

APLICACION DE METODOS VARIACIONALES EN EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

por

DOMINGO ALBERTO TARZIA

ABSTRACT.

We study the steady-state of the two-phase Stefan problem by a variational equality.

1. INTRODUCCION.

El problema de Stefan tiene por objeto el estudio de la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una fase líquida, por ejemplo hielo y agua.

Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. La superficie de separación de las fases, que se encuentra a temperatura constante, es una incógnita suplementaria del problema sobre la cual existe otra condición que surge del principio de conservación de la energía.

El interés y la dificultad del problema de Stefan a dos fases se debe a la presencia de dicha superficie de separación de las dos fases, a la cual también se la llama la frontera libre del problema.

El trabajo consistirá en presentar y generalizar el efectuado en Tarzia [4] al considerar la existencia de un aporte de energía g en el cuerpo y un flujo de calor no nulo sobre una parte de la frontera del cuerpo.

El método a seguir consistirá en escribir las ecuaciones del problema en el sentido de las distribuciones en Ω , y luego hacer un cambio de función incógnita, como en Baiocchi [1], Duvaut [2], para obtener una ecuación variacional del problema. A continuación, se demostrará la existencia y la unicidad de la solución y se darán

dos ejemplos simples en los cuales la solución exacta puede calcularse.

2. PRESENTACION MATEMATICA DEL PROBLEMA FISICO.

Se estudia la temperatura $\theta(x)$, definida para $x \in \Omega$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular.

Se supone que:

$$(1) \quad \theta = 0 \quad (0 \text{ grado centígrado})$$

es la temperatura del cambio de fase entre la fase sólida y la fase líquida.

El conjunto Ω está dividido en dos regiones ocupadas por:

$$(2) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \{x \in \Omega / \theta(x) < 0\} & \text{la fase sólida} \\ \Omega_2 = \{x \in \Omega / \theta(x) > 0\} & \text{la fase líquida} \end{cases}$$

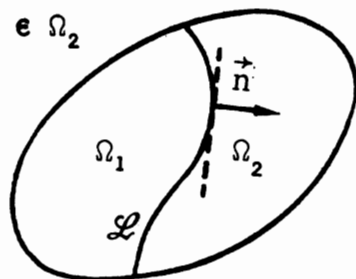
Se designa con $\mathcal{L}$ la frontera libre que las separa, definida por:

$$(3) \quad \mathcal{L} = \{x \in \Omega / \theta(x) = 0\}$$

La temperatura θ puede representarse en Ω de la siguiente manera:

$$(4) \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & \forall x \in \Omega_1 \\ 0 & \forall x \in \mathcal{L} \\ \theta_2(x) > 0 & \forall x \in \Omega_2 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \Omega = \Omega_1 \cup \mathcal{L} \cup \Omega_2 \\ \vec{n} \text{ vector normal a } \mathcal{L} \end{cases}$$



La ecuación del calor en Ω_i ($i = 1, 2$) está dada por:

$$(6) \quad \begin{cases} -k_i \Delta \theta_i(x) = g(x) & \forall x \in \Omega_i \\ i = 1; 2 \end{cases}$$

donde:

$$(7) \quad \begin{cases} k_i: \text{ es la conductividad térmica en } \Omega_i \quad (i = 1; 2) \\ g: \text{ representa un aporte de energía} \end{cases}$$

Sobre la frontera libre $\mathcal{L}$, se tienen las condiciones siguientes:

$$(8) \quad \begin{cases} \theta_1(x) = \theta_2(x) = 0 \\ k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x) - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n}(x) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathcal{L}.$$

Las condiciones límites están dadas por:

$$(9) \quad \theta(x)/\Gamma_1 = b(x) \quad \forall x \in \Gamma_1$$

$$(10) \quad \begin{cases} -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n}(x)/\Gamma_2 = h(x) & \text{si } \theta(x)/\Gamma_2 > 0 \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x)/\Gamma_2 = h(x) & \text{si } \theta(x)/\Gamma_2 < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \Gamma_2$$

donde:

$$(11) \quad \begin{cases} \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \text{ con } \text{medida}(\Gamma_1) > 0 \\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} b : \text{ es una temperatura dada sobre } \Gamma_1 \\ h : \text{ es un flujo de calor dado sobre } \Gamma_2. \end{cases}$$

OBSERVACION 1.

Para que el problema estacionario dado sea realmente a dos fases es necesario que la función b tome sobre Γ_1 valores positivos y negativos. Con esta condición, la frontera libre $\mathcal{L}$ existe físicamente.

OBSERVACION 2.

El calor latente de fusión de la fase sólida no interviene en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases, pues el cuerpo Ω está formado de dos partes invariantes en el transcurso del tiempo, la fase sólida y la fase líquida. Por lo tanto, se puede considerar que se tiene un problema de transmisión del calor con la presencia de una frontera libre (que separa las dos partes) caracterizada por las tres condiciones (8).

3. CALCULO EN EL SENTIDO DE LAS DISTRIBUCIONES EN Ω , CAMBIO DE FUNCION INCOGNITA.

Se van a transformar las ecuaciones precedentes de manera a escribir las en el sentido de las distribuciones en Ω .

Sea:

$$(13) \quad \begin{cases} T_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \in (\Omega - \Omega_i) \end{cases} \\ i = 1; 2 \end{cases}$$

es decir:

$$(14) \quad \begin{cases} T_2 = \theta^+ & \text{en } \Omega \\ T_1 = -\theta^- & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (*)$$

Los conjuntos Ω_i ($i=1;2$) están dados, en término de T_i , por:

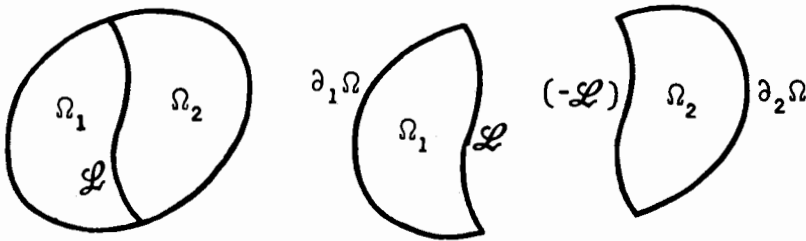
$$(15) \quad \begin{cases} \Omega_2 = \{x \in \Omega / T_2(x) > 0\} \\ \Omega_1 = \{x \in \Omega / T_1(x) < 0\} \end{cases} .$$

Además, la frontera de Ω_i ($i=1;2$) tiene la expresión siguiente:

$$(16) \quad \begin{cases} \partial(\Omega_1) = \partial_1\Omega \cup \mathcal{L} \\ \partial(\Omega_2) = \partial_2\Omega \cup (-\mathcal{L}) \end{cases} \quad (**)$$

donde:

$$(17) \quad \begin{cases} \partial_1\Omega = \partial\Omega \cap \overline{\Omega_1} \\ \partial_2\Omega = \partial\Omega \cap \overline{\Omega_2} \end{cases}$$



(*) f^+ y f^- representan respectivamente, la parte positiva y la parte negativa de la función f , definidas por:

$$\begin{cases} f^+(x) = \max(0; f(x)) \\ f^-(x) = \max(0; -f(x)) \end{cases}$$

(**) Se toma la expresión $(-\mathcal{L})$, pues se tiene en cuenta que sobre la frontera libre $\mathcal{L}$ se utiliza siempre, para el vector normal, la dirección de Ω_1 hacia Ω_2 .

Sea:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} D(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \varphi \text{ es indefinidamente diferenciable} \right. \\ \quad \left. \text{y a soporte compacto en } \Omega \right\} \\ D'(\Omega) : \text{el espacio de las distribuciones sobre } \Omega \\ \langle . ; . \rangle : \text{la dualidad entre } D'(\Omega) \text{ y } D(\Omega) . \end{array} \right.$$

Entonces, se tienen los siguientes lemas:

LEMA 1.

$\forall \varphi \in D(\Omega)$, se tiene:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \langle -k_2 \Delta T_2 ; \varphi \rangle = \int_{\Omega_2} g(x) \varphi(x) dx - k_2 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} (x) \varphi(x) d\gamma \\ \text{ii) } \langle -k_1 \Delta T_1 ; \varphi \rangle = \int_{\Omega_1} g(x) \varphi(x) dx + k_1 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} (x) \varphi(x) d\gamma \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION

i) $\forall \varphi \in D(\Omega)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle -k_2 \Delta T_2 ; \varphi \rangle &= -k_2 \langle T_2 ; \Delta \varphi \rangle = -k_2 \int_{\Omega} T_2(x) \Delta \varphi(x) dx = \\ &= -k_2 \int_{\Omega_2} \theta_2(x) \Delta \varphi(x) dx = -k_2 \left[\int_{\Omega_2} \Delta \theta_2(x) \varphi(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial(\Omega_2)} \left(\theta_2(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} (x) - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} (x) \varphi(x) \right) d\gamma \right] = \\ &= \int_{\Omega_2} g(x) \varphi(x) dx - k_2 \int_{\mathcal{L}} \left[\underbrace{\theta_2(x)}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} (x) - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} (x) \varphi(x) \right] d\gamma - \\ &\quad - k_2 \int_{\partial_2 \Omega} \left[\underbrace{\theta_2(x)}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} (x) - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} (x) \underbrace{\varphi(x)}_0 \right] d\gamma = \\ &= \int_{\Omega_2} g(x) \varphi(x) dx - k_2 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} (x) \varphi(x) dx . \end{aligned}$$

ii) $\forall \varphi \in D(\Omega)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle -k_1 \Delta T_1 ; \varphi \rangle &= -k_1 \langle T_1 ; \Delta \varphi \rangle = -k_1 \int_{\Omega} T_1(x) \Delta \varphi(x) dx = \\ &= -k_1 \int_{\Omega_1} \theta_1(x) \Delta \varphi(x) dx = -k_1 \left[\int_{\Omega_1} \Delta \theta_1(x) \varphi(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial(\Omega_1)} \left(\theta_1(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} (x) - \frac{\partial \theta_1}{\partial n} (x) \varphi(x) \right) d\gamma \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega_1} g(x) \varphi(x) dx - k_1 \int_{\mathcal{L}} \left[\underbrace{\theta_1(x)}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) - \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x) \underbrace{\varphi(x)}_0 \right] d\gamma - \\
 &- k_1 \int_{\partial_1 \Omega} \left[\underbrace{\theta_1(x)}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) - \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x) \underbrace{\varphi(x)}_0 \right] d\gamma = \\
 &= \int_{\Omega_1} g(x) \varphi(x) dx + k_1 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x) \varphi(x) d\gamma .
 \end{aligned}$$

DEFINICION.

Sea la nueva función incógnita u , definida por:

$$(21) \quad u(x) = k_2 T_2(x) + k_1 T_1(x) \quad \forall x \in \Omega .$$

Teniendo en cuenta (14), también se tiene para u la siguiente expresión:

$$(22) \quad u(x) = k_2 \theta^+(x) - k_1 \theta^-(x) \quad \forall x \in \Omega .$$

OBSERVACION 3.

Conocido u se podrá también conocer θ mediante las relaciones siguientes:

$$(23) \quad \begin{cases} u^+(x) = k_2 \theta^+(x) = k_2 T_2(x) & \forall x \in \Omega \\ u^-(x) = k_1 \theta^-(x) = -k_1 T_1(x) & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

...

$$(24) \quad \theta(x) = \frac{1}{k_2} u^+(x) - \frac{1}{k_1} u^-(x) \quad \forall x \in \Omega .$$

LEMA 2.

La nueva función incógnita u satisface las siguientes relaciones:

$$(25) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u = g \quad \text{en } D'(\Omega) \\ \text{ii)} & u|_{\Gamma_1} = b_0 \\ \text{iii)} & \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h \end{cases}$$

donde b_0 es una función definida sobre Γ_1 por:

$$(26) \quad b_0(x) = k_2 b^+(x) - k_1 b^-(x) \quad \forall x \in \Gamma_1 .$$

DEMOSTRACION.

i) $\forall \varphi \in D(\Omega)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \langle -\Delta u; \varphi \rangle &= -\langle u; \Delta \varphi \rangle = -k_2 \langle T_2; \Delta \varphi \rangle - k_1 \langle T_1; \Delta \varphi \rangle = \\
 &= -k_2 \langle \Delta T_2; \varphi \rangle - k_1 \langle \Delta T_1; \varphi \rangle =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega_2} g(x) \varphi(x) dx - k_2 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_2}{\partial n}(x) \varphi(x) d\gamma + \int_{\Omega_1} g(x) \varphi(x) dx + \\
 &+ k_1 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x) \varphi(x) d\gamma = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx + \\
 &+ \int_{\mathcal{L}} \underbrace{\left(k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x) - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n}(x) \right)}_{=0} \varphi(x) d\gamma = \langle g; \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene (25 i).

ii) $\forall x \in \Gamma_1$, se tiene:

$$u(x) = k_2 \theta^+(x) - k_1 \theta^-(x) / \Gamma_1 = k_2 b^+(x) - k_1 b^-(x) = b_0(x)$$

de donde se obtiene (25 ii).

iii) $\forall x \in \Gamma_2$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= -k_2 \frac{\partial \theta^+}{\partial n}(x) + k_1 \frac{\partial \theta^-}{\partial n}(x) \stackrel{(*)}{=} -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n}(x) H(\theta(x)) - \\
 &- k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n}(x) H(-\theta(x)) = h(x) H(\theta(x)) + h(x) H(-\theta(x)) = h(x)
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene (25 iii).

3. ECUACION VARIACIONAL. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA u .

Sean las notaciones siguientes:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = H^1(\Omega) \\ K = \left\{ v \in V / \quad v / \Gamma_1 = b_0 \right\} \\ V_0 = \left\{ v \in V / \quad v / \Gamma_1 = 0 \right\} \\ a(u; v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) dx \\ \langle f; v \rangle = \langle g; v \rangle - \int_{\Gamma_2} h(x) v(x) d\gamma \\ (u; v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \end{array} \right.$$

(*) Sea H la función de Heaviside, entonces se tienen las expresiones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta^+}{\partial n}(x) = \frac{\partial \theta}{\partial n}(x) H(\theta(x)) \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial n}(x) = - \frac{\partial \theta}{\partial n}(x) H(-\theta(x)) \end{array} \right.$$

Entonces, se tiene el:

LEMA 3.

Si u es una solución regular de (25), entonces u es también solución de la ecuación variacional

$$(28) \quad \begin{cases} a(u; v-u) = \langle f; v-u \rangle & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}.$$

DEMOSTRACION.

Si se toma $v \in K$ y si se multiplica la ecuación (25.i) por $(v-u)$, y luego se integra sobre Ω , se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle g; v-u \rangle &= -(\Delta u; v-u) = a(u; v-u) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(x) (v-u)(x) d\gamma = \\ &= a(u; v-u) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \underbrace{(v-u)(x)}_{=0} d\gamma + \int_{\Gamma_2} \underbrace{-\frac{\partial u}{\partial n}(x) (v-u)(x)}_{=h(x)} d\gamma = \\ &= a(u; v-u) + \int_{\Gamma_2} h(x) (v-u)(x) d\gamma \end{aligned}$$

de donde se obtiene (28).

TEOREMA 1.

Bajo las hipótesis:

$$(29) \quad \begin{cases} \text{i)} & f \in V'_0 & (*) \\ \text{ii)} & b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) & (**) \end{cases}$$

existe una única solución de (28).

DEMOSTRACION.

De (29 ii) surge la existencia de:

$$(30) \quad B \in V \quad \text{tal que}$$

$$(31) \quad \begin{cases} B|_{\Gamma_1} = b_0 \\ \exists \text{ una constante } \beta > 0 / \|B\|_V \leq \beta \|b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \end{cases}.$$

Además:

$$(32) \quad v \in K \iff v - B \in V_0.$$

(*) V'_0 representa el dual de V_0 cuando se identifica $L^2(\Omega)$ con su dual.

(**) (29 ii) $\implies K \neq \emptyset$.

Por lo tanto, se tienen las equivalencias siguientes:

$$(33) \quad \begin{cases} a(u; v-u) = \langle f; v-u \rangle \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \iff$$

$$(34) \quad \begin{cases} a(u; v) = \langle f; v \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ u-B \in V_0 \end{cases} \iff$$

$$(35) \quad \begin{cases} a(U; v) = \langle F; v \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ U \in V_0 \end{cases}$$

donde:

$$(36) \quad \begin{cases} U = u-B \in V_0 \\ \langle F; v \rangle = \langle f; v \rangle - a(B; v) \quad \forall v \in V_0 \end{cases}$$

con

$$(37) \quad \begin{cases} a: \text{forma bilineal, simétrica, } V_0\text{-elíptica y continua} \\ \text{sobre } V_0 \\ F \in V'_0 \end{cases}.$$

Por lo tanto, la existencia y la unicidad de $U \in V_0$, solución de (35) (ó la existencia y la unicidad de $u \in K$, solución de (28)), están dadas por el Lema de Lax-Milgram.

4. EJEMPLOS.

Se tendrán en cuenta las hipótesis:

$$(38) \quad \begin{cases} g = 0 & \text{en } \Omega \\ \Gamma_2 = \emptyset & (\because \Gamma = \Gamma_1) \end{cases}$$

i) EJEMPLO 1.

Se considera:

$$(39) \quad \begin{cases} \Omega = (0; a) & \text{con } a > 0 \\ b(x) = \begin{cases} B > 0 & \text{si } x = 0 \\ -C < 0 & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}.$$

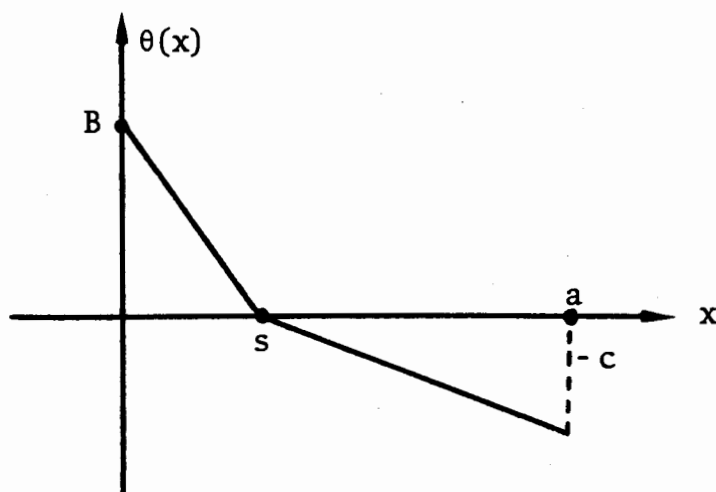
Entonces, la función u está dada por:

$$(40) \quad u(x) = - \frac{k_2 B + k_1 C}{a} x + k_2 B.$$

La frontera libre $\mathcal{L}$ y la temperatura θ están dadas por:

$$(41) \quad \begin{cases} \mathcal{L} = \{s\} \\ s = \frac{e_0}{1 + e_0} a \end{cases}$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \\ \theta(x) = \begin{cases} \frac{B}{s} (s-x) & \text{si } 0 \leq x \leq s \\ \frac{-C}{a-s} (x-s) & \text{si } s \leq x \leq a \end{cases} \end{array} \right.$$



Se observa que la temperatura θ es una función continua en Ω , pero su derivada no lo es ($\theta'(x)$ es discontinua sobre la frontera libre).

ii) EJEMPLO 2.

Se considera:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega^{(*)} = \{ (r;\omega) / r_1 < r < r_2 \} \text{ corona circular de radios } r_1 \\ \text{ y } r_2, \text{ con } 0 < r_1 < r_2 \\ b(r;\omega) = \begin{cases} B > 0 & \text{si } r = r_2 \\ -C < 0 & \text{si } r = r_1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Como las condiciones límites son independientes de la variable angular ω , es natural que la solución dependa de la sola variable r .

(*) $(r;\omega)$ representan las coordenadas polares en el plano x_1, x_2 .

Entonces, la función u está dada por:

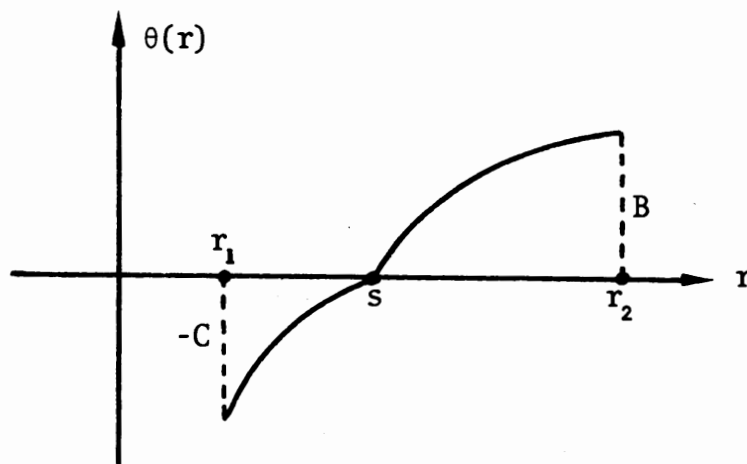
$$(43) \quad u(r) = h_0 + m_0 \log r$$

donde:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_0 = \frac{k_2 B + k_1 C}{\log \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \\ h_0 = - \frac{k_2 B \log(r_1) + k_1 C \log(r_2)}{\log \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \end{array} \right. .$$

La frontera libre $\mathcal{L}$ y la temperatura θ están dadas por:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \text{circunferencia de radio } s \\ s = (r_2)^{\frac{1}{n_0}} \cdot (r_1)^{\frac{n_0-1}{n_0}} \\ n_0 = 1 + e_0 \\ e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C} \\ \theta(r) = \begin{cases} -C \cdot \frac{\log \left(\frac{s}{r} \right)}{\log \left(\frac{s}{r_1} \right)} & \text{si } r_1 \leq r \leq s \\ B \cdot \frac{\log \left(\frac{r}{s} \right)}{\log \left(\frac{r_2}{s} \right)} & \text{si } s \leq r \leq r_2 \end{cases} \end{array} \right.$$



Se observa también en este ejemplo que la temperatura θ es una función continua en Ω , pero su derivada no lo es ($\theta'(r)$ es discontinua sobre la frontera libre).

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. BAIOCCHI. "*Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux*", C.R. Acad. Sc. Paris, 273 A (1971), p. 1215 - 1217.
- [2] G. DUVAUT. "*Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus*", Rapport de recherche N°185(1976), I.R.I.A. France.
- [3] G. DUVAUT - J.L. LIONS. "*Les inéquations en mécanique et en physique*". Dunod (1972).
- [4] D.A. TARZIA. "*El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*", Cap. 2 , Trabajo Especial de la Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad Nacional de Rosario, 1977.

Instituto de Matemática "Beppo Levi"
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería
Universidad Nacional de Rosario
Rosario - Santa Fe
REPUBLICA ARGENTINA