EL VAN Y EL PUNTO MUERTO FINANCIERO DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN CON UNA ECUACIÓN DE DEMANDA EN FUNCIÓN DE LA TASA DE DESCUENTO

Domingo A. Tarzia †

† Depto. de Matemática - CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se estudia un proyecto de inversión con la existencia de dos variables independientes (la cantidad de unidades Q a vender en cada año que está relacionada con el precio P a través de una ecuación de demanda lineal) y la tasa de descuento r. Se obtiene la expresión explícita del VAN (valor actual neto) del proyecto de inversión en función de Q y r. También se determinan explícitamente dos puntos muertos financieros en función de los parámetros restantes del problema y se estudian analíticamente sus comportamientos respecto de la tasa r. Por último, se demuestra que el VAN será positivo si Q se encuentra entre dichos dos valores de puntos muertos financieros para una dada tasa de descuento r.

Palabras claves: *Valor actual neto, Punto muerto financiero, tasa de descuento*

2000 AMS Subjects Classification: 91B28
JEL Classification Codes: C02, C63, G10, G31

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un proyecto de inversión simple en el cual se realiza solamente una inversión inicial I (flujo de fondo con signo negativo) y en los n años de duración del mismo se tendrán, en general, flujos de fondos de signo positivo.

Es muy importante la evaluación del proyecto de inversión para poder conocer si el mismo es o no es rentable. Existen varios criterios para la evaluación [7] como son: el *valor actual neto* (conocido como VAN), la *tasa interna de retorno* (conocida como TIR), el *período de recuperación de la inversión* (conocido como PRI) y la *rentabilidad inmediata* (conocido como RI). En este trabajo se utilizará el Valor Actual Neto o VAN como criterio de evaluación. El VAN es aquel que permite determinar la valoración de una inversión en función de la diferencia entre el valor actualizado de todos los cobros derivados de la inversión y todos los pagos actualizados originados por la misma a lo largo del plazo de la inversión realizada. En otras palabras, el VAN de un proyecto es igual a la sumatoria de los valores actuales (al momento cero) de todos los flujos de fondos (negativos y positivos) que genera el mismo proyecto. La inversión será aconsejable si su VAN es positivo [1, 2, 6, 7, 10]. La importancia del criterio del *VAN* puede apreciarse en [3, 5, 8].

En el presente trabajo se estudia un proyecto de inversión con la existencia de dos variables independientes (la cantidad de unidades Q a vender en cada año que se encuentra relacionada con el precio P a través de una ecuación de demanda dada por la recta (1)) y la tasa de descuento r que pueden hacer, según los valores que adopten, que el proyecto sea viable o no. Por ende, el VAN será una función de las variables Q y r. Es de mucha importancia encontrar el valor de la variable independiente Q que haga que el correspondiente VAN sea nulo para una dada tasa de descuento r. Se define como Punto Muerto Financiero (break even point) el valor de la variable independiente Q para el cual el VAN es nulo.

Planteo del problema, hipótesis y resultados obtenidos. Se tienen los siguientes parámetros:

- I : Inversión inicial que se realiza en el año cero (antes del comienzo del primer año del desarrollo del proyecto de inversión);
- n : cantidad de años de duración del proyecto de inversión $(2 \leq n)$;

- A: Amortización anual**.** Es la parte anual de la inversión que permite bajar (mejorar) el pago de impuestos a las ganancias;
- Q: Cantidad de unidades del producto vendidas por año;
- P : Precio de venta unitario al que la Compañía vende cada producto;
- C_v : Costo variable por unidad para producir el producto;
- C_f : Costo fijo anual de la Compañía;
- t_{ig} : Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno);
- r : Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno).

En [4] se realiza un estudio del VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r; se demuestra que el VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r es una función estrictamente decreciente y convexa. Dicho estudio fue ampliado adecuadamente en [9] realizando un análisis del punto muerto financiero, respecto de la variable Q, en función de la tasa de descuento r, además de un análisis de sensibilidad. En el presente trabajo se generalizará el estudio anterior considerando que la empresa funciona con una ecuación de demanda lineal dada por la recta de ecuación

(1) $$\frac{P}{P_o}+\frac{Q}{Q_o}=1 \qquad \left(P=P_o-\frac{P_o}{Q_o}Q\right)$$

que relaciona la cantidad de unidades a vender Q con el precio unitario P, donde P_o es el precio máximo a ser alcanzado y Q_o es la cantidad máxima de unidades a vender.

En el proyecto de inversión simple se considerarán las siguientes hipótesis de trabajo:

- Toda la inversión I se realiza de una sola vez y en el año 0;
- La inversión inicial se amortiza totalmente en n años, con lo cual la amortización anual está dada por: $A=I/n$
- Se desprecia la inflación anual de precios;
- En los n períodos de tiempo de duración del proyecto de inversión se realizan las mismas actividades;
- Se considera que la compañía vende un solo producto (el cual lo podría producir o comprarlo para luego revenderlo);
- Se supone que el máximo precio de venta del producto P_o es mayor que el correspondiente costo variable de producción, es decir: $P_o > C_v$.

El objetivo del trabajo es el de obtener la expresión explícita del VAN del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q para una dada tasa de descuento r. También se determinarán explícitamente dos puntos muertos financieros en función de los parámetros restantes del problema (I, n, C_f, C_v, P_o, Q_o, t_{ig}, r) y se estudiarán analíticamente sus comportamientos respecto de la tasa de descuento r. Por último, se demuestra que el VAN será positivo si Q se encuentra entre dichos dos valores de puntos muertos financieros para una dada tasa de descuento r.

2. Proyecto de inversión dependiente de la variable cantidad Q

Como en cada año ($i=1,2,...,n$) se realizan las mismas operaciones se supone que los parámetros Q, P, C_f, C_v, r, t_{ig} son constantes durante los n años de duración del proyecto de inversión. Para cada año t ($t=1,2,...,n$) se tiene:

Ingresos (precio por cantidad) $\qquad PQ$

Costos variables $C_v Q$

Costos fijos C_f

Amortización $A = \frac{I}{n}$

Beneficios antes de impuestos (BAT) $BAT_t = (P - C_v)Q - C_f - A$

Impuesto a las Ganancias(IG) $IG_t = t_{ig}\left[(P - C_v)Q - C_f - A\right]$

Beneficio Neto$(BN = BAT - IG)$ $BN_t = (1 - t_{ig})\left[(P - C_v)Q - C_f - A\right]$

Flujo de Tesorería Neto $(F = BN + A)$ $F_t = (1 - t_{ig})\left[(P - C_v)Q - C_f - A\right] + A$

$$= (1 - t_{ig})\left((P_o - C_v)Q - \frac{P_o}{Q_o}Q^2\right) - C_f(1 - t_{ig}) + t_{ig}A$$

Factor de descuento para el año t $\frac{1}{(1+r)^t}$.

Teniendo en cuenta que la inversión I se realiza en el período 0 se tiene que el correspondiente VAN del proyecto de inversión viene dado por $-I$ más los valores actuales de todos los flujos de fondos F_t obtenidos en cada año t variando t desde 1 a n, es decir [11]:

(2) $$VAN(Q,r) = -I + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t} = h(r) + (1 - t_{ig}) f(r)\left((P_o - C_v)Q - \frac{P_o}{Q_o}Q^2\right),$$

expresión que resulta ser una función cuadrática de la variable Q donde se han definido las funciones reales $h = h(r)$ y $f = f(r)$ de la siguiente manera:

(3) $$h = h(r) = -I + f(r)\left[t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f\right], \quad f(r) = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right], \quad r > 0.$$

Se define la siguiente función real que depende de la tasa de descuento r, a saber:

(4) $$Q_{oo}(r) = \frac{-4\,h(r)}{(1 - t_{ig}) f(r)} \frac{P_o}{(P_o - C_v)^2}, \quad r > 0.$$

Teorema 1 *Si* $P_o > C_v$ *y* $Q_o > Q_{oo}(r)$ *entonces existen dos puntos muertos financieros* $0 < Q_{f1}(r) < Q_{f2}(r)$ *que anulan el VAN los cuales están definidos por las siguientes expresiones:*

(5) $$Q_{f1}(r) = \frac{Q_o}{2}\left(1 - \frac{C_v}{P_o}\right)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{Q_{oo}(r)}{Q_o}}\right], \quad r > 0.$$

(6) $$Q_{f2}(r) = \frac{Q_o}{2}\left(1 - \frac{C_v}{P_o}\right)\left[1 + \sqrt{1 - \frac{Q_{oo}(r)}{Q_o}}\right], \quad r > 0.$$

El proyecto de inversión es viable cuando la cantidad de unidades a vender Q *verifica la siguiente desigualdad:*

(7) $$Q_{f1}(r) < Q < Q_{f2}(r), \quad r > 0.$$

Prueba. El resultado se deduce de la siguiente expresión del $VAN(Q,r)$, dado por:

$$(8) \qquad VAN(Q,r) = -\frac{P_o}{Q_o}(1-t_{ig})\, f(r)\big(Q - Q_{f1}(r)\big)\big(Q - Q_{f2}(r)\big), \quad Q>0, \quad r>0\ . \qquad \square$$

Corolario 2 *Se tienen las siguientes propiedades:*

$$(9) \qquad 0 < Q_{f1}(r) < Q_M = \frac{Q_o}{2}\left(1-\frac{C_v}{P_o}\right) < Q_{f2}(r) < 2Q_M = Q_o\left(1-\frac{C_v}{P_o}\right), \quad r>0\ . \qquad \square$$

Lema 3 *Si* $Q_o > Q_o^* = \dfrac{4P_o(A+C_f)}{\left(P_o - C_v\right)^2}$ *entonces existe una única tasa* $r_o > 0$ *solución de la ecuación*

$$(10) \qquad Q_{oo}(r) = Q_o, \quad r>0\ . \qquad \square$$

Teorema 4 *El comportamiento de los dos puntos muertos financieros, en función de la tasa de descuento están dados por las siguientes propiedades:*

$$(11) \qquad Q_{f1}(0^+) = Q_{1o} < \frac{Q_o}{2}, \quad Q_{f2}(0^+) = Q_{2o} < Q_o$$

$$(12) \qquad Q_{f1}(r_o^-) = Q_{f2}(r_o^-) = \frac{Q_o}{2}\left(1-\frac{C_v}{P_o}\right) < \frac{Q_o}{2}, \quad \frac{dQ_{f1}}{dr}(r_o^-) = +\infty, \frac{dQ_{f2}}{dr}(r_o^-) = -\infty$$

$$(13) \qquad \frac{dQ_{f1}}{dr}(r) > 0, \quad \frac{dQ_{f2}}{dr}(r) < 0, \quad \forall r \in (0, r_o)$$

$$(14) \qquad \frac{dQ_{f1}}{dr}(0^+) = -\frac{dQ_{f2}}{dr}(0^+) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{I}{2(1-t_{ig})(P_o - C_v)}\ . \qquad \square$$

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP No. 0460 de CONICET-UA y “Fondo de Ayuda a la Investigación de la UA”, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

[1] R. BAKER, AND R. FOX, *Capital investment appraisal: A new risk premium model,* Int. Transactions on Operations Research, 10 (2003), pp. 115-126.

[2] R. BREALEY AND S. MYERS, *Fundamentos de financiación empresarial*, Mc Graw- Hill, Madrid, 1993.

[3] K.J. CHUNG AND S.D. LIN, *An exact solution of cash flow for an integrated evaluation of investment in inventory and credit,* Production Planinning & Control, 9 (1998), pp. 360-365.

[4] M. FERNANDEZ BLANCO, *Dirección financiera de la empresa,* Pirámide, Madrid, 1991.

[5] S.P. LAN, K.J. CHUNG, P. CHU AND P.F. KUO, The formula approximation for the optimal cycletime of the net present value, The Engineering Economist, 48 (2003), pp. 79-91.

[6] S. REICHELSTEIN, *Providing managerial incentives: Cash flows versus accrual accounting*, J. Accounting Research, 38 (2000), pp. 243-269.

[7] N. SAPAG CHAIN, *Evaluación de proyectos de inversión en la empresa*, Prentice Hall, 2001.

[8] R.E. STANFORD, Optimizing profits from a system of accounts receivable, Management Sci., 35(1989), pp. 1227-1235.

[9] D.A. TARZIA, *El punto muerto financiero de un proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento*, Mecánica Computacional, 26 (2007), pp. 614-632. Ver también, El punto muerto financiero de un proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento, Trabajo Final Especialidad en Finanzas, Univ. Nac. de Rosario, Rosario, 2007.

[10] M. VANHOUCKE, E. DEMEULEMEESTER AND W. HERROELEN, *On maximizing the net present value of a project under renewable resource constraints*, Management Sci., 47 (2001), pp. 1113-1121.

[11] J.L. VILLALOBOS, *Matemáticas financieras*, Prentice-Hall, México, 2001.