

EL VAN Y EL PUNTO MUERTO FINANCIERO DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN CON CRECIMIENTO EN FUNCIÓN DE LA TASA DE DESCUENTO

Domingo A. Tarzia †

† Depto. de Matemática - CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina
DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se estudia un proyecto de inversión con crecimiento con la existencia de tres variables independientes Q (cantidad de unidades a vender en el primer año), la tasa de crecimiento g en la cantidad de ventas anuales y la tasa de descuento r . Se obtiene la expresión explícita del VAN (valor actual neto) del proyecto de inversión en función de Q y de las tasas g y r . También se determina explícitamente el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r, g)$ en función de los parámetros restantes del problema y se estudia analíticamente su comportamiento respecto de la tasa de descuento r . Por último, se demuestra que: (i) Cuando r es despreciable el punto muerto financiero tiende a un valor que es inferior al punto muerto contable del primer año cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva; (ii) Cuando r es muy grande la gráfica de la función Q_f vs r tiene por asíntota una línea recta que es independiente de la tasa de crecimiento $g > 0$; en este caso, se calculan además la pendiente y la ordenada al origen de la correspondiente recta asíntota.

Palabras clave: *Valor actual neto, Punto muerto financiero, punto muerto contable, tasa de descuento, tasa de crecimiento, expresión asíntótica.*

2010 AMS Subject Classification: 91G30, 91G50
JEL Classification Codes: C02, C63, G10, G31

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un proyecto de inversión simple en el cual se realiza solamente una inversión inicial I (flujo de fondo con signo negativo) y en los n años de duración del mismo se tendrán, en general, flujos de fondos de signo positivo.

Es muy importante la evaluación del proyecto de inversión para poder conocer si el mismo es o no es rentable. Existen varios criterios para la evaluación [10] como son: el *valor actual neto* (conocido como VAN), la *tasa interna de retorno* (conocida como TIR), el *período de recuperación de la inversión* (conocido como PRI) y la *rentabilidad inmediata* (conocido como RI). En este trabajo se utilizará el VAN como criterio de evaluación. El VAN es aquel que permite determinar la valoración de una inversión en función de la diferencia entre el valor actualizado de todos los cobros derivados de la inversión y todos los pagos actualizados originados por la misma a lo largo del plazo de la inversión realizada. En otras palabras, el VAN de un proyecto es igual a la sumatoria de los valores actuales (al momento cero) de todos los flujos de fondos (negativos y positivos) que genera el mismo proyecto. La inversión será aconsejable si su VAN es positivo [1, 2, 9, 10, 13]. La importancia del criterio del VAN puede apreciarse en [3, 5-8, 11].

En el presente trabajo se estudia un proyecto de inversión con la existencia de tres variables independientes: Q (la cantidad de unidades a vender en el primer año), la tasa de crecimiento g en la cantidad de ventas anuales y la tasa de descuento r que pueden hacer, según los valores que adopten, que el proyecto sea viable o no. Por ende, el VAN será una función de las variables Q , g y r . Es de mucha importancia encontrar el valor de la variable independiente Q que haga que el correspondiente VAN sea nulo para una dada tasa de descuento r y una dada tasa de crecimiento g . Se define como Punto Muerto Financiero (break-even point) el valor de Q para el cual el VAN es nulo.

Planteo del problema, hipótesis y resultados obtenidos. Se tienen los siguientes parámetros:

- I : Inversión inicial que se realiza en el año cero (antes del comienzo del primer año del desarrollo del proyecto de inversión);

- n : cantidad de años de duración del proyecto de inversión ($2 \leq n$);
- A : Amortización anual. Es la parte anual de la inversión que permite bajar el pago del impuesto a las ganancias;
- Q : Cantidad de unidades del producto vendidas en el primer año;
- P : Precio de venta unitario al que la Compañía vende cada producto;
- C_v : Costo variable por unidad para producir el producto;
- C_f : Costo fijo anual de la Compañía;
- t_{ig} : Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno);
- g : Tasa de crecimiento en la cantidad de ventas anuales (en tanto por uno);
- r : Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno).

En [4] se realiza un estudio del VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r ; se demuestra que el VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r es una función estrictamente decreciente y convexa. Dicho estudio fue ampliado adecuadamente en [12] realizando un análisis del punto muerto financiero, respecto de la variable Q , en función de la tasa de descuento r , además de un análisis de sensibilidad.

En el proyecto de inversión simple se considerarán las siguientes hipótesis de trabajo:

- Toda la inversión I se realiza de una sola vez y en el año 0;
- La inversión inicial se amortiza totalmente en n años, con lo cual la amortización anual está dada por: $A = I/n$
- En los n períodos de tiempo de duración del proyecto de inversión se realizan las mismas actividades;
- Se considera que la compañía vende un solo producto (podría producirse o comprarse para luego revenderse);
- Se supone que el precio de venta del producto es mayor que el correspondiente costo variable de producción, es decir: $P > C_v$.

El objetivo del trabajo es el de obtener la expresión explícita del VAN del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q para una dada tasa de crecimiento g y una dada tasa de descuento r . También se determinará explícitamente el punto muerto financiero Q_f en función de los parámetros restantes del problema ($I, n, C_f, C_v, P, t_{ig}, g, r$) y se estudiará analíticamente su comportamiento respecto de la tasa de descuento r tomando como parámetro principal la tasa de crecimiento g . Se demostrará que:

i) Cuando la tasa de descuento r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r, g)$, para la variable de cantidad Q , tiende a un valor que es inferior al punto muerto contable (el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT) del primer año cualquiera sea la tasa de crecimiento $g > 0$;

ii) Cuando la tasa de descuento r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) la gráfica de la función Q_f vs r tiene por asíntota en $r = +\infty$ una línea recta que es la misma cualquiera sea la tasa de crecimiento $g > 0$; en este caso, se calculan además la pendiente y la ordenada al origen de la correspondiente recta asíntota.

2. Proyecto de inversión dependiente de las variables cantidad Q y tasas r y g

Como en cada año ($t = 1, 2, \dots, n$) se realizan las mismas operaciones se supone que los parámetros $P, C_f, C_v, r, g, t_{ig}$ son constantes durante los n años de duración del proyecto de inversión excepto que la cantidad de artículos vendidos se incrementa por año de acuerdo a la tasa de crecimiento g , es decir que $Q_t = Q(1+g)^{t-1}$ donde t representa el año en cuestión. Para cada año t ($t = 1, 2, \dots, n$) se tiene:

Ingresos (precio por cantidad)	PQ_t
Costos variables	$C_v Q_t$
Costos fijos	C_f
Amortización	$A = \frac{I}{n}$
Beneficios antes de impuestos (BAT)	$BAT_t = (P - C_v)Q_t - C_f - A$
Impuesto a las Ganancias (IG)	$IG_t = t_{ig} [(P - C_v)Q_t - C_f - A]$
Beneficio Neto (BN = BAT - IG)	$BN_t = (1 - t_{ig}) [(P - C_v)Q_t - C_f - A]$
Flujo de Tesorería Neto (F = BN + A)	$F_t = (1 - t_{ig}) [(P - C_v)Q_t - C_f - A] + A$ $= (1 - t_{ig})(P - C_v)Q(1 + g)^t - C_f(1 - t_{ig}) + t_{ig} A$
Factor de descuento para el año t	$\frac{1}{(1 + r)^t}$

Teniendo en cuenta que la inversión I se realiza en el período 0 se tiene que el correspondiente VAN del proyecto de inversión viene dado por $-I$ más los valores actuales de todos los flujos de fondos F_t obtenidos en cada año t variando t desde 1 a n , es decir [14]:

$$(1) \quad VAN(Q, r, g) = -I + \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} = -I + [t_{ig} A - (1 - t_{ig}) C_f] f(r) + Q(1 - t_{ig})(P - C_v) \Phi(r, g)$$

$$= m(r, g)Q + h(r)$$

expresión que resulta ser una función afín de la variable Q donde se han definido las funciones reales $f = f(r)$, $h = h(r)$, $m(r, g)$ y $\Phi = \Phi(r, g)$ de la siguiente manera:

$$(2) \quad f(r) = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right], \quad \Phi(r, g) = \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n}{r-g} = \frac{1}{1+g} f\left(\frac{r-g}{1+g} \right), \quad r > 0, \quad g > 0,$$

$$(3) \quad h(r) = -I + [t_{ig} A - (1 - t_{ig}) C_f] f(r), \quad m(r, g) = (1 - t_{ig})(P - C_v) \Phi(r, g) > 0, \quad r > 0, \quad g > 0.$$

Teorema 1 i) Existe un único punto muerto financiero Q_f , en función de las tasas de descuento r y de crecimiento g , dado por la expresión siguiente:

$$(4) \quad Q_f = Q_f(r, g) = [b + a f(r)] \frac{1+g}{f\left(\frac{r-g}{1+g}\right)}, \quad r > 0, \quad g > 0.$$

donde los coeficientes reales a y b están definidos por:

$$(5) \quad a = \frac{C_f - t_{ig} \left(C_f + \frac{I}{n} \right)}{(p - C_v)(1 - t_{ig})}, \quad b = \frac{I}{(p - C_v)(1 - t_{ig})} > 0.$$

ii) El VAN = VAN(Q, r, g) se puede expresar de una manera equivalente dada por:

$$(6) \quad VAN(Q, r, g) = m(r, g) [Q - Q_f(r, g)]$$

con lo cual se ha expresado el VAN en función de la variable independiente Q , de los parámetros tasas de descuento r y de crecimiento g , y del punto muerto financiero $Q_f(r, g)$.

Se define el Punto Muerto Contable Q_c como el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT_1 en el primer año, el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$(7) \quad BAT_1(Q_c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_c = \frac{C_f + A}{p - C_v} = \frac{C_f + \frac{I}{n}}{p - C_v} = a + \frac{b}{n}.$$

Teorema 2 i) El punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r, g)$ es una función estrictamente creciente de la tasa de descuento r y tiene las siguientes propiedades:

$$(8) \quad Q_f(0^+, g) = \frac{ng}{(1+g)^n - 1} Q_c < Q_c, \quad Q_f(+\infty, g) = +\infty, \quad \forall g > 0,$$

$$(9) \quad \frac{\partial Q_f}{\partial r}(r, g) > 0, \quad \forall r > 0, \quad \forall g > 0.$$

ii) Además, para cada valor $g > 0$, la curva Q_f vs r tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la recta de ecuación:

$$(10) \quad y = a + b r$$

que tiene pendiente $b > 0$ y ordenada al origen a , ambos definidos en (5). La recta asíntota es, además, independiente de la tasa de crecimiento $g > 0$, lo cual tiene una gran implicancia económica-financiera.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP No. 0534 de CONICET – Univ. Austral, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

- [1] R. BAKER, AND R. FOX, *Capital investment appraisal: A new risk premium model*, Int. Transactions on Operations Research, 10 (2003), pp. 115-126.
- [2] R. BREALEY AND S. MYERS, *Fundamentos de financiación empresarial*, Mc Graw- Hill, Madrid, 1993.
- [3] K.J. CHUNG AND S.D. LIN, *An exact solution of cash flow for an integrated evaluation of investment in inventory and credit*, Production Planning & Control, 9 (1998), pp. 360-365.
- [4] M. FERNANDEZ BLANCO, *Dirección financiera de la empresa*, Pirámide, Madrid, 1991.
- [5] M.M. HAJDASINSKI, *Remarks in the context of the case for a generalized net present value formula*, The Engineering Economist, 40 (1995), 201-210.
- [6] M.M. HAJDASINSKI, *Compatibility, project ranking, and related issues*, The Engineering Economist, 42 (1997), 325-339.
- [7] S.P. LAN, K.J. CHUNG, P. CHU AND P.F. KUO, *The formula approximation for the optimal cycletime of the net present value*, The Engineering Economist, 48 (2003), pp. 79-91.
- [8] A. PIERRU, E. FEUILLET-MIDRIER, *Discount rate value and cash flow definition: a new relationship and its implications*, The Engineering Economist, 47 (2002), 60-74.
- [9] S. REICHELSTEIN, *Providing managerial incentives: Cash flows versus accrual accounting*, J. Accounting Research, 38 (2000), pp. 243-269.
- [10] N. SAPAG CHAIN, *Evaluación de proyectos de inversión en la empresa*, Prentice Hall, 2001.
- [11] R.E. STANFORD, *Optimizing profits from a system of accounts receivable*, Management Sci., 35(1989), pp. 1227-1235.
- [12] D.A. TARZIA, *El punto muerto financiero de un proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento*, Mecánica Computacional, 26 (2007), pp. 614-632. Ver también, *El punto muerto financiero de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento*, Tesis Maestría en Finanzas, Universidad Nacional de Rosario, Rosario, 2010.
- [13] M. VANHOUCHE, E. DEMEULEMEESTER AND W. HERROELEN, *On maximizing the net present value of a project under renewable resource constraints*, Management Sci., 47 (2001), pp. 1113-1121.
- [14] J.L. VILLALOBOS, *Matemáticas financieras*, Prentice-Hall, México, 2001.