ISSN 0325-4011

Rev. latinoam. transf. cal. mat. 8: 227-235 (1984) Lat. am. j. heat mass transf.

COMUNICACION COMMUNICATION

UNA NUEVA VARIANTE PARA EL CALCULO SIMULTANEO DE ALGUNOS COEFICIENTES TERMICOS DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO A TRAVES DE UN PROBLEMA DE CAMBIO DE FASE CON UNA SOBRE-CONDICION EN EL BORDE FIJO*

A NEW VARIANT FOR THE SIMULTANEOUS CALCULATION OF SOME THERMAL COEFFICIENTS OF A SEMI-INFINITE MATERIAL THROUGH A PHASE CHANGE PROBLEM WITH AN OVER-CONDITION ON THE FIXED FACE*

DOMINGO A. TARZIA

PROMAR (CONICET-UNR) Instituto de Matemática "Beppo Levi", Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina

Resumen

Cuando el coeficiente k de un material semi-infinito (por ejemplo, fase líquida) es desconocido, puede plantearse una nueva variante para el cálculo simultáneo de algunos de sus coeficientes térmicos. Esta determinación es obtenida a través de un problema inverso de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase con una sobre-condición sobre el borde fijo del material de cambio de fase. La variante difiere de la dada en D. A. Tarzia (1982*b*, 1983), por el hecho de que la sobre-condición en el borde fijo es de la forma

$$\frac{\delta\,\theta}{\delta\,x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}},\ H_0 > 0\,,$$

en la cual no aparece k.

Para resolverlo, se asume que los coeficientes H_0, σ, $\theta_0 > 0$ son conocidos de la experiencia, con lo cual la medición de flujo de calor es substituida por la medición de la pendiente de la temperatura en $x = 0$.

El resultado obtenido es el siguiente: si uno de los triples $\{\theta, k, \ell\}$, $\{\theta, k, c\}$, $\{\theta, k, \alpha\}$ es a determinar, el correspondiente problema de frontera móvil tiene

Abstract

When the coefficient k of a semi-infinite material (liquid phase, for example) is unknown, a new variant for the simultaneous calculation of some of its thermal coefficients can be stated. This statement is attained by means of an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an over-condition on the fixed face of the phase change material. This variant differs from the one given by D. A. Tarzia (1982*b*, 1983) in the fact that the over-condition on the fixed face is of the form

in which k is not present.

To solve this, we assume that the coefficients H_0, σ, $\theta_0 > 0$ are known through experimentation, which signifies that the heat flow measurement is replaced by the measurement of the temperature gradient in $x = 0$.

The result obtained is the following: If one of the triplets $\{\theta, k, \ell\}$, $\{\theta, k, c\}$, $\{\theta, k, \alpha\}$, is to be determined the corresponding moving boundary problem

* Trabajo presentado, salvo modificaciones formales, en el I Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia, La Plata (Argentina), 31 de octubre - 4 de noviembre 1982.

* Paper presented in the I Latin American Congress of Heat and Mass Transfer, La Plata (Argentina), 31st October-4th November, 1982.

una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann si y sólo si una condición complementaria es verificada por los datos del problema. Además, para cada caso, se dan las fórmulas para la obtención simultánea de los correspondientes dos coeficientes desconocidos. Con esta metodología, la determinación de $\{\theta, k, \rho\}$ no es posible.

Por otra parte, si $\{\theta, k, \sigma\}$, es a determinar, el correspondiente problema de frontera libre tiene siempre una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann.

Cabe destacarse que si el coeficiente k es conocido, entonces las variantes dadas en D. A. Tarzia (1982*b*, 1983) y en el presente trabajo coinciden.

has a solution of the Lamé-Clapeyron-Neumann type if and only if a complementary condition is verified by the problem data. Besides, for each case, the formulas for the simultaneous obtention of the two corresponding unknown coefficients are given. Using this methodology, the determination of $\{\theta, k, \rho\}$ is not possible.

On the other hand, if $\{\theta, k, \sigma\}$ is to be determined the corresponding free boundary problem always has a solution of the Lamé-Clapeyron-Neumann type.

Note that, should the coefficient k be known, then the variants given in this paper and in D. A. Tarzia (1982*b*, 1983) would coincide.

I. Introducción

Cuando el coeficiente k de un material semi-infinito (por ejemplo, fase líquida) es desconocido, puede plantearse una nueva variante con respecto a la de D. A. Tarzia (1982*b*, 1983) para el cálculo simultáneo de algunos de sus coeficientes térmicos. Esta determinación es obtenida a través de un problema inverso de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase con una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$ del material de cambio de fase de la forma

I. Introduction

When the coefficient k of a semi-infinite material (liquid phase, for example) is unknown, a new variant with regard to that by D. A. Tarzia (1982*b*, 1983) for the simultaneous calculation of some of the thermal coefficients of the material can be stated. This statement is obtained through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an over condition on the fixed face $x = 0$ of the phase change material of the form:

$$\frac{\delta \theta}{\delta x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}}, \quad \text{con (with)} \quad H_0 > 0\,, \tag{1}$$

en la cual no aparece k.

Si se supone que la temperatura de cambio de fase es 0°C (lo cual no quita generalidad al problema, al poder realizarse una traslación de la escala de temperatura) y que la frontera móvil es dada por la ley (G. Lamé y col., 1831)

in which k is not present.

If we assume that the phase change temperature is 0°C (which does not deprive the problem of generality, since the transference of the temperature scale can be carried out) and that the moving boundary is given by the law (G. Lamé et al., 1831).

$$s(t) = 2\,\sigma\sqrt{t}, \quad \text{con (with)} \quad \sigma > 0\,, \tag{2}$$

entonces el problema se reduce a encontrar los triples $\{\theta(x,t), k, \ell\}$, $\{\theta(x,t), k, c\}$, $\{\theta(x,t), k, \alpha\}$ de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

then the problem is reduced to finding the triplets $\{\theta(x,t), k, \ell\}$, $\{\theta(x,t), k, c\}$, $\{\theta(x,t), k, \alpha\}$ so that they fulfil the following conditions:

$$\frac{\delta \theta}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \tag{3a}$$

$$\theta(s(t), t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{3b}$$

$$-k\frac{\delta\theta}{\delta x}(s(t),t)=\rho\,\ell\,s'(t)\,,\qquad t>0 \tag{3c}$$

$$\theta(0,t)=\theta_0\,,\qquad t>0 \tag{3d}$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta x}(0,t)=-\frac{H_0}{\sqrt{t}}\,,\qquad t>0 \tag{3e}$$

donde ρ es la densidad de masa, ℓ es el calor latente de fusión, k es la conductividad térmica, c es el calor específico, $\alpha = a^2 = k/\rho c$ es la difusividad, θ_0 es la temperatura en el borde fijo $x = 0$.

Observación 1

Se supone que H_0, $\sigma > 0$ son conocidos. El coeficiente H_0 caracteriza la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x = 0$ (3*e*), y σ caracteriza la frontera móvil (2). Estos dos coeficientes deben ser determinados experimentalmente. Además, la temperatura θ_0 en $x = 0$ es supuestamente conocida.

En la Sección II se prueba que no siempre existe una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann (M. Brillouin, 1930-1931; H. S. Carslaw, y col., 1959; G. Lamé et al., 1831; L. I. Rubinstein, 1971; D. A. Tarzia, 1981-1983; H. Weber, 1901) para el problema (3) en los tres casos enumerados anteriormente. Más aún, la solución explícita existe si y sólo si una condición complementaria es satisfecha por los datos del problema. Además, para cada caso, se dan las fórmulas para la obtención simultánea de los correspondientes dos coeficientes desconocidos.

Por otra parte, si la frontera de cambio de fase $x = s(t)$ es desconocida, entonces la determinación del triple $\{\theta(x,t), k, s(t)\}$, solución de (3) con $s(0) = 0$, tiene siempre una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann.

Cabe destacarse que si el coeficiente k es conocido entonces la idea de este trabajo (definido con la constante H_0) coincide con la de D. A. Tarzia (1982-1983) (definido con la constante h_0) a través de la relación $h_0 = k\,H_0$. La idea de la utilización de una sobre-condición en una porción de frontera fue extraída de los trabajos (J. R. Cannon y col., (1963-1973); B. F. Jones Jr., (1962-1963). Otras referencias pueden encontrarse en D. A. Tarzia (1982*b*, 1983).

where ρ is the mass density, ℓ is the latent heat of fussion, k is the thermal conductivity, c is the specific heat, $\alpha = a^2 = k/\rho c$ is the diffusivity, θ_0 is the temperature on the fixed face $x = 0$.

Remark 1

It is assumed that H_0, $\sigma > 0$ are known. The coefficient H_0 characterizes the temperature gradient on the fixed face $x = 0$ (3*e*), and σ characterizes the moving boundary (2). These two coefficients must be experimentally determined. Besides, the temperature θ_0 in $x = 0$ is supposedly known.

In section II, it is proved that a solution can not always be found for the problem (3) in the three cases mentioned above, of the Lamé-Clapeyron-Neumann type (M. Brillouin, 1930-1931; H. S. Carslaw et al., 1959; G. Lamé et al., 1931; L. I. Rubinstein, 1971; D. A. Tarzia, 1981-1983; H. Weber, 1901). Moreover, the explicit solution exists if and only if a complementary condition is fulfilled by the data of the problem. In addition to this, for each case, the formulas for the simultaneous obtention of the two correspondent unknown coefficients are given.

On the other hand, if the phase change boundary $x = s(t)$ is unknown, then the determination of the triplets $\{\theta(x,t), k, s(t)\}$, solution to (3) with $s(0) = 0$, always has a solution like that suggested by Lamé-Clapeyron-Neumann.

Note that if the coefficient k is known, then the idea of this paper (defined by the constant H_0) coincides with that in D. A. Tarzia (1982-1983) (defined by the constant h_0), through the relation $h_0 = k\,H_0$. The idea of using an over-condition in a portion of boundary was drawn from such works as J. R. Cannon et al. (1963-1973); B. F. Jones, Jr. (1962-1963). Further references can be found in Tarzia (1982*b*, 1983).

II. Solución de los diferentes casos

La solución del problema (3) está dada por:

$$\theta(x,t) = \theta_0 - \frac{\theta_0}{f\left(\frac{\sigma}{a}\right)}\, f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{4}$$

con

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2)\, dy = \operatorname{erf}(x)$$

donde los dos coeficientes desconocidos deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\rho\, \ell\, \sigma = k\, H_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a^2}\right) \tag{5a}$$

$$H_0 = \frac{\theta_0}{a\sqrt{\pi}\, f\left(\frac{\sigma}{a}\right)}\,. \tag{5b}$$

Si se define

$$\xi = \frac{\sigma}{a} \tag{6}$$

se tiene

$$k \exp(-\xi^2) = \frac{\rho\, \ell\, \sigma}{H_0} \tag{7a}$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{\theta_0}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}}\,. \tag{7b}$$

Propiedad 1. (Determinación simultánea de los coeficientes k, ℓ)

Si los datos $H_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 > 0$ verifican la condición

$$\frac{\theta_0}{2\sigma H_0} < 1\,, \tag{8}$$

independiente de $\rho > 0$, $c > 0$, entonces el problema (3) tiene la solución (4) donde k, ℓ están dados por:

$$k = \frac{\rho\, c\, \sigma^2}{\xi^2}\,, \quad \ell = H_0\, c\, \sigma \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2} \tag{9}$$

y ξ es la única solución de la ecuación:

II. Solution for the different cases

The solution to the problem (3) is given by:

(4)

with

where the two unknown coefficients must fulfil the following system of equations:

(5a), (5b)

If it is defined

(6)

then we have

(7a), (7b)

Property 1. (Simultaneous determination of the coefficients k, ℓ)

If the data $H_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 > 0$ verify the condition

(8)

independent of $\rho > 0$, $c > 0$, then problem (3) has a solution of the type (4), where k, ℓ are given by:

(9)

and ξ is the only solution for the equation:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\theta_0}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}}, \qquad x > 0 \,. \tag{10}$$

Demostración

La ecuación (10) se obtiene de la (7*b*), la cual tiene una única solución $\xi > 0$, bajo la hipótesis (8), debido a que la función

Proof

Equation (10) is derived from (7*b*), which has one only solution $\xi > 0$, under the hypothesis (8), due to the fact that the function

$$G(x) = \frac{f(x)}{x}, \tag{11}$$

definida para los $x > 0$, tiene las siguientes propiedades:

defined for $x > 0$, has the following properties:

$$G(0^+) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad G(+\infty) = 0\,, \quad G' < 0\,. \tag{12}$$

El coeficiente k se obtiene a través de la relación (6) y luego el coeficiente ℓ de la (7*a*).

The coefficient k is obtained by means of relation (6), and then the coefficient ℓ by means of (7*a*).

Utilizando una metodología análoga a la demostración anterior y a la dada en D. A. Tarzia (1982*b*, 1983) pueden obtenerse las siguientes propiedades:

Using a methodology analogous to the preceding one and to that shown in D. A. Tarzia (1982*b*, 1983), the following properties can be obtained:

Propiedad 2. (Determinación simultánea de los coeficientes k, c)

Si los datos $H_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 > 0$ verifican la condición (8), independientemente de $\rho > 0$, $\ell > 0$, entonces el problema (3) tiene la solución (4) donde k, c están dados por:

Property 2. (Simultaneous determination of the coefficients k, c)

If the data $H_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 > 0$ verify (8) independently from $\rho > 0$, $\ell > 0$, then problem (3) has solution (4), where k, c, are given by:

$$k = \frac{\rho\, \ell\, \sigma}{H_0} \exp(\xi^2)\;, \quad c = \frac{\ell}{\sigma H_0}\, \xi^2 \exp(\xi^2) \tag{13}$$

y ξ es la única solución de la ecuación (10).

and ξ is the only possible solution for equation (10).

Propiedad 3. (Determinación simultánea de los coeficientes k, α)

Si los datos $H_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 > 0$ verifican la condición (8), independientemente de $\rho > 0$, $\ell > 0$, $c > 0$, entonces el problema (3) tiene la solución (4) donde k, α están dados por:

Property 3. (Simultaneous determination of the coefficients k, α)

If the data $H_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 > 0$ verify condition (8) independently from $\rho > 0$, $\ell > 0$, $c > 0$, then problem (3) has solution (4), where k, α are given by:

$$k = \frac{\rho\, \ell\, \sigma}{H_0} \exp(\xi^2)\,, \quad \alpha = \frac{\sigma^2}{\xi^2} \tag{14}$$

y ξ es la única solución de la ecuación (10).

and ξ is the only possible solution for equation (10).

COROLARIO

La recíproca de los enunciados dados en las tres Propiedades 1, 2, 3 son también válidos pues la demostración realizada se trata de una equivalencia. Veámoslo en la Propiedad 1: si el problema (3) tiene solución, ésta viene dada por (4), y entonces los coeficientes k, ℓ están dados por (9). Este hecho ocurrirá si y sólo si la ecuación (10) tiene una única solución $\xi > 0$ si y sólo si la desigualdad (8) se verifica.

Observación 2

Si el coeficiente $\rho > 0$ es un dato, entonces la determinación simultánea de $\{k, \alpha\}$ es equivalente a la de $\{k, c\}$.

Observación 3

En el caso en que todos los coeficientes térmicos del material sean conocidos y dando como dato sólo a $\theta(0, t) = \theta_0 > 0$, entonces la solución $\{\theta(x, t), s(t)\}$ del problema clásico de frontera libre de Lamé-Clapeyron (Stefan) sin coeficientes desconocidos (M. Brillouin, 1930-31; H. S. Carslaw y col., 1959; G. Lamé y col., 1831; L. I. Rubinstein, 1971; D. A. Tarzia, 1982*b*, 1983), definido por (3*a*, *d*) y $s(0) = 0$, está dada por

COROLLARY

The reciprocal of the statements given in all three Properties 1, 2, 3 is also valid, since the proof stated is an equivalence. Let us examine this in Property 1: if problem (3) has any solution at all, this is given by (4); and consequently the coefficients k, ℓ will be given by (9). This will happen if and only if equation (10) has a single solution $\xi > 0$ only if the inequality (8) is verified.

Remark 2

If the coefficient $\rho > 0$ is a datum, then the simultaneous determination of $\{k, \alpha\}$ is equivalent to that of $\{k, c\}$.

Remark 3

If all the thermal coefficients of the material happen to be known, and having only $\theta(0, t) = \theta_0 > 0$ as datum, then the solution $\{\theta(x, t), s(t)\}$ of the classical free boundary problem of Lamé-Clapeyron (Stefan) without unknown coefficients (M. Brillouin, 1930-31; H. S. Carslaw et al., 1959; G. Lamé et al., 1831; L. I. Rubinstein, 1971; D. A. Tarzia, 1982*b*, 1983), defined by (3*a*, *d*) and $s(0) = 0$ is given by:

$$\theta(x, t) = \theta_0 - \frac{\theta_0}{f(\eta)} f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{15}$$

$s(t) = 2a\,\eta\sqrt{t}$ frontera libre (free boundary)

donde η es la única solución de la ecuación:

where η is the only solution for the equation:

$$x\, f(x) \exp(x^2) = \frac{\mathrm{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0 . \tag{16}$$

En dicho caso, la constante H_0 viene dada, a través de (3*e*), por

In such case, the constant H_0 is derived from (3*e*) by:

$$H_0 = -\frac{\delta\,\theta}{\delta x}(0, t)\sqrt{t} = \frac{\theta_0}{a\, f(\eta)\sqrt{\pi}} \tag{17}$$

y por lo tanto el primer miembro de (8) está dado por

and thus, the first member of (8) is given by:

$$\frac{\theta_0}{2\sigma H_0} = \frac{\sqrt{\pi}\, f(\eta)}{2 \quad \eta}. \tag{18}$$

Debido a la siguiente propiedad de la función de error $f(x) < \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, \forall x > 0$, la desigualdad (8) se verifica automáticamente. Cabe recalcar que esto no siempre ocurre, obteniéndose de este modo propiedades adicionales (en forma de desigualdades) que deben verificar todos los materiales (ver, por ejemplo, en D. A. Tarzia (1983) la desigualdad (28) que se transforma en (32) la cual resulta ser una propiedad del sistema).

Observación 4

Si luego de determinar los coeficientes desconocidos de un material a través de un problema de frontera móvil, caracterizada por el elemento σ_m, se plantea el problema clásico de Lamé-Clapeyron (Stefan) sin coeficientes desconocidos cuya frontera libre estará caracterizada por el elemento σ_ℓ, entonces se demuestra que dichas fronteras coinciden como funciones del tiempo. Esto se logra mostrando previamente que $\eta = \xi$ (ver Observación 3) y por ende $\sigma_\ell = \sigma_m$.

Observación 5

Si el coeficiente k es conocido entonces la idea de este trabajo (definido con la constante H_0) para la determinación de coeficientes desconocidos de un material a través de un cambio de fase coincide con la de D. A. Tarzia (1982*b*, 1983) (definido con la constante h_0) a través de la relación $h_0 = k H_0$.

Observación 6

Para el cálculo del coeficiente H_0, es necesaria la determinación experimental de la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x = 0$ con la condición (3*d*) de temperatura constante. En cambio, según la formulación de D. A. Tarzia (1982*b*, 1983), para el cálculo del coeficiente h_0, es necesaria la determinación experimental del flujo de calor en $x = 0$. Se considera que esta nueva variante pueda simplificar en parte los resultados experimentales requeridos para la aplicación del método.

Observación 7

Con la metodología del presente trabajo, no es posible la determinación única del triple

Due to the following property of the error function: $f(x) < \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, \forall x > 0$, inequality (8) is automatically verified. Note that this is not always the case, therefore additional properties (in the form of inequalities), which all the materials must verify, are obtained. (See for instance in D. A. Tarzia (1983) inequality (28) which becomes (32) and that turns out to be one of the properties of the system).

Remark 4

If, after stating the unknown coefficients of a material by means of a moving boundary problem characterized by the element σ_m, the classical Lamé-Clapeyron problem (Stefan) is established, the free boundary of which will be characterized by the element σ_ℓ. then, the fact that such boundaries coincide as functions of time, is here proved. This is achieved by previously pointing out that $\eta = \xi$ (see Remark 3), and thus $\sigma_\ell = \sigma_m$.

Remark 5

If the coefficient k is known, then the idea of the present paper (defined by the constant H_0) for the determination of unknown coefficients of a material through a phase change, coincides with that of D. A. Tarzia (1982 *b*, 1983) (defined by the constant h_0) by means of the relation $h_0 = k H_0$.

Remark 6

For the calculation of the coefficient H_0, the experimental determination of the temperature gradient on the fixed face $x = 0$ with the condition (3*d*) of constant temperature is necessary. On the other hand, according to Tarzia's formulation (1982*b*, 1983) the experimental determination of the heat flow in $x = 0$ is necessary for the calculation of the coefficient h_0. It is held that this new variant may to some extent simplify the experimental results required for the application of the present method.

Remark 7

By the use of the methodology developed in the present paper, the only determination of

$\{\theta\ (x,\ t),\ k,\ \rho\}$, en cambio sí lo era con la de D. A. Tarzia (1983), (ver la fórmula (13) para la determinación simultánea de k, ρ). Más aún, bajo ciertas condiciones existen infinitas soluciones.

Observación 8

Utilizando un desarrollo similar al del presente trabajo en un problema inverso de Stefan a dos fases, es posible determinar simultáneamente dos coeficientes desconocidos (correspondientes a la fase sólida y/o líquida) de un material semi-infinito, definiéndose de este modo una nueva variante de la dada en M. B. Stampella y col. (1981).

Observación 9

El Arbitro recalca que la ley para la frontera móvil, compatible con el problema (3), está dada necesariamente por (2) y que si se pudiera conocer otro dado, como ser el dado por $H_1 = \theta_x\ (s\ (t),\ t)\ \sqrt{t}$, entonces se podría calcular un tercer parámetro desconocido.

the triplets $\{\theta\ (x,\ t),\ k,\ \rho\}$ is not possible, whereas it is possible if we refer to the method in D. A. Tarzia (1983). (For the simultaneous determination of k, ρ see formula (13)). Moreover, under certain conditions there exist infinite solutions.

Remark 8

Through the use of a development similar to the one presented in this paper for a inverse two-phase Stefan problem, it is possible to determine simultaneously two unknown coefficients (corresponding to a solid and/or liquid phase) of a semi-infinite material, thus obtaining a new variant, different from that given in M. B. Stampella et al. (1981).

Remark 9

The Referee emphasises that the law given for the moving boundary, compatible with problem (3), is necessarily given by (2) and that should another datum be known, as for instance the one given by $H_1 = \theta_x\ (s\ (t),\ t)\ \sqrt{t}$, then a third unknown parameter could be calculated.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SUBCYT-CONICET (Argentina) a través del Proyecto "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática". Agradezco al Arbitro por todos los comentarios y discusiones tenidas por el presente trabajo.

Acknowledgments

This work has been partially financed by SUBCYT-CONICET (Argentina) through the project "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática". I thank the Referee for all the commentaries and discussions held as regards this paper.

Nomenclatura / **Nomenclature**

calor específico	c	specific heat
función de error	f	error function
función definida por (11)	G	function defined by (11)
conductividad térmica	k	thermal conductivity
calor latente de fusión	ℓ	latent heat of fusion
coeficiente definido por (1)	H_0	coefficient defined by (1)
número de Stefan	$\mathrm{Ste} = \dfrac{c\,\theta_0}{\ell}$	Stefan's number
posición de la frontera de cambio de fase	s	phase change boundary position
tiempo	t	time
coordenada	x	ordinate

Letras griegas	*Greek letters*	
difusividad ($= a^2$)	$\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$	diffusivity ($= a^2$)
densidad de masa	ρ	mass density
coeficiente definido por (2)	σ	coefficient defined by (2)
temperatura	θ	temperature
temperatura del borde fijo $x = 0$	θ_0	temperature of the fixed face $x = 0$
parámetro adimensional	$\xi = \dfrac{\sigma}{a}(\eta)$	dimensionless parameter

Referencias / References

Brillouin, M.: "Sur quelques problèmes non résolus de physique mathématique classique: propagation de la fusion", Ann. Inst. H. Poincaré, 1: 285-308, (1930-31).

Cannon, J. R.: "Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation", DukeMath. J., 30: 313-323, (1963).

Cannon, J. R.: "Determination of certain parameters in heat conduction problems", J. Math. Anal. Appl., 8: 188-201, (1964).

Cannon, J. R. and Duchateau, P. C.: "Determination of unknown physical properties in heat conduction problems", Int. J. Eng. Sci., 11: 783-794 (1973).

Cannon, J. R. and Duchateau, P. C.: "Determining unknown coefficients in a nonlinear heat conduction problem", SIAM J. Appl. Math., 24: 298-314, (1973).

Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: "Conduction of heat in solids", Oxford University Press (Clarendon), London, (1959).

Jones, B. F., Jr.: "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness", J. Math. Mech., 11: 907-918, (1962).

Jones, B. F., Jr.: "Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations", Comm. Pure Appl. Math., 6: 33-44, (1963).

Lamé, G. and Clapeyron, B. P.: "Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", Ann. Chim. Phys, 47: 250-256, (1831).

Rubinstein, L. I.: "The Stefan Problem, Translation of Mathematical Monographs", Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, (1971).

Stampella, M. B. and Tarzia, D. A.: "Determinación de coeficientes desconocidos en el problema de Stefan a dos fases", 1[as] Jornadas Latinoamericanas de Matemática Aplicada, Santiago (Chile), 14-16 dic. 1981. Revista de Matemática Aplicada SIGMA, 8: 83-98 (1982).

Tarzia, D. A.: "An inequality for the coefficient σ for the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math., 39: 491-497, (1981-2).

Tarzia, D. A.: "Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)", Adv. Appl. Math., 3: 74-82 (1982).

Tarzia, D. A.: "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J. Heat Mass Transfer, 26: 1151-1157 (1983).

Weber, H.: "Die partiellen differential-gleinchungen der mathematischen physik, nach Riemman's Vorlesungen", T. II, Braunwschweig, (1901).

Recibido: Noviembre 5, 1982
Aceptado: Junio 15, 1983

Received: November, 5, 1982
Accepted: June 14, 1983