

DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES TÉRMICOS DESCONOCIDOS A TRAVÉS DE UN PROBLEMA DE CAMBIO DE FASE FRACCIONARIO A UNA FASE

Domingo A. Tarzia ^{†‡}

[†] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral, Paraguay 1950,
S2000FZF Rosario, Argentina.

[‡] CONICET, Argentina.

E-mail: DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se determinan fórmulas explícitas para coeficientes térmicos desconocidos de la fase líquida de un material semi-infinito a través de un problema de cambio de fase de fusión del tipo de Lamé-Clapeyron-Stefan fraccionario a una fase con una sobre-condición en el fijo $x=0$. La ecuación diferencial de la fase líquida y una condición sobre la frontera libre incluyen una derivada fraccionaria en el tiempo en el sentido de Caputo de orden $0 < \alpha < 1$. Además, se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para los datos del problema para la obtención de la solución. Este trabajo generaliza el método desarrollado para la determinación de coeficientes térmicos desconocidos a través del problema clásico de cambio de fase obtenido en Tarzia, *Advances in Applied Mathematics*, 3 (1982), pp. 74-82, el cual es recuperado cuando $\alpha \rightarrow 1^-$.

Palabras clave: Problema de frontera libre, Difusión fraccionaria, Problema de Lamé-Clapeyron-Stefan fraccionario, Fusión, Determinación de coeficientes desconocidos, Solución explícita, Sobre-condición.

2010 AMS Subjects Classification: 26A33, 35C05, 35R11, 35R35, 80A22.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de transferencia de calor con cambio de fase tales como los de fusión y solidificación han sido muy estudiados en el último siglo debido a su alta gama de aplicaciones científicas y tecnológicas [1, 2, 4, 5, 7, 9, 14, 21, 24]. Se considera un material semi-infinito homogéneo del cual se desconoce un coeficiente térmico que será determinado a través de un problema de cambio de fase fraccionario. El material tiene una temperatura inicial constante T_m y al tiempo $t=0$ la superficie $x=0$ se expone a una temperatura constante T_0 ($T_0 > T_m$) donde T_m es la temperatura de cambio de fase; además, se impone una sobre-condición en el borde fijo $x=0$ dada por un flujo de calor saliente del tipo (14) motivado por [2, 22].

En las últimas décadas las ecuaciones diferenciales fraccionarias fueron desarrolladas [8, 12, 13, 15-18] y en los recientes años algunos trabajos sobre el problema cambio de fase de Lamé-Clapeyron-Stefan fraccionario fueron publicados [6, 10, 11, 19, 20, 25, 26]. En este trabajo, la ecuación diferencial y una condición sobre la frontera libre incluyen una derivada fraccionaria en el tiempo en el sentido de Caputo de orden $0 < \alpha < 1$ la cual está definida en [3]:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ &= f'(t) \quad \text{si } \alpha = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

donde Γ es la función Gamma definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt. \quad (2)$$

Ahora, se definen dos funciones (funciones de Wright y Mainardi) las cuales son muy importantes para la obtención de las soluciones explícitas dadas en la sección siguiente.

La función de Wright está definida en [27]:

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha > -1, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

y la función de Mainardi está definida en [8]:

$$M_\nu(z) = W(-z; -\nu, 1-\nu) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-n\nu + 1-\nu)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \nu < 1 \quad (4)$$

que es un caso particular de la función de Wright. Algunas propiedades básicas están dadas por:

$$\frac{\partial W}{\partial z}(z; \alpha, \beta) = W(z; \alpha, \alpha + \beta) \quad (5)$$

$$W(-x; -\frac{1}{2}, 1) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right), \quad 1 - W(-x; -\frac{1}{2}, 1) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (6)$$

$$D^\alpha(t^\beta) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha}. \quad (7)$$

El método para la determinación de coeficientes térmicos desconocidos a través de un problema de Lamé-Clapeyron-Stefan fraccionario a una fase con una sobre-condición en el borde fijo $x=0$ está dado por: hallar la frontera libre $x=s(t)$, definida para $t>0$, y la temperatura $T=T(x,t)$ definida para $x>0$ y $t>0$, de manera que se satisfagan las ecuaciones y condiciones siguientes:

$$D^\alpha T = \lambda^2 T_{xx}, \quad x>0, \quad t>0, \quad (8)$$

$$s(0) = 0, \quad (9)$$

$$T(x, 0) = T(+\infty, t) = T_m, \quad x>0, \quad t>0, \quad (10)$$

$$T(s(t), t) = T_m, \quad t>0, \quad (11)$$

$$-kT_x(s(t), t) = \rho \ell D^\alpha s(t), \quad t>0, \quad (12)$$

$$T(0, t) = T_0 > T_m, \quad t>0, \quad (13)$$

$$kT_x(0, t) = -\frac{q_0}{t^{\alpha/2}}, \quad t>0, \quad (14)$$

donde ρ es la densidad de masa, k es la conductividad térmica, c es el calor específico por unidad de masa, ℓ es el calor latente de fusión por unidad de masa, $\lambda^2 = \frac{k}{\rho c} > 0$ es el coeficiente de difusión, con $T_0 > T_m$ y $q_0 > 0$ es el coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x=0$ que debe ser determinado experimentalmente simultáneamente con la temperatura T_0 . El coeficiente térmico desconocido puede ser elegido entre los siguientes: k, ρ, c y ℓ .

El objetivo del presente trabajo es el de obtener en la Sección II, la solución del problema de cambio de fase de Lamé-Clapeyron-Stefan fraccionario en el tiempo de orden $0 < \alpha < 1$ a una fase (8)-(13) con una sobre-condición (14). Se obtiene para cada caso las expresiones explícitas de la temperatura $T=T(x,t)$, de la frontera libre $x=s(t)$ y del coeficiente térmico desconocido como asimismo las restricciones para los datos del correspondiente problema. Estos resultados generalizan para el caso fraccionario $0 < \alpha < 1$ los resultados y fórmulas explícitas obtenidos en [23] para la determinación de un coeficiente térmico desconocido a través del problema de cambio de fase clásico de Lamé-Clapeyron-Stefan que se recuperan cuando $\alpha \rightarrow 1^-$.

2. DETERMINACIÓN DE UN COEFICIENTE TÉRMICO DESCONOCIDO

Teorema 1 La solución del problema (8)-(14) con $0 < \alpha < 1$ y un coeficiente térmico desconocido está dada por:

$$s(t) = \lambda \xi t^{\alpha/2}, \quad \xi > 0, \quad (15)$$

$$T(x, t) = T_0 - \frac{T_0 - T_m}{1 - W\left(-\xi; -\frac{\alpha}{2}, 1\right)} \left[1 - W\left(-\frac{x}{\lambda t^{\alpha/2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1\right) \right], \quad (16)$$

donde el coeficiente adimensional $\xi > 0$ y el coeficiente térmico desconocido deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{k(T_0 - T_m)}{\lambda q_0 \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} = 1 - W\left(-\xi; -\frac{\alpha}{2}, 1\right), \quad (17)$$

$$\frac{c(T_0 - T_m) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\ell \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} = \xi \frac{1 - W\left(-\xi; -\frac{\alpha}{2}, 1\right)}{M_{\alpha/2}(\xi)}. \quad (18)$$

Prueba. Se utiliza una metodología análoga a la utilizada en [19, 20]. $\square$

A continuación se detallan los cuatro casos siguientes:

Caso 1: determinación de $\{\xi, k\}$;

Caso 2: determinación de $\{\xi, \rho\}$,

Caso 3: determinación de $\{\xi, c\}$;

Caso 4: determinación de $\{\xi, \ell\}$.

de los cuales se explicitará, con detalles, solamente el caso 3.

Teorema 2 Si los datos satisfacen la desigualdad:

$$\frac{k\rho\ell(T_0 - T_m) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{q_0^2 \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} < 1, \quad (19)$$

entonces la solución del caso 3 (problema (8)-(14) con $0 < \alpha < 1$ y el coeficiente térmico desconocido c) está dada por:

$$c = \frac{\ell \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{(T_0 - T_m) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\xi}{M_{\alpha/2}(\xi)} \left[1 - W\left(-\xi; -\frac{\alpha}{2}, 1\right) \right], \quad (20)$$

y el coeficiente adimensional $\xi > 0$ es la única solución de la ecuación:

$$\frac{1 - W\left(-x; -\frac{\alpha}{2}, 1\right)}{x} = \frac{k\rho\ell(T_0 - T_m) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{q_0^2 \Gamma^3\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{M_{\alpha/2}(x)}, \quad x > 0. \quad (21)$$

Teorema 3 Si el parámetro $\alpha \rightarrow 1^-$ entonces, bajo la hipótesis (19), la solución del caso 3, dada por (15), (16), (20) y (21) coincide con la dada en [23], es decir:

$$s_1(t) = \lambda \xi_1 t^{1/2}, \quad \xi_1 > 0, \quad (22)$$

$$T_1(x, t) = T_0 - \frac{T_0 - T_m}{\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_1}{2}\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\lambda t^{1/2}}\right), \quad (23)$$

$$c_1 = \frac{\pi q_0^2}{k\rho(T_0 - T_m)^2} \operatorname{erf}^2\left(\frac{\xi_1}{2}\right), \quad (24)$$

siendo el coeficiente adimensional $\xi_1/2 > 0$ la única solución de la ecuación:

$$\exp(x^2) = \frac{q_0^2 \sqrt{\pi}}{k\rho\ell(T_0 - T_m)} \frac{\operatorname{erf}(x)}{x}, \quad x > 0. \quad (25)$$

En particular, la desigualdad (19) se transforma en la siguiente:

$$\frac{k\rho\ell(T_0 - T_m)}{2q_0^2} < 1. \quad (26)$$

Observación 1 En forma análoga se pueden calcular las fórmulas de los coeficientes térmicos de la fase sólida del material semi-infinito realizando un proceso de solidificación en lugar de uno de fusión.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP N° 0460 de CONICET – Univ. Austral y AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122.

REFERENCIAS

- [1] V. ALEXIADES, A.D. SOLOMON, *Mathematical modelling of melting and freezing processes*, Hemisphere - Taylor & Francis, Washington (1993).
- [2] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*. Addison-Wesley, Menlo Park (1984).
- [3] M. CAPUTO, *A model of dissipation whose Q is almost frequency independent – II*, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 (1967), pp. 529-539.
- [4] H.S. CARSLAW, J.C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford (1959).
- [5] J. CRANK, *Free and moving boundary problem*, Clarendon Press, Oxford (1984).
- [6] F. FALCINI, V. GARRA, V.R. VOLLER, *Fractional Stefan problems exhibiting lumped and distributed latent-heat memory effects*, Phys. Review E, 87 (2013), Art. 042401, pp. 1-6.
- [7] A. FASANO, *Mathematical models of some diffusive processes with free boundary*, MAT – Serie A, 11 (2005), pp. 1-128.
- [8] R. GORENFLO, Y. LUCHKO, F. MAINARDI, *Analytical properties and applications of the Wright function*, Fract. Calc. Appl. Anal., 2 (1999), pp. 383-414.
- [9] S. C. GUPTA, *The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis*, Elsevier, Amsterdam (2003).
- [10] L. JINYI, X. MINGYU, *Some exact solutions to Stefan problems with fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 351 (2009), pp. 536-542.
- [11] L.P. KHOLPANOV, Z.E. ZAKLEV, V.A. FEDOTOV, *Neumann-Lamé-Clapeyron-Stefan Problem and its solution using Fractional Differential-Integral Calculus*, Theor. Foundations Chem. Eng., 37 (2003), pp. 113-121.
- [12] A. KILBAS, H. SRIVASTAVA, H. TRUJILLO, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam (2006).
- [13] Y. LUCHKO, *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation*, Comput. Math. Appl., 59 (2010), pp. 1766-1772.
- [14] V.J. LUNARDINI, *Heat Transfer with Freezing and Thawing*, Elsevier, London (1991).
- [15] F. MAINARDI, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*, Imperial College Press, London (2010).
- [16] F. MAINARDI, Y. LUCHKO, G. PAGNINI, *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*, Fract. Calc. Appl. Anal., 4 (2001), pp. 153-192.
- [17] F. MAINARDI, F. MURA, G. PAGNINI, *The M-Wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey*, Int. J. Diff. Eq., 2010 (2010), Article ID 104505, pp. 1-29.
- [18] S.I. PODLUBNY, *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego (1999).
- [19] S. ROSCANI, E.A. SANTILLAN MARCUS, *Two equivalent Stefan's problems for the time-fractional diffusion equation*, Fract. Calc. Appl. Anal., 16 (2013), pp. 802-815.
- [20] S. ROSCANI, D.A. TARZIA, *A generalized Neumann solution for the two-phase fractional Lamé-Clapeyron-Stefan problem*, Adv. Math. Sci. Appl., 24 No. 2 (2014), In Press.
- [21] L.I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, American Mathematical Society, Providence (1971).
- [22] D.A. TARZIA, *An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*, Quart. Appl. Math., 39 (1981), pp. 491-497.
- [23] D.A. TARZIA, *Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron-Stefan problem (or one-phase Stefan problem)*, Adv. Appl. Math., 3 (1982), pp. 74-82.
- [24] D.A. TARZIA, *Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface*, Chapter 20, In Advanced Topics in Mass Transfer, Mohamed El-Amin (Ed.), InTech Open Access Publisher, Rijeka (2011), pp. 439-484. Available from:
<http://www.intechopen.com/articles/show/title/explicit-and-approximated-solutions-for-heat-and-mass-transfer-problems-with-a-moving-interface>
- [25] V.R. VOLLER, *An exact solution of a limit case Stefan problem governed by a fractional diffusion equation*, Int. J. Heat Mass Transfer, 53 (2010), pp. 5622-5625.
- [26] V.R. VOLLER, *Fractional Stefan problems*, Int. J. Heat Mass Transfer, 74 (2014), pp. 269-277.
- [27] E.M. WRIGHT, *On the coefficients of power series having exponential singularities*, J. London Math. Soc., 8 (1933), pp. 71-79.