# RELACIONES ENTRE LAS SOLUCIONES DE NEUMANN PARA DATOS DE TEMPERATURA Y CONDICION CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO EN EL PROBLEMA DE LAMÉ-CLAPEYRON-STEFAN A DOS FASES

Domingo A. Tarzia †‡
† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.
‡ CONICET, Argentina.
*E-mail:* DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Para el problema de cambio de fase de Lamé-Clapeyron-Stefan a dos fases se relacionan la solución de Neumann para un dato de temperatura constante en el borde fijo $x=0$ con la solución correspondiente a un dato convectivo particular en el mismo borde fijo $x=0$. Además, se tiene la equivalencia entre ambos problemas y se obtienen desigualdades para los coeficientes que caracterizan las dos fronteras libres.

Palabras clave: Problema de frontera libre, Problema de Lamé-Clapeyron-Stefan, Solidificación, Solución explícita, Solución de Neumann, Condición convectiva.

2000 AMS Subjects Classification: 35R35, 80A22, 35K06.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de transferencia de calor con cambio de fase tales como los de solidificación y fusión han sido muy estudiados en el último siglo debido a su alta gama de aplicaciones científicas y tecnológicas [1, 3, 5, 7]. Se considera un material semi-infinito homogéneo. El sistema tiene una temperatura inicial constante $T_i$ y al tiempo $t=0$ la superficie $x=0$ se expone a una temperatura constante $T_0$ ($< T_f < T_i$) donde $T_f$ es la temperatura de cambio de fase. El modelo para el problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a dos fases está dado por: hallar la frontera libre $x=s(t)$, definida para $t>0$, y la temperatura $T=T(x,t)$ definida por:

$$T(x,t)=\begin{cases} T_s(x,t)<T_f & si \;\; 0<x<s(t), \quad t>0 \\ T_f & \text{si} \;\; x=s(t), \quad t>0 \\ T_\ell(x,t)>T_f & \text{si} \;\; s(t)<x, \quad t>0 \end{cases} \tag{1}$$

para $x>0$ y $t>0$, de manera que se satisfagan las ecuaciones y condiciones siguientes ($i=s$: fase sólida; $i=l$: fase líquida):

$$\rho c_s T_{s_t} - k_s T_{s_{xx}} = 0, \qquad 0<x<s(t), \quad t>0\,, \tag{2}$$

$$\rho c_\ell T_{\ell_t} - k_\ell T_{\ell_{xx}} = 0, \qquad x>s(t), \quad t>0\,, \tag{3}$$

$$s(0)=0\,, \tag{4}$$

$$T_l(x,0)=T_l(+\infty,t)=T_i>T_f\,, \qquad x>0, \quad t>0\,, \tag{5}$$

$$T_s(s(t),t)=T_f\,, \qquad t>0\,, \tag{6}$$

$$T_l(s(t),t)=T_f\,, \qquad t>0\,, \tag{7}$$

$$k_s T_{s_x}\left(s(t),t\right) - k_\ell T_{\ell_x}\left(s(t),t\right) = \rho \ell \dot{s}(t), \quad t>0\,, \tag{8}$$

$$T_s(0,t)=T_0<T_f\,, \qquad t>0\,, \tag{9}$$

donde $\rho$ es la densidad de masa común de ambas fases, k es la conductividad térmica, c es el calor específico por unidad de masa y $\ell$ es el calor latente de fusión por unidad de masa, y $T_0<T_f<T_i$.

La solución del problema de frontera libre (2)-(9) es la clásica solución explícita de Neumann [1-3, 8] dada por:

$$T_s(x,t)=T_0+\frac{T_f-T_0}{erf(\xi\sqrt{b})}\,erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right), \quad 0\le x\le s(t),\, t>0\,, \tag{10}$$

$$T_l(x,t)=T_i-\frac{T_i-T_f}{erfc(\xi)}\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_\ell t}}\right), \quad s(t)\le x, \quad t>0\,, \tag{11}$$

$$s(t)=2\xi\sqrt{\alpha_\ell t}\,,\qquad \left(\alpha_\ell=\frac{k_\ell}{\rho c_\ell}\,,\quad \alpha_s=\frac{k_s}{\rho c_s}\right), \tag{12}$$

siendo el coeficiente adimensional $\xi>0$ la única solución de la ecuación siguiente:

$$G(x)=x,\quad x>0 \tag{13}$$

con

$$G(x)=b_4\ F_2(\sqrt{b}x)-b_3\ F_1(x)\,, \tag{14}$$

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-u^2)du\,,\quad erfc(x)=1-erf(x)\,, \tag{15}$$

$$F_1(x)=\frac{exp(-x^2)}{erfc(x)},\quad F_2(x)=\frac{exp(-x^2)}{erf(x)}\,, \tag{16}$$

$$b=\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}>0,\quad b_3=\frac{c_\ell(T_i-T_f)}{\ell\sqrt{\pi}}>0,\quad b_4=\frac{k_s(T_f-T_0)}{\rho\ell\sqrt{\pi\alpha_s\alpha_\ell}}>0\,. \tag{17}$$

Por otro lado, se considera el siguiente problema de frontera libre con una condición convectiva en el borde fijo: hallar la frontera libre $x=s(t)$, definida para $t>0$, y la temperatura $T=T(x,t)$ definida por (1) para $x>0$ y $t>0$, de manera que se satisfagan las ecuaciones y condiciones siguientes (*i*=*s*: fase sólida; *i*=*l*: fase líquida):

$$\rho c_s T_{s_t}-k_s T_{s_{xx}}=0,\qquad 0<x<s(t),\quad t>0\,, \tag{18}$$

$$\rho c_\ell T_{\ell_t}-k_\ell T_{\ell_{xx}}=0,\qquad x>s(t),\quad t>0\,, \tag{19}$$

$$s(0)=0\,, \tag{20}$$

$$T_l(x,0)=T_l(+\infty,t)=T_i>T_f\,,\qquad x>0,\quad t>0\,, \tag{21}$$

$$T_s(s(t),t)=T_f\,,\qquad t>0\quad , \tag{22}$$

$$T_l(s(t),t)=T_f\,,\qquad t>0\quad , \tag{23}$$

$$k_s T_{s_x}\left(s(t),t\right)-k_\ell T_{\ell_x}\left(s(t),t\right)=\rho\ell\dot{s}(t),\quad t>0\,, \tag{24}$$

$$k_s T_{s_x}(0,t)=\frac{h_0}{\sqrt{t}}(T_s(0,t)-T_\infty),\quad t>0\,, \tag{25}$$

donde $T_\infty$ es la temperatura del entorno exterior en el borde fijo $x=0$, $h_0$ es el coeficiente que caracteriza el coeficiente de transferencia de calor en el borde fijo $x=0$ y $T_\infty<T_f<T_i$.

El objetivo del presente trabajo es el de obtener en la Sección II, para el problema de cambio de fase de Lamé-Clapeyron-Stefan a dos fases, la relación existente entre la solución de Neumann (10)-(12) para un dato de temperatura con la solución correspondiente a un dato convectivo en el borde fijo $x=0$. Se obtienen además desigualdades para los coeficientes que caracterizan a ambas fronteras libres. Se complementan resultados obtenidos en [4,6].

## 2. Propiedades de la solución de Neumann para el problema de cambio de fase

**Teorema 1** *(i) Si el coeficiente $h_0$ verifica la desigualdad:*

$$h_0>\frac{k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}}\frac{T_i-T_f}{T_i-T_\infty}\,, \tag{26}$$

*entonces existe un proceso instantáneo de solidificación de cambio de fase y el problema de frontera libre (18)-(25) tiene la solución explícita de tipo similaridad dada por:*

$$s(t)=2\lambda\sqrt{\alpha_l t}\,, \tag{27}$$

$$T_s(x,t)=T_\infty+\frac{(T_f-T_\infty)\left(1+\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha_s}}{k_s}erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right)\right)}{1+\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha_s}}{k_s}erf\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_l}{\alpha_s}}\right)}\quad , \tag{28}$$

$$T_l(x,t)=T_i-(T_i-T_f)\frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}}\right)}{erfc(\lambda)}\ , \tag{29}$$

*y el coeficiente adimensional* $\lambda>0$ *satisface la siguiente ecuación:*

$$F(x)=x,\quad x>0\ , \tag{30}$$

*donde la función* $F$ *y los parámetros* $b_i$ *estan dados por:*

$$F(x)=b_1\frac{\exp(-bx^2)}{1+b_2 erf(x\sqrt{b})}-b_3\frac{\exp(-x^2)}{erfc(x)}\ , \tag{31}$$

$$b_1=\frac{h_0(T_f-T_\infty)}{\rho\ell\sqrt{\alpha_l}}>0,\qquad b_2=\frac{h_0}{h_s}\sqrt{\pi\alpha_s}>0\ . \tag{32}$$

*(ii) Las temperaturas de las fases sólida y líquida satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$T_0\le T_s(x,t)\le T_f\ ,\ \ 0\le x\le s(t),\quad t>0\ , \tag{33}$$

$$T_f\le T_\ell(x,t)\le T_i\ ,\ \ s(t)\le x,\quad t>0\ . \tag{34}$$

*(iii) Si el coeficiente* $h_0$ *verifica la desigualdad (26) entonces los problemas de frontera libre (2)-(9) y (18)-(25) son equivalentes entre sí. Más aún, la relación entre el dato* $T_0$ *del problema (2)-(9) con los datos* $T_\infty$ y $h_0$ *del problema 18)-(25) está dada por:*

$$T_0=\frac{T_f+T_\infty\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha_s}}{k_s}erf\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}}\right)}{1+\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha_s}}{k_s}erf\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}}\right)}\ . \tag{35}$$

Prueba. (i) La función *F* tiene las siguientes propiedades [6]:

$$F(0^+)=b_1-b_3=\frac{h_0(T_f-T_\infty)}{\rho\ell\sqrt{\alpha_l}}-\frac{c_l(T_i-T_f)}{\ell\sqrt{\pi}}\ , \tag{36}$$

$$F(+\infty)=-\infty,\quad F'(x)<0,\quad \forall x>0\ . \tag{37}$$

Entonces, existe una única solución $\lambda>0$ de la ecuación (30) si y solamente si $F(0^+)>0$ , si y solamente si la desigualdad (26) se verifica.
(ii) Basta verificar que:

$$T_s(x,t)-T_f=(T_f-T_0)\left(\frac{erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right)}{erf(\lambda b)}-1\right),\quad T_l(x,t)-T_f=(T_i-T_f)\left(1-\frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}}\right)}{erfc(\lambda)}\right)\ . \tag{38}$$

(iii) Si para la solución (27)-(29) del problema (18)-(25) se calcula la temperatura en el borde fijo $x=0$ entonces se obtiene que $T_s(0,t)=T_0<T_f$ , donde $T_0$ viene definido por (35). Luego, utilizando la metodología de [4], con dicho valor de $T_0$ se calcula la solución de Neumann (10)-(12) pudiéndose demostrar primero que $\xi=\lambda$ , y luego que las dos soluciones (10)-(12) y (27)-(29) coinciden bajo la hipótesis (26). □

**Observación 1** *Si el coeficiente* $h_0$ *verifica la desigualdad:*

$$0<h_0\le\frac{k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}}\frac{T_i-T_f}{T_i-T_\infty}\ . \tag{39}$$

*entonces el problema (18)-(25) es un simple problema de transferencia de calor para la fase inicial líquida cuya solución está dada por:*

$$T_l(x,t)=\frac{T_\infty+\frac{k_\ell T_i}{h_0\sqrt{\alpha_l\pi}}+(T_i-T_\infty)erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}}\right)}{1+\frac{k_\ell}{h_0\sqrt{\alpha_l\pi}}},\quad x>0,\quad t>0\ . \tag{40}$$

**Teorema 2** *Sean* $T_\infty < T_f < T_i$. *El coeficiente* $\xi = \xi_{T_0}$ *que caracteriza la frontera libre (12) de la solución de Neumann del problema (2)-(9) (con dato* $T_0 < T_f$ *en el borde fijo* $x = 0$*) satisface la siguiente desigualdad:*

$$erf\left(\xi\sqrt{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}}\right) < \frac{k_s}{k_\ell}\sqrt{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}}\frac{T_f - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\frac{T_f - T_0}{T_i - T_f}, \quad \forall T_0 \in (T_\infty, T_f)\,. \tag{41}$$

Prueba. (i) Por la equivalencia de los problemas (2)-(9) y (18)-(25), la desigualdad (26) se transforma en la desigualdad (41). □

**Corolario 3** *Sean* $T_\infty < T_f < T_i$. *El coeficiente* $\xi = \xi_{T_0}$ *que caracteriza la frontera libre (12) de la solución de Neumann del problema (2)-(9) (con dato* $T_0 < T_f$ *en el borde fijo* $x = 0$*) satisface la siguiente desigualdad:*

$$erf\left(\xi\sqrt{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}}\right) < \frac{k_s}{k_\ell}\sqrt{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}}\frac{T_f - T_0}{T_i - T_f}\,. \tag{42}$$

**Observación 2** *La desigualdad (42) coincide con la desigualdad obtenida en [4] al considerar un problema de frontera libre de Lamé-Clapeyron-Stefan a dos fases con una condición de flujo de calor del tipo* $k_s T_{s_x}(0,t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, t > 0$ *en el borde fijo* $x = 0$.

**Observación 3** *La desigualdad (41) tiene una importancia física para la solución de Neumann cuando los parámetros del problema (18)-(25) verifican la desigualdad:*

$$\frac{k_s}{k_\ell}\sqrt{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s}}\frac{T_f - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\frac{T_f - T_0}{T_i - T_f} < 1\,. \tag{43}$$

**Teorema 4** *Sean* $T_\infty < T_f < T_i$. *El coeficiente* $\lambda$ *de (27)-(29) es una función estrictamente creciente de la variable* $h_0$ *definida en el intervalo* $\left(\frac{k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}}\frac{T_i - T_f}{T_i - T_\infty}, +\infty\right)$ *que satisface las siguientes propiedades:*

$$0 = \lambda\left(\frac{k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}}\frac{T_i - T_f}{T_i - T_\infty}\right) < \lambda = \lambda(h_0) < \lambda_{T_\infty}, \quad \forall h_0 > \frac{k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}}\frac{T_i - T_f}{T_i - T_\infty}, \tag{44}$$

*donde* $\lambda_{T_\infty}$ *es el coeficiente que caracteriza la frontera libre de la solución de Neumann cuando se considera como condición (9) la dada por* $T_s(0,t) = T_\infty, t > 0$.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP Nº 0460 de CONICET-UA, PICTO Austral 2008 No. 073 y AFOSR-SOARD Grant FA9550-10-1-0023.

REFERENCIAS

[1] V. ALEXIADES, A.D. SOLOMON, *Mathematical modelling of melting and freezing processes*, Hemisphere - Taylor & Francis, Washington (1993).

[2] H.S. CARSLAW, J.C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford (1959).

[3] V.J. LUNARDINI, *Heat Transfer with Freezing and Thawing*, Elsevier, London (1991).

[4] D.A. TARZIA, *An inequality for the coefficient* $\sigma$ *of the free boundary* $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ *of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*, Quart. Appl. Math., 39 (1981-82), pp. 491-497.

[5] D.A. TARZIA, A *bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT - Serie A, 2 (2000), pp. 1-297. Available from: http://web.austral.edu.ar/descargas/facultad-cienciasEmpresariales/mat/Tarzia-MAT-SerieA-2(2000).pdf

[6] D.A. TARZIA, *An explicit solution for a two-phase unidimensional Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face*, MAT – Serie A, 8 (2004), pp. 21-27.

[7] D.A. TARZIA, *Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface*, Chapter 20, In Advanced Topics in Mass Transfer, Mohamed El-Amin (Ed.), InTech Open Access Publisher, Rijeka (2011), pp. 439-484. Available from: http://www.intechopen.com/articles/show/title/explicit-and-approximated-solutions-for-heat-and-mass-transfer-problems-with-a-moving-interface

[8] H. WEBER, *Die partiellen Differential-Gleinchungen der Mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen*, t. II, Braunwschweig (1901).