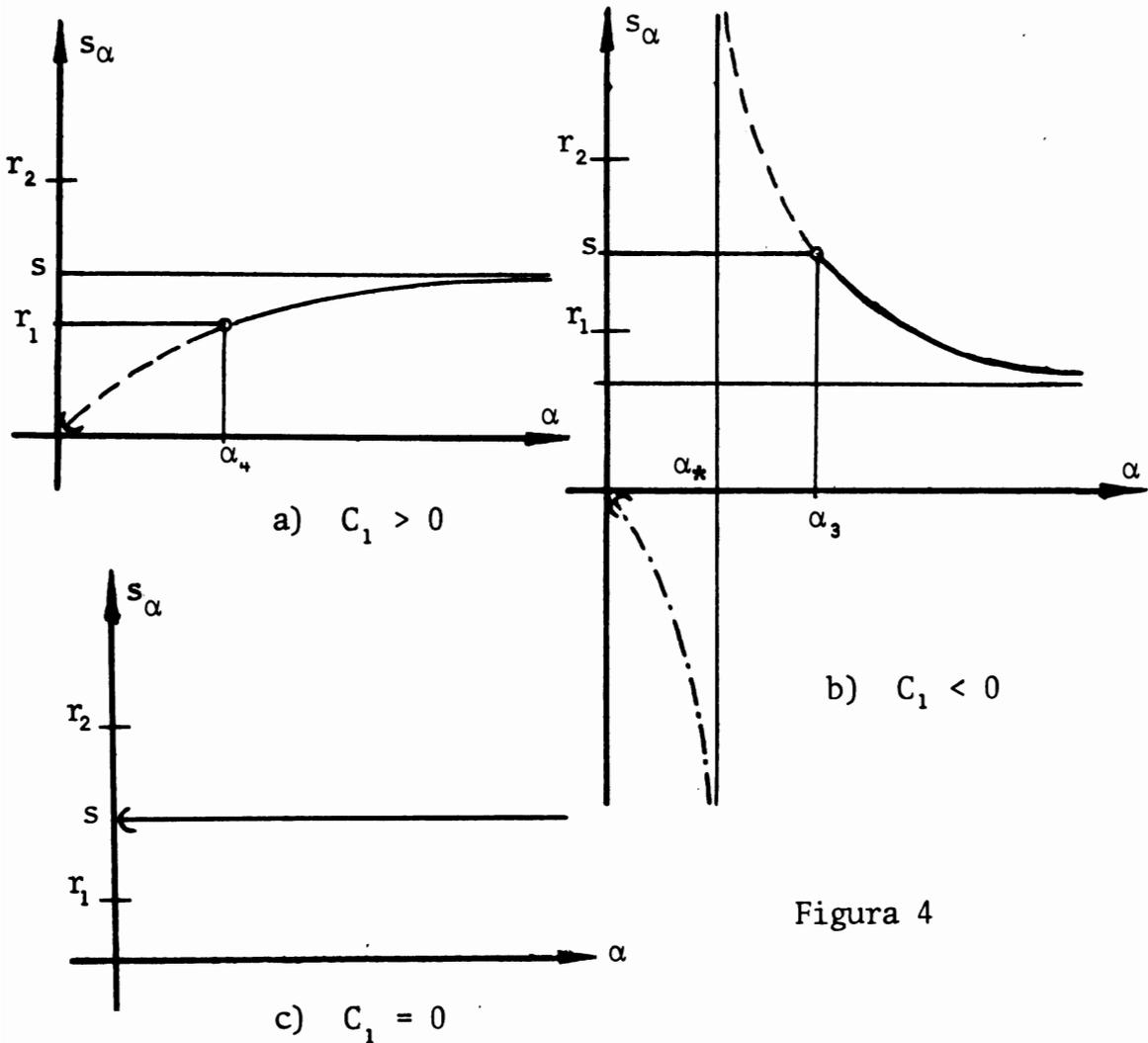


Figura 4

- : existe una sola fase ($\mathcal{L}_\alpha = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}_\alpha \neq \Omega$)
- : existen dos fases ($\mathcal{L}_\alpha = \Omega$)
- : No tiene sentido físico-matemático (existe una sola fase)

OBSERVACION 4.

En los tres ejemplos tratados hasta el presente, se mostró la existencia de una función f_0 , que depende del problema (geometría del material, temperaturas impuestas, coeficientes térmicos, etc.), que divide el estudio del problema (P_α) en tres casos, según dicha función sea positiva, negativa o cero. Es decir:

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} \text{Ejemplo 1: } f_0 = e_0 - 1 = \frac{k_2 B}{k_1 C} - 1 \\ \text{Ejemplo 2: } f_0 = C_0 = \frac{1}{r_2} - \frac{k_2 B}{k_1 C r_1} \\ \text{Ejemplo 3: } f_0 = C_1 = \frac{k_2 B}{k_1 C r_1^2} - \frac{1}{r_2} \end{array} \right.$$

En general, este resultado será cierto para otros casos de problema (P_α) ?. ■

OBSERVACION 5.

En el tercer ejemplo se vió la existencia de α_* (caso $C_1 < 0$) que tiene la propiedad que s_α no existe, ni como solución matemática, para $0 < \alpha \leq \alpha_*$, aunque el problema tenga sentido; más aún, el material se encuentra en una sola fase.

Existirán otros ejemplos de problemas (P_α) donde ésto suceda?. Más aún, existen otros problemas de frontera libre donde esta observación ocurra?. ■

PARTE SEGUNDA.

A continuación se darán tres ejemplos para los cuales la solución u de (4) y u_α de (1) pueden calcularse explícitamente bajo las siguientes hipótesis:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} g = 0 \text{ en } \Omega \\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (\Gamma_2 \neq \emptyset, \text{ medida } (\Gamma_1) > 0) \\ b : \text{ temperatura dada sobre } \Gamma_1 \\ h : \text{ flujo de calor dado sobre } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

OBSERVACION 6.

Si b toma sobre Γ_1 valores positivos y negativos, entonces el problema (P) es siempre a dos fases (ver parte 1a. y [1;2;3;4]).

En el caso en que b tome valores de signo constante sobre Γ_1 (positivo o negativo) el problema (P) no siempre es a dos fases; para ello, el flujo de calor h sobre Γ_2 deberá satisfacer ciertas condiciones, en general verificar una dada desigualdad. ■

iv) EJEMPLO 4.

Sean

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0;a) \text{ , con } a > 0 \\ \Gamma_1 = \{0\} \text{ , } \Gamma_2 = \{a\} \\ b/\Gamma_1 = B > 0 \text{ , } h/\Gamma_2 > 0 \end{array} \right.$$

La solución u de (4) está dada por:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x) = -hx + k_2 B \\ \mathcal{L} = \{s\} \text{ , } s = \frac{k_2 B}{h} \end{array} \right.$$

LEMA 4.

El problema (P) es a dos fases ($0 < s < a$) si y solo si

$$(42) \quad h > \frac{k_2 B}{a} \quad . \blacksquare$$

La correspondiente solución u_α es:

$$(43) \quad \begin{cases} u_\alpha(x) = -hx + \left(k_2 B - \frac{h}{\alpha}\right) \\ \mathcal{L}_\alpha = \{s_\alpha\}, \quad s_\alpha = s - \frac{1}{\alpha} \end{cases} .$$

LEMA 5.

Bajo la hipótesis (42), el problema (P_α) es a dos fases si y solo si

$$(44) \quad \alpha > \alpha_5, \quad \alpha_5 = \frac{h}{k_2 B} \quad . \blacksquare$$

v) EJEMPLO 5.

Sean

$$(45) \quad \begin{cases} \Omega = \{(r; \omega) / r_1 < r < r_2\}, \quad \text{con } 0 < r_1 < r_2 \\ \Gamma_1 = \{r = r_2\}, \quad \Gamma_2 = \{r = r_1\} \\ b/\Gamma_1 = B > 0, \quad h/\Gamma_2 > 0 \end{cases} .$$

La solución u de (4) está dada por:

$$(46) \quad \begin{cases} u(r) = k_2 B - h r_1 \log \frac{r_2}{r} \\ \mathcal{L} = \{r = s\}, \quad s = r_2 e^{-\frac{k_2 B}{h r_1}} \end{cases}$$

LEMA 6.

El problema (P) es a dos fases ($r_1 < s < r_2$) si y solo si

$$(47) \quad h > \frac{k_2 B}{r_1 \log \frac{r_2}{r_1}} \quad . \blacksquare$$

La solución del correspondiente problema (P_α) es:

$$(48) \quad \begin{cases} u_\alpha(r) = k_2 B - \frac{h r_1}{\alpha r_2} - h r_1 \log \frac{r_2}{r} \\ \mathcal{L}_\alpha = \{r = s_\alpha\}, \quad s_\alpha = s e^{-\frac{1}{\alpha r_2}} \end{cases}$$

LEMA 7.

Bajo la hipótesis (47), el problema (P_α) es a dos fases si y solo si

$$(49) \quad \alpha > \alpha_6, \quad \alpha_6 = \frac{h r_1}{k_2 B r_2} \quad . \blacksquare$$

vi) EJEMPLO 6.

$$(50) \quad \text{Sean } \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \{(r; \theta; \varphi) / r_1 < r < r_2\} , \text{ con } 0 < r_1 < r_2 \\ \Gamma_1 = \{r = r_2\} , \Gamma_2 = \{r = r_1\} \\ b/\Gamma_1 = B > 0 , h/\Gamma_2 > 0 . \end{array} \right.$$

La solución u de (4) está dada por:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(r) = k_2 B - h r_1^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \mathcal{L} = \{r = s\} , s = \frac{h r_1^2 r_2}{h r_1^2 + k_2 B r_2} . \end{array} \right.$$

LEMA 8.

El problema (P) es a dos fases ($r_1 < s < r_2$) si y solo si

$$(52) \quad h > \frac{k_2 B r_2}{r_1 (r_2 - r_1)} \quad \cdot \blacksquare$$

El correspondiente problema (P_α) tiene por solución:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(r) = k_2 B - \frac{h r_1^2}{\alpha r_2^2} - h r_1^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \mathcal{L}_\alpha = \{r = s_\alpha\} , s_\alpha = \frac{1}{\frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha r_2^2}} (\alpha \neq \alpha_{**}) \\ \alpha_{**} = \frac{h r_1^2}{h r_1^2 r_2 + k_2 B r_2^2} \end{array} \right.$$

LEMA 9.

Bajo la hipótesis (52), el problema (P_α) es a dos fases si y solo si

$$(54) \quad \alpha > \alpha_7 , \quad \alpha_7 = \frac{h r_1^2}{k_2 B r_2^2} \quad \cdot \blacksquare$$

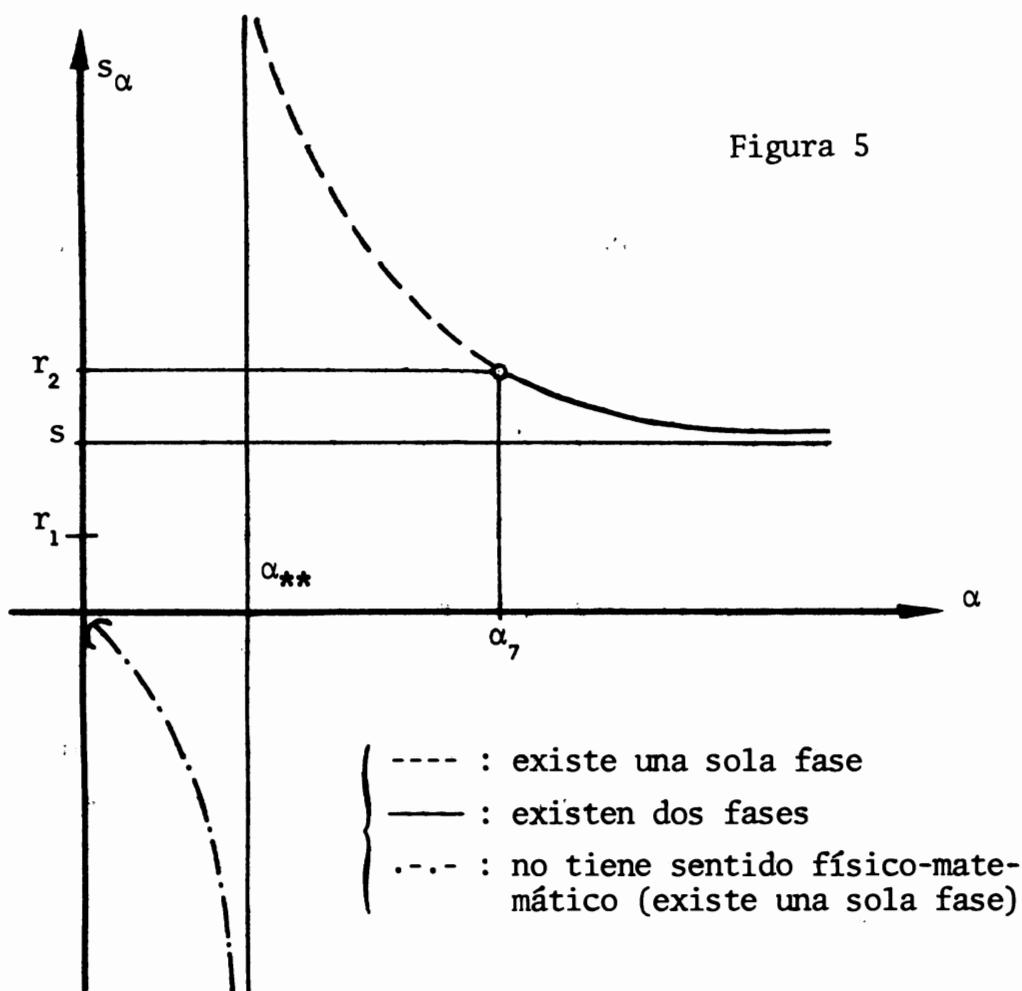
La representación gráfica de s_α , en función de α , está dada por (Figura 5). (Ver al dorso). \blacksquare

OBSERVACION 7.

Para este ejemplo 6, sucede lo ya dicho en la observación 5. \blacksquare

OBSERVACION 8.

Los cálculos a efectuar para la obtención de la solución exacta bajo las hipótesis (39) son, en general, para los ejemplos vistos, más sencillos de aquellos con hipótesis (7), si bien no han sido expuestos en este trabajo. \blacksquare



vii) EJEMPLO 5 BIS.

Sean los datos (45) con:

$$(55) \quad \Gamma_1 = \{r = r_1\}, \quad \Gamma_2 = \{r = r_2\}.$$

Las funciones u y u_α están dadas respectivamente por:

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(r) = k_2 B - hr_2 \log \frac{r}{r_1} \\ \mathcal{L} = \{r = s\}, \quad s = r_1 e^{\frac{k_2 B}{hr_2}} \end{array} \right.$$

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(r) = k_2 B - \frac{hr_2}{\alpha r_1} - hr_2 \log \frac{r}{r_1} \\ \mathcal{L}_\alpha = \{r = s_\alpha\}, \quad s_\alpha = s e^{-\frac{1}{\alpha r_1}} \end{array} \right.$$

LEMA 10.

i) El problema (P) es a dos fases si y solo si

$$(58) \quad h > \frac{k_2 B}{r_2 \log \frac{r_2}{r_1}}.$$

En dicho caso, la temperatura θ viene dada por:

$$(59) \quad \theta(r) = \begin{cases} B \frac{\log \frac{s}{r}}{\log \frac{s}{r_1}} & \text{si } r_1 \leq r \leq s \\ -\frac{hr_2}{k_1} \log \frac{r}{s} & \text{si } s \leq r \leq r_2 \end{cases}$$

ii) Bajo la hipótesis (58), el problema (P_α) es a dos fases si y solo si

$$(60) \quad \alpha > \alpha_8, \quad \alpha_8 = \frac{hr_2}{k_2 Br_1}.$$

En dicho caso, la temperatura θ_α viene dada por:

$$\theta_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{hr_2}{k_2} \log \frac{s_\alpha}{r} & \text{si } r_1 \leq r \leq s_\alpha \\ -\frac{hr_2}{k_1} \log \frac{r}{s_\alpha} & \text{si } s_\alpha \leq r \leq r_2 \end{cases}.$$

OBSERVACION 9.

Para el Ejemplo 5 bis, la gráfica de s en función de h es del tipo de la Figura 2a y la gráfica de s_α en función de α es del tipo de la Figura 2b. ■

viii) EJEMPLO 6 BIS.

Sean los datos (50) con:

$$(62) \quad \Gamma_1 = \{r = r_1\}, \quad \Gamma_2 = \{r = r_2\}.$$

Las funciones u y u_α están dadas respectivamente por:

$$(63) \quad \begin{cases} u(r) = k_2 B - hr_2^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \\ \mathcal{L} = \{r = s\}, \quad s = \frac{hr_2^2 r_1}{hr_2^2 - k_2 Br_1} \end{cases}$$

$$(64) \quad \begin{cases} u_\alpha(r) = k_2 B - \frac{hr_2^2}{\alpha r_1^2} - hr_2^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \\ \mathcal{L}_\alpha = \{r = s_\alpha\}, \quad s_\alpha = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{\alpha r_1^2}} \end{cases}$$

LEMA 11.

i) El problema (P) es a dos fases si y solo si

$$(65) \quad h > \frac{k_2 Br_1}{r_2(r_2 - r_1)}$$

En dicho caso, la temperatura θ viene dada por:

$$(66) \quad \theta(r) = \begin{cases} \frac{Bs r_1}{s - r_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) & \text{si } r_1 \leq r \leq s \\ -\frac{hr_2^2}{k_1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) & \text{si } s \leq r \leq r_2 \end{cases}$$

ii) Bajo la hipótesis (65), el problema (P_α) es a dos fases si y solo si

$$(67) \quad \alpha > \alpha_9, \quad \alpha_9 = \frac{hr_2^2}{k_2 Br_1^2}$$

En dicho caso, la temperatura θ_α viene dada por:

$$(68) \quad \theta_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{Bsr_1}{s - r_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_\alpha} \right) & \text{si } r_1 \leq r \leq s_\alpha \\ -\frac{hr_2^2}{k_1} \left(\frac{1}{s_\alpha} - \frac{1}{r} \right) & \text{si } s_\alpha \leq r \leq r_2 \quad . \blacksquare \end{cases}$$

OBSERVACION 10.

Para el Ejemplo 6 bis, la gráfica de s en función de h es del tipo de la Figura 4b y la gráfica de s_α en función de α es del tipo de la Figura 4a. \blacksquare

OBSERVACION FINAL.

Las demostraciones realizadas en [4;5] siguen siendo válidas aún en el caso en que la temperatura b tome sobre Γ_1 valores de signo constante pero con la condición que el flujo de calor h , dado sobre Γ_2 , verifique una adecuada desigualdad para que el problema (P) sea a dos fases. \blacksquare

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", 2ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1975). Rapport de recherche N°85, LABORIA - IRIA (1976).
- [2] A. FRIEDMAN, "The Stefan problem in several space variables", Trans. Amer. Math. Soc., 132(1968), p.51-87.
- [3] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Trans. Math. Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).
- [4] D.A. TARZIA, "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Mathematicae Notae, Año XXVII, p. 145-156.
- [5] D.A. TARZIA, "Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Mathematicae Notae, Año XXVII, p. 157-165.
- [6] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse de 3ème Cycle, Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), 8 mars 1979.

Instituto de Matemática "Beppo Levi"
 Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería
 Universidad Nacional de Rosario
 Avenida Pellegrini 250
 2000 ROSARIO - ARGENTINA.