UNA FAMILIA DE PROBLEMAS QUE CONVERGE HACIA EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

por

DOMINGO ALBERTO TARZIA

ABSTRACT.

A family of problems P_α $(\alpha > 0)$ for the steady-state of the two-phase Stefan problem is proposed, and it is solved by a variational equality. The behavior of the solution of P_α is studied as α goes to infinity.

1. INTRODUCCION.

Se presenta una familia de problemas P_α, auxiliares del caso estacionario del problema de Stefan a dos fases, dependiente de un parámetro real $\alpha > 0$.

Para cada $\alpha > 0$, se demuestra la existencia y la unicidad de la temperatura θ_α utilizando la correspondiente formulación variacional. A continuación, se estudia el comportamiento de θ_α cuando $\alpha \longrightarrow +\infty$, y se demuestra que $\theta_\alpha \longrightarrow \theta$ en $L^2(\Omega)$ fuerte, donde θ es la temperatura estacionaria del problema de Stefan a dos fases, definida en Tarzia [2].

2. DEFINICION DEL PROBLEMA P_α.

Para cada real $\alpha > 0$, se estudia la temperatura $\theta_\alpha(x)$, definida para $x \in \Omega$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular. Ω representa el espacio de un medio material que puede presentarse en sus dos fases: sólida y líquida, por ejemplo hielo y agua.

Se supone que:

$$(1) \qquad \theta_\alpha = 0 \qquad (0 \text{ grado centígrado})$$

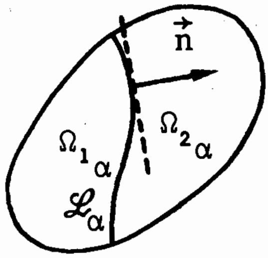
es la temperatura del cambio de fase entre la fase sólida y la fase líquida.

El conjunto Ω se expresa por:

(2) $$\Omega = \Omega_{1_\alpha} \cup \mathscr{L}_\alpha \cup \Omega_{2_\alpha}$$

donde:

(3) $$\begin{cases} \Omega_{1_\alpha} = \{x \in \Omega \,/\, \theta_\alpha(x) < 0\} \\ \Omega_{2_\alpha} = \{x \in \Omega \,/\, \theta_\alpha(x) > 0\} \\ \mathscr{L}_\alpha = \{x \in \Omega \,/\, \theta_\alpha(x) = 0\} \end{cases}$$



$\vec{n}$: vector normal a $\mathscr{L}_\alpha$

La temperatura θ_α puede representarse en Ω de la siguiente manera:

(4) $$\theta_\alpha(x) = \begin{cases} \theta_{1_\alpha}(x) < 0 & \forall\, x \in \Omega_{1_\alpha} \\ 0 & \forall\, x \in \mathscr{L}_\alpha \\ \theta_{2_\alpha}(x) > 0 & \forall\, x \in \Omega_{2_\alpha} \end{cases} .$$

Entonces, el problema P_α se define por las siguientes ecuaciones:

(5) $$\begin{cases} -k_i\, \Delta\theta_{i_\alpha}(x) = g(x) & \forall\, x \in \Omega_{i_\alpha} \\ i = 1\,;\,2 \end{cases}$$

(6) $$\left.\begin{cases} \theta_{1_\alpha}(x) = \theta_{2_\alpha}(x) = 0 \\ k_1 \dfrac{\partial\theta_{1_\alpha}}{\partial n}(x) - k_2 \dfrac{\partial\theta_{2_\alpha}}{\partial n}(x) = 0 \end{cases}\right. \quad \forall\, x \in \mathscr{L}_\alpha$$

(7) $$\begin{cases} -k_2 \dfrac{\partial\theta_{2_\alpha}}{\partial n}(x)\Big/_{\Gamma_1} = \alpha\big(k_2\, \theta_{2_\alpha}(x) - b_o(x)\big) & \text{si } \theta_\alpha(x)\big/_{\Gamma_1} > 0 \\ & \forall\, x \in \Gamma_1 \\ -k_1 \dfrac{\partial\theta_{1_\alpha}}{\partial n}(x)\Big/_{\Gamma_1} = \alpha\big(k_1\, \theta_{1_\alpha}(x) - b_o(x)\big) & \text{si } \theta_\alpha(x)\big/_{\Gamma_1} < 0 \end{cases}$$

(8) $$\begin{cases} -k_2 \dfrac{\partial\theta_{2_\alpha}}{\partial n}(x)\Big/_{\Gamma_2} = h(x) & \text{si} \quad \theta_\alpha(x)\big/_{\Gamma_2} > 0 \\ & \forall\, x \in \Gamma_2 \\ -k_1 \dfrac{\partial\theta_{1_\alpha}}{\partial n}(x)\Big/_{\Gamma_2} = h(x) & \text{si} \quad \theta_\alpha(x)\big/_{\Gamma_2} < 0 \end{cases}$$

donde:

(9)
- g: es un aporte de energía definido en Ω
- $b_o(x) = k_2 b^+(x) - k_1 b^-(x)$
- b: es una temperatura, que toma valores positivos y negativos, sobre Γ_1
- h: es un flujo de calor definido sobre Γ_2

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
k_i : \text{ es la conductividad térmica en } \Omega_{i_\alpha} \\
i = 1: \text{ fase sólida, } i = 2: \text{ fase líquida} \\
\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad , \text{ con } \quad \text{medida}(\Gamma_1) > 0 \\
\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi
\end{array}
\right.
$$

3. CAMBIO DE FUNCION INCOGNITA, FORMULACION VARIACIONAL, EXISTENCIA Y UNICIDAD DE u_α .

Sea el cambio de función incógnita, definido por:

$$
(10)\qquad u_\alpha(x) = k_2\theta_\alpha^+(x) - k_1\theta_\alpha^-(x) \qquad \forall\, x \in \Omega
$$

OBSERVACION 1.

Conocido u_α se podrá conocer θ_α mediante las relaciones siguientes:

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{array}{ll}
u_\alpha^+(x) = k_2\theta_\alpha^+(x) & \forall\, x \in \Omega \\
u_\alpha^-(x) = k_1\theta_\alpha^-(x) & \forall\, x \in \Omega
\end{array}
\right.
$$

$\therefore$

$$
(12)\qquad \theta_\alpha(x) - \frac{1}{k_2}\, u_\alpha^+(x) - \frac{1}{k_1}\, u_\alpha^-(x) \qquad \forall\, x \in \Omega
$$

Entonces, se tiene el siguiente:

LEMA 1.

El problema P_α , en función de u_α , está dado por las ecuaciones siguientes·

$$
(13)\qquad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{i)} & -\Delta u_\alpha = g \quad \text{en} \quad D'(\Omega) \qquad (*) \\
\text{ii)} & -\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial n}\Big/_{\Gamma_2} = h \\
\text{iii)} & -\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial n}\Big/_{\Gamma_1} = \alpha\left(u_\alpha - b_o\right) \quad .
\end{array}
\right.
$$

DEMOSTRACION.

Las dos condiciones (13 i) y (13 ii) se demuestran utilizando un método similar al empleado en [2] (en particular los Lemas 1 y 2).

Solo queda por verificar la condición sobre Γ_1 :

(*) $D'(\Omega)$: representa el espacio de las distribuciones sobre Ω .

$\forall\, x \in \Gamma_1$, se tiene:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}(x) = k_2 \frac{\partial \theta^+_\alpha}{\partial n}(x) - k_1 \frac{\partial \theta^-_\alpha}{\partial n}(x) \overset{(*)}{=} k_2 \frac{\partial \theta_{2_\alpha}}{\partial n}(x)\, H\big(\theta_\alpha(x)\big) +$$

$$+ k_1 \frac{\partial \theta_{1_\alpha}}{\partial n}(x)\, H\big(-\theta_\alpha(x)\big) = -\alpha\big(k_2\theta_{2_\alpha}(x) - b_o(x)\big)\, H\big(\theta_\alpha(x)\big) -$$

$$-\alpha\big(k_1\theta_{1_\alpha}(x) - b_o(x)\big)\, H\big(-\theta_\alpha(x)\big) = -\alpha\big[k_2\, \theta_{2_\alpha}(x)\, H(\theta_\alpha(x)) +$$

$$+ k_1\, \theta_{1_\alpha}(x)\, H(-\theta_\alpha(x)) - b_o(x)\,(H(\theta_\alpha(x)) + H(-\theta_\alpha(x)))\big] =$$

$$= -\alpha(k_2\, \theta^+_\alpha(x) - k_1\, \theta^-_\alpha(x) - b_o(x)) = -\alpha(u_\alpha(x) - b_o(x))$$

de donde se obtiene (13 iii).

Sean las notaciones siguientes:

(14)
$$\left\{\begin{array}{l}
V = H^1(\Omega) \\
K = \{v \in V / \quad v/_{\Gamma_1} = b_o\} \\
V_o = \{v \in V / \quad v/_{\Gamma_1} = 0\} \\
V' : \text{dual de } V \text{ cuando se identifica } L^2(\Omega) \\
\qquad \text{con su dual} \\
a(u\,;v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u(x) \,.\, \vec{\nabla} v(x)\,dx \\
\langle\, .\,;\,.\,\rangle : \text{dualidad entre } V' \text{ y } V \\
\langle f\,; v\rangle = \langle g\,; v\rangle - \int_{\Gamma_2} h(x)\, v(x)\, d\gamma \\
\langle f_\alpha\,; v\rangle = \langle f\,; v\rangle + \alpha \int_{\Gamma_1} b_o(x)\, v(x)\,dx \\
a_\alpha(u\,;v) = a(u\,;v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u(x)\, v(x)\,dx \\
(u\,;v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\,dx
\end{array}\right.$$

(*) Sea H la función de Heaviside, entonces se tienen las expresiones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \theta^+}{\partial n}(x) = \dfrac{\partial \theta}{\partial n}(x)\; H(\theta(x)) \\
\dfrac{\partial \theta^-}{\partial n}(x) = -\dfrac{\partial \theta}{\partial n}(x)\; H(-\theta(x))
\end{array}\right. .$$

LEMA 2.

La formulación variacional del problema P_α está dada por la ecuación variacional:

$$(15) \qquad \begin{cases} a_\alpha(u_\alpha;v) = \langle f_\alpha;v \rangle & \forall\, v \in V \\ u_\alpha \in V & . \end{cases}$$

DEMOSTRACION.

Si se multiplica la ecuación (13 i) por $v \in V$, y luego se integra sobre Ω, se obtiene:

$$\langle g;v \rangle = -(\Delta u_\alpha;v) = a(u_\alpha;v) - \int_\Gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial n}(x)\, v(x)\, d\gamma =$$

$$= a(u_\alpha;v) + \int_{\Gamma_1} \alpha(u_\alpha(x) - b_o(x))\, v(x)\, d\gamma + \int_{\Gamma_2} h(x)\, v(x)\, d\gamma =$$

$$= a_\alpha(u_\alpha;v) + \int_{\Gamma_2} h(x)\, v(x)\, d\gamma - \alpha \int_{\Gamma_1} b_o(x)\, v(x)\, d\gamma$$

de donde se obtiene (15).

OBSERVACION 2.

Existe una constante $\lambda_1 > 0$ /

$$(16) \qquad a(v;v) + \int_{\Gamma_1} v^2(x)\, d\gamma \geqq \lambda_1 \|v\|_V^2 \qquad \forall\, v \in V$$

donde $\|.\|_V$ representa la norma de V, dada por:

$$(17) \qquad \|v\|_V^2 = a(v;v) + (v;v) \qquad .$$

Además $\sqrt{a_\alpha(.;.)}$ es una norma equivalente a la de V, con la propiedad:

$$(18) \qquad \begin{cases} a_\alpha(v;v) \geqq \lambda_\alpha \|v\|_V^2 & \forall\, v \in V \\ \lambda_\alpha = \lambda_1 \,.\, \min(1;\alpha) & . \end{cases}$$

LEMA 3.

Bajo las hipótesis

$$(19) \qquad \begin{cases} \text{i)} & f \in V' \\ \text{ii)} & b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \end{cases}$$

existe una única solución de (15).

DEMOSTRACION.

Teniendo en cuenta la observación 2 y el hecho que (19) implica $f_\alpha \in V'$ $\forall\, \alpha > 0$, la existencia y la unicidad de u_α, para cada $\alpha > 0$, están dadas por el Lema de Lax-Milgram.

4. CONVERGENCIA DEL PROBLEMA P_α CUANDO $\alpha \longrightarrow +\infty$.

Según [2], sean θ la temperatura del caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y u la función definida por:

(20) $$u(x) = k_2\, \theta^+(x) - k_1\, \theta^-(x) \quad \forall\, x \in \Omega$$

única solución de la ecuación variacional

(21) $$\begin{cases} a(u\,;v-u) = \langle f\,;v-u \rangle & \forall\, v \in K \\ u \in K & . \end{cases}$$

A continuación se verá que la solución u_α de (15) tiene un límite cuando $\alpha \longrightarrow +\infty$. Para ello, se establecerán estimaciones a priori sobre u_α y luego se hará el pasaje al límite.

TEOREMA 1.

Bajo las hipótesis del Lema 3, se tiene que:

(22) $$u_\alpha \longrightarrow u \qquad \textit{en } V \textit{ débil}$$

cuando $\alpha \longrightarrow +\infty$, *donde* u *es la única solución de* (21).

DEMOSTRACION.

i) Estimaciones a priori.

Por definición de u_α , se tiene:

(23) $$\begin{cases} a(u_\alpha;v) + \alpha \displaystyle\int_{\Gamma_1} (u_\alpha(x) - b_0(x))\, v(x)\,d\gamma = \langle f\,;v \rangle & \forall\, v \in V \\ u_\alpha \in V & . \end{cases}$$

Por lo tanto, si se elige $v = u_\alpha - u \in V$ en (23), se obtiene:

(24) $$a(u_\alpha;u_\alpha-u) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(x) - b_0(x))^2\, d\gamma = \langle f\,;u_\alpha - u \rangle \quad .$$

Si se suma a los dos miembros de la igualdad (24) el término:

$$- a(u\,;u_\alpha-u)$$

se deduce:

(25) $$a(\xi_\alpha\,;\xi_\alpha) + \alpha \int_{\Gamma_1} \xi_\alpha^2(x)\,d\gamma = \langle f\,;\xi_\alpha \rangle - a(u\,;\xi_\alpha)$$

donde:

(26) $$\xi_\alpha = u_\alpha - u \in V \quad .$$

Como α tenderá a $+\infty$, se puede suponer que $\alpha > 1$; entonces, si se tiene en cuenta (16), se obtiene:

(27) $$\lambda_1 \|\xi_\alpha\|_V^2 + (\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} \xi_\alpha^2(x)\,d\gamma \leqq c_1 \|\xi_\alpha\|_V \qquad (*)$$

De (27), se deduce:

(28) $$\begin{cases} \|\xi_\alpha\|_V \leqq c_2 \\ (\alpha-1)\displaystyle\int_{\Gamma_1} \xi_\alpha^2(x)\,d\gamma \leqq c_3 \end{cases} \qquad (**)$$

De las estimaciones precedentes, se tiene que:

(29) $$\begin{cases} u_\alpha \in \text{acotado de } V \\ (\alpha-1)\displaystyle\int_{\Gamma_1} (u_\alpha(x) - b_o(x))^2\,d\gamma \leqq c_3 \end{cases}$$

ii) **Pasaje al límite.**

De las estimaciones (29), se deduce que cuando $\alpha \longrightarrow +\infty$, al menos por una sub-sucesión:

(30) $$u_\alpha \longrightarrow w \quad \text{en } V \text{ débil}$$

y además

(31) $$(\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} (u_\alpha(x) - b_o(x))^2\,d\gamma \leqq c_3 \quad .$$

Entonces, se tienen las siguientes consecuencias:

a) $w \in K$:

De (31), se obtiene:

(32) $$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(x) - b_o(x))^2\,d\gamma = 0 \quad .$$

Utilizando la semi-continuidad inferior en V débil de la aplicación:

(33) $$v \longrightarrow \int_{\Gamma_1} v^2(x)\,d\gamma$$

se deduce:

(34) $$0 \leqq \int_{\Gamma_1} (w(x) - b_o(x))^2\,d\gamma \leqq \underline{\lim}_{\alpha \to +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(x) - b_o(x))^2\,d\gamma = 0$$

es decir, que:

(*) c_1 es una constante independiente de α .

(**) $c_2 = \frac{c_1}{\lambda}$ y $c_3 = c_1 c_2$ son dos constantes independientes de α .

(35) $$w/_{\Gamma_1} = b_o$$

de donde se obtiene que

(36) $$w \in K \quad .$$

b) $w = u$ (u definido por (21))

Si en (23) se toma $v \in V_o$, se tiene:

(37) $$a(u_\alpha ; v) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(x) - b_o(x)) \underbrace{v(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}} d\gamma = \langle f ; v \rangle$$

$\therefore$

(38) $$\begin{cases} a(u_\alpha ; v) = \langle f ; v \rangle & \forall v \in V_o \\ u_\alpha \in V \end{cases}$$

Entonces, cuando $\alpha \longrightarrow +\infty$, se obtiene:

(39) $$\begin{cases} a(w ; v) = \langle f ; v \rangle & \forall v \in V_o \\ w \in K \end{cases}$$

o su equivalente:

(40) $$\begin{cases} a(w ; v-w) = \langle f ; v-w \rangle & \forall v \in K \\ w \in K & . \end{cases}$$

De (40) y (21), se deduce que:

(41) $$w = u \quad .$$

Para la temperatura θ_α , solución del problema P_α , y la temperatura θ , del problema estacionario del problema de Stefan a dos fases, se tiene la siguiente convergencia, dada por el:

LEMA 4.

(42) $$\lim_{\alpha \to +\infty} \|\theta_\alpha - \theta\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad .$$

DEMOSTRACION.

De (30), se obtiene que:

(43) $$u_\alpha \longrightarrow u \quad \text{en } L^2(\Omega) \text{ fuerte} \quad .$$

Por lo tanto:

(44) $$\|u_\alpha - u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|(u^+_\alpha - u^+) - (u^-_\alpha - u^-)\|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \|u^+_\alpha - u^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u^-_\alpha - u^-\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(u^+_\alpha - u^+ ; u^-_\alpha - u^-) =$$

$$(44)\quad \begin{aligned} &= \|u_\alpha^+ - u^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_\alpha^- - u^-\|^2_{L^2(\Omega)} + 2(u_\alpha^+;u^-) + 2(u_\alpha^-;u^+) \geq \\ &\geq \|u_\alpha^+ - u^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_\alpha^- - u^-\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$(45)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha^+ - u^+\|_{L^2(\Omega)} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha^- - u^-\|_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases} .$$

De (45), (20) y (12) se obtiene (42).

OBSERVACION 3.

Con (42), se ha demostrado que cuando $\alpha \longrightarrow +\infty$ la temperatura θ_α converge, en $L^2(\Omega)$ fuerte, hacia θ, que es la temperatura solución del caso estacionario del problema de Stefan a dos fases.

Se ha demostrado también que para α (suficientemente grande) el problema P_α representa un problema de Stefan a dos fases.

LEMA 5.

La convergencia obtenida en el Teorema 1 es fuerte.

DEMOSTRACION.

Sea $\alpha > 1$, entonces utilizando (18) se tiene:

$$\lambda_1 \|u_\alpha - u\|_V^2 \leq a_\alpha(u_\alpha - u \,;\, u_\alpha - u) = \langle f \,;\, u_\alpha - u \rangle - a(u \,;\, u_\alpha - u)$$

y con (22) se obtiene:

$$(46)\qquad u_\alpha \longrightarrow u \quad \text{en } V \text{ fuerte cuando } \alpha \longrightarrow +\infty .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DUVAUT-J.L. LIONS. "*Les inéquations en Mécanique et en physique*", Dunod (1972).

[2] D.A. TARZIA. "*Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*". Mathematicae Notae, Año XXVII, p.145 .

[3] D.A. TARZIA. Thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI, por aparecer.