

CLAMI

CENTRO LATINOAMERICANO DE MATEMATICA E INFORMATICA

5

**INTRODUCCION
A LAS INECUACIONES
VARIACIONALES
ELIPTICAS Y
SUS APLICACIONES
A PROBLEMAS
DE FRONTERA LIBRE**

Domingo Alberto Tarzia

**INTRODUCCION
A LAS INECUACIONES
VARIACIONALES
ELIPTICAS Y
SUS APLICACIONES
A PROBLEMAS
DE FRONTERA LIBRE**

Domingo Alberto Tarzia

Copyright by CONICET
*Queda hecho el depósito que marca
la ley 11.732*
Registro de la Propiedad Intelectual en trámite
Buenos Aires – 1981

INDICE

CAPITULO I

INECUACIONES VARIACIONALES ELIPTICAS EN ESPACIOS DE HILBERT.

- | | | |
|----|---|----|
| 1. | Proyección sobre un conjunto convexo y cerrado en un espacio de Hilbert. | 6 |
| 2. | Inecuación variacional con forma bilineal, continua, coercitiva y simétrica. | 17 |
| 3. | Inecuación variacional con forma bilineal, continua, coercitiva y no simétrica. | 21 |
| 4. | Aplicaciones. | 31 |

CAPITULO II

MINIMIZACION DE FUNCIONALES E INECUACIONES VARIACIONALES.

- | | | |
|----|---|----|
| 1. | Minimización de funcionales. | 43 |
| 2. | Diferenciabilidad según Gâteaux y sus aplicaciones | 47 |
| 3. | Relación entre problemas de mínimo e inecuaciones variacionales | 55 |

CAPITULO III

PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE.

- | | | |
|----|--------------------------------------|-----|
| 1. | Problema de la pared semi-permeable. | 71 |
| 2. | Problema del obstáculo. | 88 |
| 3. | Fluido visco-plástico de Bingham. | 106 |
| 4. | Semiconductores bajo una unión P-N. | 142 |
| 5. | Problema del dique poroso. | 154 |
| 6. | Problema de Stefan a dos fases. | 173 |

- | | | |
|--|-----------------------------|------------|
| | <i>BIBLIOGRAFIA.</i> | 199 |
|--|-----------------------------|------------|

CAPITULO I

INECUACIONES VARIACIONALES ELIPTICAS EN ESPACIOS DE HILBERT

El estudio de numerosos problemas en la Mecánica y en la Física son llevados a la búsqueda de una solución de la siguiente inecuación:

$$(1) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq L(v-u) , \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

donde

$$(2) \quad \begin{cases} V : \text{espacio de Hilbert,} \\ K \subset V , \text{ convexo, cerrado y no vacío,} \\ a : \text{forma bilineal,} \\ L : \text{forma lineal.} \end{cases}$$

Más adelante se verán cuáles deben ser las hipótesis complementarias a (2) para que el problema (1) tenga solución y además sea única.

El problema (1) recibe el nombre de *inecuación variacional estacionaria* (tipo elíptico), para distinguirla de las inecuaciones variacionales de evolución (tipo parabólico o hi-

perbólico) en las cuales se hace intervenir la variable temporal.

OBSERVACION 1.

En todo este curso se tratarán solamente las inecuaciones variacionales estacionarias o elípticas (brevemente *inecuaciones variacionales* ya sea desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones a problemas de frontera libre. ■

Numerosos otros problemas han sido estudiados a través de esta formulación, siendo [D3] un primer libro, ya clásico, sobre el tema. También pueden citarse los recientes libros [B6, K1].

El estudio de la inecuación variacional (1) se analizará a través de casos particulares para llegar finalmente al caso más general conocido como Teorema de Stampacchia [S1] o su nueva versión, el Teorema de Lions-Stampacchia [L4]. Se obtendrá también el clásico resultado del Lema de Lax-Milgran para ecuaciones variacionales. ■

1. PROYECCION SOBRE UN CONJUNTO CONVEXO Y CERRADO EN UN ESPACIO DE HILBERT:

Sean

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} V : \text{espacio de Hilbert real con producto escalar} \\ \quad (\cdot , \cdot) \text{ y norma } \| \cdot \| , \\ K \subset V : \text{conjunto convexo, cerrado y no vacio de } V. \end{array} \right.$$

OBSERVACION 2.

Por definici3n, el conjunto K es *convexo* \Leftrightarrow

$$tu_1 + (1-t)u_2 \in K, \quad \forall u_1, u_2 \in K, \quad \forall t \in [0,1]. \quad \blacksquare$$

LEMA 1.

Para cada $x \in V$ existe un 3nico elemento $u \in K$ tal que

$$(4) \quad \|u - x\| = d(x, K)$$

donde

$$(5) \quad d(x, K) = \inf_{v \in K} \|v - x\| \quad (\text{distancia del elemento } x \text{ al conjunto } K)$$

Demostraci3n:

Sea $d = d(x, K) \geq 0$; por definici3n de d se tiene:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in K / \|u_n - x\| < \sqrt{d^2 + \frac{1}{n^2}}$$

i) (u_n) es una sucesión de Cauchy en V :

Aplicando la ley del paralelogramo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_n - u_m}{2} \right\|^2 &= \left\| \frac{(u_n - x) - (u_m - x)}{2} \right\|^2 = \\ &= 2 \left\| \frac{u_n - x}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{u_m - x}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{u_n + u_m}{2} - x \right\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(d^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(d^2 + \frac{1}{m^2} \right) - d^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

es decir:

$$\|u_n - u_m\| \leq \sqrt{2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right)}$$

lo cual implica que (u_n) es una sucesión de Cauchy en V .

ii) $\exists u \in K / \|u - x\| = d$:

Como (u_n) es una sucesión de Cauchy, y como V es un espacio completo se tiene la existencia de un elemento $u \in V$ tal que

$u_n \longrightarrow u$ en V .

Como $u_n \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y K es cerrado se tiene además $u \in K$.

Entonces:

$$d \leq \|u - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x\| \leq d$$

es decir $d = \|u - x\|$.

iii) El conjunto $S = \{v \in K / \|v - x\| = d\}$ es cerrado, convexo y no vacío. (Ejercicio 1).

iv) $S = \{u\}$, donde u está definido en ii):

Supongamos que $u_1, u_2 \in S$, entonces usando el hecho que el elemento $\frac{u_1 + u_2}{2} \in S$, se tiene

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \|(u_2 - x) - (u_1 - x)\|^2 = 2\|u_2 - x\|^2 + 2\|u_1 - x\|^2 - 4\left\|\frac{u_1 + u_2}{2} - x\right\|^2 = 0$$

es decir $u_1 = u_2$.

Como $u \in S$, debe ser necesariamente $S = \{u\}$. ■

OBSERVACION 3.

Al único elemento $u \in K$ que verifica el Lema anterior se lo nota:

$$(6) \quad u = P_K(x) : \text{proyección de } x \text{ sobre } K$$

y al operador

$$P_K : x \in V \longrightarrow P_K(x) \in K$$

se lo llama *operador proyección sobre K*. ■

OBSERVACION 4.

Es evidente que si $x \in K$, entonces $u = P_K(x) = x$. ■

A continuación se da una caracterización para el elemento $u = P_K(x)$ en términos del producto escalar en V .

LEMA 2.

$$u = P_K(x) \Leftrightarrow (7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u-x, v-u) \geq 0, \forall v \in K \\ u \in K. \end{array} \right.$$

Demostración:

⇒) Sea $v \in K$ y sea $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por

$$F(t) = \|t v + (1-t)u - x\|^2 = \|u + t(v-u) - x\|^2$$

que tiene la siguiente propiedad:

$$F(0) \leq F(t) , \forall t \in [0,1].$$

Por otra parte $F(t)$ viene expresada por

$$\begin{aligned} F(t) &= (u + t(v-u) - x, u + t(v-u) - x) = \\ &= \|u\|^2 + \|x\|^2 - 2(u, x) + 2(u-x, v-u)t + \|v-u\|^2 t^2 \end{aligned}$$

y su derivada resulta ser:

$$F'(t) = 2(u-x, v-u) + 2\|v-u\|^2 t$$

Por ser $t = 0$ punto de mínimo absoluto de F en el intervalo $[0,1]$ debe ser necesariamente $F'(0) \geq 0$, de lo cual se obtiene (7).

$$\begin{aligned} \Leftarrow) \quad \|v-x\|^2 &= \|(v-u)-(x-u)\|^2 = \|v-u\|^2 + \|x-u\|^2 - 2(v-u, x-u) \geq \\ &\geq \|v-u\|^2 \quad , \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

de lo cual surge que $u = P_K(x)$. ■

OBSERVACION 5:

De los Lemas 1 y 2 se deduce:

dado $x \in V$, $\exists!$ $u \in K$ solución de la inecuación variacional:

$$(8) \quad \begin{cases} (u, v-u) \geq (x, v-u) \quad , \quad \forall v \in K \\ u \in K \quad . \quad \blacksquare \end{cases}$$

OBSERVACION 6:

De acuerdo a la definición general (1) de inecuación variacional, la (8) es un caso particular tomando:

$$(9) \quad \begin{cases} a(u, v) = (u, v) \quad , \quad \forall u, v \in V \\ L(v) = (x, v) \quad , \quad \forall v \in V \quad . \quad \blacksquare \end{cases}$$

LEMA 3.

El operador proyección P_K es un operador no expansivo, es decir:

$$(10) \quad \begin{cases} P_K: V \longrightarrow K \subset V / \\ \|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x-y\| \quad , \quad \forall x,y \in V. \end{cases}$$

Demostración:

Por definición de $P_K(x)$ y $P_K(y)$ con $x,y \in V$, se tienen:

$$i) \quad \begin{cases} (P_K(x), v - P_K(x)) \geq (x, v - P_K(x)) \quad , \quad \forall v \in K \\ P_K(x) \in K . \end{cases}$$

$$ii) \quad \begin{cases} (P_K(y), v - P_K(y)) \geq (y, v - P_K(y)) \quad , \quad \forall v \in K \\ P_K(y) \in K . \end{cases}$$

Si se toma $v = P_K(y) \in K$ en i), y $v = P_K(x) \in K$ en ii) y se suman ambas desigualdades, se obtiene:

$$(P_K(x) - P_K(y), P_K(y) - P_K(x)) \geq (x - y, P_K(y) - P_K(x))$$

es decir:

$$\begin{aligned}
\|P_K(x) - P_K(y)\|^2 &= (P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)) \leq \\
&\leq (y - x, P_K(y) - P_K(x)) \leq \\
&\leq \|y - x\| \|P_K(y) - P_K(x)\|
\end{aligned}$$

de donde surge (10). ■

OBSERVACION 7.

De (10) se deduce que P_K es un operador continuo. ■

EJERCICIO 2.

Se dice que K es un cono convexo de vértice u_0 si y sólo si:

- i) K es un conjunto convexo.
- ii) $\forall v \in K$, la semirrecta de extremo u_0 que pasa por v está contenida en K , es decir:
$$u_0 + \lambda(v - u_0) \in K, \forall v \in K, \forall \lambda \geq 0.$$

i) Si K es un cono convexo ^{cerrado} de vértice 0 del espacio de Hilbert V , entonces:

$$u = P_K(x) \Leftrightarrow (11) \begin{cases} (u-x, v) \geq 0, \forall v \in K \\ (u-x, u) = 0 \\ u \in K \end{cases}$$

ii) Si K es un subespacio vectorial de V , entonces:

$$u = P_K(x) \Leftrightarrow (12) \quad \begin{cases} (u-x, v) = 0, \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \blacksquare$$

EJERCICIO 3.

Sean:

$$(13) \quad \begin{cases} \Omega : \text{dominio acotado de } \mathbb{R}^3, \\ V = L^2(\Omega) : \text{espacio de Hilbert,} \\ (f, g) = \int_{\Omega} f g \, dx : \text{producto escalar en } V, \\ K = \{v \in V / v \geq \phi \text{ en c.t.p.}\}, \\ f, \phi \in V. \end{cases}$$

Verificar que la única solución $u \in K$ de la inecuación variacional:

$$(14) \quad \begin{cases} (u, v-u) \geq (f, v-u), \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

está dada por:

$$(15) \quad u = \max(f, \phi) = f + (\phi - f)^+ = \phi + (f - \phi)^+ \blacksquare$$

OBSERVACION 8.

En las ecuaciones diferenciales, la solución será tanto más regular cuanto más regulares sean los datos del problema. En cambio, en las inecuaciones variacionales la regularidad de la solución aumentará cuando los datos sean más regulares, pero no podrá, en general, pasar una cierta regularidad. Esto puede analizarse con el ejercicio 3, pues basta tomar datos muy regulares, por ejemplo $f, \phi \in C^\infty(\Omega)$, y sin embargo la solución $u = \max(f, \phi)$ puede no pertenecer a $C^1(\Omega)$. Esta es una diferencia notable que distingue las ecuaciones de las inecuaciones. ■

A continuación se verá una aplicación de los Lemas 1 y 2 a una inecuación variacional un poco "más general" que (8).

Sean:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} (3) \\ L \in V' \text{ (} L: V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineal y continua).} \end{array} \right.$$

LEMA 4.

Bajo las hipótesis (16) existe un único elemento $u \in K$ solución de la inecuación variacional:

$$(17) \quad \begin{cases} (u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K \\ u \in K. \end{cases}$$

Demostración:

Como $L \in V'$, existe, por el Teorema de representación de Riesz, un único elemento $x_L \in V$ tal que

$$(18) \quad L(v) = (x_L, v), \quad \forall v \in V.$$

Entonces:

$$(17) \Leftrightarrow (19) \quad \begin{cases} (u, v-u) \geq (x_L, v-u), \quad \forall v \in K \\ u \in K. \end{cases} \quad (u = P_K(x_L))$$

Como (19) tiene única solución, la inecuación variacional (17) también tendrá única solución, la cual está caracterizada por (19) donde x_L es el único elemento que verifica (18). ■

2. INECUACION VARIACIONAL CON FORMA BILINEAL, CONTINUA, COERCITIVA Y SIMETRICA

$$\text{Sean} \quad (20) \quad \begin{cases} (3) \\ L \in V' \quad (L: V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineal y continua}) \\ a: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ forma bilineal.} \end{cases}$$

Se supone además:

i) *a* continua, es decir:

$$(21) \quad \exists M > 0 / |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \forall u,v \in V.$$

ii) *a* coercitiva (o *V*-elíptica), es decir:

$$(22) \quad \exists \alpha > 0 / a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V.$$

iii) *a* simétrica, es decir:

$$(23) \quad a(u,v) = a(v,u), \forall u,v \in V.$$

OBSERVACION 9.

De (21) y (22) se obtiene:

$$(24) \quad \alpha \leq M \quad \blacksquare$$

OBSERVACION 10.

Si $a(u,v) = (u,v)$, entonces *a* es una forma bilineal, continua, simétrica y coercitiva sobre *V*, con $\alpha = M = 1$. ■

Se considera el siguiente problema:

$$(25) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq L(v-u) , \forall v \in K \\ u \in K . \end{cases}$$

LEMA 5.

Si $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, simétrica, continua y coercitiva, entonces:

$$(26) \quad ((u, v)) = a(u, v)$$

es un producto escalar sobre V .

Demostración:

Ejercicio 4. ■

OBSERVACION 11.

Sea

$$(27) \quad |||v||| = \sqrt{((v, v))} = \sqrt{a(v, v)}$$

la norma generada sobre V por el producto escalar (26). Entonces $||| \cdot |||$ es equivalente a $\| \cdot \|$ en V , pues se tiene:

$$(28) \quad \alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = |||v|||^2 \leq M \|v\|^2 , \forall v \in V. \blacksquare$$

LEMA 6.

Bajo las hipótesis (20), (21), (22) y (23), la inecuación variacional (25) tiene una única solución $u \in K$.

Demostración:

Por la observación 11), L es también continua en V con la topología generada por la norma $\| \cdot \|$.

Por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $x'_L \in V$ tal que:

$$(29) \quad L(v) = ((x'_L, v)) \quad , \quad \forall v \in V .$$

De (26) y (29) resulta:

$$(25) \Leftrightarrow (30) \quad \begin{cases} ((u, v-u)) \geq ((x'_L, v-u)) \quad , \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

que tiene única solución:

$$(31) \quad u = P'_K(x'_L)$$

donde P'_K representa el operador proyección $P'_K: V \longrightarrow K$ con respecto al producto escalar $((\cdot , \cdot))$ y x'_L es el elemento de-

finido por (29). ■

OBSERVACION 12.

Hasta ahora los varios tipos de inecuaciones variacionales considerados han sido estudiados a través de un operador proyección sobre K . Este método no será aplicable para el caso general en que la forma bilineal a no sea simétrica pues en dicho caso (26) no representa un producto escalar en V . ■

3. INECUACION VARIACIONAL CON FORMA BILINEAL CONTINUA, COERCITIVA Y NO SIMETRICA.

Se tratará de llevar el estudio de la inecuación variacional (25), cuando a es no simétrica, a un problema de punto fijo. Para ello:

LEMA 7. (Teorema del punto fijo):

Si V es un espacio métrico completo con distancia d y $T: V \rightarrow V$ es una *contracción*, es decir:

$$(32) \exists 0 < k < 1 / d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y), \forall x, y \in V$$

entonces:

$$(33) \quad \exists ! x \in V / T(x) = x .$$

Demostración:

Sea $x_0 \in V$ un elemento arbitrario y sea (x_n) la sucesión de elementos de V definida por:

$$(34) \quad \begin{cases} x_{n+1} = T(x_n) \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Entonces:

i) (x_n) es una sucesión de Cauchy en V :

Como $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1})$, $\forall n \geq 1$, repitiendo el proceso de obtiene:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \dots + k^n) d(x_1, x_0) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} k^i d(x_1, x_0) = \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

pues:

$$\sum_{i=n}^{+\infty} k^i = \sum_{i=0}^{+\infty} k^i - \sum_{i=0}^{n-1} k^i = \frac{1}{1-k} - \frac{1-k^n}{1-k} = \frac{k^n}{1-k} .$$

Por lo tanto (x_n) es una sucesión de Cauchy en V .

ii) $\exists x \in V / T(x) = x$:

De i) surge la existencia de un elemento $x \in V$ tal que:

$$x_n \longrightarrow x \text{ en } V \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0).$$

Por ser T una contracción, T es una aplicación continua y se tiene $T(x) = x$.

iii) *Unicidad.*

Sean x y x' dos puntos fijos de T , entonces

$$0 \leq d(x, x') = d(T(x), T(x')) \leq k d(x, x')$$

lo cual implica que $d(x, x') = 0$, es decir $x = x'$.

iv) *Estimación del error $d(x_n, x)$:*

De las relaciones obtenidas, se deduce además la estimación:

$$(35) \quad d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

que decrece como una progresión geométrica de razón k ($0 < k < 1$). ■

Se pasará ahora al estudio de la inecuación variacional (25) bajo las hipótesis⁽³⁾ (20), (21) y (22).

Se darán, debido a la gran importancia que ambas tienen, dos demostraciones de la existencia de la solución del problema (la demostración de la unicidad es válida para ambas) una de bida a [S1] y la otra a [L4].

LEMA 8. (Teorema de Stampacchia).

Bajo las hipótesis⁽³⁾ (20), (21) y (22), la inecuación variacional (25) tiene una única solución.

Demostración:

i) *Unicidad.*

Si se supone que $u_1, u_2 \in K$ son dos soluciones de (25), entonces si se toma $v = u_2 \in K$ en la inecuación variacional correspondiente a u_1 , y $v = u_1 \in K$ en la inecuación variacional correspondiente a u_2 y se suman ambas desigualdades se

obtiene:

$$- a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \geq 0$$

de donde:

$$0 \leq \alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

es decir

$$u_2 = u_1 .$$

ii) *Existencia.*

Sean

$$(36) \quad \begin{cases} a_0(u, v) = \frac{a(u, v) + a(v, u)}{2} \\ b(u, v) = \frac{a(u, v) - a(v, u)}{2} \end{cases}$$

de manera que:

$$a(u, v) = a_0(u, v) + b(u, v) , \forall u, v \in V .$$

Entonces (Ejercicio 5):

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } a_0 \text{ es un forma bilineal, simétrica, continua (con igual constante } M) \text{ y coercitiva (con igual constante } \alpha). \\ \text{ii) } b \text{ es una forma bilineal, continua (con igual constante } M) \text{ y antisimétrica.} \end{array} \right.$$

Sea:

$$(37) \quad \begin{cases} a_t(u,v) = a_0(u,v) + t b(u,v) , \forall u,v \in V \\ t \geq 0 . \end{cases}$$

Se considera el siguiente problema:

$$(38) \quad \begin{cases} a_t(u,v-u) \geq L(v-u) , \forall v \in K \\ u \in K . \end{cases}$$

Se tiene:

$$(38) \Leftrightarrow (39) \quad \begin{cases} a_0(u,v-u) \geq L(v-u) - t b(u,v-u) , \forall v \in K \\ u \in K . \end{cases}$$

Sean:

$$(40) \quad \begin{cases} w \in V \\ F_w: V \longrightarrow \mathbb{R} / F_w(v) = L(v) - t b(w,v) . \end{cases}$$

Como $F_w \in V'$ ($\forall w \in V$) existe única solución $u_w \in K$ de la inequación variacional:

$$(41) \quad \begin{cases} a_0(u_w, v-u_w) \geq F_w(v-u_w) , \forall v \in K \\ u_w \in K . \end{cases}$$

Sea

$$(42) \quad T: V \longrightarrow K / T(w) = u_w \in K.$$

Se verá que para determinados valores de t , T es una contracción.

Sean:

$$\begin{cases} u_1 = T(w_1) , w_1 \in V \\ u_2 = T(w_2) , w_2 \in V \end{cases}$$

entonces, si se elige $v = u_2 \in K$ en (41) correspondiente a u_1 y $v = u_1$ en (41) correspondiente a u_2 , se tienen:

$$\begin{cases} a_o(u_1, u_2 - u_1) \geq L(u_2 - u_1) - t b(w_1, u_2 - u_1) \\ a_o(u_2, u_1 - u_2) \geq L(u_1 - u_2) - t b(w_2, u_1 - u_2) \end{cases}$$

que sumadas dan:

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a_o(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq t b(w_2 - w_1, u_2 - u_1) \leq t M \|w_2 - w_1\| \|u_2 - u_1\|$$

es decir:

$$\|T(w_2) - T(w_1)\| = \|u_2 - u_1\| \leq \frac{M}{\alpha} t \|w_2 - w_1\|$$

Sea $t_0 > 0$ tal que:

$$(43) \quad \frac{t_0 M}{\alpha} = k < 1 \quad (0 < t_0 < \frac{\alpha}{M})$$

entonces T es una contracción para t_0 , es decir que la inecuación variacional (39) (o su equivalente (38)) tiene una única solución $u \in K$ para $0 \leq t \leq t_0$.

Teniendo en cuenta que $a_t(u,v) = a_{t_0}(u,v) + (t-t_0) b(u,v)$ para $t \geq t_0$, y repitiendo el proceso realizado, la inecuación variacional (38) tiene única solución para $0 \leq t \leq nt_0$ (n : número de iteraciones), con lo cual la inecuación variacional (25) tendrá una solución (basta tomar $n / nt_0 \geq 1$). ■

LEMA 9. (Teorema de Lions-Stampacchia).

Bajo las hipótesis (20), (21) y (22), la inecuación variacional (25) tiene una única solución.

Demostración.

La unicidad se demuestra de manera análoga a lo hecho en el lema 8.

Para la existencia se tiene en cuenta el Teorema de Represen

tación de Riesz, del cual surgen:

$$(44) \quad \begin{cases} \text{i) } \exists A:V \rightarrow V \text{ lineal y continuo / } a(u,v) = (Au,v), \forall u,v \in V \\ \text{ii) } \exists f \in V / L(v) = (f,v), \forall v \in V \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$(25) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (Au, v-u) \geq (f, v-u), \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(Au-f, v-u) \geq 0, \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \quad (\rho > 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ([u-\rho(Au-f)]-u, v-u) \leq 0, \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \quad (\rho > 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (45) \quad u = P_K(u-\rho(Au-f)), \quad \rho > 0.$$

El problema (45) tendrá solución si se verifica que la aplicación:

$$(46) \quad T: V \longrightarrow K / T(v) = P_K(v-\rho(Av-f))$$

es una contracción para algún $\rho > 0$.

Como P_K es un operador no expansivo, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \|T(v_2) - T(v_1)\|^2 &= \|P_K(v_2 - \rho(Av_2 - f)) - P_K(v_1 - \rho(Av_1 - f))\|^2 \leq \\
 &\leq \|v_2 - \rho(Av_2 - f) - v_1 + \rho(Av_1 - f)\|^2 = \|(v_2 - v_1) - \rho A(v_2 - v_1)\|^2 = \\
 &= \|v_2 - v_1\|^2 - 2\rho(v_2 - v_1, A(v_2 - v_1)) + \rho^2 \|A(v_2 - v_1)\|^2 \leq \\
 &\leq \|v_2 - v_1\|^2 - 2\rho a(v_2 - v_1, v_2 - v_1) + \rho^2 M^2 \|v_2 - v_1\|^2 \leq \\
 &\leq (1 - 2\alpha\rho + M^2 \rho^2) \|v_2 - v_1\|^2,
 \end{aligned}$$

es decir:

$$(47) \quad \begin{cases} \|T(v_2) - T(v_1)\|^2 \leq g(\rho) \|v_2 - v_1\|^2 \\ g(\rho) = 1 - 2\alpha\rho + M^2 \rho^2. \end{cases}$$

Tomando

$$(48) \quad 0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$$

resulta ser T una contracción ($0 \leq g(\rho) < 1$) con lo cual se demuestra la existencia de la solución de (45) o su equivalente (25). ■

4. APLICACIONES

A continuación veremos algunas consecuencias de los resultados anteriores que serán utilizados en próximos capítulos.

LEMA 10.

Bajo las hipótesis (20), (21) y (22), se tiene la siguiente equivalencia:

$$(25) \Leftrightarrow (49) \begin{cases} a(v, v-u) \geq L(v-u) , \forall v \in K \\ u \in K . \end{cases}$$

Demostración.

\Rightarrow) Como $a(v-u, v-u) \geq \alpha \|v-u\|^2 \geq 0$, se tiene

$a(v, v-u) \geq a(u, v-u) \geq L(v-u) , \forall v \in K$, con lo cual u es solución de (49).

\Leftarrow) Sean $w \in K$ y $0 \leq t < 1$.

Si se elige $v = (1-t)w + tu \in K$ en (49), se tiene:

$a((1-t)w+tu, w-u) \geq L(w-u) , \forall w \in K , \forall 0 \leq t < 1 ,$

y pasando al límite, cuando $t \rightarrow 1$, se obtiene:

$$\begin{cases} a(u, w-u) \geq L(w-u) , \forall w \in K \\ u \in K \end{cases}$$

con lo cual u es solución de (25). ■

OBSERVACION 13.

La equivalencia (25) \Leftrightarrow (49) es cierta aún en el caso en que la forma bilineal a no sea coercitiva pero si *semidefinida positiva*, es decir:

$$(50) \quad a(v, v) \geq 0 , \forall v \in V.$$

La dificultad que se tiene con la hipótesis (50) en lugar de (22) es no poder asegurar, en general, la existencia y unicidad de la solución de la inecuación variacional (25).

Para mayores detalles sobre el tema ver [L4, S2]. ■

EJERCICIO 6.

Sea $\mathcal{L}: K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}(v, w) = a(v, v-w) - L(v-w).$$

Bajo las hipótesis (20), (21) y (22), se tiene:

i) (u,u) es un punto de ensilladura de \mathcal{L} , es decir:

$$(52) \quad \mathcal{L}(u,w) \leq \mathcal{L}(u,u) \leq \mathcal{L}(v,u) \quad , \quad \forall v,w \in K$$

donde u es la única solución de (25).

Más aún: $\mathcal{L}(u,u) = 0$.

ii) Si (u_1, u_2) es un punto de ensilladura de \mathcal{L} , entonces:

$$\begin{cases} \text{a)} & u_2 \text{ es solución de (49) (o de (25))} . \\ \text{b)} & u_2 = u_1 \quad . \blacksquare \end{cases}$$

EJERCICIO 7.

i) Si K es un cono convexo de vértice 0 , cerrado y no vacío de V , entonces:

$$(25) \Leftrightarrow (53) \quad \begin{cases} a(u,v) \geq L(v) \quad , \quad \forall v \in K \\ a(u,u) = L(u) \\ u \in K . \end{cases}$$

ii) Si el vértice de K es $u_0 \in V$, entonces:

$$(25) \Leftrightarrow (54) \quad \begin{cases} a(u, v-u_0) \geq L(v-u_0) \quad , \quad \forall v \in K \\ a(u, u-u_0) = L(u-u_0) \\ u \in K \quad . \blacksquare \end{cases}$$

EJERCICIO 8.

Bajo las hipótesis (20), (21) y (22), sea u_i ($i = 1,2$) la única solución de (25) para $L_i \in V'$ ($i = 1,2$). Entonces:

$$i) \quad \|u_2 - u_1\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L_2 - L_1\|_{V'} .$$

ii) Obtener de i) la unicidad de la solución de (25). ■

EJERCICIO 9.

Si $K = V$, entonces:

$$i) \quad (25) \Leftrightarrow (55) \quad \begin{cases} a(u,v) = L(v) , \forall v \in V \\ u \in V . \end{cases}$$

ii) Teniendo en cuenta (44) se tiene:

$$(55) \Leftrightarrow (56) \quad \begin{cases} Au = f \in V \\ u \in V . \end{cases}$$

iii) a coercitiva $\Rightarrow A$ inyectiva. ■

LEMA 11. (Teorema de Lax-Milgram).

Si $K = V$, bajo las hipótesis (20), (21) y (22), existe una única solución $u \in V$ de la ecuación variacional (55).

Demostración.

Surge del Ejercicio 9 y de los lemas 8 y 9. ■

OBSERVACION 14.

Bajo las hipótesis del teorema de Lax-Milgram se deduce que la aplicación A , definida por (44 i), es suryectiva.

Además, utilizando el Ejercicio 9, A es biyectiva con

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha} \quad (\text{ver Ejercicio 8i}). \blacksquare$$

OBSERVACION 15.

En las aplicaciones que se verán más adelante el espacio de Hilbert V utilizado será, según los casos:

- i) $V = H^1(\Omega)$ (Ω : dominio acotado de \mathbb{R}^3) con el producto escalar:

$$(57) \quad (u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx .$$

$$ii) \quad V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

con el producto escalar:

$$(58) \quad (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, dx$$

cuya norma es equivalente a la de $H^1(\Omega)$ (Ver Ejercicio 11).

$$ii) \quad V = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_1} = 0, \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \text{medida}(\Gamma_1) > 0\}$$

con el producto escalar:

$$(59) \quad (u, v)_V = \int_{\Omega} \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, dx$$

cuya norma es equivalente a la de $H^1(\Omega)$ (Ver Ejercicio 11). ■

LEMA 12.

Si a es una forma bilineal continua y semi-definida positiva en un espacio de Hilbert V (ver (50)) entonces

$$v \in V \longrightarrow a(v, v) \in \mathbb{R}$$

es una aplicación semi-continua inferiormente en V débil, es decir:

$$(60) \quad v_n \rightharpoonup v \text{ en } V \text{ débil} \Rightarrow a(v, v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a(v_n, v_n).$$

Demostración.

Se tiene:

$$\begin{aligned} a(v_n, v_n) - a(v, v) &= a(v_n - v, v_n - v) + a(v_n - v, v) + a(v, v_n - v) \geq \\ &\geq a(v_n - v, v) + a(v, v_n - v) \end{aligned}$$

de lo cual surge (60). ■

EJERCICIO 10.

La aplicación

$$v \in V = H^1(\Omega) \longrightarrow \int_{\Gamma} v^2 d\gamma \in \mathbb{R}$$

es semi-continua inferiormente en V débil. ■

LEMA 13.

Existe una constante $c_0 > 0$ /

$$(61) \quad \begin{cases} a_1(v, v) = a(v, v) + \int_{\Gamma_1} v^2 d\gamma \geq c_0 \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V \\ V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega) \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx. \end{cases}$$

Demostración.

Supongamos, por el absurdo, que (61) no es cierta, es decir:

$$\exists v_n \in V / a_1(v_n, v_n) < \frac{1}{n} \|v_n\|_H^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_H}$, entonces:

$$a_1(w_n, w_n) = a(w_n, w_n) + \int_{\Gamma_1} w_n^2 d\gamma < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual:

$$\|w_n\|_V^2 = a(w_n, w_n) + \|w_n\|_H^2 < \frac{1}{n} + 1 \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

es decir que (w_n) es una sucesión acotada en V , en consecuencia existe una subsucesión de (w_n) , aún notada (w_n) , y un elemento $w \in V$ tal que:

$$w_n \rightharpoonup w \text{ en } V \text{ débil}$$

por lo tanto $w_n \rightarrow w$ en H fuerte, con lo cual:

$$\|w\|_H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|_H = 1.$$

Por otra parte, usando el lema 12 y el ejercicio 10, se tienen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a(w, w) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a(w_n, w_n) = 0 \\ 0 \leq \int_{\Gamma_1} w^2 \, d\gamma \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} w_n^2 \, d\gamma = 0 \end{array} \right.$$

es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(w, w) = 0 \\ \int_{\Gamma_1} w^2 \, d\gamma = 0 \end{array} \right.$$

que implica necesariamente $w = 0$, lo cual se contradice con $\|w\|_H = 1$. ■

LEMA 14.

Existe una constante $\lambda_1 > 0$ tal que

$$(62) \quad a_1(v, v) \geq \lambda_1 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Demostración.

Se tiene $\forall v \in V$:

$$\|v\|_V^2 = a(v,v) + \|v\|_{II}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c_0}\right) a_1(v,v)$$

de donde surge (62) con

$$(63) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{c_0}{1+c_0} > 0 \\ c_0 > 0, \text{ constante dada por el Lema 13.} \blacksquare \end{cases}$$

EJERCICIO 11.

- i) La aplicación $v \in V \longrightarrow \sqrt{a_1(v,v)}$ define sobre V una norma equivalente a la de V .
- ii) El conjunto $V_0 = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_1} = 0\}$, con medida $(\Gamma_1) > 0$, es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(u,v)_{V_0} = a(u,v)$, siendo su norma equivalente a la de $H^1(\Omega)$.
- iii) Análogamente, vale ii) para $H_0^1(\Omega)$. ■

EJERCICIO 12.

La aplicación $v \in V \longrightarrow \sqrt{a_\alpha(v,v)}$ define sobre V , para cada

$\alpha > 0$, una norma equivalente a la de v , donde:

$$(64) \quad \begin{cases} a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u v \, d\gamma, \quad \forall u, v \in V \\ V, a \text{ definidos en (61)} \end{cases}$$

que verifica la siguiente propiedad:

$$(65) \quad \begin{cases} a_\alpha(v, v) \geq \lambda_\alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V \\ \lambda_\alpha = \lambda_1 \min(1, \alpha) \quad \blacksquare \end{cases}$$

OBSERVACION 16.

En este curso no se analizará la regularidad de la solución de la inecuación variacional (25) para los ejemplos tratados en el Capítulo III. Para mayores detalles ver los clásicos trabajos de [L1, B7, B8]. ■

CAPITULO II

MINIMIZACION DE FUNCIONALES E INECUACIONES VARIACIONALES

Primeramente se dará un teorema general de minimización de funcionales, luego se introducirá la diferenciabilidad según Gâteaux y se relacionarán principios de mínimo con inecuaciones variacionales [C1,D2,E1,K1,L2,R1,S2,S3,V1].

Se sacarán asimismo conclusiones para funcionales particulares que aparecerán en las aplicaciones a problemas de frontera libre, desarrolladas en el próximo capítulo. ■

1. MINIMIZACION DE FUNCIONALES

LEMA 1.

Sean:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V: \text{ espacio de Banach reflexivo} \\ K \subset V : \text{ conjunto convexo, cerrado y no vacío de } V \\ J: K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ semicontinua inferiormente en } V \text{ débil.} \end{array} \right.$$

Además si se cumple una de las dos hipótesis siguientes:

$$(2) \quad \begin{cases} H_1) & K \text{ acotado} \\ H_2) & \lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty \end{cases}$$

entonces existe al menos un elemento $u \in K$ que produce el mínimo absoluto de J , es decir:

$$(3) \quad \exists u \in K / J(u) \leq J(v) , \forall v \in K .$$

Demostración.

$$\text{Sea } m = \inf_{v \in K} J(v) < +\infty$$

(si $m = +\infty$, la tesis se cumple trivialmente).

Sea u_n una sucesión minimizante, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = m$$

De la hipótesis H_1 o de la hipótesis H_2 surge que $\|u_n\| \leq c$, $\forall n$ ($c > 0$ constante independiente de n).

Por ser V Banach reflexivo entonces existe $u \in V$ y una sub-sucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que:

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ en } V \text{ débil}$$

Como K es convexo y cerrado en V fuerte, es convexo y cerrado en V débil, con lo cual $u \in K$.

Usando el hecho que J es semi-continua inferiormente en V débil, se tiene:

$$m \leq J(u) \leq \liminf_{n_k \rightarrow +\infty} J(u_{n_k}) = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} J(u_{n_k}) = m$$

es decir $J(u) = m$, con $u \in K$. ■

Se dice que el funcional $J: K \rightarrow \mathbb{R}$ (K convexo) es *convexo* (*estrictamente convexo*) \Leftrightarrow

$$(4) \quad J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y), \quad \forall x, y \in K, \quad \forall t \in [0,1]$$

$$(J(tx + (1-t)y) < tJ(x) + (1-t)J(y), \quad \forall x, y \in K (x \neq y), \quad \forall t \in (0,1) \quad \blacksquare$$

LEMA 2.

Bajo las hipótesis del lema 1, se tiene:

i) Si J es convexo, entonces:

$$(5) \quad S = \{u \in K / J(u) = m\}$$

es un conjunto convexo y cerrado.

ii) Si J es estrictamente convexo entonces

$$(6) \quad \exists! u \in K / J(u) \leq J(v), \forall v \in K$$

es decir $S = \{u\}$.

Demostración:

i) a) S es convexo:

Sean $u_1, u_2 \in S$ y $t \in [0,1]$, entonces, por ser K convexo, se tiene: $tu_1 + (1-t)u_2 \in K$.

Además:

$$m \leq J(tu_1 + (1-t)u_2) \leq tJ(u_1) + (1-t)J(u_2) = tm + (1-t)m = m$$

es decir $J(tu_1 + (1-t)u_2) = m$, con lo cual $tu_1 + (1-t)u_2 \in S$

b) S es cerrado:

Sea $(v_n) \subset S / v_n \rightarrow v$ en V fuerte.

Como $v_n \in K$, $\forall n$ y K es cerrado en V fuerte, se

tiene $v \in K$. Además

$$m \leq J(v) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m = m$$

es decir $J(v) = m$, con lo cual $v \in S$.

ii) Ejercicio 1. ■

2. DIFERENCIABILIDAD SEGUN GÂTEAUX Y SUS APLICACIONES.

Sea V un espacio de Banach.

Se dice que $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es *diferenciable según Gâteaux* (*G-diferenciable*) $\Leftrightarrow \forall u \in V$, existe el límite

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = J'(u,v), \quad \forall v \in V.$$

Si el límite $J'(u,v)$ resulta lineal y continuo con respecto a $v \in V$, se llama *derivada según Gâteaux* (o *gradiente*) de J en u a $J'(u) \in V'$ /

$$\langle J'(u), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = J'(u,v). \quad \blacksquare$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades:

LEMA 3.

Sean:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} V \text{ espacio de Banach} \\ K \subset V : \text{conjunto convexo no vacío} \\ J: K \longrightarrow \mathbb{R}, G\text{-diferenciable.} \end{array} \right.$$

Entonces:

$$i) \quad J \text{ es convexa} \Leftrightarrow (9) \quad J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in K.$$

$$ii) \quad J \text{ es estrictamente convexa} \Leftrightarrow$$

$$(10) \quad J(v) - J(u) > \langle J'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in K, u \neq v$$

Demostración.

$$i) \Rightarrow \forall u, v \in K, \forall t \in [0, 1], \text{ se tiene:}$$

$$\begin{aligned} J(u + t(v - u)) &= J(tv + (1 - t)u) \leq tJ(v) + (1 - t)J(u) = \\ &= J(u) + t(J(v) - J(u)) \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{J(u + t(v - u)) - J(u)}{t} \leq J(v) - J(u), \quad \forall u, v \in K, \forall t \in [0, 1]$$

y por pasaje al límite cuando $t \rightarrow 0$ se obtienen (9).

⇐) Aplicando 2 veces la hipótesis (9) se obtiene:

$$\begin{cases} J(u) - J(u+t(v-u)) \geq -t \langle J'(u+t(v-u)), v-u \rangle \\ J(v) - J(u+t(v-u)) \geq (1-t) \langle J'(u+t(v-u)), v-u \rangle \end{cases}$$

Multiplicando la primera desigualdad por $(1-t)$ y la segunda por t , al sumar se tiene:

$$(1-t)J(u) + tJ(v) - J(u+t(v-u)) \geq 0, \quad \forall u, v \in K, \quad \forall t \in [0, 1]$$

es decir que J es convexa.

ii) Ejercicio 2. ■

LEMA 4.

Bajo las hipótesis del Lema 3 se tienen las siguientes equivalencias:

$$i) \quad (9) \quad J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v-u \rangle, \quad \forall u, v \in K \quad \Leftrightarrow$$

$$(11) \quad J': V \longrightarrow V' \text{ es monótona, es decir:}$$

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in K.$$

$$\text{ii) (10) } J(v) - J(u) > \langle J'(u), v - u \rangle, \forall u, v \in K, u \neq v \Leftrightarrow$$

(11 bis) $J': V \rightarrow V'$ es estrictamente monótona, es decir:

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in K, u \neq v.$$

Demostración.

i) \Rightarrow) Aplicando 2 veces la hipótesis (9) se obtienen las desigualdades, válidas $\forall u, v \in K$:

$$\begin{cases} J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v - u \rangle \\ J(u) - J(v) \geq \langle J'(v), u - v \rangle \end{cases}$$

que sumadas dan (11).

\Leftarrow) Sean $u, v \in K$. Sea $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} /$

$$F(t) = J(u + t(v - u))$$

Por ser J , G -diferenciable, la función real F es derivable, con derivada:

$$F'(t) = \langle J'(u+t(v-u)), v-u \rangle, \forall t \in [0,1] \text{ (Ejercicio 3)}.$$

De (11) surge que:

$$\langle J'(u+t(v-u)) - J'(u), t(v-u) \rangle \geq 0, \forall t \in [0,1]$$

es decir:

$$\langle J'(u+t(v-u)) - J'(u), v-u \rangle \geq 0, \forall t \in [0,1]$$

con lo cual:

$$F'(t) \geq \langle J'(u), v-u \rangle, \forall t \in [0,1]$$

Por otra parte:

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t) dt \geq \langle J'(u), v-u \rangle$$

y teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} F(0) = J(u) \\ F(1) = J(v) \end{cases}$$

se deduce (9).

ii) Ejercicio 4. ■

OBSERVACION 1.

Bajo las hipótesis (8), se tienen las siguientes equivalencias:

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } J \text{ convexa} \Leftrightarrow J' \text{ monótona.} \\ \text{ii) } J \text{ estrictamente convexa} \Leftrightarrow J' \text{ estrictamente monótona.} \end{array} \right. \blacksquare$$

LEMA 5.

Sean:

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} V \text{ espacio de Banach} \\ J: V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ convexa y } G\text{-diferenciable} \end{array} \right.$$

entonces J es s.c.i. en V débil, es decir:

$$(14) \quad v_n \rightharpoonup v \text{ en } V \text{ débil} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) \geq J(v).$$

Demostración.

Sea $v_n \rightharpoonup v$ en V débil, entonces por (9) se tiene:

$$J(v_n) - J(v) \geq \langle J'(v), v_n - v \rangle, \quad \forall n$$

y como $J'(v) \in V'$, se obtiene (14). ■

EJERCICIO 5.

Bajo las hipótesis (8), K cerrado y J convexa, se tiene que J es s.c.i. en la topología débil. ■

EJERCICIO 6.

i) Si $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es G -diferenciable en el segmento $[u, u+\phi]$ (con $u, \phi \in V$), entonces:

$$(15) \quad \exists \theta \in (0,1) / J(u+\phi) = J(u) + \langle J'(u+\theta\phi), \phi \rangle.$$

Para ello, considerar la función real:

$$(16) \quad F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} / F(t) = J(u+t\phi)$$

y aplicar el desarrollo de Taylor en una variable.

ii) Si K es convexo y $J: K \rightarrow \mathbb{R}$ es G -diferenciable con $\|J'(v)\| \leq M$ ($M > 0$) $\forall v \in K$, entonces:

$$(17) \quad |J(v) - J(u)| \leq M \|v-u\| \quad , \quad \forall u, v \in K$$

(Aplicar el resultado (15)). ■

Se dice que $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable según Gâteaux $\Leftrightarrow \forall u, \phi, \psi \in V$ existe el límite

$$(18) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J'(u+t\psi, \phi) - J'(u, \phi)}{t} = J''(u, \phi, \psi) .$$

Si el límite $J''(u, \phi, \psi)$ resulta lineal y continuo con respecto a ϕ, ψ se llama *derivada segunda según Gâteaux de J en $u \in V$* a:

$$J''(u) = H(u): V \rightarrow V'$$

(operador Hessiano de J en u) tal que:

$$(19) \quad J''(u, \phi, \psi) = \langle H(u)\phi, \psi \rangle \quad , \quad \forall \phi, \psi \in V. \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 7.

Si $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces G-diferenciable en el segmento $[u, u+\phi]$ ($u, \phi \in V$) en las direcciones (ϕ, ϕ) entonces:

$$(20) \quad \exists \theta \in (0,1) /$$

$$J(u+\phi) = J(u) + \langle J'(u), \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(\overset{u+\theta\phi}{\downarrow}) \phi, \phi \rangle$$

(Utilizar la función auxiliar F definida por (16) en el Ejercicio 6 i)). ■

EJERCICIO 8.

Si J es dos veces G-diferenciable, entonces:

$$i) \quad J''(u, \phi, \phi) \geq 0, \quad \forall u, \phi \in V \Rightarrow J \text{ convexa.}$$

$$ii) \quad J''(u, \phi, \phi) > 0, \quad \forall u, \phi \in V (\phi \neq 0) \Rightarrow J \text{ estrictamente convexa.}$$

(Utilizar el Lema 3 y 4 y el Ejercicio 7).

$$iii) \quad J''(u, \phi, \phi) \geq 0, \quad \forall u, \phi \in V \Rightarrow J \text{ s.c.i en } V \text{ débil.} \blacksquare$$

3. RELACION ENTRE PROBLEMAS DE MINIMO E INECUACIONES VARIACIONALES

Se tiene un primer resultado general:

LEMA 6.

Bajo las hipótesis del Lema 3 y J convexa se obtiene la siguiente equivalencia:

$$(21) \begin{cases} J(u) \leq J(v) , \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \Leftrightarrow (22) \begin{cases} \langle J'(u), v-u \rangle \geq 0 , \forall v \in K \\ u \in K . \end{cases}$$

Demostración.

\Rightarrow) Sean $v \in K$, $t \in (0,1]$.

Por (21), se tiene $J(u) \leq J(u+t(v-u))$, con lo cual

$$\frac{J(u+t(v-u)) - J(u)}{t} \geq 0 , \forall t \in (0,1] , \forall v \in K$$

y por pasaje al límite cuando $t \rightarrow 0^+$ se deduce (22).

\Leftarrow) Utilizando el hecho que J es convexa, se obtiene:

$$J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v-u \rangle \geq 0 , \forall v \in K,$$

es decir (21). ■

En numerosas aplicaciones el funcional J toma la forma par-

particular:

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) , \forall v \in V \\ a: \text{ forma bilineal y continua sobre } V \times V \\ L: \text{ forma lineal y continua sobre } V \\ V: \text{ espacio de Hilbert .} \end{array} \right.$$

Entonces:

LEMA 7.

i) El funcional J definido por (23) es G-diferenciable con derivada:

$$(24) \quad \langle J'(u), v \rangle = \frac{1}{2} [a(u,v) + a(v,u)] - L(v).$$

ii) Si además a es simétrica, se tiene:

$$(25) \quad \langle J'(u), v \rangle = a(u,v) - L(v).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} i) \quad \langle J'(u), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} a(u+tv, u+tv) - L(u+tv) - \frac{1}{2} a(u,u) + L(u)}{t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{a(u,v) + a(v,u)}{2} - L(v) + t a(v,v) \right] = \\
&= \frac{a(u,v) + a(v,u)}{2} - L(v)
\end{aligned}$$

Debido a las hipótesis (23) resulta $J'(u) \in V'$.

ii) La relación (25) surge inmediatamente de (24) y a simétrica. ■

OBSERVACION 2.

Si a es simétrica y se define:

$$(26) \quad A : V \longrightarrow V' / \langle Au, v \rangle = a(u, v)$$

(A es lineal y continua con $\|A\| = \|a\|$) entonces:

$$(27) \quad J'(u) = Au - L. \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 9.

Si J está definida por (23), con a simétrica:

i) Si K es un conjunto convexo de V , ^{J es convexa} entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$(28) \begin{cases} J(u) \leq J(v), \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \Leftrightarrow (29) \begin{cases} a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

(Utilizar los Lemas 6 y 7).

ii) Si a es semi-definida positiva ($a(v, v) \geq 0, \forall v \in V$) entonces J es convexa.

iii) Si a es coercitiva, entonces J es estrictamente convexa.

(Verificar que:

$$(30) \quad tJ(u) + (1-t)J(v) - J(tu + (1-t)v) = t(1-t) a(u-v, u-v),$$

$$\forall u, v \in V, \forall t \in [0, 1]. \blacksquare$$

LEMA 8.

Bajo las hipótesis (23) y a coercitiva se tiene que J es s.c.i. en V débil, estrictamente convexa en V y verifica la hipótesis H2) de (2).

Demostración.

Por el Lema I-12 se tiene que J es semi-continua inferiormente en V débil y por el Ejercicio 9 iii) J es estrictamente convexa.

Además, $\forall v \in V$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (31) \quad J(v) &= \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \geq \frac{\alpha \|v\|^2}{2} - \|L\| \|v\| = \\ &= \left(\frac{\alpha \|v\|}{2} - \|L\| \right) \|v\| \end{aligned}$$

con lo cual se verifica H2), es decir $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$. ■

LEMA 9.

Bajo las hipótesis del Lema 8 y K conjunto convexo, cerrado y no vacío de V , existe un único $u \in K$ que minimiza J en K .

Demostración.

Basta utilizar los Lemas 2 y 8. ■

EJERCICIO 10.

Para cada uno de los seis problemas siguientes planteados en $\Omega = (a,b)$ con $f \in L^2(a,b)$:

- i) Hallar el espacio de Hilbert adecuado y la ecuación variacional correspondiente. Demostrar la existencia y unicidad de la solución u .

- ii) Hallar el principio de mínimo correspondiente (es decir, encontrar J y K).

P_1) *Problema de Dirichlet homogéneo.*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} .$$

P_2) *Problema de Dirichlet no homogéneo.*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = A \\ u(b) = B \end{cases} .$$

P₃) Problema de Neumann homogéneo.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u'(a) = u'(b) = 0 . \end{cases}$$

P₄) Problema de Neumann no homogéneo.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u'(a) = A \\ u'(b) = B . \end{cases}$$

P₅) Problema mixto de Dirichlet-Neumann.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = 0 \\ u'(b) = 0 . \end{cases}$$

P₆) Problema con condición de un tercer tipo.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u'(a) = k u(a) , k > 0 \\ u(b) = 0 . \blacksquare \end{cases}$$

En numerosos problemas prácticos el funcional J no es G -diferenciable pero puede expresarse como:

$$(32) \quad \begin{cases} J = J_1 + J_2 \\ J_1, J_2 \text{ convexas} \\ J_1 \text{ G-diferenciable} \end{cases}$$

entonces el Lema 6 puede generalizarse de la siguiente forma:

LEMA 10.

Bajo las hipótesis:

$$\begin{cases} V \text{ espacio de Banach} \\ K \subset V : \text{conjunto convexo no vacío} \\ (32) \end{cases}$$

se obtiene la siguiente equivalencia:

$$(33) \quad \begin{cases} J(u) \leq J(v) , \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (34) \quad \begin{cases} \langle J_1'(u), v-u \rangle + J_2(v) - J_2(u) \geq 0 , \forall v \in K \\ u \in K . \end{cases}$$

⇐) Aplicando el Lema 3, $\forall v \in K$ se tiene:

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= (J_1(v) - J_1(u)) + (J_2(v) - J_2(u)) \geq \\ &\geq \langle J'_1(u), v-u \rangle + J_2(v) - J_2(u) \geq 0 \end{aligned}$$

es decir (33).

⇒) $\forall v \in K$, $\forall t \in (0,1]$, se tiene:

$$\begin{aligned} J_1(u) + J_2(u) = J(u) &\leq J(u + t(v-u)) = \\ &= J_1(u + t(v-u)) + J_2(u + t(v-u)) \leq \\ &\leq J_1(u + t(v-u)) + t J_2(v) + (1-t) J_2(u) \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{J_1(u+t(v-u)) - J_1(u)}{t} + J_2(v) - J_2(u) \geq 0, \forall v \in K, \forall t \in (0,1],$$

y por pasaje al límite $t \rightarrow 0^+$ se obtiene (34). ■

En la práctica la condición (32) se da bajo la forma:

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) + j(v) , \forall v \in V. \\ V : \text{espacio de Hilbert.} \\ a : \text{forma bilineal continua sobre } V \times V. \\ L : \text{forma lineal y continua sobre } V. \\ j : \text{no G-diferenciable sobre } V. \end{array} \right.$$

EJERCICIO 11.

j convexa y continua en V fuerte $\Rightarrow j$ s.c.i. en V débil (ver [E1]). ■

EJERCICIO 12.

Bajo las hipótesis:

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} (35) \\ a: \text{simétrica y coercitiva} \\ j: \text{convexo, s.c.i. en } V \text{ débil y propio } (-\infty < j \neq +\infty) \\ K \subset V : \text{convexo, cerrado, no vacío} \end{array} \right.$$

se tienen:

i) $\exists ! u \in K / J(u) \leq J(v) , \forall v \in K.$

ii) El único elemento $u \in K$ está caracterizado por la inecuación variacional:

$$(37) \begin{cases} a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u) , \forall v \in K \\ u \in K. \end{cases}$$

(Utilizar un desarrollo análogo al Ejercicio 9, los Lemas 3 y 10 y el Ejercicio 11). ■

••

EJERCICIO 13.

i) Si K es un conjunto convexo, cerrado y no vacío del espacio de Hilbert V , entonces el funcional *indicador de K* , definido por:

$$(38) \quad I_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{si } v \notin K \end{cases}$$

es convexo, semi-continuo inferiormente en V débil y propio.

ii) Se tiene la siguiente equivalencia:

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K \\ u \in K. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a(u, v-u) + I_K(v) - I_K(u) \geq L(v-u), \forall v \in V \\ u \in V. \blacksquare \end{cases}$$

OBSERVACION 3.

El ejercicio 13 nos muestra que la inecuación variacional (29) es un caso particular de la inecuación variacional (37), las cuales son llamadas *inecuaciones variacionales elípticas de primera y segunda especie* respectivamente. ■

En el próximo capítulo veremos las aplicaciones de las inecuaciones variacionales y de los *problemas* de mínimo a algunos problemas de frontera libre. ■

CAPITULO III

PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Los problemas de frontera libre se presentan naturalmente en situaciones concretas, como ser: problema de la pared semi-permeable, problema del obstáculo, fluido de Bingham, problema del dique poroso, semiconductores bajo una unión P-N, problema de Stefan (o de cambio de fase), etcétera.

Salvo casos particulares en los cuales puede encontrarse explícitamente la solución, los problemas de frontera libre son difíciles de ser atacados desde el punto de vista matemático debido a la presencia de dicha frontera libre. Estos problemas tienen la particularidad de presentar una región del espacio, llamada *frontera libre*, que es a priori desconocida y sobre la cual la o las funciones incógnitas del problema en estudio deben verificar ciertas condiciones que la caracterizan. Para mayores detalles ver los seis ejemplos que se presentarán a continuación.

La aparición de las inecuaciones variacionales [L4,S1] ha permitido resolver numerosos problemas de frontera libre y ésta es la metodología que se utilizará en lo que sigue. Más aún,

de los seis problemas que se estudiarán, éstos pueden dividirse en:

i) aquellos que se transforman directamente en inecuaciones variacionales, como ser:

- 1) Problema de la pared semi-permeable.
- 2) Problema del obstáculo.
- 3) Fluido visco-plástico de Bingham.
- 4) Semiconductores bajo una unión P-N.

ii) aquellos que después de un cambio de función incógnita se transforman en inecuaciones variacionales, como ser:

- 5) Problema del dique poroso.
- 6) Problema de Stefan a dos fases. ■

1. PROBLEMA DE LA PARED SEMI-PERMEABLE

1.1. INTRODUCCION

Se tiene un cuerpo Ω , dominio de \mathbb{R}^3 , que posee una porción de frontera Γ_0 que está en contacto térmico con el exterior que se encuentra a una temperatura θ_0 (sin pérdida de generalidad se supone $\theta_0 = 0$) y la porción de frontera restante Γ_1 actúa como un pared semi-permeable en contacto con el exterior. La *semi-permeabilidad* se traduce en el hecho que dicha pared deja entrar calor, proveniente del exterior, pero impide toda salida (en Física se lo conoce con el nombre de cuerpo negro).

Sean:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \theta : \text{temperatura del cuerpo } \Omega \\ \vec{q} = -k\vec{\nabla}\theta : \text{vector calórico} \\ k > 0 : \text{coeficiente de conductividad térmica} \\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0 : \text{frontera de } \Omega \\ \vec{n} : \text{versor normal exterior a } \Gamma. \end{array} \right.$$

La imposibilidad de que exista un flujo calórico saliente se traduce por:

$$(2) \quad \vec{q} \times \vec{n} / \Gamma_1 \leq 0$$

o en forma equivalente por:

$$(3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_1 \geq 0$$

donde, por definición de \vec{q} , se tiene presente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{flujo calórico saliente} \Leftrightarrow \vec{q} \times \vec{n} > 0 \\ \text{flujo calórico entrante} \Leftrightarrow \vec{q} \times \vec{n} < 0 \end{array} \right.$$

que se traduce con el hecho físico que el flujo calórico va de altas a bajas temperaturas.

Como el cuerpo se encuentra en equilibrio estacionario, se tiene necesariamente:

$$(4) \quad \theta / \Gamma_1 \geq 0$$

pues si en algún punto de Γ_1 la temperatura fuese negativa, ella aumentaría debido a la existencia, en dicho caso, de un flujo entrante.

Si en un punto de Γ_1 la temperatura es positiva el flujo calórico debe ser nulo, es decir:

$$(5) \quad \theta / \Gamma_1 > 0 \Rightarrow \vec{q} \times \vec{n} / \Gamma_1 = 0 \quad \delta \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_1 = 0$$

pues el posible flujo calórico saliente es impedido por la pared semi-permeable.

Resumiendo, las tres condiciones (3), (4) y (5) de pared semi-permeable Γ_1 , pueden expresarse por:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta / \Gamma_1 \geq 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_1 \geq 0 \\ \theta \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_1 = 0 . \end{array} \right.$$

Se supone, además, que existe una fuente de energía interna f en Ω , con lo cual la temperatura θ deberá verificar la ecuación estacionaria del calor:

$$(7) \quad -k \Delta \theta = f \quad \text{en } \Omega .$$

Entonces, el problema consistirá en hallar la temperatura θ , definida en Ω , que satisface las siguientes condiciones:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } -k \Delta \theta = f \text{ en } \Omega \\ \text{ii) } \theta / \Gamma_0 = 0 \\ \text{iii) } \theta / \Gamma_1 \geq 0 \\ \text{iv) } \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_1 \geq 0 \\ \text{v) } \theta \frac{\partial \theta}{\partial n} / \Gamma_1 = 0 \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

OBSERVACION 1.

El problema (8) es un problema de frontera libre debido al hecho que en la porción de frontera Γ_1 no se conocen a priori las dos zonas siguientes:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{10} = \{x \in \Gamma_1 / \theta(x) = 0\} \\ \Gamma_{11} = \{x \in \Gamma_1 / \frac{\partial \theta}{\partial n}(x) > 0\} \end{array} \right.$$

las cuales serán determinadas una vez resuelto el problema (c.f. Observación 5). Veremos además, que dicha frontera libre no interviene explícitamente en la formulación variacional del problema. ■

1.2. FORMULACION VARIACIONAL

Sean

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_0} = 0\} \\ K = \{v \in V / v|_{\Gamma_1} \geq 0\} \text{ conjunto convexo, cerrado y no} \\ \text{vacío de } V \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx \\ \langle L, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx (= L(v)). \end{array} \right.$$

LEMA 1:

Si θ es una solución regular del problema (8), entonces θ es solución de la inecuación variacional:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} k \quad a(\theta, v - \theta) \geq \langle L, v - \theta \rangle, \quad \forall v \in K \\ \theta \in K. \end{array} \right.$$

Demostración:

Si se multiplica la ecuación diferencial (8i) por $(v-\theta)$ con $v \in K$, se integra sobre Ω y se aplica la fórmula de Green, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \langle L, v-\theta \rangle &= \int_{\Omega} -k \Delta \theta (v-\theta) \, dx = \\
 &= k \int_{\Omega} \vec{\nabla} \theta \times \vec{\nabla} (v-\theta) \, dx - k \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta}{\partial n} (v-\theta) \, d\gamma = \\
 &= k a(\theta, v-\theta) - k \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \theta}{\partial n} v \, d\gamma + k \int_{\Gamma_1} \theta \frac{\partial \theta}{\partial n} \, d\gamma - \\
 &\quad - k \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \theta}{\partial n} (v-\theta) \, d\gamma \leq k a(\theta, v-\theta)
 \end{aligned}$$

es decir (11). ■

LEMA 2:

Bajo las hipótesis:

$$(12) \quad \begin{cases} L \in V' \\ \text{medida } (\Gamma_0) > 0 \end{cases}$$

existe una única solución de la inecuación variacional (11).

Demostración:

Es suficiente aplicar el Lema I-4 y el Ejercicio I-11ii (Ejercicio 1). ■

OBSERVACION 2.

De manera análoga se puede tratar el problema de la pared semi-permeable que se encuentra en contacto con el medio exterior a una temperatura θ_0 . Las condiciones que rigen el nuevo problema son:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } -k \Delta \theta = f \text{ en } \Omega \\ \text{ii) } \theta /_{\Gamma_0} = \theta_0 \\ \text{iii) } (\theta - \theta_0) /_{\Gamma_1} \geq 0 \\ \text{iv) } \frac{\partial \theta}{\partial n} /_{\Gamma_1} \geq 0 \\ \text{v) } (\theta - \theta_0) \frac{\partial \theta}{\partial n} /_{\Gamma_1} = 0 \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

EJERCICIO 2.

- i) Hallar la inecuación variacional correspondiente al problema (13).
- ii) Demostrar que existe una única solución de dicha inecuación variacional. ■

EJEMPLO 1.

Sean

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0, \ell) , \ell > 0 \\ \Gamma_0 = \{0\} , \Gamma_1 = \{\ell\} \\ f > 0 \text{ (constante) .} \end{array} \right.$$

Entonces, la solución de (13) está dada por:

$$(15) \quad \theta(x) = -\frac{f}{2k} x^2 + \frac{f\ell}{k} x + \theta_0$$

que verifica:

$$(16) \quad \theta'(\ell) = 0 , \forall \theta_0 .$$

Demostración:

Integrando la ecuación diferencial (13i), se tiene:

$$(17) \quad \theta(x) = -\frac{f}{2k} x^2 + c_1 x + c_2 \quad (c_1, c_2: \text{constantes}).$$

De la condición (13ii) sobre Γ_0 , resulta:

$$(18) \quad c_2 = \theta_0 .$$

Las tres condiciones (13iii), (13iv) y (13v) sobre Γ_1 , se expresan por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\ell) = -\frac{f}{2k} \ell^2 + c_1 \ell + \theta_0 \geq \theta_0 \\ \theta'(\ell) = -\frac{f\ell}{k} + c_1 \geq 0 \\ (\theta(\ell) - \theta_0) \theta'(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 - \frac{f\ell}{2k} \geq 0 \\ c_1 - \frac{f\ell}{k} \geq 0 \\ (\theta(\ell) - \theta_0) \theta'(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

o equivalentemente por:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } c_1 \geq \frac{f\ell}{k} \\ \text{ii) } (\theta(\ell) - \theta_0) \theta'(\ell) = 0 . \end{array} \right.$$

Si $\theta(\ell) = \theta_0$, entonces debe ser $c_1 = \frac{f\ell}{2k}$, lo cual contradice (19i). Por lo tanto, se tiene:

$$(20) \quad \theta'(\ell) = 0$$

lo cual nos da:

$$(21) \quad c_1 = \frac{f\ell}{k}$$

de donde surgen (15) y (16). ■

EJERCICIO 3.

Hallar la solución de (13) para:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0, \ell) , \ell > 0 \\ \Gamma_0 = \{0\} , \Gamma_1 = \{\ell\} \\ f < 0 \text{ (constante) .} \end{array} \right.$$

Además, sobre Γ_1 , se tiene la condición $\theta'(\ell) = 0$ ó $\theta(\ell) = \theta_0$, para un dado θ_0 ? Generalizar al caso $f = f(x)$. ■

1.3. INTERPRETACION DE LA SOLUCION DE LA INECUACION VARIACIONAL (11)

En una primera etapa analizaremos una propiedad general:

LEMA 3.

Si $u \in H^1(\Omega)$ con $\Delta u \in L^2(\Omega)$, entonces se puede definir $\frac{\partial u}{\partial n}$ como un elemento de $H^{-1/2}(\Gamma)$ que satisface la siguiente fórmula de Green:

$$(23) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx - \langle \frac{\partial u}{\partial n}, \gamma_0 v \rangle, \forall v \in H^1(\Omega)$$

donde γ_0 es el operador traza $\gamma_0(v) = v/\Gamma$ definido en $H^1(\Omega)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la dualidad $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Demostración:

i) Debido al teorema de traza para $H^1(\Omega)$, existe $\forall v_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ un relevamiento continuo en $H^1(\Omega)$, es decir:
 $\forall v_0 \in H^{1/2}(\Gamma), \exists v \in H^1(\Omega) /$

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|v_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad (c \text{ constante}) \\ v/\Gamma = v_0 . \end{array} \right.$$

Entonces, se puede definir la siguiente aplicación:

$$(25) \quad L_0: H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R} /$$

$$L_0(v_0) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx$$

donde v verifica (24).

La aplicación L_0 es lineal y además es continua, pues:

$$|L_o(v_o)| \leq c(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}) \|v_o\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall v_o \in H^{1/2}(\Gamma).$$

ii) En principio, la aplicación lineal y continua L_o depende del relevamiento (24) utilizado en su definición (25). Veremos que cualquiera sea el relevamiento continuo de $v_o \in H^{1/2}(\Gamma)$, el valor de L_o es siempre el mismo. Para ello, sean v_1 y v_2 dos relevamientos continuos de $v_o \in H^{1/2}(\Gamma)$, es decir:

$$\begin{cases} v_1, v_2 \in H^1(\Omega) \\ \gamma_o(v_1) = \gamma_o(v_2) = v_o \in H^{1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

Para mostrar que $L_o(v_1) = L_o(v_2)$ es suficiente verificar que $L_o(\omega) = 0$, $\forall \omega \in H_o^1(\Omega)$.

Sea $\varphi \in D(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned} L_o(\varphi) &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx = \\ &= - \int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx + \int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación L_o es nula en $D(\Omega)$, y por densidad, es nula también en $H_o^1(\Omega)$.

iii) Sea, por definición, $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ el único elemento que verifica:

$$(26) \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \gamma_0 v \right\rangle = L_0(\gamma_0 v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \blacksquare$$

OBSERVACION 3.

Si en el Lema 3 se tiene la hipótesis suplementaria $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$ (basta tener $u \in H^2(\Omega)$), entonces se tiene la clásica fórmula de Green:

$$- \int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, v \, d\gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \blacksquare$$

Ahora veremos dos lemas que interpretarán la solución de la i ecuación variacional (11).

LEMA 4.

Si $f \in L^2(\Omega)$, entonces la única solución θ de (11) verifica:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} -k \Delta \theta = f \text{ en } L^2(\Omega) \\ \theta \in K \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} \geq 0 \text{ en } H^{-1/2}(\Gamma_1) \\ \langle \frac{\partial \theta}{\partial n}, \theta \rangle = 0 \end{array} \right.$$

donde \langle , \rangle representa la dualidad $H^{-1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_1)$.

Demostración:

El elemento $v = \theta + \varphi \in K$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$, con lo cual, de (11), se obtiene:

$$k a(\theta, \varphi) \geq L(\varphi) \quad , \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

es decir:

$$k a(\theta, \varphi) = L(\varphi) \quad , \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

obteniéndose:

$$(28) \quad -k \Delta \theta = f \in L^2(\Omega).$$

Utilizando (26) y (11), se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(v-\theta) dx &= \int_{\Omega} -k \Delta \theta (v-\theta) dx = k a(\theta, v-\theta) - \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial n}, v-\theta \right\rangle \\ &\geq \int_{\Omega} f(v-\theta) dx - \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial n}, v-\theta \right\rangle, \forall v \in K \end{aligned}$$

es decir:

$$(29) \quad \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial n}, v-\theta \right\rangle \geq 0, \forall v \in K.$$

Tomando $v = 2\theta \in K$ y $v = 0 \in K$ en (29), se tiene:

$$(30) \quad \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial n}, \theta \right\rangle = 0.$$

Utilizando (30) en (29), se tiene:

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial n}, v \right\rangle \geq 0, \forall v \in K$$

es decir:

$$(31) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} \geq 0 \text{ en } H^{-1/2}(\Gamma_1). \blacksquare$$

OBSERVACION 4.

Si además de $f \in L^2(\Omega)$, se tiene $\theta \in H^2(\Omega)$, entonces θ es solución de la formulación fuerte (8) del problema. ■

OBSERVACION 5.

Una vez resuelta la inecuación variacional (11), y demostrado un resultado de regularidad para la solución, se pueden hallar los conjuntos explicitados en (9). ■

OBSERVACION 6.

Un ejemplo análogo se presenta en mecánica de los fluidos [G3], donde la presión resulta ser la función incógnita. ■

OBSERVACION 7.

Problemas de un tipo más general pueden verse en [D3]. ■

2. PROBLEMA DEL OBSTACULO

2.1. INTRODUCCION

El problema del obstáculo [B6,K1] consiste en hallar la posición de equilibrio de un hilo elástico homogéneo, atado en sus extremos y sometido a una carga f por unidad de longitud con la condición de estar por encima del obstáculo ψ (el signo de f se supone positivo si la fuerza está dirigida hacia a rriba). Se supone que la deflexión del hilo es pequeña y que por consiguiente la tensión T existente en todos los puntos del hilo puede considerarse como una constante.

El método consistirá en hallar la posición del hilo $y = y(x)$ que minimiza su energía potencial total J , bajo restricciones adecuadas. ■

2.2. CALCULO DE LA ENERGIA POTENCIAL.

Si el hilo tiene una longitud inicial $\ell > 0$, sus extremos son los puntos $x = 0$ y $x = \ell$, y se encuentra en una posición genérica $v = v(x)$, su energía potencial total está dada por:

$$J(v) = T \Delta \ell - \int_0^{\ell} f(x) v(x) dx$$

donde el alargamiento $\Delta \ell$ del hilo es:

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \sqrt{1+(v'(x))^2} \, dx - \ell = \int_0^{\ell} [\sqrt{1+(v'(x))^2} - 1] \, dx \approx \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (v'(x))^2 \, dx$$

donde, debido a que la deflexión del hilo es pequeña, se utiliza la siguiente aproximación $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x}{2}$, válida para $|x| \ll 1$.

Por lo tanto la energía potencial J viene expresada por:

$$(1) \quad J(v) = \frac{T}{2} \int_0^{\ell} (v'(x))^2 \, dx - \int_0^{\ell} f(x) v(x) \, dx$$

es decir:

$$(2) \quad J(v) = \frac{T}{2} a(v, v) - L(v)$$

donde:

$$(3) \quad \begin{cases} a(y, v) = \int_0^{\ell} y'(x) v'(x) \, dx \\ L(v) = \int_0^{\ell} f(x) v(x) \, dx \quad \blacksquare \end{cases}$$

2.3. PROBLEMA DE MINIMO:

La solución del problema del obstáculo estará representada por la función $y = y(x)$ que satisfaga el siguiente problema de mínimo:

$$(4) \quad \begin{cases} J(y) \leq J(v) , \forall v \in K \\ y \in K \end{cases}$$

donde el convexo y cerrado K está dado por:

$$(5) \quad K = \{v \in H_0^1(0, \ell) / v \geq \psi \text{ en } (0, \ell)\}$$

verificando el obstáculo ψ las hipótesis:

$$(6) \quad \begin{cases} \psi \in H^2(0, \ell) \\ \psi(0) < 0 , \psi(\ell) < 0 \end{cases}$$

con las cuales resulta $K \neq \emptyset$. ■

LEMA 1.

Bajo la hipótesis $L \in H^{-1}(0, \ell) = (H_0^1(0, \ell))'$ el problema (4) tiene una única solución $y \in K$.

Demostración:

Es suficiente aplicar el Lema II.9 (Ejercicio 1). ■

2.4. FORMULACION VARIACIONAL Y PROPIEDADES.

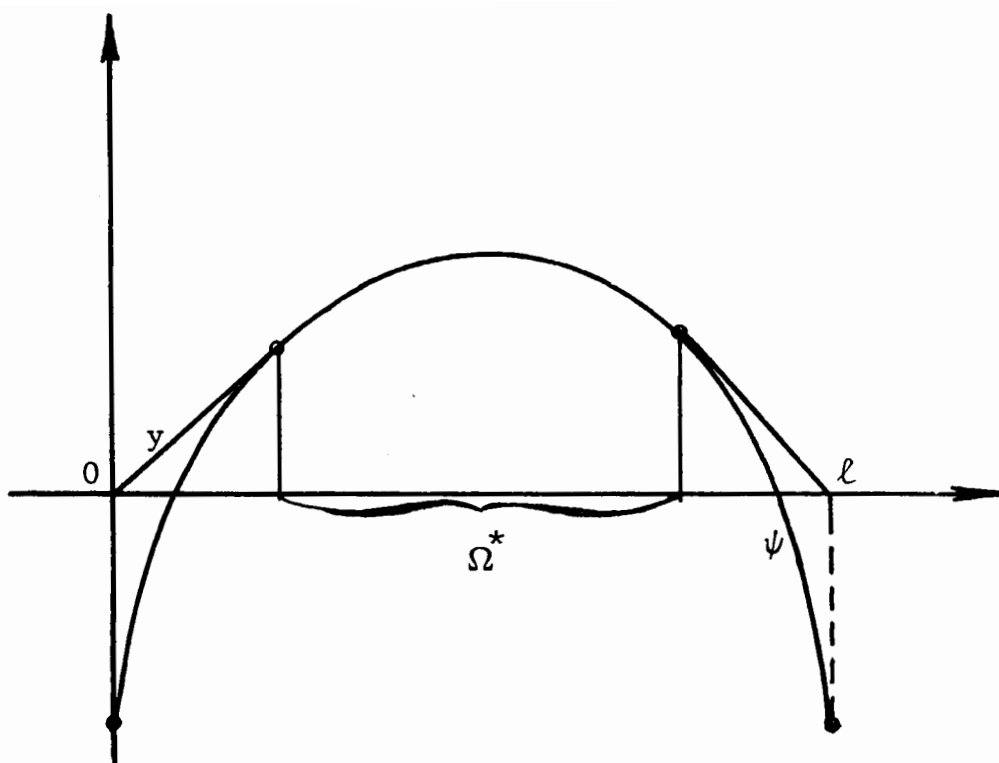
De acuerdo a lo visto en Ejercicio II.9, la única solución y de (4) es también la única solución de la inecuación variacional:

$$(7) \quad \begin{cases} T a(y, v-y) \geq L(v-y) , \forall v \in K \\ y \in K. \end{cases}$$

OBSERVACION 1.

El problema (4) ó (7) es un problema a frontera libre pues no se conoce a priori la zona de contacto Ω^* (zona de $\Omega = (0, \ell)$ donde la solución del problema coincide con el obstáculo), es decir:

$$(8) \quad \Omega^* = \{x \in (0, \ell) / y(x) = \psi(x)\} \quad . \quad \blacksquare$$



OBSERVACION 2.

La frontera libre $\partial\Omega^*$ no interviene explícitamente en la ine-
cuación variacional (7). ■

LEMA 2.

Si $f \in L^2(0,\ell)$ y si la solución de (7) verifica la hipótesis
 $y \in H^2(0,\ell)$, entonces se tiene la siguiente caracterización:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } -y'' \geq \frac{f}{T} \text{ en } (0, \ell) \\ \text{ii) } y \in K \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = y(\ell) = 0 \\ y \geq \psi \text{ en } (0, \ell) \end{array} \right. \\ \text{iii) } (y'' + \frac{f}{T})(y - \psi) = 0 \text{ en } (0, \ell) \quad (*) \\ \text{iv) } y = \psi, y' = \psi' \text{ en } \partial\Omega^* \end{array} \right.$$

Demostración:

Sean

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 = \{x \in (0, \ell) / y(x) > \psi(x)\} \\ \Gamma^* = \partial\Omega^* = \partial\Omega_0 \cap (0, \ell). \end{array} \right.$$

Entonces:

i) El elemento $v = y + \varphi \in K$, $\forall \varphi \in D(0, \ell)$ con $\varphi \geq 0$.

(*) Es decir:
$$\left\{ \begin{array}{l} -y'' = \frac{f}{T} \text{ si } y > \psi \\ -y'' \geq \frac{f}{T} \text{ si } y = \psi \end{array} \right.$$

De (7) surge:

$$\begin{cases} T a(y, \varphi) \geq L(\varphi) , \forall \varphi \in D(0, \ell) , \varphi \geq 0 \\ y \in K \end{cases}$$

es decir, $-Ty'' \geq f$ en $D'(0, \ell)$, y de acuerdo a las hipótesis hechas se tiene (9i).

ii) La condición (9ii) surge del hecho que $y \in K$.

iii) Sea $\varphi \in D(\Omega_0)$.

$$\text{Sea} \quad m = \min_{x \in \text{Sop } \varphi} (y - \psi)(x) > 0 . \quad (*)$$

Entonces

$$\forall \quad |\lambda| \leq \lambda_{\varphi} = \frac{m}{\max_{x \in \Omega_0} |\varphi(x)|} ,$$

(*) El mínimo existe pues $y - \psi$ es una función continua en Ω_0 y $\text{Sop } \varphi$ es un compacto de Ω_0 . Método utilizado en [B6 (vol.1), p. 146].

se tiene que $v = y + \lambda\varphi \in K$. (**)

De (7), se obtiene:

$$T \int_{\Omega_0} y' \lambda \varphi \, dx \geq \int_{\Omega_0} f \lambda \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega_0).$$

Como λ puede tomar valores positivos y negativos, se tiene:

$$T \int_{\Omega_0} y' \varphi \, dx = \int_{\Omega_0} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega_0)$$

es decir:

$$-y'' = \frac{f}{T} \quad \text{en } D'(\Omega_0)$$

y de acuerdo a las hipótesis hechas surge (9iii).

iv) Ejercicio 2. ■

OBSERVACION 3.

Si no existe ninguna carga aplicada sobre el hilo (es decir:

(**) La función φ está definida en Ω_0 . Se nota todavía con φ su prolongamiento trivial a $(0, \ell)$. Surge del hecho: $-\lambda\varphi \leq |\lambda| |\varphi| \leq \lambda|\varphi| \leq m \leq y - \psi$.

$\equiv 0$), el funcional a minimizar, sobre K , es:

$$(11) \quad J(v) = \frac{T}{2} \int_0^{\ell} (v'(x))^2 dx$$

verificando la solución $y = y(x)$ las siguientes condiciones:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } y'' \leq 0 \text{ en } (0, \ell) \\ \text{ii) } \begin{cases} y(0) = y(\ell) = 0 \\ y \geq \psi \end{cases} \\ \text{iii) } \begin{cases} y'' = 0 \text{ si } y > \psi \\ y'' \leq 0 \text{ si } y = \psi \end{cases} \\ \text{iv) } y = \psi, y' = \psi' \text{ en } \Gamma^* . \end{array} \right.$$

La condición (12i) nos indica que la solución debe ser una función cóncava en $(0, \ell)$. ■

OBSERVACION 4.

Si no existe obstáculo, es decir $K = H_0^1(0, \ell)$, entonces el problema correspondiente no es de frontera libre y la solución

$y = y(x)$ verifica el problema de mínimo:

$$(13) \quad \begin{cases} J(y) \leq J(v) , \forall v \in H_0^1(0, \ell) & (*) \\ y \in H_0^1(0, \ell) \end{cases}$$

o en forma equivalente, la ecuación variacional:

$$(14) \quad \begin{cases} T a(y, v) = L(v) , \forall v \in H_0^1(0, \ell) \\ y \in H_0^1(0, \ell). \end{cases}$$

La única solución y de (14) está caracterizada, en este caso, por:

$$(15) \quad \begin{cases} -y'' = \frac{f}{T} \text{ en } (0, \ell) \\ y(0) = y(\ell) = 0 \quad \blacksquare \end{cases}$$

(*) En este caso, el problema de mínimo es un problema clásico del Cálculo de Variaciones, siendo (15) la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente.

OBSERVACION 5.

Si además de no haber obstáculo, no existe carga sobre el hilo, entonces se obtiene como lógica consecuencia de (15) la posición inicial, es decir $y \equiv 0$ en $[0, \ell]$. ■

A continuación veremos algunos ejemplos para los cuales la solución exacta puede calcularse explícitamente.

EJEMPLO 1.

Sean:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0, \ell), \ell = 5 > 0 \\ \psi(x) = -x^2 + 5x - 4 \\ f \equiv 0 \end{array} \right.$$

Entonces la solución y de (12) está dada por:

$$(17) \quad y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} c_1 x + c_2 & \text{si } 0 \leq x \leq \xi_1 \\ \psi(x) & \text{si } \xi_1 \leq x \leq \xi_2 \\ c_3 x + c_4 & \text{si } \xi_2 \leq x \leq \ell \end{array} \right.$$

donde las seis incógnitas $c_1, c_2, c_3, c_4, \xi_1, \xi_2$ se obtienen resol

viendo el sistema de seis ecuaciones no lineales:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\xi_1) = \psi(\xi_1) \\ y'(\xi_1) = \psi'(\xi_1) \\ y(\xi_2) = \psi(\xi_2) \\ y'(\xi_2) = \psi'(\xi_2) \\ y(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

que tiene por única solución (Ejercicio 3):

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 1, \quad c_2 = 0 \\ c_3 = -1, \quad c_4 = 5 \\ \xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 3 \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

EJEMPLO 2.

Sean:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0, \ell) \\ \psi(x) = -x^2 + 5x - 4 \\ f(x) \equiv f \text{ (constante)}. \end{array} \right.$$

Entonces se tienen las siguientes conclusiones (Ejercicio 4):

i) Si $f < 0$, entonces existe siempre una única solución de (9). Además, si se tiene $\frac{f}{T} < -6$, el punto ξ_1 verifica $0 < \xi_1 < 1$.

ii) $\lim_{f \rightarrow -\infty} \xi_1 = 0$.

iii) Si $f > 0$, entonces existe única solución de (9) para el caso $\frac{f}{T} < \frac{18}{25}$, que surge imponiendo la restricción $2 < \xi_1 < \frac{5}{2}$. ■

EJEMPLO 3.

Sean

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0, \ell) \quad , \quad \ell > 0 \\ \psi(x) = -a(x-x_1)(x-x_2), \quad 0 < x_1 < x_2 < \ell, \quad a > 0 \\ f \equiv 0 \quad . \end{array} \right.$$

Entonces la solución y de (12) está dada por (Ejercicio 5):

$$(22) \quad y(x) = \begin{cases} c_1 x + c_2 & \text{si } 0 \leq x \leq \xi_1 \\ \psi(x) & \text{si } \xi_1 \leq x \leq \xi_2 \\ c_3 x + c_4 & \text{si } \xi_2 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

donde:

$$(23) \quad \begin{cases} c_1 = -2a \left(\sqrt{x_1 x_2} - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), & c_2 = 0 \\ c_3 = -2a \left(\ell - \sqrt{(\ell - x_1)(\ell - x_2)} - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), & c_4 = -c_3 \ell \\ \xi_1 = \sqrt{x_1 x_2}, & \xi_2 = \ell - \sqrt{(\ell - x_1)(\ell - x_2)}. \end{cases}$$

La solución (22) depende de cuatro parámetros a, x_1, x_2, ℓ . Para $a = 1, x_1 = 1, x_2 = 4, \ell = 5$ se obtiene el Ejemplo 1. ■

OBSERVACION 6.

Para interpretar físicamente algunas de las conclusiones obtenidas en el Ejemplo 2 es necesario dimensionalizar las variables, en particular ψ (Ejercicio 6). ■

OBSERVACION 7.

En general $y \notin C^2(0, \ell)$ pues en los ejemplos anteriores se tie

ne:

$$\begin{cases} y''(\xi_1) = 0 \\ \psi''(\xi_1) \neq 0 . \end{cases}$$

En ciertas condiciones particulares la solución puede tener una regularidad superior. En el caso en que $\psi(x) = -x^2 + \ell x$, entonces $y \in C^\infty(0, \ell)$, ver [B6(Vol.1), Cap.6]. ■

Todo lo realizado para el problema del obstáculo correspondiente a un hilo elástico homogéneo, puede hacerse análogamente para una membrana elástica homogénea.

Para una dada posición $v = v(x, y)$ de la membrana, con posición inicial $v \equiv 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dominio acotado, la energía potencial total correspondiente está dada por (Ejercicio 7):

$$(24) \quad J(v) = \frac{T}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_{\Omega} f v dx dy$$

donde $f = f(x, y)$ representa la carga por unidad de superficie aplicada a la membrana y T es la tensión (constante positiva).

La solución del problema del obstáculo estará representada

por la función $u = u(x,y)$ que satisfaga el siguiente problema de mínimo:

$$(25) \quad \begin{cases} J(u) \leq J(v), \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

donde el conjunto convexo y cerrado K está dado por:

$$(26) \quad K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \geq \psi \text{ en } \Omega\}$$

verificando el obstáculo las hipótesis:

$$(27) \quad \begin{cases} \psi \in H^2(\Omega) \\ \psi|_{\partial\Omega} < 0 . \end{cases}$$

Sean:

$$(28) \quad \begin{cases} a(u,v) = \iint_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx \, dy \\ L(v) = \iint_{\Omega} f v \, dx \, dy \end{cases}$$

entonces se tiene el

LEMA 3. (Ejercicio 11)

Bajo la hipótesis $L \in H^{-1}(\Omega)$, el problema (25) tiene una única solución u , que resulta ser también la única solución de la inecuación variacional:

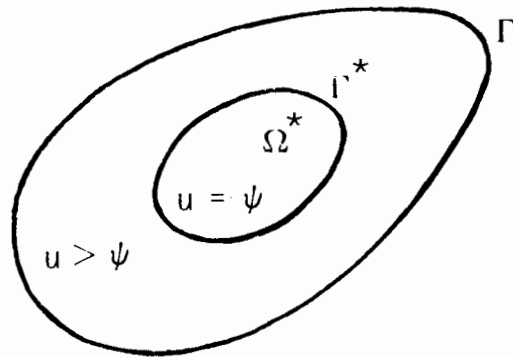
$$(29) \quad \begin{cases} T a(u, v-u) \geq L(v-u) , \forall v \in K \\ u \in K . \end{cases}$$

En el caso de tener las regularidades adecuadas para f, u , la solución de (29) está caracterizada por:

$$(30) \quad \begin{cases} -\Delta u \geq \frac{f}{T} \text{ en } \Omega \\ u \in K \text{ (} u \geq \psi \text{ en } \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0 \text{)} \\ (\Delta u + \frac{f}{T})(u - \psi) = 0 \text{ en } \Omega \\ u = \psi , \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \text{ en } \Gamma^* \end{cases}$$

donde Γ^* es la frontera de la zona de contacto Ω^* , donde

$$(31) \quad \Omega^* = \{(x,y) \in \Omega / u(x,y) = \psi(x,y)\} \quad \bullet \blacksquare$$



OBSERVACION 8.

Numerosos ejemplos con solución exacta son presentados en [G1]. $\bullet \blacksquare$

3. FLUIDO VISCO-PLASTICO DE BINGHAM

3.1. INTRODUCCION

Un fluido de Bingham es un *fluido no newtoniano incompresible* cuya ley de comportamiento traduce el carácter *visco-plástico*.

La incompresibilidad se traduce por el hecho:

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

donde $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ es el vector velocidad en el punto $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

La ecuación de movimiento estacionario del fluido está dada por:

$$(2) \quad - \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{en } \Omega, \quad i = 1, 2, 3$$

donde:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega : \text{dominio acotado de } \mathbb{R}^3, \text{ con frontera } \Gamma \text{ regular, que} \\ \quad \text{representa el espacio ocupado por el fluido} \\ \sigma_{ij} : \text{tensor de tensiones} \\ \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x})) : \text{densidad de fuerza exterior.} \end{array} \right.$$

La ley de comportamiento:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(D_{k\ell}) \\ D_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) : \text{tensor velocidad de deformación} \end{array} \right.$$

de un fluido no newtoniano (la relación $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(D_{k\ell})$ es no lineal) de tipo Bingham tiene la siguiente expresión:

$$(5) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij}^D, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

con:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sigma_{II}^D(\vec{v}) \leq g^2 \quad \text{si } D_{II}(\vec{v}) = 0 \\ \text{ii) } \sigma_{ij}^D(\vec{v}) = 2\mu D_{ij}(\vec{v}) + g \frac{D_{ij}(\vec{v})}{\sqrt{D_{II}(\vec{v})}} = 2\tilde{\mu} D_{ij}(\vec{v}), \quad \text{si } D_{II}(\vec{v}) \neq 0 \end{array} \right.$$

donde:

$$\begin{aligned}
 & p : \text{presión} \\
 & \sigma^D : \text{tensor desviador de tensiones } (\text{tr}(\sigma^D) = 0) \\
 & \delta_{ij} : \text{delta de Kronecker} \\
 & g > 0 : \text{límite de plasticidad} \\
 (7) \quad & \mu > 0 : \text{viscosidad del fluido} \\
 & \tilde{\mu}(\vec{v}) = \mu + \frac{g}{2\sqrt{D_{II}(\vec{v})}} : \text{viscosidad variable del fluido} \\
 & D_{II}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\vec{v}) D_{ij}(\vec{v}) : 2^\circ \text{ invariante del tensor } D \\
 & \sigma_{II}^D = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D.
 \end{aligned}$$

Además, el primer invariante del tensor D es nulo, pues $\text{tr } D(\vec{v}) = \text{div } \vec{v} = 0$.

La ley de comportamiento (6) puede ser invertida de la siguiente manera (Ejercicio 1):

$$i) D_{ij}(\vec{v}) = 0 \text{ si } \sqrt{\sigma_{II}^D(\vec{v})} < g$$

(8)

$$ii) D_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{g}{\sqrt{\sigma_{II}^D}} \right) \sigma_{ij}^D \text{ si } \sqrt{\sigma_{II}^D(\vec{v})} > g .$$

La condición sobre la frontera es la adherencia a la pared, como para los fluidos viscosos clásicos, es decir:

$$(9) \quad \vec{v}/\Gamma = \vec{0} . \blacksquare$$

EJERCICIO 2.

$$D_{ij}(\vec{v}) = 0 , \forall i, j = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \exists \vec{a}, \vec{b} / \vec{v}(\vec{x}) = \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x} . \blacksquare$$

OBSERVACION 1.

La ley de comportamiento (8) presenta la particularidad suplementaria, puesta en evidencia por (8i) y Ejercicio 2, que el fluido se desplaza como un medio rígido si una cierta función de las tensiones σ_{ij} no alcanza el límite g (en nuestro caso, dicha función está representada por $\sqrt{\sigma_{II}^D}$). ■

OBSERVACION 2.

Si en (8) se tiene $g = 0$, entonces se encuentra la ley de comportamiento de un fluido viscoso incompresible clásico (*fluido newtoniano*).

Por lo tanto, se puede considerar que el fluido de Bingham es, para g pequeño, un modelo aproximado del fluido viscoso clásico (esto será precisado más adelante cuando se estudie el límite de la solución, correspondiente al fluido de Bingham, cuando $g \rightarrow 0$, a través de la formulación variacional). ■

OBSERVACION 3.

Si $g > 0$, se observan zonas rígidas en el movimiento del fluido. Si g crece las zonas rígidas aumentan y si g es muy grande, entonces las zonas rígidas bloquean completamente el movimiento (esto será precisado más adelante, cuando se demuestre que existe un valor g_c , *límite crítico de plasticidad*, que tiene la particularidad que la solución es nula para $g \geq g_c$). ■

OBSERVACION 4.

Si se tiene $\mu = 0$ en (6), la relación (8i) es válida en tanto

que (8ii) no lo es.

La condición (6ii) indica que:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^D = g \frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{II}}} \\ \text{con } \sigma_{II}^D = g^2 \end{array} \right.$$

con lo cual las relaciones (8) deben ser reemplazadas por:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{II} < g^2 \quad \text{si } D_{ij} = 0 \\ \sigma_{II} = g^2 \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 / D_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^D . \end{array} \right.$$

Los materiales que obedecen la ley de comportamiento del tipo (11) son conocidos con el nombre de *materiales rígidos perfectamente plásticos*. En nuestro caso, la ley plástica (11) es la de Von Mises.

En (11) se ve que el punto representativo en \mathbb{R}^9 del desviador del tensor de tensiones σ^D se encuentra siempre en el interior o sobre la frontera de la esfera de ecuación $\sigma_{II} = g^2$.

Si dicho punto está en el interior el material está en estado rígido, y si está sobre la frontera entonces el material puede tener una deformación plástica. ■

El problema a estudiar consiste en hallar la velocidad \vec{u} y la presión p del fluido, solución de las condiciones (2), (5), (6), (9).

OBSERVACION 5.

El problema (2), (5), (6), (9) es un problema de frontera libre debido al hecho que el dominio Ω estará constituido por dos zonas: una con ley de comportamiento (6ii) y otra rígida con ley de comportamiento (6i), las cuales estarán separadas por una superficie (frontera libre) que resulta desconocida a priori. Veremos que dicha frontera libre no interviene explícitamente en la formulación variacional. Para una mayor información sobre el fluido de Bingham ver [G2,D3] y la bibliografía correspondiente. ■

3.2. FORMULACION VARIACIONAL

Las ecuaciones y condiciones que estudian el problema son:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j}(\vec{u}) = f_i \text{ en } \Omega, \quad i = 1, 2, 3 \\
 & \text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \\
 & \vec{u}/\Gamma = 0 \\
 & \sigma_{ij}(\vec{u}) = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij}^D(\vec{u}) \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \sigma_{II}^D(\vec{u}) \leq g^2 \quad \text{si } D_{II}(\vec{u}) = 0 \\
 & \sigma_{ij}^D(\vec{u}) = 2 \mu D_{ij}(\vec{u}) + g \frac{D_{ij}(\vec{u})}{\sqrt{D_{II}(\vec{u})}} \quad \text{si } D_{II}(\vec{u}) \neq 0.
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

LEMA 1.

Si \vec{u} es una solución regular de (12), entonces \vec{u} es solución de la inecuación variacional:

$$(13) \begin{cases} \mu a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) + g j(\vec{v}) - g j(\vec{u}) \geq (\vec{f}, \vec{v} - \vec{u}), \forall \vec{v} \in K \\ \vec{u} \in K \end{cases}$$

donde:

$$(14) \begin{cases} V = (H_0^1(\Omega))^3 \\ K = \{\vec{v} \in V / \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ en } \Omega\} \text{ convexo, cerrado y no vacío de } V \\ j(\vec{v}) = 2 \int_{\Omega} \sqrt{D_{II}(\vec{v})} dx, D_{II}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\vec{v}) D_{ij}(\vec{v}) \\ (\vec{f}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{f} \times \vec{v} dx, D_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ a(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} D_{ij}(\vec{u}) D_{ij}(\vec{v}) dx. \end{cases}$$

Demostración.

Si se multiplica la ecuación diferencial en (12) por $(v_i - u_i)$ con $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in K$, se suma con $i, j = 1, 2, 3$, se integra

sobre Ω y se tiene en cuenta que:

$$\sum_{i,j=1}^3 -p \delta_{ij} D_{ij}(\vec{v}-\vec{u}) = -p \sum_{i=1}^3 D_{ii}(\vec{v}-\vec{u}) = -p(\operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} \vec{u}) = 0 ,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{f} \times (\vec{v}-\vec{u}) \, dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 -\sigma_{ij,j}(\vec{u})(v_i-u_i) \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u})(v_i-u_i)_{,j} \, dx + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j (v_i-u_i) \, d\gamma = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) D_{ij}(\vec{v}-\vec{u}) \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^D(\vec{u}) D_{ij}(\vec{v}-\vec{u}) \, dx = \\ &= \mu a(\vec{u}, \vec{v}-\vec{u}) + g \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{D_{ij}(\vec{u})D_{ij}(\vec{v})}{\sqrt{D_{II}(\vec{u})}} \, dx - g j(\vec{u}) . \end{aligned}$$

De la desigualdad (Ejercicio 3):

$$(15) \quad \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\vec{u}) D_{ij}(\vec{v}) \leq 2 \sqrt{D_{II}(\vec{u})} \sqrt{D_{II}(\vec{v})}$$

sigue (13). ■

EJERCICIO 4.

Verificar que si $\sigma_{ij}^D(\vec{v})$ está definido por (6ii) entonces se tiene:

$$(16) \quad \lim_{D_{II}(\vec{v}) \rightarrow 0} \sigma_{II}^D(\vec{v}) = g^2 \quad . \quad \blacksquare$$

LEMA 2.

La inecuación variacional (13) tiene una única solución $\vec{u} \in K$, la cual está caracterizada por el principio de mínimo:

$$(17) \quad \begin{cases} J(\vec{u}) \leq J(\vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{v} \in K \\ \vec{u} \in K \end{cases}$$

donde:

$$(18) \quad \begin{cases} J(\vec{v}) = \frac{\mu}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) + g j(\vec{v}) - L(\vec{v}) \\ L(\vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v}) \end{cases}$$

Demostración:

La forma bilineal a es continua, simétrica y coercitiva sobre V , y L es una forma lineal y continua sobre V . Para aplicar el Ejercicio II.12 es suficiente verificar que j es convexa y continua en V , con lo cual j será semi-continua inferiormente en V débil, por el Ejercicio II.11.

La continuidad de j en V , surge de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad |j(\vec{v}) - j(\vec{u})| &= 2 \left| \int_{\Omega} \sqrt{D_{II}(\vec{v})} \, dx - \int_{\Omega} \sqrt{D_{II}(\vec{u})} \, dx \right| \leq \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left| \sqrt{D_{II}(\vec{v})} - \sqrt{D_{II}(\vec{u})} \right| \, dx . \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad (19) \quad \left| \sqrt{D_{II}(\vec{v})} - \sqrt{D_{II}(\vec{u})} \right| \leq \sqrt{D_{II}(\vec{v}-\vec{u})} \quad (\text{Ejercicio 5}).$$

$$\text{iii)} \quad (20) \quad |j(\vec{v}) - j(\vec{u})| \leq |j(\vec{v}-\vec{u})| .$$

$$\text{iv)} \quad (21) \quad |j(\vec{v})| \leq 2 \sqrt{\text{med}(\Omega)} \sqrt{\int_{\Omega} D_{II}(\vec{v}) \, dx} = \sqrt{\text{med}(\Omega)} \|\vec{v}\| ,$$

donde

$$(22) \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} D_{ij}(\vec{v}) D_{ij}(\vec{v}) \, dx} .$$

v) EJERCICIO 6.

$\|\vec{v}\|$ es una norma equivalente a la norma de V , es decir:

$$(23) \quad \exists c_0 > 0 / c_0 \|\vec{v}\| \leq \|\vec{v}\| \leq \|\vec{v}\| ,$$

donde:

$$(24) \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} |\vec{v}_i|^2 dx}$$

representa la norma en V (utilizar la desigualdad de Korn, ver [D3]).

La convexidad de j en V surge de la desigualdad (Ejercicio 7)

$$(25) \quad D_{II}(t\vec{u}+(1-t)\vec{v}) \leq (t\sqrt{D_{II}(\vec{u})}+(1-t)\sqrt{D_{II}(\vec{v})})^2, \forall t \in [0,1]. \blacksquare$$

OBSERVACION 6.

La interpretación de la solución de la inecuación variacional (13) como solución del problema (12) es delicada. Por una verificación formal ver [D3,p.285]. ■

3.3. FLUIDO DE BINGHAM EN UNA CAÑERÍA CILÍNDRICA

Se estudiará el problema (12) correspondiente al fluido de Bingham en una cañería cilíndrica rectilínea, representada por $\Omega \times (-\infty, +\infty)$, donde:

$$(26) \quad \Omega \text{ es un dominio acotado del plano } x\text{-}y,$$

bajo las hipótesis:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) (27) } \vec{u} = (0, 0, u) \text{ (movimiento laminar)} \\ \text{ii) } \vec{f} = \vec{0} \text{ (no existe campo de fuerza exterior)} \\ \text{iii) } p_1 \text{ y } p_2 \text{ son las presiones en las secciones} \\ \quad z = 0 \text{ y } z = h > 0 \text{ respectivamente, es decir:} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} p(x, y, 0) = p_1, \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ p(x, y, h) = p_2, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

EJERCICIO 8.

$$(29) \quad \text{div } \vec{u} = 0 \Leftrightarrow u = u(x, y). \blacksquare$$

EJERCICIO 9.

Si $\text{div } \vec{u} = 0$, entonces:

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } D(\vec{u}) = (D_{ij}(\vec{u}))_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \text{ii) } \sqrt{D_{II}(\vec{u})} = \frac{1}{2} |\vec{\nabla} u| . \end{array} \right.$$

iii) Si $|\vec{\nabla} u| \neq 0$, se tiene:

$$\sigma^D(\vec{u}) = (\sigma_{ij}^D(\vec{u}))_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{31}^D(\vec{u}) \\ 0 & 0 & \sigma_{32}^D(\vec{u}) \\ \sigma_{31}^D(\vec{u}) & \sigma_{32}^D(\vec{u}) & 0 \end{pmatrix}$$

con:

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} \sigma_{31}^D(\vec{u}) = \left(\mu + \frac{g}{|\vec{\nabla} u|} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{32}^D(\vec{u}) = \left(\mu + \frac{g}{|\vec{\nabla} u|} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \\ \\ \text{b) } \sqrt{\sigma_{II}^D(\vec{u})} = \sqrt{(\sigma_{31}^D(\vec{u}))^2 + (\sigma_{32}^D(\vec{u}))^2} = \mu |\vec{\nabla} u| + g . \blacksquare \end{array} \right.$$

EJERCICIO 10.

Si $\vec{f} = 0$, entonces las ecuaciones del equilibrio

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} = 0, \text{ nos dan:}$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ i = 2 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ i = 3 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{31}^D}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}^D}{\partial y} = -c \text{ (constante)} \end{array} \right.$$

obteniéndose:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = p(z) = -cz + p_1 \\ c = \frac{p_2 - p_1}{h} > 0 : \text{caída lineal de presión} \end{array} \right.$$

ii)

$$(34) \quad \frac{\partial \sigma_{31}^D(u)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}^D(u)}{\partial y} = -c \text{ en } \Omega. \blacksquare$$

Resumiendo, el problema (12) se reduce a hallar:

$$(35) \quad \begin{cases} u = u(x, y) \\ \sigma_{31}^D = \sigma_{31}^D(x, y) \\ \sigma_{32}^D = \sigma_{32}^D(x, y) \end{cases}$$

solución de:

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{31}^D}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}^D}{\partial y} = -c \text{ en } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \\ \left. \begin{cases} (\sigma_{31}^D)^2 + (\sigma_{32}^D)^2 \leq g^2 \text{ si } |\vec{\nabla}u| = 0 \\ \left. \begin{cases} \sigma_{31}^D = \left(\mu + \frac{g}{|\vec{\nabla}u|}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{32}^D = \left(\mu + \frac{g}{|\vec{\nabla}u|}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \right\} \text{ si } |\vec{\nabla}u| \neq 0. \blacksquare \end{cases} \right\}$$

LEMA 3.

Si u es una solución regular de (36), entonces u es solución

de la inecuación variacional:

$$(37) \quad \begin{cases} \mu a(u, v-u) + g j(v) - g j(u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

donde:

$$(38) \quad \begin{cases} V = H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx \, dy \\ j(v) = \int_{\Omega} |\vec{\nabla} v| \, dx \, dy \\ L(v) = c \int_{\Omega} v \, dx \, dy . \end{cases}$$

Demostración:

Si se multiplica la ecuación diferencial a derivadas parciales de (36) por $v-u$, con $v \in V$, y se integra sobre Ω , se obtiene:

$$\begin{aligned} L(v-u) &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{31}^D}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}^D}{\partial y} \right) (v-u) \, dx \, dy = \\ &= \int_{\Omega} \left[\sigma_{31}^D \frac{\partial}{\partial x} (v-u) + \sigma_{32}^D \frac{\partial}{\partial y} (v-u) \right] \, dx \, dy \end{aligned}$$

de donde se obtiene (37) (Ejercicio 11). ■

LEMA 4.

La inecuación variacional (37) tiene una única solución $u \in V$, la cual está caracterizada por el principio de mínimo:

$$(39) \quad \begin{cases} J(u) \leq J(v) , \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

donde

$$(40) \quad J(v) = \frac{\mu}{2} a(v,v) + g j(v) - L(v).$$

Demostración:

Se utilizan los Ejercicios II.11, II.12 y el Ejercicio 12 siguiente. ■

EJERCICIO 12.

i) j es continua en V , más aún:

$$(41) \quad |j(v) - j(u)| \leq \sqrt{\text{med}(\Omega)} \|v-u\|_V .$$

ii) j es convexa. ■

A continuación veremos algunas propiedades que goza la solución $u_g \in V$, para cada $g > 0$, de la inecuación variacional (37).

LEMA 5.

La aplicación $g > 0 \rightarrow u_g \in V$ es lipschiziana, es decir:

$$(42) \quad \exists M > 0 / \|u_{g_2} - u_{g_1}\| \leq M |g_2 - g_1|.$$

Demostración:

Si se toma $v = u_{g_2} \in V$ en la inecuación variacional correspondiente a u_{g_1} y $v = u_{g_1} \in V$ en la inecuación variacional correspondiente a u_{g_2} , y se suman ambas desigualdades, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu \|u_{g_2} - u_{g_1}\|^2 &= \mu a(u_{g_2} - u_{g_1}, u_{g_2} - u_{g_1}) \leq \\ &\leq (g_2 - g_1)(j(u_{g_1}) - j(u_{g_2})) \leq \\ &\leq |g_2 - g_1| |j(u_{g_2}) - j(u_{g_1})| \leq \end{aligned}$$

$$\leq |g_2 - g_1| \sqrt{\text{med}(\Omega)} \|u_{g_2} - u_{g_1}\|_V$$

de donde se obtiene (42) con $M = \frac{\sqrt{\text{med}(\Omega)}}{\mu} > 0$. ■

EJERCICIO 13.

$$(43) \quad \exists a_0 > 0 / \int_{\Omega} |\nabla v| \, dx \, dy \geq a_0 \int_{\Omega} |v| \, dx \, dy, \quad \forall v \in V.$$

(Hacer una demostración análoga a la de Friedrichs-Poincaré, ver por ejemplo [N1]). ■

LEMA 6.

Sea $g_c = \frac{c}{a_0}$, entonces:

$$(44) \quad u_g = 0, \quad \forall g \geq g_c.$$

Demostración:

$$J(v) = \frac{\mu}{2} a(v, v) + g j(v) - L(v) \geq$$

$$\geq g j(v) - L(v) \geq (g a_0 - c) \int_{\Omega} |v| \, dx \, dy, \quad \forall v \in V.$$

Si $g \geq g_c$, se tiene $J(v) \geq 0$, $\forall v \in V$, y como $J(0) = 0$, debe ser $u_g = 0$ la única solución del problema de mínimo (39). ■

OBSERVACION 7.

El lema 6 justifica lo anticipado en la observación 3. ■

LEMA 7.

Se tiene:

$$(45) \quad \lim_{g \rightarrow 0} \|u_g - u\|_V = 0$$

donde u es la única solución de la ecuación variacional:

$$(46) \quad \begin{cases} \mu a(u, v) = L(v) , \forall v \in V \\ u \in V. \end{cases}$$

Demostración:

La ecuación variacional (46) tiene única solución $u \in V$ por aplicación directa del Teorema de Lax-Milgram.

Si se toma $v = u \in V$ en la inecuación variacional (37) correspondiente a $u_g \in V$ y $v = u - u_g \in V$ en la ecuación variacional (46) correspondiente a $u \in V$, se obtienen:

$$(47) \quad \begin{cases} \mu a(u_g, u - u_g) + g j(u) - g j(u_g) \geq L(u - u_g) \\ \mu a(u, u_g - u) = L(u_g - u) \end{cases}$$

y sumando:

$$\begin{aligned} \mu \|u_g - u\|_V^2 &= \mu a(u_g - u, u_g - u) < g (j(u) - j(u_g)) < \\ &\leq g \sqrt{\text{med}(\Omega)} \|u - u_g\|_V \end{aligned}$$

es decir:

$$(48) \quad \|u_g - u\|_V < \frac{\sqrt{\text{med}(\Omega)}}{\mu} g$$

de donde surge (45). ■

EJERCICIO 14.

El elemento $u_g \in V$ verifica:

$$(49) \quad \begin{cases} \text{i) } \mu a(u_g, u_g) + g j(u_g) = L(u_g) \\ \text{ii) } J_g(u_g) = -\frac{1}{2} \mu a(u_g, u_g) \end{cases}$$

donde J_g está definido por (40) para cada $g > 0$. ■

OBSERVACION 8.

El lema 7 justifica lo ya anticipado en la observación 2. ■

EJERCICIO 15.

La única solución $u \in V$ de la ecuación variacional (46) está caracterizada por:

$$(50) \quad \begin{cases} -\mu \Delta u = c \text{ en } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0. \blacksquare \end{cases}$$

El funcional j no es diferenciable según Gâteaux en V ; a continuación se aproximará j por un funcional j_ϵ , diferenciable según Gâteaux en V , que converga a j para $\epsilon \rightarrow 0$. Este método de trabajo recibe el nombre de *Método de Regularización* (ver [L3, G5]).

Sea

$$(51) \quad \begin{cases} j_\epsilon: V \longrightarrow \mathbb{R} / j_\epsilon(v) = \int_{\Omega} \sqrt{\epsilon^2 + |\vec{\nabla}v|^2} \, dx \, dy \\ \epsilon > 0. \end{cases}$$

EJERCICIO 16.

- i) El funcional j_ϵ es diferenciable según Gâteaux en V ,
siendo:

$$(52) \quad \langle j'_\epsilon(u), v \rangle = \int_{\Omega} \frac{\vec{\nabla}u \times \vec{\nabla}v}{\sqrt{\epsilon^2 + |\vec{\nabla}u|^2}} \, dx \, dy .$$

$$ii) \quad 0 \leq \sqrt{t^2 + \epsilon^2} - |t| \leq \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

$$iii) \quad 0 \leq j_\epsilon(v) - j(v) \leq \epsilon \, \text{med}(\Omega). \quad (53)$$

Si se considera la inecuación variacional (37) con j_ϵ en lugar de j , para cada $g > 0$, se tiene el siguiente problema:

$$(54) \quad \begin{cases} \mu a(u_{g\epsilon}, v - u_{g\epsilon}) + g j_\epsilon(v) - g j_\epsilon(u_{g\epsilon}) \geq L(v - u_{g\epsilon}), \quad \forall v \in V \\ u_{g\epsilon} \in V. \end{cases}$$

EJERCICIO 17.

- i) $\forall \epsilon > 0$, $\forall g > 0$, existe una única solución $u_{g\epsilon} \in V$ de la inecuación variacional (54).
- ii) El elemento $u_{g\epsilon} \in V$ es solución (54) $\Leftrightarrow u_{g\epsilon}$ es solución de la ecuación variacional no lineal:

$$(55) \quad \begin{cases} \mu a(u_{g\epsilon}, v) + g \langle j'_\epsilon(u_{g\epsilon}), v \rangle = L(v) , \forall v \in V \\ u_{g\epsilon} \in V. \blacksquare \end{cases}$$

A continuación veremos de qué manera $u_{g\epsilon} \in V$ aproxima a $u_g \in V$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, para cada $g > 0$.

LEMA 8.

$$(56) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_{g\epsilon} - u_g\|_V = 0 .$$

Demostración:

De (37) y (54) se obtienen:

$$\begin{cases} \mu a(u_g, u_{g\epsilon} - u_g) + g j(u_{g\epsilon}) - g j(u_g) \geq L(u_{g\epsilon} - u_g) \\ \mu a(u_{g\epsilon}, u_g - u_{g\epsilon}) + g j(u_g) - g j(u_{g\epsilon}) \geq L(u_g - u_{g\epsilon}) \end{cases}$$

de donde, por adición, se tiene:

$$-\mu a(u_{g\epsilon} - u_g, u_{g\epsilon} - u_g) + g(j_\epsilon(u_g) - j(u_g)) + g(j(u_{g\epsilon}) - j_\epsilon(u_{g\epsilon})) \geq 0$$

es decir:

$$\begin{aligned} \mu \|u_{g\epsilon} - u_g\|_V^2 &= \mu a(u_{g\epsilon} - u_g, u_{g\epsilon} - u_g) \leq \\ &\leq \mu a(u_{g\epsilon} - u_g, u_{g\epsilon} - u_g) + g(j_\epsilon(u_{g\epsilon}) - j(u_{g\epsilon})) \leq \\ &\leq g(j_\epsilon(u_g) - j(u_g)) \leq g \epsilon \operatorname{med}(\Omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

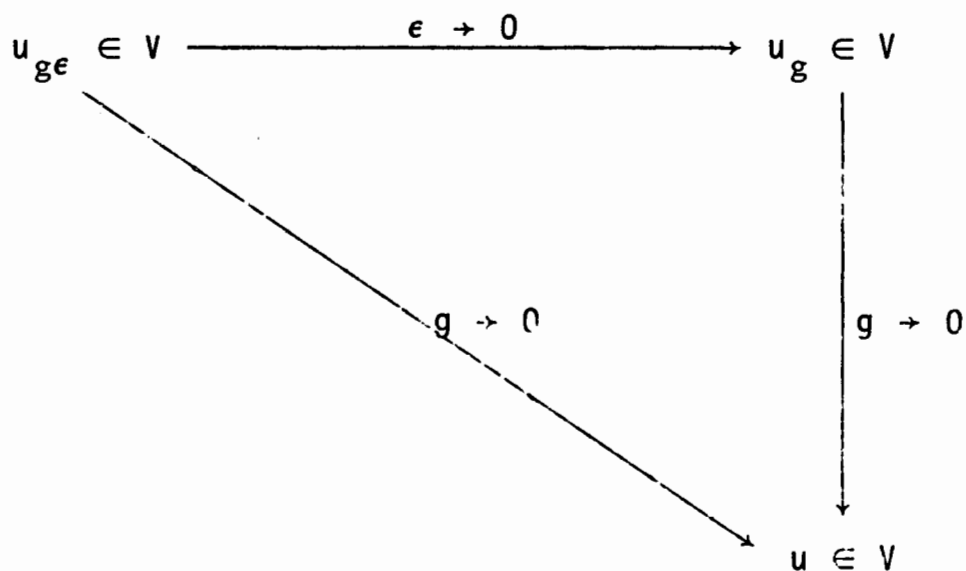
$$(57) \quad \|u_{g\epsilon} - u_g\|_V \leq \sqrt{\frac{g \operatorname{med}(\Omega)}{\mu}} \sqrt{\epsilon}$$

obteniéndose (56). ■

EJERCICIO 18.

$$i) \quad (58) \quad \lim_{g \rightarrow 0} \|u_{g\epsilon} - u\|_V = 0 .$$

ii) Se tiene el siguiente diagrama:



donde:

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 u_g \in V \text{ es la \u00fanica soluci\u00f3n de (54), para } \epsilon > 0, g > 0 \\
 u_g \in V \text{ es la \u00fanica soluci\u00f3n de (37), para } g > 0 \\
 u \in V \text{ es la \u00fanica soluci\u00f3n de (46). } \blacksquare
 \end{array} \right.$$

LEMA 9.

El elemento $u_g \in V$ es soluci\u00f3n de (37) $\Leftrightarrow \{u_g, p_g\}$ es soluci\u00f3n del problema:

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \mu a(u_g, v) + g \int_{\Omega} p_g \times \vec{\nabla} v \, dx \, dy = L(v), \forall v \in V \\
 p_g \times \vec{\nabla} u_g = |\vec{\nabla} u_g| \text{ en c.t.p. de } \Omega \\
 u_g \in V, p_g \in A
 \end{array} \right.$$

donde:

$$(61) \quad A = \{ q = (q_1, q_2) \in (L^2(\Omega))^2 / |q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \leq 1 \text{ en c.t.p. de } \Omega \} .$$

Demostración:

⇒) Sea:

$$(62) \quad p_{g\epsilon} = \frac{\vec{\nabla} u_{g\epsilon}}{\sqrt{\epsilon^2 + |\vec{\nabla} u_{g\epsilon}|^2}} .$$

Entonces se tiene:

$$(63) \quad \begin{cases} \mu a(u_{g\epsilon}, v) + g \int_{\Omega} p_{g\epsilon} x \vec{\nabla} v \, dx \, dy = L(v) , \forall v \in V \\ u_{g\epsilon} \in V , p_{g\epsilon} \in A . \end{cases}$$

Como A es cerrado y acotado en $(L^2(\Omega))^2$, se puede extraer de $(p_{g\epsilon})_{\epsilon}$ una subsucesión, notada aún $(p_{g\epsilon})_{\epsilon}$, tal que:

$$(64) \quad \begin{cases} p_{g\epsilon} \rightharpoonup p_g \text{ en } (L^2(\Omega))^2 \text{ débil} \\ p_g \in A . \end{cases}$$

Teniendo en cuenta (56) y (64), de (63) se deduce:

$$(55) \quad \begin{cases} \mu a(u_g, v) + \int_{\Omega} p_g \times \vec{\nabla} v \, dx \, dy = L(v) , \forall v \in V \\ u_g \in V , p_g \in A. \end{cases}$$

Si en (65) se toma $v = u_g \in V$ y se compara con (49) se obtiene:

$$j(u_g) - \int_{\Omega} p_g \times \vec{\nabla} u_g \, dx \, dy = 0$$

es decir:

$$\int_{\Omega} (|\vec{\nabla} u_g| - p_g \times \vec{\nabla} u_g) \, dx \, dy = 0$$

que con:

$$|p_g \times \vec{\nabla} u_g| \leq |p_g| |\vec{\nabla} u_g| \leq |\vec{\nabla} u_g|$$

implica:

$$(66) \quad p_g \times \vec{\nabla} u_g = |\vec{\nabla} u_g|$$

⇐) Ejercicio 19. ■

OBSERVACION 9.

El elemento $p_g \in A$, en general, no es único (ver [G3,Cap.5]). ■

EJERCICIO 20.

El elemento $\{u,p\}$ solución de (60) es un punto de ensilladura sobre $V \times A$ del funcional:

$$(67) \quad \mathcal{L}(v,q) = \frac{\mu}{2} a(v,v) + g \int_{\Omega} q \times \vec{\nabla} v \, dx \, dy - L(v)$$

es decir:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p) , \forall v \in V , \forall q \in A \\ u \in V , p \in A . \blacksquare \end{array} \right.$$

OBSERVACION 10.

Numerosas aplicaciones numéricas pueden verse en [G3]. ■

A continuación se verá un ejemplo con solución exacta.

EJERCICIO 21.

Sean:

$$(69) \quad \begin{cases} \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / r = \sqrt{x^2+y^2} < R\} \\ R > 0 . \end{cases}$$

Entonces la solución $u_g = u_g(r) \in V$ de la inecuación variacional (37) verifica:

i) Si $g \geq \frac{cR}{2}$, entonces:

$$(70) \quad u_g(r) = 0 .$$

ii) Si $g < \frac{cR}{2}$, entonces:

$$(71) \quad u_g(r) = \begin{cases} \frac{c}{4\mu} (R - \frac{2g}{c}) & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{2g}{c} \\ \frac{c}{4\mu} (R^2 - r^2) - \frac{g}{\mu} (R - r) & \text{si } \frac{2g}{c} \leq r \leq R . \end{cases}$$

iii) Si $g < \frac{cR}{2}$, entonces:

$$(72) \quad \begin{cases} u_g \in V \cap W^{2,\infty} \\ u_g \notin V \cap H^3(\Omega) . \blacksquare \end{cases}$$

OBSERVACION 11.

Para Ω dado por (69) el valor crítico de plasticidad g_c está dado por:

$$(73) \quad g_c = \frac{c R}{2}$$

Vemos además que g_c no depende de la viscosidad μ del fluido. ■

Veremos a continuación cómo determinar el valor crítico de plasticidad para un dominio acotado Ω de \mathbb{R}^2 .

LEMA 10.

Se tiene:

$$i) (74) \quad g \geq \frac{c}{a} \Rightarrow u_g = 0$$

$$ii) (75) \quad g < \frac{c}{a} \Rightarrow u_g \neq 0$$

donde:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \inf_{v \in S} j(v) \\ S = \{v \in V / \|v\|_{L^1(\Omega)} = 1\} . \end{array} \right.$$

Demostración:

- i) Utilizar un procedimiento análogo al Lema 6 (Ejercicio 22).
- ii) Es una demostración bastante delicada, ver [G4]. ■

OBSERVACION 12.

El valor α , definido por (76), también puede calcularse como (Ejercicio 23):

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \inf_{v \in H} j(v) \\ H = \{v \in V / \int_{\Omega} v \, dx \, dy = 1\} \quad \cdot \blacksquare \end{array} \right.$$

Se tienen, asimismo, algunas otras propiedades generales para la solución $u_g \in V$ de (37).

LEMA 11.

Las aplicaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} g > 0 \longrightarrow a(u_g, u_g) \\ g > 0 \longrightarrow j(u_g) \end{array} \right.$$

son no crecientes, es decir:

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } g_1 \leq g_2 \Rightarrow a(u_{g_2}, u_{g_2}) \leq a(u_{g_1}, u_{g_1}) \\ \text{ii) } g_1 \leq g_2 \Rightarrow j(u_{g_2}) \leq j(u_{g_1}) \end{array} \right. .$$

Demostración:

i) Se tiene:

$$(79) \quad \begin{aligned} J_{g_1}(v) &= \frac{\mu}{2} a(v, v) + g_1 j(v) - L(v) \leq \\ &\leq \frac{\mu}{2} a(v, v) + g_2 j(v) - L(v) = J_{g_2}(v), \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

y por (49ii) se deduce:

$$-\frac{\mu}{2} a(u_{g_1}, u_{g_1}) = \inf_{v \in V} J_{g_1}(v) \leq \inf_{v \in V} J_{g_2}(v) = -\frac{\mu}{2} a(u_{g_2}, u_{g_2})$$

obteniéndose (78i).

ii) De la demostración del Lema 5 se pueden obtener:

$$(80) \quad (g_2 - g_1)(j(u_{g_2}) - j(u_{g_1})) \leq 0$$

es decir (78ii). ■

LEMA 12.

Se tiene:

$$(81) \quad u_g \geq 0 \quad \text{en c.t.p. de } \Omega.$$

Demostración:

Si se toma $v = (u_g)^+$ en (37), se tiene:

$$\mu a(u_g, u_g^-) + gj(u_g^+) - gj(u_g) \geq L(u_g^-).$$

Por otra parte:

$$\begin{cases} a(u_g, u_g^-) = -a(u_g^-, u_g^-) \\ j(u_g) - j(u_g^+) = j(u_g^-) \geq 0 \\ L(u_g^-) = c \int_{\Omega} u_g^- dx dy \geq 0 \end{cases}$$

con lo cual se deduce:

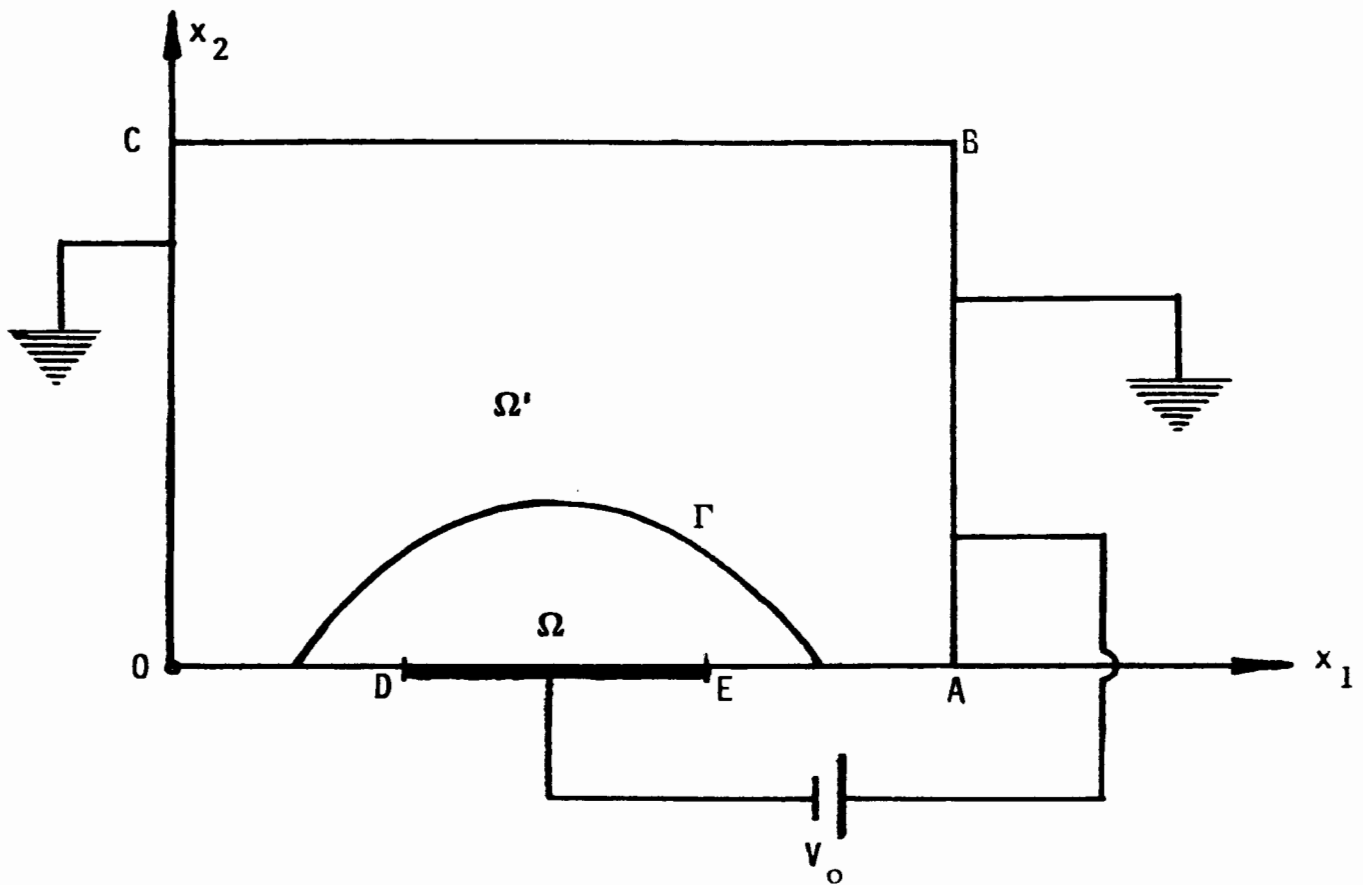
$$\mu \|u_g^-\|_V^2 = \mu a(u_g^-, u_g^-) \leq -gj(u_g^-) - L(u_g^-) \leq 0$$

es decir $\|u_g^-\|_V = 0$, de donde surge (81). ■

4. SEMICONDUCTORES BAJO UNA UNION P-N

4.1. INTRODUCCION

Consideremos una placa rectangular $R = (0,a) \times (0,b)$ de un material semi-conductor de tipo N (dador de electrones), a quien se le coloca una barra de un material semi-conductor de tipo P (captor de electrones) en la zona representada por el segmento \overline{DE} .



Los bordes \overline{AB} y \overline{CO} de la placa R se conectan a tierra y al conjunto placa-barra (llamado *unión P-N*) se le aplica una diferencia de potencial de V_0 volt ($V_0 > 0$). Debido a dicha diferencia de potencial la placa R tenderá a desprender electrones que serán captados por la barra \overline{DE} , formándose a su alrededor una zona Ω que estará cargada positivamente.

Sea Γ la frontera libre del problema, zona desconocida a priori, que separa los dominios Ω y $R - \overline{\Omega} = \Omega'$.

Consideremos:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \varphi : \text{potencial eléctrico} \\ \vec{E} = - \vec{\nabla} \varphi : \text{vector campo eléctrico} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} : \text{vector densidad de corriente} \\ \sigma > 0 : \text{coeficiente de conductividad de la placa R} \\ \rho : \text{densidad de carga eléctrica} \\ \epsilon_0 > 0 : \text{permitividad del vacío} \\ \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (primera ley de Maxwell).} \end{array} \right.$$

Llamaremos:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = \overline{DE} \quad , \quad \Gamma_3 = \overline{AB} \\ \Gamma_1 = \overline{OD} \quad , \quad \Gamma_4 = \overline{BC} \\ \Gamma_2 = \overline{EA} \quad , \quad \Gamma_5 = \overline{CO} . \end{array} \right.$$

El problema consistirá en hallar el potencial eléctrico φ , definido en R , que satisface (en régimen estacionario) las siguientes ecuaciones (se tiene en cuenta que la densidad de carga eléctrica es $\rho > 0$ en Ω y nula en Ω'):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \quad \text{en } \Omega' \\ -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \xi > 0 \quad \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

y las siguientes condiciones de contorno:

- i) Sobre Γ_0 , Γ_3 y Γ_5 se conocen los valores del potencial eléctrico φ , en cambio sobre Γ_1 , Γ_2 y Γ_4 el flujo de corriente entre la placa R y el exterior es nulo, es decir:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi/\Gamma_0 = -V_0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}/\Gamma_1 = 0 \quad (*) \\ \varphi/\Gamma_3 = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}/\Gamma_2 = 0 \\ \varphi/\Gamma_5 = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}/\Gamma_4 = 0 \quad . \end{array} \right.$$

ii) Sobre la frontera libre Γ , el potencial eléctrico φ debe ser continuo y además, el flujo de corriente entre Ω y Ω' es nulo, es decir:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ continuo en } \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}/\Gamma = 0 \quad . \end{array} \right.$$

Resumiendo, el problema (3), (4), (5) puede plantearse de la siguiente manera (se considera que $\varphi \equiv 0$ en Ω'):

Hallar el potencial eléctrico φ definido en R , que satisface las condiciones siguientes:

(*) Si sobre Γ_1 el flujo de corriente eléctrica es nulo, entonces se tiene $\vec{J} \times \vec{n} = 0$ (\vec{n} versor normal exterior a Γ_1), es decir $\frac{\partial \varphi}{\partial n}/\Gamma_1 = 0$. Análogamente para Γ_2 y Γ_4 .

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \quad \text{en } \Omega' \\ -\Delta\varphi = \xi > 0 \quad \text{en } \Omega \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \\ \varphi /_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} /_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0 \\ \varphi /_{\Gamma_0} = -V_0 < 0 \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

4.2. FORMULACION VARIACIONAL

Se tienen las siguientes propiedades:

LEMA 1.

Si φ es una solución regular de (6), entonces

$$(7) \quad -\Delta\varphi = \xi \chi_{\Omega} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

donde χ_{Ω} es la función característica del conjunto Ω .

Demostración:

$\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle -\Delta\varphi, v \rangle &= \langle -\varphi, \Delta v \rangle = \int_{\mathbb{R}} -\varphi \Delta v \, dx = \int_{\Omega} -\varphi \Delta v \, dx + \int_{\Omega^c} -\varphi \Delta v \, dx = \\ &= \int_{\Omega} -\varphi \Delta v \, dx = \int_{\Omega} -\Delta\varphi v \, dx - \int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\gamma = \\ &= \int_{\Omega} \xi v \, dx - \int_{\partial\Omega-\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\gamma - \int_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\gamma = \\ &= \int_{\Omega} \xi v \, dx = \int_{\mathbb{R}} \xi \chi_{\Omega} v \, dx = \langle \xi \chi_{\Omega}, v \rangle,\end{aligned}$$

de donde surge (7). ■

OBSERVACION 1.

Dado ξ (constante positiva) y conocida la solución de (6), entonces el conjunto Ω puede ser determinado por:

$$(8) \quad \Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} / \varphi(x) < 0\} \quad \blacksquare$$

Sean:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} V = H^1(R) \\ K = \{ v \in V / v \leq 0 \text{ en } R, v|_{\Gamma_0} = -V_0, v|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0 \}, \\ \text{conjunto convexo, cerrado y no vacío de } V. \\ K_0 = \{ v \in V / v \leq 0 \text{ en } R, v|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0 \} \\ a(u,v) = \int_R \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx \\ (u,v) = \int_R u \, v \, dx \\ L(v) = \int_R \xi \, v \, dx . \end{array} \right.$$

LEMA 2.

Si φ es una solución regular de (7), entonces φ es solución de la inecuación variacional:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} a(\varphi, v-\varphi) \geq L(v-\varphi) , \forall v \in K \\ \varphi \in K . \end{array} \right.$$

Demostración:

De (9), $\forall v \in K$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \quad (-\Delta\varphi, v - \varphi) &= (\xi \chi_{\Omega}, v - \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \xi \chi_{\Omega} (v - \varphi) \, dx = \\
 &= \int_{\Omega} \xi (v - \varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \xi (v - \varphi) \, dx - \int_{\Omega'} \xi (v - \varphi) \, dx \geq \cdot \\
 &\geq \int_{\mathbb{R}} \xi (v - \varphi) \, dx = L(v - \varphi).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \quad (-\Delta\varphi, v - \varphi) &= \int_{\mathbb{R}} -\Delta\varphi (v - \varphi) \, dx = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \vec{\nabla}\varphi \times \vec{\nabla}(v - \varphi) \, dx - \int_{\partial\mathbb{R}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} (v - \varphi) \, d\gamma = \\
 &= a(\varphi, v - \varphi) - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4} \frac{\partial\varphi}{\partial n} (v - \varphi) \, d\gamma - \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} \frac{\partial\varphi}{\partial n} (v - \varphi) \, d\gamma \\
 &= a(\varphi, v - \varphi).
 \end{aligned}$$

De i) e ii) se obtiene (10). ■

LEMA 3.

Existe una única solución φ de la inecuación variacional (10),
con $\varphi \geq \varphi_0$.

Demostración:

Es suficiente aplicar el Lema I.6 y el Ejercicio I.11ii (Ejercicio 1). ■

OBSERVACION 2.

Conocida la solución φ de la inecuación variacional (10) se puede definir Ω por (8). Interpretar la solución φ de (10) (Ejercicio 2).

Además como en otros ejemplos anteriores, la frontera libre no aparece explícitamente en la formulación variacional. ■

A continuación veremos un ejemplo unidimensional para el cual la solución exacta puede calcularse.

EJEMPLO 1.

Sean:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = (0, a) , a > 0 \\ \Gamma_0 = \{0\} \\ \Gamma_3 = \{a\} \\ \Gamma = \{x_0\}. \end{array} \right.$$

Entonces el problema (6) está dado por:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\varphi''(x) = \xi > 0 \text{ en } (0, x_0) , 0 < x_0 \leq a \\ \varphi(x) = 0 \quad \text{en } (x_0, a) \\ \varphi(x_0) = 0 \\ \varphi'(x_0) = 0 \\ \varphi(0) = -V_0 \quad (V_0 > 0). \end{array} \right.$$

La solución $\{\varphi, x_0\}$ de (12) es (Ejercicio 3):

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = -\frac{\xi}{2} x^2 + \sqrt{2\xi V_0} x - V_0 = -\frac{\xi}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2V_0}{\xi}}\right)^2 \\ x_0 = \sqrt{\frac{2V_0}{\xi}} . \end{array} \right.$$

Para que la solución (13) exista, los datos $\{V_0, \xi\}$ deben satisfacer la siguiente restricción ($x_0 \leq a$):

$$(14) \quad \sqrt{\frac{2V_0}{\xi}} \leq a \quad \blacksquare$$

OBSERVACION 3.

En [H1,H2] se plantea un problema más general, el de la unión P-N de un transistor biselado, como asimismo la correspondiente aproximación numérica. Ver también [C2]. ■

OBSERVACION 4.

Supongamos el caso físico en que se conozcan el conjunto Ω (y por ende la frontera libre Γ) y el potencial V_0 aplicado sobre Γ_0 , pero se desconoce la densidad de carga eléctrica ρ (y por ende $\xi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$) en Ω . Se podrán conocer $\{\varphi; \xi\}$? ■

EJEMPLO 2.

Se analizará la observación 4 para el ejemplo 1.

Supongamos que conocemos:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = (0, x_0) \\ \Gamma = \{x_0\} \\ \text{con } 0 < x_0 < a \end{array} \right.$$

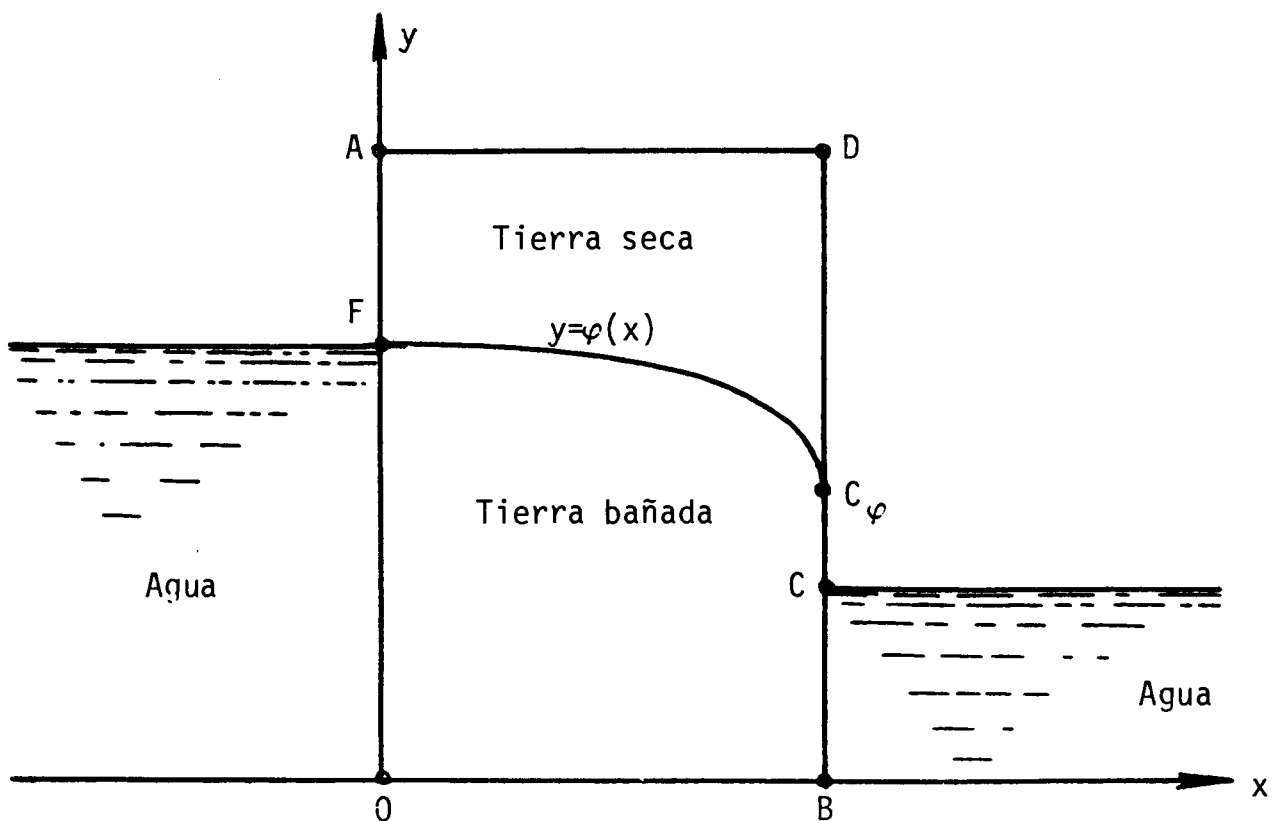
entonces φ , ξ están determinados por (Ejercicio 4):

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{2V_0}{x_0^2} \\ \varphi(x) = -\frac{V_0}{x_0^2} x^2 + 2 \frac{V_0}{x_0} x - V_0 = -\frac{V_0}{x_0^2} (x - x_0)^2 \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

5. PROBLEMA DEL DIQUE POROSO

5.1. INTRODUCCION

Se estudiará el régimen estacionario bidimensional del flujo de un fluido homogéneo, isótropo e incompresible a través de un medio poroso; consideremos el dique de paredes verticales y base horizontal:



donde:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} O = (0,0) \\ B = (a,0) \\ C = (a,h) \\ F = (0,H) \quad , \quad H > h \\ C_{\varphi} = (a,\varphi(a)) \quad , \quad \varphi(a) > h \\ A = (0,b) \quad , \quad b > H \\ D = (a,b) \\ R = (0,a) \times (0,b): \text{dique de tierra (material poroso)} \\ \Omega = \{(x,y) \in R / 0 < y < \varphi(x), 0 < x < a\}: \text{zona bañada.} \end{array} \right.$$

Por efecto de la gravedad el agua filtrará del nivel más alto al nivel más bajo, es decir, de izquierda a derecha en nuestro caso.

En la zona bañada Ω se tiene la ley de Darcy que establece:

$$(2) \quad \vec{v} = -k \vec{\nabla} u$$

donde:

(3) {

- \vec{v} : velocidad del fluido
- $u = y + \frac{p}{\gamma}$: potencial
- $p = p(x,y)$: presión del fluido
- $\gamma = \rho g > 0$: peso específico del fluido
- $\rho > 0$: masa específica
- $g > 0$: aceleración de la gravedad
- $k = \frac{\tilde{k}\gamma}{\eta}$: coeficiente de permeabilidad del medio respecto al líquido
- $\tilde{k} > 0$: permeabilidad física del material poroso
- $\eta > 0$: viscosidad del líquido.

OBSERVACION 1.

El problema es esencialmente tridimensional, pero debido a que se suponen secciones constantes, se considera como si fue se bidimensional. ■

OBSERVACION 2.

La zona bañada Ω es la que se encuentra debajo de la curva $y = \varphi(x)$ que la separa de la zona seca. Dicha zona es no conocida a priori y representa la frontera libre del problema. ■

A continuación veremos las condiciones que deben satisfacer las funciones incógnitas $\{u, \varphi\}$, o en forma equivalente $\{p, \varphi\}$.

De la incompresibilidad del fluido se tiene:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

es decir:

$$(4) \quad \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\Delta p = 0 \quad \text{en } \Omega).$$

OBSERVACION 3.

De (4) surge que existe v , función armónica conjugada de u , que está definida, salvo una constante, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$(5) \quad \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases} .$$

A v se la llama *función de corriente*, que tiene la propiedad que las curvas representadas por $v = \text{cte.}$ son *líneas de corriente*, es decir trayectorias para las partículas de fluido.

Además, las líneas de corriente $v = \text{cte.}$ son ortogonales a las curvas $u = \text{cte.}$, que son llamadas *líneas equipotenciales*.

Por otra parte, a la función $\Phi = u+iv$ se la llama *potencial complejo*. ■

Sean:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = \overline{OB} = [0, a] \times \{0\} \\ \Gamma_1 = \overline{OF} = \{0\} \times [0, H] \\ \Gamma_2 = \overline{BC} = \{a\} \times [0, h] \\ \mathcal{L} = \{(x, y) / x \in [0, a], y = \varphi(x)\} \\ \Gamma_3 = \overline{CC_\varphi} = \{a\} \times [h, \varphi(a)] \text{ (línea de emergencia)}. \end{array} \right.$$

Se considera, sin pérdida de generalidad, que la presión atmosférica es nula. Por lo tanto:

$$(7) \quad \begin{cases} p = 0 & \text{en } R - \bar{\Omega} \\ p/\mathcal{L} = 0 \\ p/\Gamma_3 = 0 \end{cases} .$$

Las condiciones de contorno son las siguientes:

- i) Las porciones de frontera Γ_1 y Γ_2 son líneas equipotenciales, es decir:

$$(8) \quad \begin{cases} u/\Gamma_1 = \text{cte} = u(F) = H \\ u/\Gamma_2 = \text{cte} = u(C) = h \end{cases} .$$

- ii) Sobre la porción de frontera Γ_0 , que se supone que es una base impermeable, el flujo es nulo, es decir $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{n} = -\vec{j}$ versor normal a Γ_0), con lo cual se tiene:

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial y} / \Gamma_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y} / \Gamma_0 = -\gamma \right) .$$

- iii) Sobre la frontera libre \mathcal{L} la presión y el flujo son nulos, es decir:

$$(10) \quad \begin{cases} p/\ell = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}/\ell = 0 \end{cases}$$

que pueden escribirse como (Ejercicio 1):

$$(11) \quad \begin{cases} p(x, \varphi(x)) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x, \varphi(x)) - \varphi'(x) \frac{\partial p}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \gamma = 0 \end{cases}$$

donde el versor normal a ℓ está dado por:

$$(12) \quad \vec{n} = - \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}} \vec{j} .$$

iv) Sobre la porción de frontera Γ_3 se tiene presión nula y la condición física que puede salir fluido pero no entrar, es decir:

$$\begin{cases} p/\Gamma_3 = 0 \\ \vec{v}_x \vec{n} \geq 0 \quad (\vec{n} = \vec{i}) \end{cases}$$

o en forma equivalente:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } p/\Gamma_3 = 0 \\ \text{ii) } \frac{\partial u}{\partial x} / \Gamma_3 \leq 0 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x} / \Gamma_3 \leq 0 \right) . \end{array} \right.$$

La condición (13ii) es innecesaria, ver Ejercicio 3 y [B6, Vol.2 p.106]. ■

Existen, además, algunas propiedades físicas que es necesario conocer:

EJERCICIO 2.

Si L es una línea vertical que une Γ_0 con \mathcal{L} , entonces se tiene:

$$\int_L \vec{v}x\vec{n} \, dy \text{ es constante, independiente del punto } x.$$

Más aún, dicho valor está dado por:

$$(14) \quad \int_L \vec{v}x\vec{n} \, dy = k(v_0 - v_\varphi) , \quad \forall x$$

donde:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_o = v/\Gamma_o \\ v_\varphi = v/l \\ v : \text{función de corriente} \end{array} \right.$$

que nos dice que el flujo del campo vectorial \vec{v} a través de \underline{u} na sección de un tubo de corriente (región comprendida entre dos líneas de corriente) es constante. Dicha constante recibe el nombre de *descarga del dique* y se la nota con q . ■

OBSERVACION 4.

La descarga del dique está dada por:

$$(16) \quad q = -k \int_0^{\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{k}{\gamma} \int_0^{\varphi(x)} \frac{\partial p}{\partial x} dy \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 3.

i) En general, se tiene:

$$(17) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\gamma} \int_0^{\varphi(x)} \frac{\partial p}{\partial x} dy \right] = -\sqrt{1+(\varphi'(x))^2} \frac{\partial u}{\partial n} (x, \varphi(x)).$$

Más aún, en nuestro caso ambos son iguales a cero.

ii) Para un dique no necesariamente de paredes verticales, se tiene la equivalencia:

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^{\varphi(x)} \frac{\partial p}{\partial x} dy \text{ es no creciente en } [0, a] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0 \text{ en } \mathcal{L} \cup \Gamma_3. \blacksquare$$

En resumen, el problema consiste en hallar p, φ que satisfacen las condiciones siguientes:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 0 \text{ en } R - \bar{\Omega} \\ \Delta p = 0 \text{ en } \Omega \\ p/\Gamma_1 = \gamma(H-y) \\ p/\Gamma_2 = \gamma(h-y) \\ -\frac{\partial p}{\partial y}/\Gamma_0 = \gamma > 0 \\ p/\Gamma_3 = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} p(x, \varphi(x)) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x, \varphi(x)) - \varphi'(x) \frac{\partial p}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \gamma = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

OBSERVACION 5.

Por el principio de máximo en (18) se tiene $p \geq 0$ en Ω . ■

En general, la descarga del dique no es conocida [B6], salvo en el dique a paredes verticales, que analizamos, según el:

LEMA 1.

$$(19) \quad q = \frac{H^2 - h^2}{2a} k \quad .$$

Demostración:

Por (16) se tiene:

$$-\frac{q\gamma}{k} = \int_0^{\varphi(x)} \frac{\partial p}{\partial x}(x,y) dy \quad , \quad \forall x$$

e integrando en la variable x de 0 hasta a , se deduce, aplicando el teorema de Green en el plano:

$$\begin{aligned} -\frac{q\gamma a}{k} &= \iint_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} p(x,y) dy = \\ &= \int_0^h p(a,y) dy + \int_H^0 p(0,y) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_0^h \gamma(h-y) dy + \int_H^0 \gamma(H-y) dy = -\gamma \frac{H^2 - h^2}{2},$$

de donde sigue (19). ■

LEMA 2.

- i) u decrece estrictamente en ℓ .
- ii) la función φ es estrictamente decreciente.

Demostración:

i) Teniendo presente que debido a la acción de la gravedad el flujo se realiza de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, se deduce que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}/\ell = -k \vec{\nabla}u/\ell = -k \frac{\partial u}{\partial s} \vec{t} \\ \vec{t} : \text{versor tangente a } \ell \end{array} \right.$$

con lo cual $-k \frac{\partial u}{\partial s}$ representa el módulo del vector \vec{v} ; por lo tanto u decrece en ℓ .

ii) Surge del hecho que:

$$u/\mathcal{L}(x) = u(x, \varphi(x)) = y(x)/\mathcal{L} + \frac{p(x, \varphi(x))}{\gamma} / \mathcal{L} = \varphi(x). \blacksquare$$

OBSERVACION 6.

Para un análisis del problema en función de las incógnitas u , v ver [B3].

Además, como la función de corriente v está determinada salvo constante, se toma $v/\mathcal{L} = 0$, con lo cual se tiene que $v/\Gamma_0 = \frac{q}{k}$ (usando el Ejercicio 2). \blacksquare

OBSERVACION 7.

Veremos que para hallar la formulación variacional del problema (18) será necesario hacer un cambio de función incógnita [B1, B2], idea original de Baiocchi que ha dado lugar a numerosas aplicaciones a problemas de frontera libre. \blacksquare

5.2. FORMULACION VARIACIONAL

Sea el cambio de función incógnita definido por:

$$(20) \quad \omega(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in R - \Omega \\ \int_y^{\varphi(x)} p(x,\xi) d\xi & \text{si } (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

conocido como *Transformación de Baiocchi*.

OBSERVACION 8.

Conocido ω podrá calcularse la presión p mediante la relación:

$$(21) \quad p(x,y) = - \frac{\partial \omega}{\partial y} (x,y) \quad \blacksquare$$

LEMA 3.

El problema (18) se transforma, en función de la nueva incógnita, en:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \omega = 0 \text{ en } R - \Omega \\ \text{ii) } \Delta \omega = \gamma \text{ en } \Omega \\ \text{iii) } \Delta \omega = \gamma \chi_{\Omega} \text{ en } D'(R) \\ \text{iv) } \omega \geq 0 \text{ en } R \end{array} \right.$$

donde χ_{Ω} es la función característica del conjunto Ω .

Demostración:

Ejercicio 4. ■

LEMA 4.

Las condiciones de contorno para ω se expresan por:

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \omega(0, y) = \frac{\gamma}{2} (H-y)^2 \quad , \quad 0 \leq y \leq H \\ \text{ii) } \omega(a, y) = \frac{\gamma}{2} (h-y)^2 \quad , \quad 0 \leq y \leq h \\ \text{iii) } \omega /_{\ell} = 0 \\ \text{iv) } \omega_{x/\ell} = \omega_{y/\ell} = 0 \\ \text{v) } \omega /_{\Gamma_3} = 0 \\ \text{vi) } \omega(x, 0) = \frac{\gamma}{2} \left(H^2 - \frac{H^2 - h^2}{a} x \right) . \end{array} \right.$$

Demostración:

Ejercicio 5.

Para deducir (23vi) conviene verificar previamente que:

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, 0) = -\frac{\gamma q}{k} \\ \omega(0, 0) = \frac{\gamma H^2}{2} \quad \blacksquare \end{cases}$$

Sea la función $G(x, y)$ definida sobre ∂R de la siguiente forma:

$$(25) \quad G(x, y) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2} (H-y)^2 & \text{si } x = 0, \quad 0 \leq y < H \\ 0 & \text{si } x = 0, \quad H \leq y < b \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < a, \quad y = b \\ 0 & \text{si } x = a, \quad h \leq y < b \\ \frac{\gamma}{2} (h-y)^2 & \text{si } x = a, \quad 0 \leq y < h \\ \frac{\gamma}{2} (H^2 - \frac{H^2-h^2}{a} x) & \text{si } 0 \leq x < a, \quad y = 0. \end{cases}$$

Entonces el problema (18), según el cambio (20) de función incógnita, se transforma en el siguiente problema:

$$(26) \quad \begin{cases} \text{i) } \Delta \omega = \gamma & \text{en } \Omega \\ \text{ii) } \omega = 0 & \text{en } R - \Omega \\ \text{iii) } \omega = 0, \quad \vec{\nabla} \omega = \vec{0} & \text{en } \mathcal{L} \\ \text{iv) } \omega|_{\partial R} = G. \end{cases}$$

Sean:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = H^1(R) \\ K = \{v \in V / v \geq 0 \text{ en } R, v|_{\partial R} = G\} \\ a(u, v) = \int_R \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \\ L(v) = -\gamma \int_R v \end{array} \right.$$

entonces la formulación variacional del problema (26) está dada por el:

LEMA 5.

El elemento ω es solución de la inecuación variacional

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\omega, v-\omega) \geq L(v-\omega) , \forall v \in K \\ \omega \in K . \end{array} \right.$$

Demostración:

Multiplicando (26i) por $(v-\omega)$ con $v \in K$, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma(v-\omega) &= \int_{\Omega} \Delta\omega(v-\omega) = - \int_{\Omega} \vec{\nabla}\omega \times \vec{\nabla}(v-\omega) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\omega}{\partial n} (v-\omega) = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \vec{\nabla}\omega \times \vec{\nabla}(v-\omega) = -a(\omega, v-\omega) \end{aligned}$$

con lo cual se deduce:

$$\begin{aligned} a(\omega, v-\omega) &= - \int_{\Omega} \gamma(v-\omega) = - \gamma \int_{\mathbb{R}} (v-\omega) + \gamma \int_{\mathbb{R}-\Omega} (v-\omega) = \\ &= L(v-\omega) + \gamma \int_{\mathbb{R}-\Omega} v \geq L(v-\omega), \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

es decir (28). ■

LEMA 6.

Existe una única solución de la inecuación variacional (28), la cual está caracterizada por el principio de mínimo:

$$(29) \quad \begin{cases} J(\omega) \leq J(v), \quad \forall v \in K \\ \omega \in K \end{cases}$$

donde

$$(30) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \|\vec{\nabla} v\|^2 + \gamma \int_{\mathbb{R}} v \ .$$

Demostración:

Utilizar el Lema I.6 y el ejercicio II.9. ■

Para el estudio de la regularidad de la inecuación variacional (28) ver [B2,B6]; más aún, conocido ω , el conjunto Ω y la frontera libre \mathcal{L} se definen por:

$$(31) \quad \begin{cases} \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} / \omega(x,y) > 0\} \\ \mathcal{L} = \{(x,y) \in \partial\Omega / (x,y) \notin \partial\mathbb{R}\} \ . \end{cases}$$

Numerosas otras aplicaciones al problema pueden verse en [B4,B5,M1]. ■

6. PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

6.1. INTRODUCCION

El problema de Stefan estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una fase líquida (ejemplo: hielo y agua). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. La superficie de separación, que se encuentra a temperatura constante, es una incógnita suplementaria del problema sobre la cual existe otra condición que surge del principio de conservación de la energía [D1,F1,R2].

El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha superficie de separación entre las fases, a la cual se la llama la frontera libre del problema, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Se estudia la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida para $x \in \Omega$, donde Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^3 , que representa el material, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular. Se supone que $\theta = 0$ (0 grado centígrado) es la temperatura del cambio de fase entre la fase sólida y la fase líquida.

El conjunto Ω está dividido en dos regiones ocupadas por:

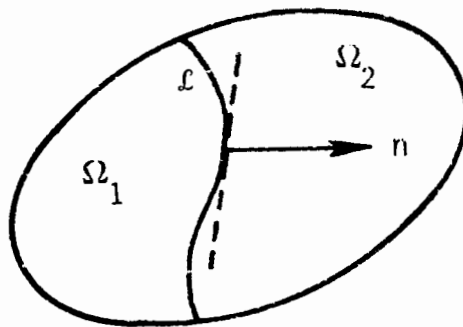
$$(1) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \{x \in \Omega / \theta(x) < 0\} \text{ la fase s\u00f3lida} \\ \Omega_2 = \{x \in \Omega / \theta(x) > 0\} \text{ la fase l\u00edquida.} \end{cases}$$

Se designa con \mathcal{L} la frontera libre que las separa, definida por:

$$(2) \quad \mathcal{L} = \{x \in \Omega / \theta(x) = 0\} .$$

La temperatura θ puede representarse en Ω de la siguiente manera:

$$(3) \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{L} \\ \theta_2(x) > 0 & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}$$



$$(4) \quad \begin{cases} \Omega = \Omega_1 \cup \mathcal{L} \cup \Omega_2 \\ n : \text{versor normal a } \mathcal{L}, \text{ dirigido de } \Omega_1 \text{ a } \Omega_2 . \end{cases}$$

La ecuación del calor en Ω_i ($i = 1, 2$) está dada por:

$$(5) \quad \begin{cases} -k_i \Delta \theta_i = g \text{ en } \Omega_i \\ i = 1, 2 . \end{cases}$$

Sobre la frontera libre \mathcal{L} , se tienen las condiciones siguientes:

$$(6) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = 0 \\ k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} . \end{cases}$$

Las condiciones de contorno están dadas por:

$$(7) \quad \theta / \Gamma_1 = b$$

$$(8) \quad \begin{cases} -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} / \Gamma_2 = h \quad \text{si } \theta / \Gamma_2 > 0 \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} / \Gamma_2 = h \quad \text{si } \theta / \Gamma_1 < 0 \end{cases}$$

donde:

$$(9) \quad \begin{cases} \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 & , \text{ con medida}(\Gamma_1) > 0 \\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} k_i & : \text{ conductividad térmica en } \Omega_i \text{ (} i = 1,2 \text{)} \\ g & : \text{ aporte de energía por unidad de volumen} \\ b & : \text{ temperatura dada sobre } \Gamma_1 \\ h & : \text{ flujo de calor dado sobre } \Gamma_2 . \blacksquare \end{cases}$$

OBSERVACION 1.

El calor latente de fusión de la fase sólida no interviene en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases que estamos considerando, pues el cuerpo Ω está formado de dos partes, invariantes en el transcurso del tiempo, la fase sólida y la fase líquida. Por lo tanto, se puede considerar que se tiene un problema de transmisión del calor con la presencia de una frontera libre ℓ caracterizada por las tres condiciones (6). ■

OBSERVACION 2.

Para que el problema estacionario dado sea realmente a dos fases es suficiente que la función b tome sobre Γ_1 valores positivos y negativos. Con esta condición, la frontera libre \mathcal{L} existe físicamente. ■

OBSERVACION 3.

Veremos, a través de ejemplos, que si la temperatura b conserva sobre Γ_1 un signo constante (por ejemplo: positivo) entonces el problema no será, en general, a dos fases. Para que ello ocurra el flujo de calor h sobre Γ_2 deberá satisfacer ciertas condiciones, como ser una dada desigualdad [T4]. ■

Resumiendo, el problema a estudiar consiste en hallar la temperatura θ , definida por (3), que satisface las siguientes condiciones:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \begin{cases} -k_2 \Delta \theta_2 = g \text{ en } \Omega_2 \\ -k_1 \Delta \theta_1 = g \text{ en } \Omega_1 \end{cases} \\ \\ \text{ii) } \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = 0 \text{ sobre } \mathcal{L} \\ k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \text{ sobre } \mathcal{L} \end{cases} \\ \\ \text{iii) } \begin{cases} -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} / \Gamma_2 = h \text{ si } \theta / \Gamma_2 > 0 \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} / \Gamma_2 = h \text{ si } \theta / \Gamma_2 < 0 \end{cases} \\ \\ \text{iv) } \quad \theta / \Gamma_1 = b \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

6.2. FORMULACION VARIACIONAL

Se transformará el problema (11), a través de un cambio de función incógnita, con el objetivo de eliminar la frontera libre, escribir las ecuaciones en el sentido de las distribuciones en Ω y hallar la correspondiente formulación variacional [T1, T3].

Sean:

$$(12) \quad \begin{cases} T_2 = \theta^+ = \begin{cases} \theta_2 > 0 & \text{en } \Omega_2 \\ 0 & \text{en } \Omega_1 \cup \mathcal{L} \end{cases} \\ T_1 = -\theta^- = \begin{cases} \theta_1 < 0 & \text{en } \Omega_1 \\ 0 & \text{en } \Omega_2 \cup \mathcal{L} \end{cases} \end{cases}$$

donde θ^+ , θ^- representan la parte positiva y negativa de la función ϑ .

Entonces, se tienen las siguientes propiedades:

LEMA 1.

Se tiene:

$$(13) \quad \begin{cases} \text{i) } \langle -k_2 \Delta T_2, \varphi \rangle = \int_{\Omega_2} g \varphi \, dx - k_2 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \varphi \, d\gamma \\ \text{ii) } \langle -k_1 \Delta T_1, \varphi \rangle = \int_{\Omega_1} g \varphi \, dx + k_1 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \varphi \, d\gamma \end{cases}$$

$\forall \varphi \in D(\Omega)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa la dualidad $D'(\Omega) \times D(\Omega)$.

Demostración:

i) $\forall \varphi \in D(\Omega)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle -k_2 \Delta T_2, \varphi \rangle &= -k_2 \int_{\Omega} T_2 \Delta \varphi \, dx = -k_2 \int_{\Omega_2} \theta_2 \Delta \varphi \, dx = \\ &= -k_2 \left[\int_{\Omega_2} \Delta \theta_2 \varphi \, dx + \int_{\partial(\Omega_2)} \left(\theta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \varphi \right) d\gamma \right] = \\ &= \int_{\Omega_2} g \varphi \, dx - k_2 \int_{\ell} \varphi \frac{\partial \theta_2}{\partial n} d\gamma. \end{aligned}$$

ii) Ejercicio 1. ■

Sea la nueva función incógnita u , definida por:

$$(14) \quad u = k_2 T_2 + k_1 T_1 \quad \text{en } \Omega$$

o equivalentemente por:

$$(15) \quad u = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- \quad \text{en } \Omega.$$

OBSERVACION 4.

Conocido u se podrá también conocer θ mediante la transformación inversa de (15), es decir:

$$(16) \quad \theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^- \text{ en } \Omega. \blacksquare$$

LEMA 2.

La nueva función incógnita u satisface las siguientes relaciones:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } -\Delta u = g \text{ en } D'(\Omega) \\ \text{ii) } u|_{\Gamma_1} = b_0 \\ \text{iii) } -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h \end{array} \right.$$

donde

$$(18) \quad b_0 = k_2 b^+ - k_1 b^- \text{ en } \Gamma_1.$$

Demostración:

Ejercicio 2.

Para iii), tener en cuenta que:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta^+}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} H_0(\theta) \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial n} = - \frac{\partial \theta}{\partial n} H_0(-\theta) \end{array} \right. \quad H_0: \text{función de Heaviside} \quad \blacksquare$$

LEMA 3.

Si u es una solución regular de (17), entonces u es solución de la ecuación variacional:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u, v-u) = \langle f, v-u \rangle \quad , \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{array} \right.$$

donde:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = H^1(\Omega) \quad , \quad H = L^2(\Omega) \\ K = \{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = b_0 \} \\ V_0 = \{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = 0 \} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx \\ (u, v) = \int_{\Omega} u v \, dx \\ \langle f, v \rangle = \langle g, v \rangle - \int_{\Gamma_2} h v \, d\gamma \quad . \end{array} \right.$$

Demostración:

Ejercicio 3. ■

LEMA 4.

Baja las hipótesis:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} i) \quad f \in V'_0 \\ ii) \quad b \in H^{1/2}(\Gamma_1) \end{array} \right.$$

existe una única solución de la ecuación variacional (20).

Demostración:

De (22ii) surge la existencia de $B \in V / B/\Gamma_1 = b_0$ y teniendo en cuenta que

$$v \in K \Leftrightarrow v-B \in V_0$$

se tienen las siguientes equivalencias:

$$(20) \Leftrightarrow \begin{cases} a(u,v) = \langle f,v \rangle, \forall v \in V_0 \\ u-B \in V_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(23) \begin{cases} a(U,v) = \langle F,v \rangle, \forall v \in V_0 \\ U \in V_0 \end{cases}$$

donde:

$$(24) \begin{cases} U = u-B \in V_0 \\ \langle F,v \rangle = \langle f,v \rangle - a(B,v), \forall v \in V_0. \end{cases}$$

La existencia y unicidad de $U \in V_0$ solución de (23) (o equivalentemente $u \in K$ solución de (20)) surge por aplicación del Teorema de Lax-Milgram (Ejercicio 4). ■

OBSERVACION 5.

La hipótesis (22*l*) se cumple, por ejemplo, con

$$(25) \quad \begin{cases} g \in L^2(\Omega) \\ h \in L^2(\Gamma_2) \end{cases} \cdot \blacksquare$$

OBSERVACION 6.

Con la hipótesis (22*ii*), el conjunto K es no vacío. ■

6.3. FAMILIA DE PROBLEMAS

A continuación se presentará una familia de problemas P_α , auxiliares del caso estacionario del problema de Stefan a dos fases, dependiente de un parámetro real $\alpha > 0$ [T2,T3].

Para cada $\alpha > 0$, se estudia la temperatura θ_α , definida en Ω , solución de las condiciones (11i),(11ii),(11iii) y (11ivbis), donde:

$$(11ivbis) \quad \left\{ \begin{array}{l} -k_2 \frac{\partial \theta_{2a}}{\partial n} / \Gamma_1 = a(k_2 \theta_{2a} - b_0) \quad \text{si } \theta_a / \Gamma_1 > 0 \\ -k_1 \frac{\partial \theta_{1a}}{\partial n} / \Gamma_1 = a(k_1 \theta_{1a} - b_0) \quad \text{si } \theta_a / \Gamma_1 < 0 . \end{array} \right.$$

Sea el cambio de función incógnita u_a , definido por:

$$(26) \quad u_a = k_2 \theta_a^+ - k_1 \theta_a^- \quad \text{en } \Omega ,$$

entonces se tiene el:

LEMA 5.

El problema P_a , en función de u_a , está dado por las siguientes condiciones:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } -\Delta u_a = g \quad \text{en } D'(\Omega) \\ \text{ii) } -\frac{\partial u_a}{\partial n} / \Gamma_2 = h \\ \text{iii) } -\frac{\partial u_a}{\partial n} / \Gamma_1 = a(u_a - b_0) . \end{array} \right.$$

Demostración:

Ejercicio 5. ■

La formulación variacional del problema P_a está dada por:

LEMA 6.

Si u_a es una solución regular de (27), entonces u_a es solución de la ecuación variacional:

$$(28) \quad \begin{cases} a_a(u_a, v) = \langle f_a, v \rangle, & \forall v \in V \\ u_a \in V \end{cases}$$

donde:

$$(29) \quad \begin{cases} a_a(u, v) = a(u, v) + a \int_{\Gamma_1} u v \, d\gamma \\ \langle f_a, v \rangle = \langle f, v \rangle + a \int_{\Gamma_1} b_0 v \, d\gamma \end{cases}$$

Demostración:

Ejercicio 6. ■

LEMA 7.

Bajo las hipótesis:

$$(30) \quad \begin{cases} \text{i)} & f \in V' \\ \text{ii)} & b \in H^{1/2}(\Gamma_1) \end{cases}$$

existe una única solución de (28).

Demostración.

Ejercicio 7. ■

OBSERVACION 7.

El Lema 7 es aún válido bajo la hipótesis (30iibis) en lugar de (30ii), donde:

$$(30iibis) \quad b \in L^2(\Gamma_1)$$

Además, la hipótesis (30i) se cumple, por ejemplo, con (25). ■

A continuación se analizará el comportamiento de la solución u_α de (28) cuando $\alpha \rightarrow +\infty$, para luego obtener el comportamieno

to de la temperatura θ_a cuando $a \rightarrow +\infty$.

LEMA 8.

Bajo las hipótesis (30), se tiene:

$$(31) \quad u_a \rightarrow u \text{ en } V \text{ fuerte cuando } a \rightarrow +\infty ,$$

donde u_a es la única solución de (28) y u es la única solución de (20).

Demostración:

a) ESTIMACIONES A PRIORI:

Si se elige $v = u_a - u \in V$ en (28), se suma a ambos miembros el término $-a(u, u_a - u)$, se tiene:

$$\begin{cases} a_a(\xi_a, \xi_a) = \langle f, \xi_a \rangle - a(u, \xi_a) \\ \xi_a = u_a - u \in V . \end{cases}$$

Como a tenderá a $+\infty$, se puede suponer que $a > 1$; entonces se deduce (por Lema I.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \|\xi_a\|_V^2 + (a-1) \int_{\Gamma_1} \xi_a^2 d\gamma \leq a_a(\xi_a, \xi_a) \leq c_1 \|\xi_a\|_V \\ \text{con } c_1 = \|f\|_V + \|a\| \|u\|_V > 0 \text{ (constante independiente de } a) \end{array} \right.$$

es decir:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\xi_a\|_V \leq c_2 \\ (a-1) \int_{\Gamma_1} \xi_a^2 d\gamma \leq c_3 \end{array} \right.$$

con

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_2 = \frac{c_1}{\lambda_1} > 0 & \text{constante independiente de } a \\ c_3 = \frac{c_1^2}{\lambda_1} > 0 & \text{constante independiente de } a . \end{array} \right.$$

b) PASAJE AL LIMITE:

De las estimaciones (32), se deduce que cuando $a \rightarrow +\infty$, al menos por una sub-sucesión:

$$(33) \quad \begin{cases} \text{i) } u_a \rightarrow \omega \text{ en } V \text{ débil, } \omega \in V \\ \text{ii) } (a-1) \int_{\Gamma_1} (u_a - b_0)^2 d\gamma \leq c_3 \end{cases} .$$

Entonces, se tienen las siguientes consecuencias:

$$\text{i) } \omega \in K:$$

De (33ii) y Ejercicio I.10, se deduce:

$$0 \leq \int_{\Gamma_1} (\omega - b_0)^2 d\gamma \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_a - b_0)^2 d\gamma = 0$$

es decir $\omega/\Gamma_1 = b_0$, con lo cual $\omega \in K$.

$$\text{ii) } \omega = u:$$

Si se toma $v \in V_0 \subset V$ en (28), se tiene:

$$\begin{cases} a(u_a, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_0 \\ u_a \in V \end{cases}$$

que por pasaje al límite $a \rightarrow +\infty$, se obtiene:

$$\begin{cases} a(\omega, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_0 \\ \omega \in K \end{cases}$$

es decir $\omega = u \in K$ única solución de (20).

iii) $u_\alpha \rightarrow u$ en V fuerte cuando $\alpha \rightarrow +\infty$:

Sea $\alpha > 1$, entonces:

$$\lambda_1 \|u_\alpha - u\|_V^2 \leq a_\alpha(u_\alpha - u, u_\alpha - u) = \langle f, u_\alpha - u \rangle - a(u, u_\alpha - u)$$

obteniéndose iii) por pasaje al límite $\alpha \rightarrow +\infty$. ■

A continuación se verá el comportamiento de la temperatura θ_α cuando $\alpha \rightarrow +\infty$.

LEMA 9.

$$(34) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|\theta_\alpha - \theta\|_H = 0 .$$

Demostración:

De la propiedad:

$$\begin{aligned}
\|u_a - u\|_H^2 &= \|(u_a^+ - u^+) - (u_a^- - u^-)\|_H^2 = \\
&= \|u_a^+ - u^+\|_H^2 + \|u_a^- - u^-\|_H^2 - 2(u_a^+ - u^+, u_a^- - u^-) = \\
&= \|u_a^+ - u^+\|_H^2 + \|u_a^- - u^-\|_H^2 + 2(u_a^+, u^-) + 2(u^+, u_a^-) \geq \\
(35) \quad &\geq \|u_a^+ - u^+\|_H^2 + \|u_a^- - u^-\|_H^2
\end{aligned}$$

y del hecho que $u_a \rightarrow u$ en V fuerte (por lo tanto en H fuerte) se tiene:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \lim_{a \rightarrow +\infty} \|u_a^+ - u^+\|_H = 0 \\ \text{ii) } \lim_{a \rightarrow +\infty} \|u_a^- - u^-\|_H = 0 . \end{array} \right.$$

De

$$\|\theta_a - \theta\|_H \leq \frac{1}{k_2} \|u_a^+ - u^+\|_H + \frac{1}{k_1} \|u_a^- - u^-\|_H ,$$

se obtiene (34). ■

OBSERVACION 9.

El problema P_a es, para a suficientemente grande, un problema

de Stefan a dos fases con la existencia de una frontera libre definida por:

$$(37) \quad \mathcal{L}_a = \{x \in \Omega / \theta_a(x) = 0\} = \{x \in \Omega / u_a(x) = 0\} .$$

Se calculará a través de algunos ejemplos, el valor de a a partir del cual el problema P_a es a dos fases. ■

A continuación, se analizarán varios ejemplos para los cuales la solución exacta u y u_a pueden calcularse explícitamente.

6.4. EJEMPLOS

Se considera el siguiente cuerpo unidimensional.

$$(38) \quad \begin{cases} \Omega = (0, a) \\ a > 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1.

Sean :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \{0, a\} \quad , \quad \Gamma_2 = \emptyset \\ g \equiv 0 \\ b/\Gamma_1 = \begin{cases} B > 0 & \text{si } x = 0 \\ -C < 0 & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

Entonces:

EJERCICIO 8.

La función u y la frontera libre están dadas por:

$$(40) \quad u(x) = - \frac{k_2 B + k_1 C}{a} x + k_2 B$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \{s\} \\ s = \frac{e_o}{1+e_o} a \quad , \quad e_o = \frac{k_2 B}{k_1 C} \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

EJERCICIO 9.

i) La función u_a está dada por:

$$(42) \quad u_a(x) = - \frac{k_1 C + k_2 B}{2 + aa} a x + \frac{k_2 B(1+aa) - k_1 C}{2 + aa} .$$

ii) El problema P_a es a dos fases \Leftrightarrow

$$(43) \quad a > \text{máx} \left(\frac{e_o - 1}{a}, \frac{1 - e_o}{ae_o} \right) .$$

iii) Cuando la condición (43) es válida, la frontera libre $\ell_a = \{s_a\}$ está dada por:

$$(44) \quad s_a = s + \frac{e_o - 1}{a(1+e_o)} \quad \blacksquare$$

OBSERVACION 10.

Si la temperatura b toma sobre Γ_1 valores positivos y negativos, entonces el problema (11) (llamado problema (P)) es siempre a dos fases (ver Ejemplo 1 y Ejercicio 8). En el caso en que b tome valores de signo constante sobre Γ_1 , el problema (P) no siempre es a dos fases; para ello, el flujo de calor h sobre Γ_2 deberá satisfacer ciertas condiciones, en general, verificar una dada desigualdad. Esto se analizará mejor en el siguiente ejemplo. ■

EJEMPLO 2.

Sean:

$$(45) \quad \begin{cases} \Gamma_1 = \{0\} , \Gamma_2 = \{a\} \\ b/\Gamma_1 = B > 0 , h/\Gamma_2 > 0 . \end{cases}$$

Entonces:

EJERCICIO 10.

i) La función u está dada por:

$$(46) \quad u(x) = k_2 B - hx .$$

ii) El problema (P) es a dos fases \Leftrightarrow

$$(47) \quad h > \frac{k_2 B}{a} .$$

iii) Cuando la condición (47) es válida, la frontera libre resulta ser:

$$(48) \quad s = \frac{k_2 B}{h} . \blacksquare$$

EJERCICIO 11.

i) La función u_a está dada por:

$$(49) \quad u_a(x) = k_2 B - \frac{h}{a} - hx .$$

ii) Bajo la hipótesis (47), el problema (P_a) es a dos fases \Leftrightarrow

$$(50) \quad a > \frac{h}{k_2 B}$$

iii) En dicho caso, la frontera libre resulta ser:

$$(51) \quad s_a = s - \frac{1}{a} . \blacksquare$$

OBSERVACION 11.

Otros ejemplos pueden verse en [T4]. ■

BIBLIOGRAFIA

- [B1] C. BAIOCCHI, *Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux*, C.R. Acad. Sc. Paris, 273A (1971) p. 1215-1217.
- [B2] C. BAIOCCHI, *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Annali di Mat. Pura ed Appl., 92 (1972) p.107-127.
- [B3] C. BAIOCCHI, *Su alcuni problemi a frontiera libera connessi a questioni di idraulica*, Rendiconti del Sem. Matem. Torino, 31 (1971-72 e 1972-73) p. 69-80.
- [B4] C. BAIOCCHI, *Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi variacional y numérico*, Cuaderno N° 8 del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Univ. Nac. de Rosario, Rosario(1975).
- [B5] C. BAIOCCHI, V. COMINCIOLI, E. MAGENES, G.A. POZZI, *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems*, Annali di Mat. Pura ed Appl., 97 (1973) p. 1-82.
- [B6] C. BAIOCCHI, A. CAPELO, *Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera*, Volume 1,2. Pitagora Editrice, Bologna (1978).
- [B7] H. BREZIS, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures et Appl., 51(1972) p. 1-168.

- [B8] H. BREZIS, G. STAMPACCHIA, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France, 96 (1968) p.153-180.
- [C1] J. CEA, *Optimisation, théorie et algorithmes*, Dunod, Paris (1971).
- [C2] C. CONCA, R. FELIU, H. JENSEN, *Aplicación del método de elementos finitos a la determinación de la carga espacial de semiconductores bajo una unión P-N*, Sigma, 5 (1979) p.323-332.
- [D1] G. DUVAUT, *Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus*, 2° Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1975). Rapport de recherche N° 185, LABORIA-IRIA (1976).
- [D2] G. DUVAUT, *Méthodes variationnelles, initiation et applications*, Cours du D.E.A., Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), (1979).
- [D3] G. DUVAUT, J.L. LIONS, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris (1972).
- [E1] I. EKELAND, R. TEMAN, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier Villars, Paris (1973).
- [F1] A. FRIEDMAN, *The Stefan problem in several space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., 132(1968) p.51-87.
- [G1] G.G. GARGUICHEVICH, M.B. STAMPELLA, D.A. TARZIA, *On the obstacle problem*, To appear.
- [G2] P. GERMAIN, *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris(1962).
- [G3] R. GLOWINSKI, J.L. LIONS, R. TREMOLIERES, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Tome 1,2. Dunod, Paris (1976).

- [G4] R. GLOWINSKI, *Sur l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique*, J. de Mécanique, 13(1974) p.601-621.
- [G5] R. GLOWINSKI, *Sur l'approximation d'une inéquation variationnelle elliptique de type Bingham*, RAIRO d'Analyse Numérique, 10(décembre 1976) p.13-30.
- [H1] C. HUNT, N.R. NASSIF, *Inéquations variationnelles et détermination de la charge d'espace de certains semi-conducteurs*, C.R. Acad. Sc. Paris, 278A (1974) p.1409-1412.
- [H2] C. HUNT, N.R. NASSIF, *On a variational inequality and its approximation in the theory of semiconductors*, SIAM J. Numer. Anal., 12 (1975) p.938-950.
- [K1] D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York (1980).
- [L1] H. LEWY, G. STAMPACCHIA, *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. Pure Appl. Math., 22(1969) p.153-188.
- [L2] J.L. LIONS, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod-Gauthier Villars, Paris(1968).
- [L3] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, Paris (1969).
- [L4] J.L. LIONS, G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967) p. 493-519.
- [M1] E. MAGENES, *Su alcuni problemi ellittici di frontiera libera con-*

nessi con il comportamento dei fluidi nei mezzi porosi, *Symposia Mathematica*, 10(1972) p.265-279.

- [N1] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [R1] E. ROFMAN, *Desigualdades variacionales, existencia y aproximación numérica de soluciones*, en Cuaderno N° 6 del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Univ. Nac. de Rosario, Rosario (1974) p. 59-86.
- [R2] L.I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, Trans. Math. Monographs-Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).
- [S1] G. STAMPACCHIA, *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R. Acad. Sc. Paris, 258A (1964) p.4413-4416.
- [S2] G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Proc. NATO Adv. Study Inst., Venezia (1968), Oderisi Ed.(1969) p.101-192.
- [S3] G. STAMPACCHIA, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales*, Cuaderno N° 1 del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Univ. Nac. de Rosario, Rosario (1971).
- [T1] D.A. TARZIA, *Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, *Mathematicae Notae*, 27 (1979/80) p. 145-156.
- [T2] D.A. TARZIA, *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, *Mathematicae Notae*, 27(1979/80) p. 157-165.
- [T3] D.A. TARZIA, *Sur le problème de Stefan à deux phases*, Thèse de 3°

Cycle, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), (8 mars 1979). C.R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979) p.941-944.

[T4] D.A. TARZIA, *Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Mathematicae Notae, Año 28(1980/81) p.73-89, Por aparecer.

[V1] M.M. VAINBERG, *Le problème de la minimisation des fonctionnelles non linéaires*, CIME, 4° Ciclo Varenne (20 al 29 Agosto 1970).

NOTA:

Numerosos otros problemas y una bibliografía complementaria sobre algunos de los temas vistos en este curso puede ser consultada en los siguientes trabajos (libros, cursos y/o artículos de "survey"):

INECUACIONES VARIACIONALES:

- i) G. DUVAUT, J.L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris (1972).
- ii) D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York (1980).

APROXIMACION DE INECUACIONES VARIACIONALES:

- i) P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- ii) R. GLOWINSKI, J.L.LIONS, R. TREMOLIERES, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Tome 1,2. Dunod, Paris (1976).
- iii) J.P. MILASZEWICZ, *Introducción al método de elementos finitos*, 2° Seminario de Matemática Aplicada, CLAMI-CONICET, Buenos Aires, marzo 1980.

PROBLEMA DEL OBSTACULO:

- i) C. BAIOCCHI, A. CAPELO, *Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera*, Vol. 1,2. Pitagora Editrice, Bologna (1978).
- ii) D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York (1980).

PROBLEMA DEL DIQUE POROSO:

- i) C. BAIOCCHI, A. CAPELO, *Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera*, Vol. 1,2. Pitagora Editrice, Bologna (1978).

PROBLEMA DE STEFAN:

- i) A. DATZEFF, *Sur le problème linéaire de Stefan*, Mémorial des Sciences Physiques N° 69, Gauthier-Villars, Paris (1970).
- ii) G. DUVAUT, *Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus*, 2° Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1975). Rapport de recherche N° 185, LABORIA-IRIA (1976).
- iii) E. MAGENES, *Topics in parabolic equations, Some typical free boundary problems*, Laboratorio di Analisi Numerica-Pavia, Publ. N° 130 (1977).
- iv) J.C. MUEHLBAUER, J.E. SUNDERLAND, *Heat conduction with freezing or melting*, Appl. Mech. Reviews, 18 (1965) p. 951-959.

- v) J.R. OCKENDON, W.R. HODGKINS (Ed.), *Moving boundary problems in heat flow and diffusion*, Clarendon Press, Oxford (1975).
- vi) M. PRIMICERIO, *Problemi a contorno libero per l'equazione della diffusione*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politen. Torino, 32 (1973-74) p.183-206.
- vii) L.I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, Trans. Math. Monographs-Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).
- viii) G. SESTINI, *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*, Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari, N° 55-56 (1960).
- ix) D.G. WILSON, A.D. SOLOMON, P.T. BOGGS (Ed.), *Moving boundary problems*, Academic Press, New York (1978).

Además, una extensa bibliografía sobre el tema consistente en más de 500 referencias, puede encontrarse en:

- x) D.A. TARZIA, *Una bibliografía sobre problemas de frontera libre del tipo de Stefan*, Instituto de Matemática "Beppo Levi", Universidad Nacional de Rosario, Rosario (1979-80).

Los originales de este libro fueron preparados -para su posterior impresión en sistema offset- en el Centro Latinoamericano de Matemática e Informática por la Sca. Hilda J. Candel.

**Se terminó de imprimir el
10 de Octubre de 1981
en Impress Argentina
Av. de Mayo 1370 – P. 10 Of. 287**

