

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO ELÍPTICO FRONTERA CON CONDICIONES MIXTAS

Domingo A. Tarzia†

† CONICET-Departamento de Matemática, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina.
DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: En C.M. Gariboldi – D.A. Tarzia, Adv. Diff. Eq. Control Processes, 1 (2008), 113-132 se considera un problema de control óptimo frontera para un sistema definido por la única solución de una ecuación variacional que corresponde a un problema elíptico con condiciones de contorno mixtas: una condición convectiva de tipo Robin sobre una porción de frontera y otra condición de tipo flujo de calor sobre la porción restante que es la variable de control. El objetivo del presente trabajo es el de realizar el análisis numérico del problema de control óptimo y su correspondiente convergencia usando el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen el estado del sistema y de su estado adjunto y además la función de costo para cada coeficiente de transferencia $\alpha > 0$. Se demuestra que existen únicos control frontera, sistema y estado adjunto, óptimos discretos. Además, se demuestra la convergencia cuando $h \rightarrow 0$ y se dan órdenes de convergencia, en función de h , para datos adecuados.

Palabras clave: Control óptimo frontera, problema elíptico mixto, análisis numérico, elementos finitos, estimaciones de error, convergencia.

2000 AMS Subjects Classification: 35J25, 35J85, 49J40, 49M25, 65N15, 65N30

1. INTRODUCCIÓN

Sea un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ regular compuesta por dos porciones de frontera Γ_1 y Γ_2 con $\text{med}(\Gamma_1) > 0$. Se considera el siguiente problema elíptico con condiciones de frontera mixtas dado por:

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - b) \quad \text{sobre } \Gamma_1; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (1)$$

donde g es la energía interna en Ω , b es la temperatura del entorno externo sobre Γ_1 , q es el flujo de calor sobre Γ_2 y α es el coeficiente de transferencia de calor sobre Γ_1 . El presente trabajo está motivado por lo realizado en [6,7,15] para problemas de control óptimo distribuido. En [8] se considera el siguiente problema continuo de control óptimo frontera para el sistema (1) que puede representar el caso estacionario del problema de Stefan [12]: hallar el

$$\min_{q \in Q} J_\alpha(q) \quad (2)$$

donde el funcional de costo $J_\alpha : Q = L^2(\Gamma_2) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ viene dado por la siguiente expresión [1,10,16]:

$$J_\alpha(q) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha q} - z_d\|_H^2 + \frac{M}{2} \|q\|_Q^2 \quad (3)$$

con $M > 0$ y $z_d \in H = L^2(\Omega)$ dados, $u_{\alpha q} \in V = H^1(\Omega)$ es el estado del sistema definido por el problema elíptico (1) cuya formulación variacional está dada por la siguiente ecuación variacional:

$$\begin{cases} a_\alpha(u_{\alpha q}, v) = (g, v)_H - \int_{\Gamma_2} q v d\gamma + \alpha \int_{\Gamma_1} b v d\gamma, & \forall v \in V \\ u_{\alpha q} \in V \end{cases} \quad (4)$$

y cuyo correspondiente estado adjunto $p_{\alpha q} \in V$ está definido por la siguiente ecuación variacional:

$$\begin{cases} a_\alpha(p_{\alpha q}, v) = (u_{\alpha q} - z_d, v), & \forall v \in V \\ p_{\alpha q} \in V \end{cases} \quad (5)$$

donde:

$$V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad Q = L^2(\Gamma_2) \quad (6)$$

$$a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv d\gamma, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv dx. \quad (7)$$

El objetivo del presente trabajo es el de realizar el análisis numérico del problema de control óptimo (2) para todo $\alpha > 0$ fijo y su correspondiente convergencia usando el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen el estado del sistema (4) y el estado adjunto (5) y además el funcional de costo (3). Se demuestra que existen únicos control $q_{h\alpha_{op}}$, sistema $u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}$ y estado adjunto $p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}$ óptimos discretos y se obtienen las correspondientes convergencias cuando $h \rightarrow 0$ y se dan los órdenes de convergencia, en función de h , $\forall z_d \in H$ y para M grande [3,4,13,14]. En general, la solución para problemas elípticos con condiciones mixtas se encuentra en $H^r(\Omega)$ con $1 < r \leq \frac{3}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) pero existen numerosos ejemplos para los cuales las soluciones están en $H^r(\Omega)$ con $2 \leq r$ [9,11].

2. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Se considera la siguiente discretización [2, 5]:

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n : \text{dominio poligonal acotado ; } b = \text{Const.} > 0 \text{ en } \Gamma_1, \\ \tau_h : \text{triangulación regular de tipo no negativa constituida por elementos finitos, afines equivalentes de clase } C^0, \\ h > 0 : \text{parámetro de la aproximación de elementos finitos que tiende a cero,} \\ h = \text{lado mayor de todos los triángulos } T \in \tau_h. \end{cases}$$

Se aproxima $V = H^1(\Omega)$ por:

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) / v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h \right\} \quad (8)$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1. Se considera $\pi_h : V \rightarrow V_h$ el operador de interpolación lineal que posee las siguientes propiedades: $\exists c_0 > 0$ de manera que [2]:

$$\begin{cases} a) \|v - \pi_h(v)\|_H \leq c_0 h^r \|v\|_r, \quad \forall v \in H^r(\Omega), \quad 1 < r \leq 2 \\ b) \|v - \pi_h(v)\|_V \leq c_0 h^{r-1} \|v\|_r, \quad \forall v \in H^r(\Omega), \quad 1 < r \leq 2 \end{cases}. \quad (9)$$

El funcional de costo discreto $J_{h\alpha} : Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ está definido por la expresión siguiente:

$$J_{h\alpha}(q) = \frac{1}{2} \|u_{h\alpha q} - z_d\|_H^2 + \frac{M}{2} \|q\|_Q^2 \quad (10)$$

donde $u_{h\alpha q}$ es el estado del sistema discreto definido como la solución de la ecuación variacional discreta siguiente:

$$\begin{cases} a_\alpha(u_{h\alpha q}, v_h) = (g, v_h)_H - \int_{\Gamma_2} q v_h d\gamma + \alpha \int_{\Gamma_1} b v_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_h \\ u_{h\alpha q} \in V_h \end{cases} \quad (11)$$

y su correspondiente estado adjunto discreto se define como la solución de la siguiente ecuación variacional discreta:

$$\begin{cases} a_\alpha(p_{h\alpha q}, v_h) = (u_{h\alpha q} - z_d, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ p_{h\alpha q} \in V_h \end{cases} \quad (12)$$

El correspondiente problema de control óptimo frontera discreto consiste en hallar $q_{h\alpha_{op}} \in Q$ de manera que:

$$J_{h\alpha}(q_{h\alpha_{op}}) = \min_{q \in Q} J_{h\alpha}(q) \quad (13)$$

Lema 1 (i) Se tiene que existen únicos $u_{h\alpha q} \in V_h$ y $p_{h\alpha q} \in V_h$ soluciones de las ecuaciones variacionales (4) y (5) respectivamente $\forall g \in H, \forall q \in Q, \forall b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$.

(ii) El operador $C_{h\alpha} : Q \rightarrow V_h$ definido por $C_{h\alpha}(q) = u_{h\alpha q} - u_{h\alpha 0}$ es lineal, continuo y Lipschitziano en Q y satisface la siguiente propiedad:

$$a_\alpha(p_{h\alpha q}, C_{h\alpha}(f)) = (u_{h\alpha q} - z_d, C_{h\alpha}(f))_H = -(f, \gamma_0(p_{h\alpha q}))_Q, \quad \forall q, f \in Q \quad (14)$$

donde γ_0 es el operador traza sobre Γ .

Teorema 2 (i) Se tiene que $J_{h\alpha}$ es una aplicación Q -elíptica y por ende estrictamente convexa.

(ii) Existe un único control óptimo $q_{h\alpha_{op}} \in Q$ que satisface el problema de optimización (13).

(iii) $J_{h\alpha}$ es una aplicación diferenciable según Gateaux y su derivada $J'_{h\alpha}$ está dada por la siguiente expresión:

$$J'_{h\alpha}(q) = Mq - \gamma_0(p_{h\alpha q}), \quad \forall q \in Q, \quad \forall h > 0, \quad \forall \alpha > 0. \quad (15)$$

(iv) La condición de optimalidad está dada por:

$$J'_{h\alpha}(q_{h\alpha_{op}}) = 0 \Leftrightarrow q_{h\alpha_{op}} = \frac{1}{M} p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} \quad (16)$$

Se define el operador

$$W_{h\alpha} : Q \rightarrow Q / W_{h\alpha}(q) = \frac{1}{M} p_{h\alpha q}. \quad (17)$$

Teorema 3 Se tiene que:

(i) $W_{h\alpha}$ es un operador Lipschitziano, es decir:

$$\|W_{h\alpha}(q_2) - W_{h\alpha}(q_1)\|_V \leq \frac{\|\gamma_0\|^2}{M\lambda_\alpha^2} \|q_2 - q_1\|_H, \quad \forall q_1, q_2 \in Q \quad (18)$$

donde $\lambda_\alpha = \lambda_1 \min(1, \alpha)$ ($\lambda_1 > 0$) es la constante de coercividad de la forma bilineal a_α , a saber:

$$\lambda_\alpha \|v\|_V^2 \leq a_\alpha(v, v), \quad \forall v \in V \quad (19)$$

(ii) $W_{h\alpha}$ es un operador de contracción si y sólo si $M > \frac{\|\gamma_0\|^{1/2}}{\lambda_\alpha^2}$.

(iii) Si M es suficientemente grande entonces el control óptimo frontera $q_{h\alpha_{op}}$ puede ser obtenido como el único punto fijo del operador $W_{h\alpha}$, es decir:

$$q_{h\alpha_{op}} = \frac{1}{M} p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} \Leftrightarrow W_{h\alpha}(q_{h\alpha_{op}}) = q_{h\alpha_{op}}. \quad (20)$$

3. ESTIMACIONES DE ERROR

Se obtienen las siguientes estimaciones de error entre las soluciones continuas y discretas.

Teorema 4 (i) Si se suponen las regularidades $u_{\alpha q}, p_{\alpha q} \in H^r(\Omega)$ ($1 < r \leq 2$) entonces $\forall \alpha > 0, \forall q \in Q$ se tienen las estimaciones de error:

$$\|u_{h\alpha q} - u_{\alpha q}\|_V \leq c_{1\alpha} \|u_{\alpha q}\|_r h^{r-1}, \quad \|p_{h\alpha q} - p_{\alpha q}\|_V \leq c_{2\alpha} \|p_{\alpha q}\|_r h^{r-1} \quad (21)$$

donde $c_{1\alpha}$ y $c_{2\alpha}$ son constantes independientes de h .

(ii) Se tienen los siguientes límites:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|u_{h\alpha q} - u_{\alpha q}\|_V = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \|p_{h\alpha q} - p_{\alpha q}\|_V = 0, \quad \forall \alpha > 0, \forall q \in Q. \quad (22)$$

Teorema 5 Si se suponen las regularidades $u_{\alpha q_{\alpha op}}, p_{\alpha q_{\alpha op}} \in H^r(\Omega)$ ($1 < r \leq 2$) y M es suficientemente grande entonces para cada $\alpha > 0$ se tienen para el problema de control óptimo frontera discreto (13) los siguientes límites:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|q_{h\alpha op} - q_{\alpha op}\|_Q = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \|u_{h\alpha q_{h\alpha op}} - u_{\alpha q_{\alpha op}}\|_V = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \|p_{h\alpha q_{h\alpha op}} - p_{\alpha q_{\alpha op}}\|_V = 0. \quad (23)$$

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP N° 0460 de CONICET-UA, PICTO Austral 2008 No. 073 y AFOSR-SOARD Grant FA9550-10-1-0023.

REFERENCIAS

- [1] M. BERGOUNIOUX, *Optimal control of an obstacle problem*, Appl. Math. Optim., 36 (1997), pp. 147-172.
- [2] S. BRENNER AND L.R. SCOTT, *The mathematical theory of finite element theory*, Springer, New York, 1994.
- [3] E. CASAS AND M. MATEOS, *Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems*, Comput. Appl. Math., 21 (2002), pp. 67-100.
- [4] E. CASAS AND J.P. RAYMOND, *Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equations*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006), pp. 1586-1611.
- [5] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [6] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim., 47 (2003), pp. 213-230.
- [7] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *A new proof of the convergence of the distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems*, MAT – Serie A, 7 (2004), pp. 31-42.
- [8] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. Diff. Eq. Control Processes, 1 (2008), pp. 113-132.
- [9] L. LANZANI, L. CAPOGNA AND R.M. BROWN, *The mixed problem in L^p for some two-dimensional Lipschitz domain*, Math. Annalen, 342 (2008), pp. 91-124.
- [10] J.L. LIONS, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.
- [11] E. SHAMIR, *Regularization of mixed second order elliptic problems*, Israel J. Math., 6 (1968), pp. 150-168.
- [12] E.D. TABACMAN AND D.A. TARZIA, *Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem*, J. Diff. Eq., 77 (1989), pp. 16-37.
- [13] D.A. TARZIA, *Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem to obtain a discrete steady-state two-phase Stefan problem*, SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 1257-1265.
- [14] D.A. TARZIA, *Numerical analysis of a mixed elliptic problem with flux and convective boundary conditions to obtain a discrete solution of a non-constant sign*, Numer. Meth. Partial Diff. Eq., 15 (1999), pp. 355-269.
- [15] D.A. TARZIA, *Análisis numérico de un problema de control óptimo elíptico distribuido con una condición de frontera convectiva*, MACI, 2 (2009), pp. 113-116.
- [16] F. TRÖLTZSCH, *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence, 2010.