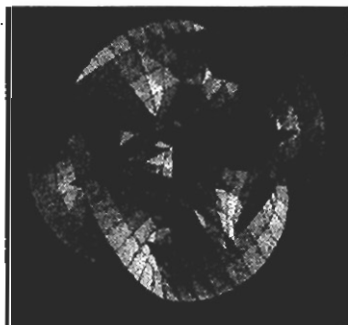




Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales

***PROBLEMAS DE CONDUCCION DE CALOR
EL PROBLEMA DE STEFAN***

Domingo Alberto Tarzia



**CURSO DE ESPECIALIZACION EN MATEMATICA APLICADA
F. de Azara 1552. Posadas. Misiones
1996**

PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN DEL CALOR CON CAMBIO DE FASE. EL PROBLEMA DE STEFAN (*)

Domingo Alberto TARZIA

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es el de estudiar los problemas de frontera libre y de frontera móvil para la ecuación del calor o de la difusión unidimensional, en particular los procesos de conducción del calor que tengan en cuenta cambios de fase (de fase sólida a líquida o viceversa). Dichos procesos se conocen en la literatura como **problemas de tipo Stefan**. Se consideran los problemas de Stefan a una y a dos fases, y las respectivas soluciones exactas de Lamé-Clapeyron y de Neumann y sus propiedades, como asimismo diversos problemas relacionados y soluciones dadas a través de diferentes métodos teóricos y aproximados.

(*) Es una versión corregida del minicurso "transferencia de calor y materia con cambio de fase" desarrollado en la Escuela de Posgrado en Transferencia de Calor y Materia, ECAMAT'92, Tandil, 4-10 de setiembre de 1992. Publicado en CUADERNOS CAMAT, No. 35, J.C. Ferreri (Ed.), Buenos Aires (1992), Capítulo 2, 46 Páginas.

I. INTRODUCCION

En [LaCl], Lamé y Clapeyron estudiaron el problema de la solidificación por enfriamiento de un globo líquido (Tierra) de la siguiente manera : Si se supone que la Tierra es una esfera que verifica las siguientes hipótesis :

- (i) primitivamente era líquida y compuesta por una sola sustancia, la cual se encontraba a la temperatura de fusión T_f ;
- (ii) se enfría en el espacio y se solidifica a partir de su superficie exterior, la cual toma rápidamente una temperatura media constante T_o , con $T_o < T_f$;
- (iii) la corteza sólida ya formada en nuestros días no tiene un espesor considerable comparado al radio terrestre.

Entonces se obtiene que :

- (i) el espesor de la parte sólida que recubre nuestro globo terrestre aumenta proporcionalmente a \sqrt{t} , donde t es el tiempo desde que comenzó la solidificación ;
- (ii) el conocimiento de dicho tiempo (edad de la parte sólida del globo terrestre) depende únicamente de numerosos coeficientes que pueden ser fácilmente obtenidos por la experiencia. Dichos coeficientes dependen sólo de la fase sólida.

En realidad, bajo las hipótesis dadas anteriormente, en [LaCl] se resuelve el problema de la solidificación de un material semi-infinito, representado por $x > 0$, que inicialmente se encuentra en fase líquida a su temperatura de fusión T_f y que en el borde fijo $x=0$ se le enfría a una temperatura T_o inferior a la de fusión. Por consideraciones físicas se intuye que para cada tiempo $t > 0$ existirá un punto $x=s(t)$ que separará la fase sólida, representada por el intervalo $(0,s(t))$, y la fase líquida, representada por el intervalo $(s(t), +\infty)$, que se encuentra a su temperatura de fusión. Desde el punto de vista matemático, el problema puede plantearse de la siguiente manera: Hallar la función $x = s(t)$ (frontera libre que separa la fase sólida de la fase líquida y que se encuentra a temperatura constante) definida para $t > 0$ con $s(0) = 0$, y la temperatura

$$(1) \quad T(x,t) = \begin{cases} T(x,t) & \text{si } 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ T_f & \text{si } s(t) \leq x \quad , \quad t > 0 , \end{cases}$$

de manera que satisfagan las siguientes condiciones :

$$(2) \quad \begin{cases} (i) & \rho c T_t - k T_{xx} = 0 & , & 0 < x < s(t) & , & t > 0 , \\ (ii) & T(0,t) = T_o < T_f & , & t > 0 , \\ (iii) & T(s(t),t) = T_f & , & t > 0 , \\ (iv) & k T_x(s(t),t) = \rho \lambda \dot{s}(t) & , & t > 0 , \\ (v) & s(0) = 0 , \end{cases}$$

donde :

(a) La condición (2i) representa la ecuación de conducción del calor para la fase sólida donde k , ρ y c representan la conductividad térmica, la densidad de masa y el calor específico respectivamente ;

(b) Las condiciones (2ii) y (2iii) expresan que la temperatura del borde fijo $x=0$ y de la frontera libre $x = s(t)$ son constantemente T_0 y T_f respectivamente ;

(c) La condición (2iv) expresa el hecho que el flujo de calor que atraviesa, en un tiempo infinitamente pequeño, la frontera libre $x=s(t)$ es igual a la cantidad de calor abandonada por la porción de líquido que se solidificó durante dicho lapso de tiempo. Esta condición es conocida por condición de Stefan y se deduce del principio de conservación de la energía ;

(d) La condición (2v) nos indica que inicialmente el material semi-infinito se encontraba a la temperatura de fusión T_f (ver 1) ;

(e) La solución exacta del problema (2) fue dada por Lamé-Clapeyron en [LaCl] y será desarrollada en IV.1.

Conviene realizar aquí algunos comentarios :

A) El problema planteado por Lamé-Clapeyron, cuya formulación matemática esta dada por (2), es conocido en la literatura como problema de Stefan a una fase. El nombre de problema de Stefan surge en los alrededores de 1950 en homenaje a los numerosos trabajos que Stefan realizó sobre el tema en los años 1890 [St1, St2, St3], con lo cual, por desconocimiento, no se ha tenido en cuenta al trabajo [LaCl]. Por otra parte, en [Br, We] se indica que F. Neumann encontró la solución para el problema de Stefan a dos fases correspondiente a datos de temperatura inicial y de borde constantes, solución conocida en la literatura como solución de Neumann, dada en V.1 [Br, CaJa, R, St1, We].

B) Cabe destacar que el problema (2) se llama problema de Stefan a una fase pues, en nuestro caso, la fase líquida se encuentra a temperatura constante e igual a la temperatura de cambio de fase.

C) El problema de Stefan es no-lineal a pesar de la aparente linealidad de las condiciones (2i)-(2v), En efecto, si se deriva (2iii) respecto de t , se obtiene :

$$T_x(s(t),t) \dot{s}(t) + T_t(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

con lo cual la condición de Stefan (2iv) se transforma en

$$(3) \quad k T_x^2(s(t),t) = - \rho \lambda T_t(s(t),t) = - \frac{\lambda k}{c} T_{xx}(s(t),t) \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

que indica que el problema (2) es no lineal [PeSl].

Cabe destacar que en el método del balance integral calórico (ver IV.5) se utiliza la condición (3) en lugar de la (2iv) para la obtención de una solución aproximada del problema de Stefan, aún para condiciones de contorno más generales que las dadas en (2) [Go] (ver IV.5).

D) Análogamente al problema de solidificación (2) puede plantearse el problema de fusión de un cuerpo semi-infinito que inicialmente se encuentra en estado sólido a la temperatura de fusión T_f y que en borde fijo $x=0$ es calentado a una temperatura T_0 con $T_0 > T_f$. Su formulación matemática está dada por: Hallar la función $x=s(t)$ (frontera libre) y la temperatura $T(x,t)$ de la fase líquida, definida por (1), de manera que satisfagan las siguientes condiciones :

$$(2 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{(i)} & \rho c T_t - k T_{xx} = 0 & , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(ii)} & T(0,t) = T_0 > T_f & , \quad t > 0 , \\ \text{(iii)} & T(s(t),t) = T_f & , \quad t > 0 , \\ \text{(iv)} & k T_x(s(t),t) = -\rho \lambda \dot{s}(t) & , \quad t > 0 , \\ \text{(v)} & s(0) = 0 , & \end{array} \right.$$

donde los coeficientes térmicos k , ρ y c son los correspondientes a la fase líquida del material de cambio de fase.

E) Si un material semi-infinito se encuentra inicialmente en estado sólido a una temperatura T_i , con $T_i < T_f$ (temperatura de cambio de fase), y en el borde fijo $x=0$ es calentado a una temperatura T_0 , con $T_0 > T_f$, entonces se tiene un problema de Stefan a dos fases, cuya formulación matemática está dada por: Hallar la función $x=s(t)$ (frontera libre, definida para $t > 0$, y la temperatura

$$(4) \quad T(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} T_2(x,t) > T_f & \text{si} & 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ T_f & \text{si} & x = s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ T_1(x,t) < T_f & \text{si} & s(t) < x \quad , \quad t > 0 \quad , \end{array} \right.$$

definida para $x > 0$ y $t > 0$, de manera que satisfagan las siguientes condiciones ($i=1$ representa la fase sólida e $i=2$ la fase líquida; ρ es la densidad de masa común a ambas fases) :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{(i)} & \rho c_2 T_{2t} - k_2 T_{2xx} = 0 & , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ \text{(ii)} & \rho c_1 T_{1t} - k_1 T_{1xx} = 0 & , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \\ \text{(iii)} & T_1(x,0) = T_i & , \quad x > 0 \quad , \\ \text{(iv)} & T_2(0,t) = T_0 & , \quad t > 0 \quad , \\ \text{(v)} & T_1(s(t),t) = T_f & , \quad t > 0 \quad , \\ \text{(vi)} & T_2(s(t),t) = T_f & , \quad t > 0 \quad , \\ \text{(vii)} & k_1 T_{1x}(s(t),t) - k_2 T_{2x}(s(t),t) = \rho \lambda \dot{s}(t) & , \quad t > 0 \quad , \\ \text{(viii)} & s(0) = 0 \quad , & \end{array} \right.$$

donde (5vii) representa la condición de Stefan cuando existen dos fases (Ver III.). La solución exacta del problema (5) es conocida como solución de Neumann (ver V.1) y fue dada en [CaJa, St1, We].

F) Un problema de Stefan a una fase (caso fusión) más general que el dado por (2bis) puede plantearse de la siguiente manera : Hallar el triple $\{T, s(t), T(x, t)\}$ soluciones del sistema siguiente (sin pérdida de generalidad se supone que la temperatura de cambio de fase es $T_f = 0$) :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho c T_t - k T_{xx} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T, \\ \text{(ii)} & T(s(t), t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ \text{(iii)} & k T_x(s(t), t) = -\rho \lambda \dot{s}(t), \quad 0 < t < T, \\ \text{(iv)} & T(0, t) = f(t), \quad 0 < t < T, \\ \text{(v)} & T(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq b, \\ \text{(vi)} & s(0) = b, \end{array} \right.$$

donde $\phi \geq 0$, $f \geq 0$, $b \geq 0$ (si $b = 0$, entonces la condición (6v) desaparece). La condición (6iv) puede ser reemplazada por una condición de flujo de calor de la forma siguiente :

$$(6iv \text{ bis}) \quad kT_x(0, t) = -g(t), \quad 0 < t < T,$$

donde $g \geq 0$. Se llamará problema (6bis) al problema (6) con la condición (6iv bis) en lugar de la (6iv). El tiempo T representa el tiempo máximo hasta el cual la solución al problema existe; cabe destacar que T puede ser finito o infinito.

Un estudio teórico sobre existencia, unicidad y propiedades matemáticas de la solución correspondiente al problema (6) (o su equivalente problema en variables adimensionales (9) está realizado en [Ca3, FaPr1, Fr]).

G) Una variante interesante en el problema (6) o (6bis) consiste en dar como dato la función $x = s(t)$ y hallar T , $T(x, t)$ y la temperatura $f(t)$ o el flujo de calor $-g(t)$ en el borde fijo $x = 0$ de manera que $\{T, s(t), T(x, t)\}$ sea solución de (6) o (6bis) respectivamente. A tales problemas se los incluye en el nombre de problema inverso de Stefan. Un ejemplo de solución exacta fue dada por Stefan para el caso en que la frontera tenga velocidad constante [St2, St3] (ver IV.6).

H) La solución exacta del problema (2) o (2bis), para la temperatura, está dada en función de la variable de semejanza $x/2a\sqrt{t}$ donde $a^2 = \alpha = k/\rho c$ es el coeficiente de difusión. Lo mismo puede decirse para el problema de Stefan a dos fases (5) (Un análisis de las soluciones exactas y de sus propiedades será realizada en IV.1 y V.1).

Los problemas de Lamé-Clapeyron (Stefan a una fase) y de Neumann (Stefan a dos fases) mostrarán que a través de la llamada función de error erf se obtendrá una solución exacta para ciertas condiciones iniciales y de contorno. El método de semejanza no podrá aplicarse en general. Para que exista una solución de semejanza es necesario que la ecuación diferencial y todos los datos (inicial y de contorno) puedan ser expresados con una sola variable independiente (llamada variable de semejanza). Soluciones de tipo semejanza no existen, en general, para :

(i) dominios finitos ; (ii) cuando dos fases están presentes inicialmente ; (iii) cuando la temperatura inicial no es constante ; (iv) cuando la temperatura en el borde fijo no es constante ; (v) cuando el flujo de calor en el borde fijo no es de un tipo particular (const./ \sqrt{t}).

Por otra parte, puede decirse que existen muy pocas soluciones exactas diferentes de las de tipo semejanza. Un estudio general con soluciones semejantes (autosemejantes) que tengan en cuenta un cambio de fase está dado en [Bo].

Debido a las consideraciones anteriormente mencionadas resulta de gran interés profundizar sobre los llamados métodos aproximados (cuasi-estacionario de Stefan, balance integral de Goodman, variacional de Biot, desarrollo en serie, perturbación, procesos iterativos, etc.) y los métodos numéricos (diferencias finitas, elementos finitos, líneas, inecuaciones variacionales, ecuaciones integrales, etc.). Para una mayor información referirse a [Cr2, Pr, Ta2]. Una solución aproximada, conocida como solución cuasi-estacionaria, fue dada por Stefan [St1, St2] (ver IV.4). Una introducción general a la resolución aproximada y numérica del problema de Stefan unidimensional está dada en [GaSa, Lun1, Ne, No] .

1) En general, cuando se estudian propiedades de un sistema físico, conviene transformar las variables que lo definen en variables adimensionales e independizarse de este modo de las constantes físicas del sistema. Como ejemplo, se aplicará al siguiente problema de Stefan unidimensional a una fase : Hallar la temperatura $T = T(y, \tau)$ y la frontera libre $r = r(\tau)$, soluciones del sistema :

$$(7) (7bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{\tau} = \alpha T_{yy} \quad , \quad 0 < y < r(\tau) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 , \\ T(r(\tau), \tau) = 0 \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 , \\ k T_y(r(\tau), \tau) = - \rho \lambda r'(\tau) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 , \\ k T_y(0, \tau) = - \psi(\tau) \quad (T(0, \tau) = \psi_0(\tau)) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 , \\ T(y, 0) = \phi(y) \quad , \quad 0 \leq y \leq b , \\ r(0) = b . \end{array} \right.$$

Si se realiza el siguiente cambio de variables :

$$(8) \quad x = \frac{y}{b} \quad , \quad t = \frac{\alpha}{b^2} \tau \quad (\alpha = \frac{k}{\rho c}) \quad , \quad z(x, t) = \frac{c}{\lambda} T(y, \tau) \quad , \quad s(t) = \frac{r(\tau)}{b} \quad ,$$

entonces los problemas (7) , (7bis) se transforman de la siguiente manera :

$$(9) (9 bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{xx} = z_t \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ z(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ z_x(s(t), t) = - \dot{s}(t) \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ z_x(0, t) = - g(t) \quad (z(0, t) = f(t)) \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 , \\ s(0) = 1 , \end{array} \right.$$

donde

$$(10) \quad T_0 = \frac{\alpha}{b^2} \tau_0, \quad h(x) = \frac{c}{\lambda} \phi(y), \quad g(t) = \frac{b c}{\lambda k} \psi(\tau), \quad f(t) = \frac{c}{\lambda} \psi_0(\tau),$$

siendo las nuevas variables independientes x, t y las nuevas variables dependientes $z(x, t), s(t)$ adimensionales.

J) Una de las herramientas útiles en el estudio teórico del problema de Stefan es el principio del máximo y el lema de Hopf en su versión parabólica [Fr, LSU, PrWe] del cual surge : Si $\{T_0, s(t), T(x, t)\}$ es solución de (6) o (6bis), entonces se tienen las propiedades siguientes :

$$(11) \quad (i) T(x, t) \geq 0, \quad (ii) T_x(s(t), t) \leq 0, \quad (iii) \dot{s}(t) \geq 0.$$

K) El problema de Stefan es un problema de frontera libre para la ecuación del calor de tipo explícito. En general, los problemas que se plantean para la ecuación del calor o de la difusión se clasifican de la siguiente manera :

problemas de frontera	fija	de tipo explícito
	móvil	
	libre	

Los problemas de frontera fija para la ecuación del calor (difusión) son aquellos que se estudian en el dominio $(x_1, x_2) \times (0, T_0)$, es decir, son los clásicos problemas que se analizan en un curso básico de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, como ser:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{lll} z_t - z_{xx} = f(x, t) & , & x_1 < x < x_2, \quad 0 < t < T_0, \\ z(x, 0) = h(x) & , & x_1 \leq x \leq x_2, \\ z(x_1, t) = f_1(t) & \acute{o} & z_x(x_1, t) = f_1(t), \quad 0 < t < T_0, \\ z(x_2, t) = f_2(t) & \acute{o} & z_x(x_2, t) = f_2(t), \quad 0 < t < T_0. \end{array} \right.$$

Los problemas de frontera móvil para la ecuación del calor (difusión) son aquellos que se estudian en el dominio $\{(x, t) / x \in (s_1(t), s_2(t)), t \in (0, T_0)\}$ con $s_1(t) < s_2(t)$ funciones dadas en $(0, T_0)$, es decir, que el dominio espacial de la función incógnita es variable con el tiempo mediante una ley de movimiento conocida a priori, como ser:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{lll} z_t - z_{xx} = f(x, t) & , & s_1(t) < x < s_2(t), \quad 0 < t < T_0, \\ z(x, 0) = h(x) & , & s_1(0) \leq x \leq s_2(0), \\ z(s_1(t), t) = f_1(t) & \acute{o} & z_x(s_1(t), t) = f_1(t), \quad 0 < t < T_0, \\ z(s_2(t), t) = f_2(t) & \acute{o} & z_x(s_2(t), t) = f_2(t), \quad 0 < t < T_0. \end{array} \right.$$

Más aún, el dominio puede ser de la forma $\{(x,t) / x \in (-\infty, s(t)), t \in (0, T_0)\}$ ó $\{(x,t) / x \in (s(t), +\infty), t \in (0, T_0)\}$. Todos estos problemas fueron inicialmente estudiados por [Bl, Ge1, Ge2, Gou, Ho1, Ho2, Le] (ver [Ta9]).

Los problemas de frontera libre para la ecuación del calor (difusión) son aquellos en los cuales el dominio espacial de la función incógnita es variable con el tiempo mediante una ley de movimiento desconocida a priori. Por supuesto, el desconocimiento de la frontera, o parte de ella, induce la necesidad matemática de imponer nuevas condiciones a las funciones incógnitas, las cuales dependerán del problema físico en estudio. En general, la nueva condición a imponer a la función incógnita se deduce del principio de conservación de la energía a través de la frontera. Dicha frontera resulta ser, en consecuencia, una incógnita suplementaria del problema, la cual recibe el nombre de la frontera libre del problema en cuestión.

Por lo tanto, la diferencia esencial entre los problemas de frontera móvil y libre radica en el hecho de la existencia de una frontera cuya ley de movimiento es conocida en el primero y desconocida en el segundo, siendo en este último caso una incógnita más del problema.

Los problemas de frontera libre para la ecuación del calor se dividen en dos clases : de tipo explícito o de tipo implícito, según aparezca o no explícitamente la velocidad de la frontera libre en las condiciones que se imponen sobre dicha frontera. Es decir, si la frontera libre viene dada por $x=s(t)$, entonces el problema será de tipo explícito (implícito) si $\dot{s}(t)$ aparece (no aparece) en las condiciones que se imponen para $x = s(t)$.

Un ejemplo típico de problema de frontera libre de tipo explícito es el problema de Stefan. Una formulación bastante general ha sido estudiada en [FaPr1] que consiste en : Hallar el triple $\{T_0, s(t), z(x, t)\}$ de manera que satisfagan el siguiente sistema:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{xx} - z_t = q(x, t) \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b , \\ z(0, t) = \phi(t) \quad \quad \quad \text{ó} \quad z_x(0, t) = g[z(0, t), t] \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ z(s(t), t) = f(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ z_x(s(t), t) = \lambda(s(t), t)\dot{s}(t) + \mu(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T_0 , \\ s(0) = b , \end{array} \right.$$

donde los datos $q(x, t)$, $h(x)$, $\phi(t)$ ó $g(y, t)$, $f(x, t)$, $\lambda(x, t)$ y $\mu(x, t)$ verifican ciertas hipótesis para tener una generalización de un problema de conducción de calor en materiales con cambio de fase.

En cambio, un ejemplo de problema de frontera libre de tipo implícito es el llamado problema de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos [CrGu, LLCL], cuya formulación general en variables adimensionales (ver IV.9) está dada por : Hallar el triple $\{T_0, s(t), u(x, t)\}$ de manera que satisfagan el siguiente sistema :

$$\begin{array}{l}
 (15) \text{ (15bis)} \quad \left| \begin{array}{lll}
 u_{xx} - u_t = 1 & , & 0 < x < s(t) & , & 0 < t < T_0 , \\
 u(x, 0) = H(x) & , & 0 \leq x \leq 1 , \\
 u_x(0, t) = -G(t) & (u(0, t) = F(t)) & , & 0 < t < T_0 , \\
 u(s(t), t) = 0 & , & 0 < t < T_0 , \\
 u_x(s(t), t) = 0 & , & 0 < t < T_0 , \\
 s(0) = 1 , & & & &
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

donde u representa aquí la concentración de oxígeno adimensionalizada.

L) El problema de Stefan a una fase (problema de frontera libre de tipo explícito) está relacionado con el problema de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos de la siguiente manera :

(i) Si el triple (T_0, s, z) es una solución de (9), (9bis), entonces el triple (T_0, s, u) , con u definido por :

$$(16) \quad u(x, t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_\xi^{s(t)} [1 + z(y, t)] dy ,$$

es una solución de (15), (15bis) respectivamente, donde:

$$(17) \quad \left| \begin{array}{l}
 H(x) = \int_x^1 d\xi \int_\xi^1 [1 + h(y)] dy , \quad F(t) = H(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau , \\
 G(t) = 1 + \int_0^1 h(x) dx + \int_0^t g(\tau) d\tau ,
 \end{array} \right.$$

(ii) Recíprocamente, si (T, s, u) es una solución de (15), (15bis) entonces el triple (T, s, z) , con z definido por:

$$(18) \quad z(x, t) = u_t(x, t) ,$$

es una solución de (9), (9bis) respectivamente, donde:

$$(19) \quad h(x) = H''(x) - 1 \quad , \quad g(t) = G'(t) \quad , \quad f(t) = F'(t) .$$

La presente equivalencia entre el problema de Stefan a una fase (9), (9bis) con el de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos puede generalizarse a otros problemas de frontera libre de tipo explícito o implícito [Fa1, Sc].

Conviene asimismo resaltar una diferencia que caracteriza de alguna manera a las funciones z (incógnita en el problema de Stefan a una fase (9) ó (9bis)) y u (incógnita en el problema de la difusión-consumo de oxígeno (15) ó (15bis)) respectivamente. Las funciones z, u, u_x son continuas sobre la frontera libre $x=s(t)$, en cambio z_x no es continua debido a la condición de Stefan. Esta diferencia tiene gran importancia en el estudio de la regularidad y en el cálculo y análisis numérico de la solución.

Para finalizar esta introducción se dirá que los problemas de transferencia de calor con cambio de fase, tales como los procesos de solidificación y fusión de materiales, tienen en la actualidad numerosas aplicaciones científicas y tecnológicas. Por ejemplo, una revisión de una extensa bibliografía sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor o de la difusión, en particular sobre trabajos concernientes al problema de Stefan y sus aplicaciones, fue presentada en [Ta2, Ta7]. Esta bibliografía es analizada y clasificada en trabajos teóricos, numéricos y experimentales, como así también en las posibles aplicaciones. Más recientemente, (año 1988), se presentó una actualización de la bibliografía, a través de la cual se pueden obtener mayores informaciones y referencias. Por ejemplo, contiene 2528 referencias que han aparecido en 263 revistas científicas, 66 libros, 29 coloquios (que tienen al menos 3 trabajos sobre el tema), 24 colecciones y 24 informes técnicos diferentes. Se han realizado diferentes clasificaciones según el período, idioma, revistas científicas (de matemática y de física-ingeniería), colecciones, informes técnicos y editores (de libros y coloquios) de las publicaciones. Las 2528 referencias se han clasificado por:

- 1) Libros exclusivamente en el tema (con 8 referencias);
- 2) Tesis sobre el tema (con 17 referencias);
- 3) Libros que tienen capítulos o secciones sobre el tema (con 60 referencias);
- 4) Compiladores de coloquios exclusivamente sobre el tema (con 11 referencias);
- 5) Artículos publicados en coloquios exclusivamente sobre el tema (con 192 referencias);
- 6) Compiladores de coloquios (no exclusivamente sobre el tema) que tienen al menos tres artículos sobre el tema (con 18 referencias);
- 7) Artículos publicados en coloquios no exclusivamente sobre el tema pero que tienen al menos tres artículos sobre el tema (con 108 referencias);
- 8) Artículos sobre el tema publicados en coloquios que no han sido considerados anteriormente (con 170 referencias);
- 9) Artículos sobre el tema publicados en revistas científicas o numerosas colecciones (con 1821 referencias);
- 10) Artículos sobre el tema a aparecer en revistas científicas (con 12 referencias);
- 11) Informes técnicos sobre el tema (con 111 referencias).

Se pueden citar los siguientes libros y trabajos de revisión sobre el tema :

- (i) Libros : [AlSo, Ar, BaCa, Ca3, CaJa, Cr1, Cr2, Dat, Di, EcDr, ElOc, Fa2, Fr, FrBi, Gou, Hi, Jos, KiSt, LSU, Lev, Lio, Lu, Lun1, Lun2, Me, Oz, PrGi, Ro1, R, SzTh, SzEvSo, Tay, Ug, We];
- (ii) Coloquios : [ACH, AKH, BDF, DHLV, FaPr2, FaPr4, HoSp1, HoSp2, Ma2, Ne, NiPa, OcHo, Ro2, WSB1, WSB2, WrBr1, WrBr2];
- (iii) Trabajos de revisión : [Ba, Br, Da, Du, Fre, HoNi, Ma1, MuSu, Pr, Ta2, Ta7, Ta8, Vi].

Numerosos métodos básicos del problema de Stefan unidimensional no serán analizados en este curso. El lector deseoso de conocer, profundizar y avanzar en el tema encontrará en las referencias (y en aquellas citadas por los propios trabajos) los elementos necesarios para su progreso; para ello siempre será aconsejable la lectura y el análisis de los trabajos originales y pioneros en cada tema como un acercamiento a aquellos que han ideado el avance científico.

Se verifica que la ecuación (1) es invariante bajo una transformación de las variables x, t de la manera siguiente :

$$(7) \quad \xi = \gamma x \quad , \quad \tau = \gamma^2 t \quad (\gamma \neq 0) ,$$

es decir, si $T(x, t) = T\left(\frac{\xi}{\gamma}, \frac{\tau}{\gamma^2}\right) = \phi_\gamma(\xi, \tau)$, entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$(8) \quad (1) \Leftrightarrow \phi_{\gamma\tau} = a^2 \phi_{\gamma\xi\xi} \quad , \quad \forall \gamma \neq 0 .$$

Método de semeianza : Si las condiciones de contorno para la ecuación (1) no se modifican bajo un cambio de escala del tipo (7), entonces la temperatura T satisface la igualdad :

$$(9) \quad T(x, t) = T(\gamma x, \gamma^2 t) \quad , \quad \forall x, t \quad , \quad \forall \gamma \neq 0 .$$

Si se pone $\gamma = \frac{1}{2a\sqrt{t}}$, se obtiene

$$(10) \quad T(x, t) = T\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}, \frac{1}{4a^2}\right) = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) ,$$

con lo cual, la temperatura T depende sólo del argumento $z = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ llamada variable de semeianza .
Entonces:

(a) La función $T = T(x, t)$ es solución de (1) si y sólo si la función $\Phi = \Phi(z)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria :

$$(11) \quad \Phi''(z) + 2z \Phi'(z) = 0 ,$$

(b) La solución general de (11) está dada por :

$$(12) \quad \Phi(z) = C_1 + C_2 \int_0^z \exp(-u^2) du \quad , \quad C_1, C_2 : \text{constantes} .$$

Se define como función de error a la dada por la siguiente expresión :

$$(13) \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du = \text{erf}(x) \quad , \quad x \in \mathbf{R} .$$

(i) La función f tiene las siguientes propiedades :

a) $f(0) = 0$; b) $f(+\infty) = 1$; c) $f(-x) = -f(x)$;

d) $f'(x) = 2 \exp(-x^2) / \sqrt{\pi} > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

e) $f''(x) = -2x f'(x) < 0 \forall x > 0$;

f) Puede ser representada por una serie de potencias

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$.

(ii) Teniendo en cuenta la función de error f , la temperatura T viene dada por :

$$(14) \quad T(x, t) = A + B f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

donde las constantes A y B se determinan de las condiciones de contorno del problema correspondiente a la ecuación (1).

(iii) Se puede aplicar el método anterior para resolver problemas:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_t = a^2 T_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ T(x, 0) = T_0, \quad x > 0, \\ T(0, t) = T_b, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (II) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_t = a^2 T_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ T_0 \text{ si } x \geq 0, \\ T(x, 0) = \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{array} \right.$$

Se define como función de error complementaria a :

$$(15) \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - f(x).$$

Además, se definen las funciones iteradas de error complementaria de la siguiente manera :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} i^0 \operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erfc}(x), \quad i^1 \operatorname{erfc}(x) = i \operatorname{erfc}(x) = \int_x^{+\infty} \operatorname{erfc}(t) dt, \\ i^n \operatorname{erfc}(x) = \int_x^{+\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc}(t) dt, \quad n = 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades :

(i) Integrando por partes, se tiene :

$$\int_x^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t^2} dt.$$

Repitiendo el proceso, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(x) = \exp(-x^2) & \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{2^2 x^5} - \dots + (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{2^n - 1 x^{2n-1}} + \right. \\ & \left. + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t^{2n}} dt \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)/t^{2n} dt < \exp(-x^2) \int_x^{+\infty} 1/t^{2n} dt = \exp(-x^2)/[(2n-1)x^{2n-1}]$$

y como el término de la derecha tiende a 0 cuando $x \rightarrow +\infty$, entonces se tiene la siguiente aproximación, válida para valores de x grandes :

$$(17) \quad \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2^2 x^4} - \frac{3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots$$

(ii) Se puede verificar que se tienen las expresiones :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } i \operatorname{erfc}(x) = \exp(-x^2)/\sqrt{\pi} - x \operatorname{erfc}(x) , \\ \text{b) } i^2 \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{4} [(1 + 2x^2) \operatorname{erfc}(x) - 2/\sqrt{\pi} x \exp(-x^2)] . \end{array} \right.$$

(iii) Se puede deducir la siguiente fórmula de recurrencia :

$$(19) \quad 2n i^n \operatorname{erfc}(x) = i^{n-2} \operatorname{erfc}(x) - 2x i^{n-1} \operatorname{erfc}(x)$$

y la siguiente expresión :

$$(20) \quad i^n \operatorname{erfc}(0) = \frac{1}{2^n \Gamma(1 + \frac{n}{2})} .$$

(iv) Se verifica que la función $y(x) = i^n \operatorname{erfc}(x)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria :

$$(21) \quad y'' + 2xy' - 2ny = 0 .$$

(v) La función $T(x,t) = t^m g(x/2a\sqrt{t})$ es solución de la ecuación del calor $T_t = a^2 T_{xx}$ si y sólo si la función $g=g(z)$ ($z = x/2a\sqrt{t}$) es solución de la ecuación diferencial ordinaria :

$$(22) \quad g''(z) + 2zg'(z) - 4mg(z) = 0 .$$

(vi) Por otra parte, se verifica que la función $T(x,t) = t^{n/2} i^n \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t})$ es solución de (1) , $\forall n \in \mathbf{N}$.

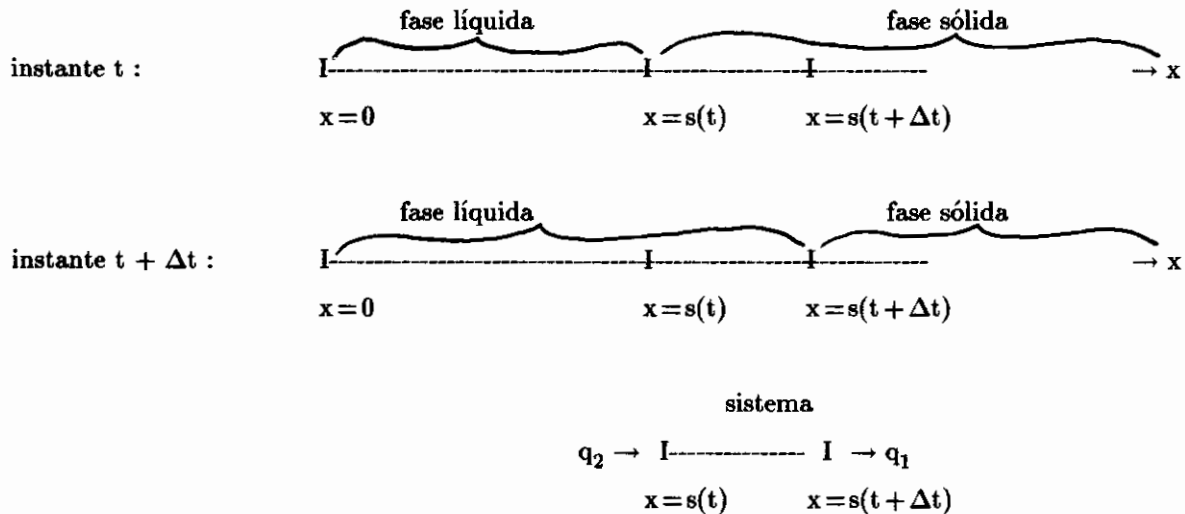
(vii) Se puede aplicar el resultado anterior para verificar que la función $T(x,t) = -2ha\sqrt{t}/k i \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t})$ es solución del siguiente problema :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_t = a^2 T_{xx} , \quad x > 0 , \quad t > 0 , \\ T(x,0) = 0 , \quad x > 0 , \\ k T_x(0,t) = h , \quad t > 0 . \end{array} \right.$$

III. CONDICION DE STEFAN

Se deducirá la condición de Stefan (I-5vii) correspondiente al problema de Stefan a dos fases, planteado en el comentario (I-E), consistente en hallar la función $s(t)$ (frontera libre que separa las fases líquida y sólida) y la temperatura $T(x,t)$ de manera que satisfagan el sistema (I-5). Por simplicidad, se supondrá que el material semi-infinito $x \geq 0$ tiene un área transversal A constante. Por consideraciones físicas $s(t)$ debe estar representada por una función creciente del tiempo t .

Sea $t > 0$ un instante de tiempo fijo y sea Δt un tiempo infinitamente pequeño (destinado a tender a cero); se considera el sistema representado por el intervalo material $(s(t), s(t + \Delta t))$. Dicho sistema se encuentra en estado sólido al instante t y en estado líquido al instante $t + \Delta t$.



El sistema recibe en su parte izquierda $x = s(t)$ una energía igual a:

$$(1) \quad q_2 A dt = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) A dt ,$$

y en cambio, en su parte derecha $x = s(t + \Delta t)$, el sistema entrega una energía igual a :

$$(2) \quad q_1 A dt = -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t + \Delta t), t + \Delta t) A dt .$$

La energía sobrante, igual a $(q_2 - q_1) A dt$, se utiliza para transformar el sistema del estado sólido al estado líquido. La energía necesaria para dicha transformación está dada en función del calor latente de fusión de la siguiente manera :

$$(3) \quad \rho \lambda [s(t + \Delta t) - s(t)] A ,$$

con lo cual, por conservación de la energía, se obtiene la igualdad

$$(4) \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t + \Delta t), t + \Delta t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho \lambda [s(t + \Delta t) - s(t)] / \Delta t ,$$

que por pasaje al límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se deduce la condición de Stefan I-(5vii).

IV. EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE

IV.1. LA SOLUCION EXACTA DE LAME-CLAPEYRON PARA EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE

A) Lamé-Clapeyron estudiaron en [LaCl] el problema de la solidificación por enfriamiento de un globo líquido, cuya formulación matemática está dada por el problema de hallar la frontera $x = s(t)$ y la temperatura $T = T(x, t)$ de la fase sólida, definida por (I-1), de manera que se satisfagan las condiciones (I-2 i-v).

Si $\{T, s\}$ es la solución de (I-2) entonces utilizando el principio del máximo, se tiene :

- (i) $T_0 < T(x, t) < T_f$ en $D = \{ (x, t) / 0 < x < s(t), t > 0 \}$;
- (ii) $\dot{s}(t) > 0, \forall t > 0$;
- (iii) $T_x(x, t) > 0, T_t(x, t) < 0, T_{xx}(x, t) < 0$ en D .

Utilizando el método de semejanza se obtiene que la solución del problema (I-2) está dada por:

$$(1) \quad T(x, t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{f(\xi)} f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad s(t) = 2a\xi\sqrt{t} \quad (a^2 = \frac{k}{\rho c}),$$

siendo $\xi > 0$ la única solución de la ecuación :

$$(2) \quad E(x) = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0,$$

donde :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du = \text{erf}(x), \\ E(x) = x f(x) \exp(x^2), \quad Ste = \frac{c(T_f - T_0)}{\lambda} : \text{número de Stefan.} \end{array} \right.$$

Basta proponer como solución del problema (I-2) a la temperatura

$$(4) \quad T(x, t) = A + B f(x/2a\sqrt{t}), \quad s(t) = 2a\xi\sqrt{t} \quad (\xi > 0),$$

donde las tres constantes A, B, ξ deben determinarse usando las condiciones (I-2iii-v) las cuales imponen las siguientes tres ecuaciones :

$$(5) \quad A = T_0, \quad A + B f(\xi) = T_f, \quad \frac{k B}{a \sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) = \rho \lambda a \xi.$$

Eliminando las constantes A y B en función de ξ , se tiene :

$$(6) \quad A(\xi) = T_0 \quad , \quad B(\xi) = \frac{T_f - T_0}{f(\xi)} ,$$

donde ξ es la única solución de la ecuación (2), pues la función E tiene las propiedades siguientes :

$$(7) \quad E(0) = 0 \quad , \quad E(+\infty) = +\infty \quad , \quad E'(x) > 0 \quad , \quad \forall x > 0 .$$

OBSERVACION 1.— La solución (1) del problema de Stefan unidimensional a una fase (I-2) es conocida como solución de Lamé-Clapeyron [LaCl].

OBSERVACION 2.— El coeficiente adimensional ξ , que caracteriza la frontera libre $s(t)$, depende sólo del número de Stefan Ste.

OBSERVACION 3.— El simple modelo (I-2) puede utilizarse para dar un cálculo aproximado de la edad de la Tierra (se supone que 0 es el instante inicial del planeta y t la edad incógnita) una vez conocido :

- i) El valor $R = s(t)$ de la corteza sólida en el instante t;
- ii) Los coeficientes a, Ste (para cada valor de T_0) de la fase sólida, la cual se supone que es una sustancia isotrópica y homogénea.

Con dichos datos, un valor aproximado de la edad del planeta Tierra puede obtenerse mediante la expresión :

$$(8) \quad t = \frac{R^2}{4a^2\xi^2} ,$$

donde ξ es la única solución de la ecuación (2).

EJERCICIO 1.— Suponiendo que $R = 50$ km (el radio de la Tierra es de 6.400 km) y que la sustancia más apropiada es el cuarzo halle una estimación de la edad de la Tierra para diferentes valores de T_0 . Hágalo también para otras sustancias cuyos coeficientes térmicos sean fácilmente obtenibles en Tablas y realice una comparación de los resultados obtenidos. Mediante otros métodos se obtiene que la edad de la Tierra oscila entre 5 y 10 mil millones de años.

Un ejemplo de solución exacta con datos no constantes está dado por [KiSt]. Se puede verificar que

$$(9) \quad T(x, t) = W\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}\right) , \quad s(t) = M \sqrt{t+1} \quad (M > 0) ,$$

es solución del problema (I-9 bis), donde

$$(10) \quad W(z) = A_1 \operatorname{erfc}(z/2) - A_2 \quad , \quad A_1 = (\sqrt{\pi}/2) M \exp(M^2/4) \quad , \quad A_2 = \sqrt{\pi} G(M/2) ,$$

con

$$(11) \quad h(x) = W(x), \quad s(0) = M \text{ (en lugar de } s(0)=1), \quad f(t) = W(0) = A_1 - A_2 = \sqrt{\pi} E(M/2),$$

donde E está definida por (3) y G está dada por

$$(12) \quad G(x) = x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x).$$

OBSERVACION 4.- Una generalización de la solución de Lamé-Clapeyron con una fuente singular está dada en [MeTa].

IV.2. METODO DE INMOVILIZACION DEL DOMINIO

Uno de los métodos teóricos utilizados en el estudio del problema de Stefan es el llamado método de la inmovilización del dominio, el cual mediante el cambio de variable

$$(1) \quad y = \frac{x}{s(t)}$$

transforma el intervalo $(0, s(t))$ en el $(0, 1)$. Se busca la temperatura como una función de la sola variable y , es decir :

$$(2) \quad T(x, t) = \psi(y).$$

Teniendo presente que :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_x(x, t) = \frac{\psi'(y)}{s(t)}, \quad T_{xx}(x, t) = \frac{\psi''(y)}{s^2(t)}, \\ T_t(x, t) = -y \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} \psi'(y) \quad (\psi'(y) = \frac{d\psi}{dy}(y)), \end{array} \right.$$

se tiene la equivalencia siguiente : $\{T, s\}$ es solución de (I-2) si y sólo si $\{\psi, s\}$ es solución del problema (4) siguiente :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & a^2 \psi''(y) + s(t) \dot{s}(t) y \psi'(y) = 0, \\ \text{(ii)} & \psi(0) = T_0 < T_f, \quad \text{(iii)} \quad \psi(1) = T_f, \\ \text{(iv)} & \psi'(1) = (\rho \lambda / k) s(t) \dot{s}(t), \quad \text{(v)} \quad s(0) = 0. \end{array} \right.$$

Llamando con s_0 a la constante $s(t) \dot{s}(t)$, a ser determinada, se obtiene :

$$(5) \quad s^2(t) = 2 s_0 t = 4 a^2 \xi^2 t, \quad \xi^2 = s_0 / (2 a^2).$$

Integrando la ecuación (4i), y teniendo en cuenta la condición (4iv), se deduce :

$$(6) \quad \psi'(y) = (\rho \lambda s_o / k) \exp(\xi^2) \exp(-\xi^2 y^2)$$

que, con la condición (4ii) se transforma en :

$$(7) \quad \psi(y) = T_o + (\lambda \sqrt{\pi} / c) \xi \exp(\xi^2) f(\xi y) .$$

La condición (4iii) da para el coeficiente desconocido ξ la ecuación (IV.1.2), con lo cual ψ viene dado por:

$$(8) \quad \psi(y) = T_o + \frac{T_f - T_o}{f(\xi)} f(\xi y)$$

que coincide con la obtenida por el método de semejanza pues se tiene $\xi y = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$.

OBSERVACION 1.- Cuando las condiciones de contorno no son constantes, el método de la inmovilización del dominio es también aplicable con la única dificultad de que la ecuación diferencial es más complicada, al no poderse determinar ψ como función de la única variable $y = x / s(t)$. En dicho caso, se buscará ψ como función de las variables y, t es decir $\psi = \psi(y, t)$.

IV.3. COMPORTAMIENTO DE LA SOLUCION DE LAME-CLAPEYRON CON EL CALOR LATENTE DE FUSION

A continuación se verán algunas desigualdades que serán útiles en posteriores estudios.

Sean E, f y G las funciones definidas anteriormente, entonces se tienen los siguientes resultados:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad E(x) > [\exp(x^2) - 1] / \sqrt{\pi} , \quad \forall x > 0 ; \\ \text{(ii)} \quad G(0) = 0 , \quad G(+\infty) = 1/\sqrt{\pi} ; \\ \text{(iii)} \quad G(x) < 1/\sqrt{\pi} , \quad \forall x > 0 ; \\ \text{(iv)} \quad G''(x) = 4[G(x) - 1/\sqrt{\pi}] + 2xG'(x) ; \\ \text{(v)} \quad G'(x) > 0 , \quad \forall x > 0 . \end{array} \right.$$

Por ejemplo, (i) y (iii) se deducen de las siguientes desigualdades :

$$(2) \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{u}{x} \exp(-u^2) du = \frac{1 - \exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} , \quad \forall x > 0 ,$$

$$(3) \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-u^2) du < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{u}{x} \exp(-u^2) du = \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} , \quad \forall x > 0 .$$

Sea el caso particular del problema de Lamé-Clapeyron (I-2) con

$$T_f = 0 \quad , \quad T_0 = -B < 0 \quad ,$$

cuya solución está dada, para cada valor $\lambda > 0$ de calor latente de fusión, por :

$$(4) \quad T(x, t, \lambda) = -B [1 - f(x/2a\sqrt{t}) / f(\xi_\lambda)] \quad , \quad s(t, \lambda) = 2a \xi_\lambda \sqrt{t} \quad ,$$

donde ξ_λ es la única solución de (IV-1-2) con

$$(5) \quad Ste = \frac{Bc}{\lambda} \quad .$$

En [Sh] se estudia el comportamiento de la solución (2) cuando $\lambda \rightarrow 0^+$, obteniéndose que $\xi_\lambda \rightarrow +\infty$ con lo cual la frontera libre $s(t, \lambda)$ avanza muy rápidamente en la fase líquida. Esto es físicamente aceptable pues la fase líquida se encuentra a la temperatura de fusión $T_f = 0$ y el calor latente λ es pequeño, con lo cual la energía que se libera al solidificar un trozo de material es despreciable. Además, la temperatura $T(x, t, \lambda)$ decrece hacia el límite $T(x, t, 0)$, dado por :

$$(6) \quad T(x, t, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} T(x, t, \lambda) = -B \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t}) \quad ,$$

que resulta ser la solución del siguiente problema de conducción de calor para la fase sólida :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 u_{xx} = u_t \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \quad (a^2 = \frac{k}{\rho c}) \quad , \\ u(0, t) = -B \quad , \quad t > 0 \quad , \\ u(x, 0) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad . \end{array} \right.$$

Por otra parte, se obtienen las siguientes estimaciones :

$$(i) \quad s(t, \lambda) \sim 2a \sqrt{t \log \frac{1}{\lambda}} \quad \text{para cada } t > 0, \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Más aún, se tiene la doble estimación (7) y (9) para el coeficiente ξ_λ ;

$$(ii) \quad (8) \quad 0 < T(x, t, \lambda) - T(x, t, 0) < \frac{\lambda}{c} \quad , \quad \forall x > 0, \forall t > 0.$$

DEMOSTRACION.- (i) Por definición de ξ_λ y de la desigualdad (1i) se tiene

$$\frac{Bc}{\lambda} = \sqrt{\pi} E(\xi_\lambda) > \exp(\xi_\lambda^2) - 1 \quad ,$$

de donde surge la acotación:

$$(9) \quad \xi_\lambda < [\log(1 + \frac{Bc}{\lambda})]^{1/2}.$$

Además, se tiene

$$(10) \quad \frac{Bc}{\lambda} = \sqrt{\pi} E(\xi_\lambda) < \sqrt{\pi} [\log(1 + \frac{Bc}{\lambda})]^{1/2} \exp(\xi_\lambda^2),$$

obteniéndose de este modo una segunda acotación para ξ_λ , dada por :

$$(11) \quad \xi_\lambda > [\log(\frac{Bc}{\lambda\sqrt{\pi}}) - \frac{1}{2}\log \log(1 + \frac{Bc}{\lambda})]^{1/2}.$$

(ii) Por definición y usando (1) se obtiene que :

$$(12) \quad 0 < B f(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) [\frac{1}{f(\xi_\lambda)} - 1] = T(x, t, \lambda) - T(x, t, 0) < B \frac{\text{erfc}(\xi_\lambda)}{f(\xi_\lambda)} < \\ < \frac{B}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\xi_\lambda^2)}{\xi_\lambda f(\xi_\lambda)} = \frac{\lambda}{c},$$

con lo cual se deduce la desigualdad (8).

IV.4. METODO CUASI-ESTACIONARIO

Cuando el número de Stefan $Ste = c(T_f - T_o)/\lambda$ es pequeño ($Ste \ll 1$) la solución ξ de la ecuación (IV.1.2) puede calcularse usando las aproximaciones de primer orden siguientes :

$$(1) \quad \exp(x^2) \sim 1 \quad , \quad f(x) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}x \quad , \quad 0 < x \ll 1,$$

con lo cual se obtiene

$$(2) \quad \xi^2 = \frac{Ste}{2} = \frac{c(T_f - T_o)}{2\lambda}.$$

Por otra parte, este resultado puede ser obtenido usando una aproximación física, metodología conocida como método cuasi-estacionario [St1, St2]. Este método supone que la temperatura de la fase sólida es la que correspondería al caso estacionario en el intervalo $(0, s(t))$, es decir una función afín de la variable x . Bajo esta hipótesis, se tiene :

$$(3) \quad T(x, t) = T_o + \frac{T_f - T_o}{s(t)} x \quad \text{en } [0, s(t)].$$

Por lo tanto, la condición de Stefan se reduce a

$$(4) \quad k(T_f - T_o) / s(t) = \rho \lambda \dot{s}(t),$$

que resulta ser una ecuación diferencial ordinaria en $s(t)$, de cuya integración, se obtiene :

$$(5) \quad s^2(t) = 2 k (T_f - T_o) t / (\rho \lambda) = 4 a^2 \frac{Ste}{2} t ,$$

obteniéndose de este modo (2).

El flujo de calor total $Q(t)$, para la solución de Lamé-Clapeyron, por unidad de área transversal y durante un tiempo t , en el borde fijo $x = 0$, está dado por:

$$(6) \quad Q(t) = \int_0^t k T_x(0, \tau) d\tau = \rho \lambda s(t) \exp(\xi^2) .$$

OBSERVACION 1.— ([So1, So2]) Cuando el número de Stefan es pequeño, éste da una indicación de la razón del calor sensible al calor latente almacenado en el material durante el proceso de cambio de fase. Se tiene la relación siguiente:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(t) = Q_s(t) + Q_\lambda(t) , \\ Q_\lambda(t) = \rho \lambda s(t) : \text{Calor latente total almacenado al tiempo } t , \\ Q_s(t) : \text{Calor sensible total almacenado por la variación de la temperatura .} \end{array} \right.$$

Por lo tanto utilizando (2), válido cuando $Ste \ll 1$, se deduce :

$$(8) \quad \frac{Q_s(t)}{Q_\lambda(t)} = \frac{Q(t)}{Q_\lambda(t)} - 1 = \exp(\xi^2) - 1 \sim \xi^2 \sim \frac{Ste}{2} .$$

OBSERVACION 2.— El método cuasi-estacionario, es también válido en el caso en que la temperatura sobre el borde fijo $x = 0$ sea una función del tiempo, es decir :

$$(9) \quad T(0, t) = T_o(t) < T_f , t > 0 .$$

EJERCICIO 1.— Verifique que se tienen las siguientes expresiones :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad T(x, t) = T_o(t) + \frac{T_f - T_o(t)}{s(t)} x , \\ (ii) \quad s(t) = [(2 k / \rho \lambda) \int_0^t [T_f - T_o(\tau)] d\tau]^{\frac{1}{2}} , \quad (iii) \quad Q(t) = \rho \lambda s(t) . \end{array} \right.$$

OBSERVACION 3.— El flujo de calor total $Q(t)$, para la solución cuasi-estacionaria (10), por unidad de área transversal y durante un tiempo t , en el borde fijo $x = 0$, no depende del hecho si la temperatura T_o es constante o variable en el tiempo; más aún, la energía, por unidad de área

transversal, necesaria para solidificar una región de amplitud $s(t)$ es simplemente la energía $Q_\lambda(t)$ debida sólo al calor latente. Esto está en contraste con la solución exacta, la cual muestra que $Q(t)/s(t) = \rho \lambda \exp(\xi^2)$ es igual a la energía por calor latente más la energía que se necesita para bajar la temperatura de la región solidificada. Con la solución cuasi-estacionaria ($Ste \ll 1$), ésta última energía no es tenida en cuenta.

OBSERVACION 4.— En [RTC1, RTC2] se utiliza el método cuasi-estacionario para resolver un modelo de frontera libre que estudia el crecimiento de raíces de cultivo.

IV.5. METODO DEL BALANCE INTEGRAL

Como uno de los mecanismos de conducción del calor es la difusión, la excitación en el borde fijo $x=0$ (por ejemplo, una temperatura o un flujo de calor) no se propaga inmediatamente a todo el material semi-infinito sino que su efecto se percibe en un intervalo acotado $[0, \delta(t)]$ (para cada instante de tiempo $t > 0$) fuera del cual la temperatura permanece igual a la temperatura inicial. El método del balance integral calórico [Go] postula la existencia de la función $\delta = \delta(t)$ que mide la profundidad de la capa térmica. En los problemas con cambio de fase se toma la capa térmica como la frontera libre, es decir $\delta(t) = s(t)$.

Para aplicar el método del balance integral calórico para la resolución del problema de Stefan a una fase, dado por el sistema de ecuaciones (ver solución exacta de Lamé-Clapeyron con $T_f = 0$) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho c T_t - k T_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(ii)} & T(0,t) = T_0 > 0 \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(iii)} & T(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(iv)} & k T_x(s(t),t) = - \rho \lambda \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(v)} & s(0) = 0 , \end{array} \right.$$

se debe reemplazar la condición de Stefan (liv) por la condición siguiente :

$$(2) \quad T_x^2(s(t),t) = \frac{\lambda}{c} T_{xx}(s(t),t) , \quad t > 0 ,$$

que explicita la no linealidad del problema de cambio de fase y además se debe tener en cuenta la equivalencia siguiente :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x,t) dx &= \int_0^{s(t)} T_t(x,t) dx + T(s(t),t) \dot{s}(t) = \int_0^{s(t)} T_t(x,t) dx = \frac{k}{\rho c} \int_0^{s(t)} T_{xx}(x,t) dx = \\ &= \frac{k}{\rho c} [T_x(s(t),t) - T_x(0,t)] = - \frac{k}{\rho c} [\frac{\rho \lambda}{k} \dot{s}(t) + T_x(0,t)] , \end{aligned}$$

es decir

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x,t) dx = -\frac{k}{\rho c} \left[\frac{\rho \lambda}{k} \dot{s}(t) + T_x(0,t) \right].$$

El método del balance integral calórico postula para la resolución del problema (1) la resolución del problema aproximado siguiente :

$$(4) \quad (3) \text{ (en lugar de (1i)) , (2) (en lugar de (1iv)), (1ii), (1iii) y (1v) ,}$$

a través, por ejemplo, del siguiente perfil de temperatura :

$$(5) \quad T(x,t) = \alpha(t) (s(t) - x) + \beta(t) (s(t) - x)^2, \quad 0 < x < s(t), t > 0 ,$$

donde $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ y $s = s(t)$ son funciones a determinar.

La resolución de (4) conduce a una ecuación diferencial ordinaria para $s(t)$, de cuya resolución se obtienen las siguientes expresiones (EJERCICIO 1) :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) = \frac{\lambda}{c} \frac{\sqrt{1 + 2 Ste} - 1}{s(t)} , \quad \beta(t) = \frac{\alpha(t) s(t) + T_0}{s^2(t)} , \quad Ste = \frac{c T_0}{\lambda} , \\ s(t) = 2 a \xi \sqrt{t} , \quad \xi = \sqrt{3} \frac{1 + 2 Ste - \sqrt{1 + 2 Ste}}{5 + Ste + \sqrt{1 + 2 Ste}} , \end{array} \right.$$

que produce un error aproximado del 5% con respecto a la solución exacta de Lamé-Clapeyron. para diferentes valores del parámetro Ste. Otros refinamientos del presente método han sido propuestos, por ejemplo, en [Be, Lun1, Lun2].

OBSERVACION 1.— En [ReTa, RTD] se utiliza el método del balance integral para resolver un modelo de frontera libre que estudia el crecimiento de raíces de cultivo.

OBSERVACION 2.— En [Ta13] se utiliza el método del balance integral para obtener el comportamiento asintótico exponencial de la solución en problemas de frontera libre para la ecuación del calor con absorción. En [RiTa] se utiliza el método de inmovilización del dominio, para obtener el mismo resultado de convergencia rápida de la frontera libre hacia la solución estacionaria, para la ecuación de medios porosos con absorción.

IV.6. ALGUNAS SOLUCIONES DADAS POR STEFAN

Se dijo anteriormente que Lamé y Clapeyron en 1831 hallaron la solución exacta del problema de solidificación (I-2) o de fusión (I-2 bis) en [LaCl] (problema de Stefan a una fase), y que Neumann, en los alrededores de 1840 (?) [Br, We], halló la solución exacta del problema (I-5)

(problema de Stefan a dos fases). El propio J. Stefan publicó en los años 1890 varias soluciones exactas, a saber

- (i) Solución de Lamé-Clapeyron del problema (I-2) ó (I-2 bis) [St1, St2, St3] ;
- (ii) Solución de Neumann del problema (I-5) [St1] ;
- (iii) Solución cuasi-estacionaria del problema (I-2) ó (I-2 bis) [St1, St2, St3] ;
- (iv) Problema inverso de Stefan a una fase con una frontera que tiene velocidad constante ($\dot{s}(t) = m$) [St2, St3].

La solución de Lamé-Clapeyron (i) y de Neumann (ii) y sus propiedades son desarrolladas con detalles en IV.1 y V.1 respectivamente, con lo cual aquí sólo se explicitarán los casos (iii) y (iv).

Caso (iii) La solución cuasi-estacionaria del problema (I-2 bis) es aquella que se obtiene de resolver el siguiente problema de frontera libre (se supone, sin pérdida de generalidad, que $T_f = 0$; en caso contrario se realiza una traslación de la escala de temperatura) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{(i)} & T_{xx} = 0 & , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(ii)} & T(0,t) = T_o > 0 & , \quad t > 0 , \\ \text{(iii)} & T(s(t),t) = 0 & , \quad t > 0 , \\ \text{(iv)} & k T_x(s(t),t) = - \rho \lambda \dot{s}(t) & , \quad t > 0 , \\ \text{(v)} & s(0) = 0 . & \end{array} \right.$$

Se verifica que la solución de (1) está dada por (ver también IV.4) :

$$(2) \quad T(x,t) = T_o \left(1 - \frac{x}{s(t)}\right) , \quad s(t) = \sqrt{\frac{2 k T_o}{\rho \lambda} t} .$$

Caso (iv) Se considera el siguiente problema inverso de Stefan a una fase con una frontera que tiene velocidad constante $m > 0$, es decir : Hallar la temperatura $T = T(x,t)$, y por ende $T(0,t)$, de manera que se satisfagan las siguientes condiciones :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{(i)} & \alpha T_{xx} = T_t & , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(ii)} & T(s(t),t) = 0 & , \quad t > 0 , \\ \text{(iii)} & k T_x(s(t),t) = \rho \lambda \dot{s}(t) & , \quad t > 0 , \\ \text{(iv)} & \dot{s}(t) = m > 0 & , \quad s(0) = 0 \quad (s(t) = m t) . \end{array} \right.$$

Se verifica que la solución de (3) está dada por

$$(4) \quad T(x,t) = \frac{\lambda}{c} \left[1 - \exp\left(\frac{m}{\alpha} (m t - x)\right)\right] ,$$

con lo cual se obtiene lo siguiente: Para que en el problema de solidificación (I-2) la frontera libre

avance con velocidad constante m es condición necesaria y suficiente que la temperatura en el borde fijo $x = 0$ sea variable en el tiempo de la forma :

$$(5) \quad f(t) = T(0, t) = -\frac{\lambda}{c} [\exp(\frac{m^2 t}{\alpha}) - 1] < 0 = T_f, \quad \forall t > 0.$$

Para mayores detalles sobre el problema inverso de Stefan ver [Vi, Qu].

IV.7. UN MODELO DE ZONA PASTOSA A UNA FASE CON SOLUCION EXACTA

En [SWA1], se plantea un simple modelo de zona pastosa para el problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase, el cual admite una solución explícita. El término de zona pastosa se refiere a una zona donde la fase sólida y la líquida coexisten, la cual proviene de la forma compleja en que el material líquido se solidifica. Esta zona puede ser muy larga o muy corta, dependiendo del material y de las condiciones bajo las cuales se solidifica.

Se considera un material unidimensional semi-infinito $x > 0$ que se encuentra inicialmente en estado líquido a su temperatura de fusión T_f . A partir del instante inicial, se impone una temperatura $T_0 < T_f$, en el borde $x=0$, con lo cual el proceso de solidificación comienza pudiendo ser distinguidas tres regiones distintas:

- (i) La fase líquida, a temperatura $T = T_f$, se encuentra en la región $x \geq r(t)$, $t > 0$;
- (ii) La fase sólida, a temperatura $T < T_f$, se encuentra en la región $0 \leq x \leq s(t)$, $t > 0$, donde $s(t) \leq r(t)$;
- (iii) La región pastosa ocupa la región $s(t) \leq x \leq r(t)$, $t > 0$, a la temperatura $T = T_f$. Esta región es isotérmica y se hacen dos hipótesis sobre su estructura :

(a) El material en la zona pastosa contiene una fracción fija $\epsilon \lambda$ ($0 < \epsilon < 1$) del calor latente de fusión λ por unidad de masa;

(b) El ancho de la zona pastosa es inversamente proporcional al gradiente de la temperatura en $x=s(t)$, llamando con $\gamma > 0$ a dicha constante de proporcionalidad ($[\gamma] = \text{temperatura}$).

Utilizando un método análogo a la deducción de la condición de Stefan, de la condición (a) se obtiene:

$$(1) \quad k T_x(s(t), t) = \rho \lambda [\epsilon \dot{s}(t) + (1 - \epsilon) \dot{r}(t)], \quad t > 0$$

La condición (b) se expresa de la siguiente manera:

$$(2) \quad T_x(s(t), t) (r(t) - s(t)) = \gamma, \quad t > 0.$$

Por lo tanto, de acuerdo al modelo anterior, el problema consiste en hallar las fronteras libres $x = s(t)$, $x = r(t)$ y la temperatura $T = T(x, t)$ de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$(3) \quad (I-2i, ii, iii) , (1) , (2) , \quad s(0) = r(0) = 0.$$

Las funciones $T(x, t)$, $s(t)$ y $r(t)$, que satisfacen el problema (3) pueden encontrarse a través del método de semejanza como :

$$(4) \quad T(x, t) = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\operatorname{erf}(\xi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) , \quad s(t) = 2 \xi a \sqrt{t} , \quad r(t) = 2 \mu a \sqrt{t} ,$$

donde

$$(5) \quad \mu = \xi + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2 (T_f - T_o)} \operatorname{erf}(\xi) \exp(\xi^2) ,$$

y $\xi > 0$ es la única solución de la ecuación:

$$(6) \quad D(x) = \frac{\operatorname{Ste}}{\sqrt{\pi}} , \quad x > 0 ,$$

con

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} D(x) = x \operatorname{erf}(x) \exp(x^2) + \frac{\gamma(1 - \epsilon) \sqrt{\pi}}{2 (T_f - T_o)} [\exp(x^2) \operatorname{erf}(x)]^2 , \\ \operatorname{Ste} = \frac{c(T_f - T_o)}{\lambda} : \text{número de Stefan.} \end{array} \right.$$

OBSERVACION 1.- El clásico modelo de Lamé-Clapeyron para el problema de Stefan a una fase se obtiene haciendo:

$$(8) \quad \epsilon = 1 , \quad \gamma = 0.$$

Si el número de Stefan es pequeño, entonces una solución aproximada para ξ, μ viene dada por:

$$(9) \quad \xi = \left[\frac{\operatorname{Ste}}{2[1 + \gamma(1 - \epsilon)/(T_f - T_o)]} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad \mu = \xi [1 + \gamma/(T_f - T_o)] .$$

IV.8. CASO DE UN LIQUIDO SUPER-ENFRIADO

A continuación se analizará el caso de un líquido super-enfriado (líquido sobre-enfriado) [CaJa]. Se supone que el cuerpo semi-infinito $x > 0$ se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme T_i , con $T_i < T_f$ (temperatura de fusión), y que la solidificación comienza a la temperatura T_f en el borde $x=0$ y se mueve hacia la derecha. El problema consiste en hallar la frontera libre $x=s(t)$ y la temperatura $T = T(x, t)$, definida por:

$$(1) \quad T(x,t) = \begin{cases} T_f & \text{si } 0 < x < s(t) , t > 0 , \\ T(x,t) < T_f & \text{si } x > s(t) , t > 0 , \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las condiciones siguientes :

$$(2) \quad \begin{cases} a^2 T_{xx} = T_t & , & x > s(t) & , & t > 0 , \\ T(x,0) = T_i & , & x > 0 , \\ T(s(t),t) = T_f & , & t > 0 , \\ k T_x(s(t),t) = -\rho \lambda \dot{s}(t) & , & t > 0 , \\ s(0) = 0 , \end{cases}$$

donde los coeficientes térmicos $k, \rho, \lambda, a^2 = \frac{k}{\rho c}$ son los correspondientes a la fase líquida. Entonces se tiene el siguiente resultado : Si $Ste = [c(T_f - T_i)/\lambda] < 1$, entonces la solución está dada por :

$$(3) \quad T(x,t) = T_i + (T_f - T_i) \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t}) / \operatorname{erfc}(\xi) , \quad s(t) = 2 a \xi \sqrt{t} ,$$

donde ξ es la única solución de la ecuación :

$$(4) \quad G(x) = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}} , \quad x > 0 .$$

OBSERVACION 1.- (i) Se verifica que si la temperatura inicial de un líquido super-enfriado es uniforme e igual a $-h$ con $0 < h < 1$, entonces

$$(5) \quad u(x,t) = -h + [h/\operatorname{erfc}(\sigma)] \operatorname{erfc}[(1-x)/2\sqrt{t}] , \quad s(t) = 1 - 2\sigma\sqrt{t}$$

es solución del siguiente problema en variables adimensionalizadas [FaPr3]

$$(6) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t & , & 0 < x < s(t) & , & 0 < t < T_0 = \frac{1}{4\sigma^2} , \\ u(x,0) = -h & , & 0 \leq x < 1 , \\ u(s(t),t) = 0 & , & 0 < t < T_0 , \\ u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) & , & 0 < t < T_0 , \\ s(0) = 1 , \end{cases}$$

donde σ es la única solución de la ecuación

$$(7) \quad G(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} , \quad x > 0 .$$

(ii) Analice los valores $u(0,t)$ y $u_x(0,t)$.

IV.9. EL PROBLEMA DE LA DIFUSION-CONSUMO DE OXIGENO EN TEJIDOS VIVOS

El problema consiste en lo siguiente [CrGu] : Primeramente se deja difundir oxígeno en un medio; parte del oxígeno es absorbido por el medio siendo por lo tanto eliminado del proceso de difusión. La concentración de oxígeno en la superficie del medio es mantenida constante. Esta primera fase del problema continúa hasta alcanzar un estado estacionario en el cual el oxígeno no penetra más lejos en el medio. La provisión de oxígeno es entonces cortada y la superficie del medio es aislada de manera que no entre ni salga más oxígeno. El medio continúa absorbiendo el oxígeno disponible en su interior y por consiguiente la frontera libre, que establece la separación entre la zona de concentración positiva y nula de oxígeno y que marca el ancho de penetración máximo en el caso estacionario, comienza a retroceder hacia la frontera aislada. El problema más importante es el de localizar el movimiento de la frontera libre durante esta fase del proceso y determinar la distribución de oxígeno en el medio como una función del tiempo.

El proceso de difusión con absorción o consumo está representado por la ecuación :

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} - m ,$$

donde:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(\xi, \tau) : \text{es la concentración de oxígeno libre a difundirse a la distancia} \\ \quad \xi \text{ del borde externo del medio } (\xi = 0) \text{ al instante } \tau; \\ D > 0 : \text{coeficiente de difusión;} \\ m > 0 : \text{razón de consumo de oxígeno por unidad de volúmen del medio.} \end{array} \right.$$

El proceso de difusión-consumo de oxígeno consta de dos partes :

(i) La primera parte consiste en hallar la solución estacionaria $C_{\infty}(\xi)$ y el punto $\xi = \xi_{\infty}$ (a partir del cual la concentración y su gradiente son nulos) de manera que satisfagan el siguiente sistema :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} DC_{\infty}'' - m = 0 \quad , \quad 0 < \xi < \xi_{\infty} , \\ C_{\infty}(0) = C_0 \quad , \\ C_{\infty}(\xi_{\infty}) = C_{\infty}'(\xi_{\infty}) = 0 , \end{array} \right.$$

donde C_0 representa la concentración de oxígeno entrante por la superficie exterior del medio $\xi = 0$. La solución de (3) está dada por :

$$(4) \quad C_{\infty}(\xi) = \frac{m}{2D}(\xi - \xi_{\infty})^2 \quad , \quad \xi_{\infty} = \left(\frac{2DC_0}{m}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

(ii) La segunda parte consiste en aislar el borde $\xi = 0$ y por lo tanto el oxígeno ya existente en el medio, en la región $0 \leq \xi \leq \xi_{\infty}$, continúa a ser consumido. El punto de concentración cero que inicialmente está dado por $\xi = \xi_{\infty}$ retrocede hacia $\xi = 0$. Si representamos con $S(\tau)$ la posición de dicho punto al instante τ entonces el problema consiste en hallar $C = C(\xi, \tau)$ y $S = S(\tau)$ soluciones del siguiente sistema:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{\tau} - DC_{\xi\xi} = -m \quad , \quad 0 < \xi < S(\tau) \quad , \quad \tau > 0 , \\ C(\xi, 0) = C_{\infty}(\xi) \quad , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_{\infty} , \\ C_{\xi}(0, \tau) = 0 \quad , \quad \tau > 0 , \\ C(S(\tau), \tau) = C_{\xi}(S(\tau), \tau) = 0 \quad , \quad \tau > 0 , \\ S(0) = \xi_{\infty} , \end{array} \right.$$

donde $\tau = 0$ es el instante cuando el borde $\xi = 0$ es aislado.

Realizando el cambio de variables

$$(6) \quad x = \frac{\xi}{\xi_{\infty}} \quad , \quad t = \frac{D}{\xi_{\infty}^2} \tau \quad , \quad u = \frac{1}{2C_0} C \quad , \quad s(t) = \frac{S(\tau)}{\xi_{\infty}} \quad ,$$

el problema (5) se reduce a la forma adimensional siguiente:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = -1 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}(1-x)^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 , \\ u_x(0, t) = 0 \quad , \quad t > 0 , \\ u(s(t), t) = u_x(s(t), t) = 0 \quad , \quad t > 0 , \\ s(0) = 1 . \end{array} \right.$$

En [LLCL] se indica que el tratamiento exitoso de cáncer por radioterapia está determinado principalmente por la posibilidad de aplicar una dosis de radiación lo suficientemente grande como para dañar considerablemente las células cancerosas sin dañar las células sanas circundantes, y mantenerse aún dentro del nivel de tolerancia a la radiación de los tejidos. Se ha demostrado que la susceptibilidad de las células cancerosas a la radiación aumenta con concentraciones crecientes de oxígeno dentro del tumor; más aún, existe una disminución de 2 a 3 veces en la dosis de radiación que se precisaría para obtener el grado de destrucción de las células oxigenadas con respecto de las células en ausencia total de oxígeno.

V. EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A DOS FASES

V.1. SOLUCION EXACTA DE NEUMANN PARA EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A DOS FASES

Se considera el problema de fusión de un material semi-infinito $x > 0$ que inicialmente se encuentra a temperatura inicial $T_i = -C < T_f$ y que en el borde fijo $x=0$ es calentado a una temperatura $T_0 = B > T_f$.

Sin pérdida de generalidad, se supone que $T_f=0$ (si no, se realiza una traslación de la escala de temperatura). Se supone también que la densidad de masa ρ es común a ambas fases. El problema consiste en hallar la frontera libre $x=s(t)$ y la temperatura $T=T(x,t)$, definida por (I-4), de manera que se satisfagan las condiciones (I-5i-viii).

Si $\{T_1, T_2, s\}$ es la solución de (I-5) entonces se tienen las siguientes propiedades (utilizar el principio del máximo):

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad -C < T_1(x,t) < 0 \quad , \quad x > s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(ii)} \quad 0 < T_2(x,t) < B \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(iii)} \quad T_{2_x}(s(t), t) < 0 \quad , \quad T_{1_x}(s(t), t) < 0 \quad , \quad \forall t > 0 . \end{array} \right.$$

Utilizando el método de semejanza, se obtiene el resultado siguiente : La solución del problema (I-5) está dada por :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_2(x,t) = B - \frac{B}{\text{erf}(\sigma/a_2)} \text{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \quad , \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ T_1(x,t) = -C + \frac{C}{\text{erfc}(\sigma/a_1)} \text{erfc}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \quad , \quad x \geq s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad \left(a_2^2 = \frac{k_2}{\rho c_2} , \quad a_1^2 = \frac{k_1}{\rho c_1} \right) , \end{array} \right.$$

siendo σ la única solución de la ecuación :

$$(3) \quad F(x) = x , \quad x > 0 ,$$

donde

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{B k_2}{\rho \lambda a_2 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{x}{a_2}\right) - \frac{C k_1}{\rho \lambda a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{x}{a_1}\right) \\ F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\text{erfc}(x)} \quad , \quad F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\text{erf}(x)} . \end{array} \right.$$

Se propone como solución del problema (I-5) a las siguientes funciones:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1(x, t) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \quad , \quad s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad , \\ T_2(x, t) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \quad , \end{array} \right.$$

donde las cinco constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \sigma$, deben determinarse usando las condiciones (I-2iii-vii) las cuales imponen las siguientes ecuaciones :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \alpha_2 \quad , \quad 0 = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}(\sigma/a_2) \quad , \\ -C = \alpha_1 + \beta_1 \quad , \quad 0 = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}(\sigma/a_1) \quad , \\ \frac{k_1 \beta_1}{a_1} \exp(-\sigma^2/a_1^2) - \frac{k_2 \beta_2}{a_2} \exp(\sigma^2/a_2^2) = \rho \lambda \sigma \sqrt{\pi} \quad . \end{array} \right.$$

Eliminando las constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ en función de σ se tiene :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(\sigma) = C \frac{\operatorname{erf}(\sigma/a_1)}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} \quad , \quad \beta_1(\sigma) = \frac{-C}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} \quad , \\ \alpha_2(\sigma) = B \quad , \quad \beta_2(\sigma) = \frac{-B}{\operatorname{erf}(\sigma/a_2)} \quad , \end{array} \right.$$

donde σ debe satisfacer la ecuación (3), la cual tiene única solución debido a las propiedades de la función F que se detallan en el ejercicio siguiente :

EJERCICIO 1.– Sean las siguientes funciones :

$$(8) \quad f(x) = \operatorname{erf}(x) \quad , \quad H(x) = \frac{F(x)}{1-f(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_1(x) \quad , \quad G(x) = H(x) - 2x \quad .$$

Se tienen las siguientes propiedades :

- (i) $H(0) = 2/\sqrt{\pi}$, $H(+\infty) = +\infty$, $H(x) > 0$, $\forall x > 0$;
- (ii) $G(0) = 2/\sqrt{\pi}$, $G(+\infty) = 0$;
- (iii) $H'(x) = G(x) H(x)$, $G'(x) = H'(x) - 2$;
- (iv) $G(x) > 0$, $\forall x > 0$;
- (v) $F'_1(x) > 0$, $\forall x > 0$;
- (vi) $F_2(0^+) = +\infty$, $F_2(+\infty) = 0$, $F'_2(x) < 0$, $x > 0$;
- (vii) $F(0^+) = +\infty$, $F(+\infty) = -\infty$, $F'(x) < 0$, $x > 0$.

OBSERVACION 1.— La solución (2) al problema de Stefan unidimensional a dos fases (I-5) es conocida como solución de Neumann [Br, We] (Hallar la solución del problema (I-5) para el caso $T_f \neq 0$).

A continuación se plantearán dos problemas que pueden resolverse con una metodología análoga a la de la solución de Neumann [Br, CaJa] :

(a) Una región de hielo semi-infinita $x < 0$, a temperatura uniforme T_g , es puesta inmediatamente en contacto con una región de agua semi-infinita $x > 0$, a temperatura uniforme T_e . El punto de contacto toma rápidamente la temperatura de fusión T_f con $T_g < T_f < T_e$.

Además, el borde extremo $x = -\infty$ del hielo es mantenido a T_g y el borde extremo $x = +\infty$ del agua a T_e . Halle las temperaturas de ambas fases y la frontera libre que las separa.

(b) Se supone que la región $x < 0$ es inicialmente un cuerpo sólido de constantes $\rho_0, c_0, k_0, \alpha_0$ a la temperatura uniforme 0 y que la región $x > 0$ es inicialmente líquido de constantes ρ, c_2, k_2, α_2 a la temperatura uniforme T_v . Se supone que la temperatura del cambio de fase de la región $x > 0$ es T_f con $0 < T_f < T_v$, y que las constantes características de la respectiva fase sólida son ρ, c_1, k_1, α_1 .

Halle las temperaturas T_0, T_1, T_2 de las regiones $x < 0, 0 < x < s(t), x > s(t)$ respectivamente, donde $x = s(t)$ representa la posición de la frontera libre de separación entre las fases sólida y líquida, existentes en la región $x > 0$.

Se considera el caso de un sólido finito $(0, x_0)$ que inicialmente se encuentra a la temperatura $-C < T_f = 0$ y con el extremo $x = x_0$, aislado térmicamente. Entonces cabe realizarse la siguiente pregunta [Sol] : Si en el borde $x = 0$, el sólido es calentado a una temperatura $B > 0$, entonces cuándo la solución correspondiente al sólido semi-infinito $(0, +\infty)$ es aplicable al caso del sólido finito $(0, x_0)$?

La respuesta será afirmativa si la temperatura de la fase sólida en el extremo $x = x_0$ coincide con la temperatura inicial; por lo tanto, para que se tenga $T_1(x_0, t) \sim -C$ es necesario y suficiente que sea $\operatorname{erfc}(x_0/2a_1\sqrt{t}) \sim 0$, es decir

$$(9) \quad \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{2a_1\sqrt{t}}\right) \sim 1.$$

Teniendo presente que se tiene $\operatorname{erf}(x) \sim 1, \forall x \geq 2$, se deduce que la respuesta será afirmativa cuando se tenga que, $x_0/(2a_1\sqrt{t}) \geq 2$, con lo cual, la aproximación será correcta para tiempos t que verifiquen:

$$(10) \quad t \leq \frac{x_0^2}{16 a_1^2}.$$

Se considera un material semi-infinito $x > 0$ que se encuentra a temperatura inicial uniforme $T_i = -C < T_f = 0$ y que en el borde fijo $x = 0$ se le entrega energía por unidad de área transversal y de tiempo a través de un flujo de calor $q(t) \leq 0$ para $t > 0$.

(i) Si $q(t) = -q < 0$ (constante), entonces la fusión no comienza instantáneamente a partir del instante inicial $t = 0$, pues la temperatura $T(0, t)$ deberá pasar de $T = -C < 0$ a $T = 0 (= T_f)$ y para ello empleará un cierto tiempo $t_0 > 0$.

Para deducir este hecho se considera el siguiente problema de conducción del calor para la fase sólida inicial:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \alpha T_{xx} = T_t \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 , \\ \text{(ii)} \quad T(x, 0) = -C < 0 \quad , \quad x > 0 , \\ \text{(iii)} \quad k T_x(0, t) = -q < 0 \quad , \quad t > 0 . \end{array} \right.$$

La solución de (11) está dada por :

$$(12) \quad T(x, t) = -C + \frac{2q}{k} \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) , \quad \text{con } T(0, t) = -C + \frac{2q}{k} \sqrt{\alpha t/\pi} ,$$

con lo cual, se tiene :

$$(13) \quad T(0, t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{\pi k^2 C^2}{4 \alpha q^2} ,$$

obteniéndose de este modo lo anunciado anteriormente.

(ii) Si $q(t) = -q_0/\sqrt{t}$ ($q_0 > 0$), entonces la fusión comienza inmediatamente a partir del instante inicial $t = 0$ si q_0 verifica una cierta desigualdad; en caso contrario, se tiene sólo un problema de conducción del calor en la fase sólida inicial. En efecto, se considera el problema (11bis) (es el problema (11) reemplazando la condición (11iii) por la (11iiibis)) donde :

$$(11iiibis) \quad k T_x(0, t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} \quad , \quad t > 0 ,$$

cuya solución está dada por :

$$(14) \quad T(x, t) = -C + \frac{q_0 \sqrt{\alpha \pi}}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) , \quad \text{con } T(0, t) = -C + \frac{q_0 \sqrt{\alpha \pi}}{k} ,$$

y que curiosamente tiene la propiedad de poseer en el borde fijo $x = 0$ una temperatura constante. Por lo tanto, el material sufrirá instantáneamente un cambio de fase si y sólo si

$$(15) \quad T(0, t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_0 > \frac{k C}{\sqrt{\alpha \pi}} ,$$

donde k, α son los respectivos coeficientes térmicos correspondientes a la fase sólida.

Por otra parte, si $q_0 \leq k C/\sqrt{\alpha \pi}$ el material permanece siempre en su fase sólida (no existe cambio de fase) con una temperatura $T(x, t)$ dada por (14).

Esta metodología fue utilizada en [SWA2]; previamente, la desigualdad (15) fue obtenida en

[Ta3] por otro método más extenso pero que permite hallar la temperatura de las fases líquida y sólida, además de la frontera libre que las separa. En efecto, se considera el problema de hallar la frontera libre $x = s(t)$, definida para $t > 0$, y la temperatura $T(x, t)$, definida por (I-4), de manera que se satisfagan las condiciones (I-5 bis) (la condición (I-5iv) es reemplazada por (I-5iv bis); además se supone que $T_f = 0$ y que $T_i = -C < 0$), donde :

$$(I-5iv \text{ bis}) \quad k_2 T_{2x}(0, t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}$$

Se obtiene el siguiente resultado [Ta3] :

(i) Si q_0 verifica la desigualdad

$$(16) \quad q_0 > C k_1 / a_1 \sqrt{\pi}$$

entonces la solución del problema (I-5 bis) está dada por :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_2(x, t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \quad , \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ T_1(x, t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \quad , \quad x \geq s(t) \quad , \quad t > 0 , \\ s(t) = 2w\sqrt{t} \quad \left(a_2^2 = \frac{k_2}{\rho c_2} \quad , \quad a_1^2 = \frac{k_1}{\rho c_1} \right) , \end{array} \right.$$

donde

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1(w) = C \frac{\operatorname{erf}(w/a_1)}{\operatorname{erfc}(w/a_1)} \quad , \quad B_1(w) = \frac{-C}{\operatorname{erfc}(w/a_1)} , \\ A_2(w) = \frac{a_2 q_0 \sqrt{\pi}}{k_2} \operatorname{erf}(w/a_2) \quad , \quad B_2(w) = -\frac{a_2 q_0 \sqrt{\pi}}{k_2} , \end{array} \right.$$

y $w > 0$ es la única solución de la ecuación :

$$(19) \quad F_0(x) = x \quad , \quad x > 0$$

con

$$(20) \quad F_0(x) = \frac{q_0}{\rho \lambda} \exp(-x^2/a_2^2) - \frac{C k_1}{\rho \lambda a_1 \sqrt{\pi}} F_1(x/a_1) .$$

(ii) Si $q_0 \leq C k_1 / a_1 \sqrt{\pi}$, el problema (I-5 bis) representa sólo un problema de conducción del calor para la fase sólida, cuya temperatura está dada por

$$(21) \quad T(x, t) = T_1(x, t) = -C + \frac{q_0 a_1 \sqrt{\alpha \pi}}{k_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{\alpha t}}\right) \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 .$$

OBSERVACION 2.- (16) es equivalente a $F_0(0^+) > 0$.

EJERCICIO 2.- Verifique que el problema (I-5 bis) con $q_0 = C k_1 / a_1 \sqrt{\pi}$ corresponde al problema (I-5) cuando el calor latente de fusión $\lambda \rightarrow +\infty$.

Si q_0 verifica la desigualdad (16), entonces los problemas (I-5) y (I-5 bis) son equivalentes. Más aún, para el coeficiente σ de la frontera libre $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ de la solución de Neumann correspondiente al problema (I-5), se deduce la propiedad siguiente :

$$(22) \quad \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) < \frac{B}{C} \sqrt{\frac{k_2 c_2}{k_1 c_1}} .$$

DEMOSTRACION.- Como q_0 verifica la desigualdad (16), entonces la solución del problema (I-5 bis) está dada por (17). Sea B_0 la temperatura correspondiente en el borde fijo $x = 0$, es decir :

$$(23) \quad B_0 = A_2(w) = \frac{a_2 q_0 \sqrt{\pi}}{k_2} \operatorname{erf}(w/a_2)$$

Como $B_0 > 0$, se puede considerar ahora el problema (I-5) tomando $B = B_0$, cuya solución viene dada por (2), reemplazando B por B_0 . Obsérvese que se tiene

$$(24) \quad A_1(x) = \alpha_1(x) \quad , \quad B_1(x) = \beta_1(x) \quad , \quad \forall x > 0 ,$$

independientemente de la relación existente entre B_0 y B .

Por otra parte, se obtiene que :

$$(25) \quad \sigma = w .$$

En efecto, como vale $\beta_2(w) = -\frac{B_0}{\operatorname{erf}(w/a_2)} = -\frac{a_2 q_0 \sqrt{\pi}}{k_2}$ se tiene que :

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{B_0 k_2}{\rho \lambda a_2 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{w}{a_2}\right) - \frac{C k_1}{\rho \lambda a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{w}{a_1}\right) = \frac{q_0}{\rho \lambda} \exp(-w^2/a_2^2) - \frac{C k_1}{\rho \lambda a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{w}{a_1}\right) = \\ &= F_0(w) = w \quad , \end{aligned}$$

y de la unicidad de σ en la ecuación (3), se deduce entonces la igualdad (25). Más aún, se tiene

$$(26) \quad A_2(x) = \alpha_2(x) \quad , \quad B_2(x) = \beta_2(x) \quad , \quad \forall x > 0 ,$$

con lo cual los dos problemas (I-5) y (I-5 bis) son equivalentes. Por otra parte, teniendo sólo presente el problema (I-5), esta equivalencia induce la desigualdad

$$(27) \quad q_0 = \frac{k_2 B}{a_2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sigma/a_2)} > \frac{C k_1}{a_1 \sqrt{\pi}}$$

que resulta ser (22).

OBSERVACION 3.— La desigualdad (22) es independiente del calor latente de fusión λ y tiene sólo sentido físico en el caso en que el término de la derecha sea menor que uno.

OBSERVACION 4.— En [TaTu] se presentan relaciones entre los datos para la obtención de un cambio de fase instantáneo o la existencia de un tiempo de espera.

V.2. COMPORTAMIENTO DE LA SOLUCION DE NEUMANN CON EL CALOR LATENTE DE FUSION

Existen ciertos materiales que cambian su estado de agregación con cambios relativamente pequeños de su energía interna, lo que se traduce en que su calor latente de cambio de fase es despreciable. Este caso se da en las dispersiones coloidales de materiales poliméricos en agua, conocidos comúnmente como látex. Un caso particular interesante es aquel de los látex termosensibles, que han sido hechos termosensibles (es decir, capaces de gelificarse por un aumento de temperatura) por la adición de ciertos ingredientes. La solución de este proceso se obtiene haciendo $\lambda = 0$ en la solución de Neumann para el problema de Stefan a dos fases [Gu] (ver también [Sh]).

Más aún, en [ChGu], se da una expresión para los coeficientes térmicos del material, para la cual se obtiene que la solución al caso $\lambda = 0$ da la solución al caso $\lambda > 0$.

En [TaVi] se realiza un análisis del comportamiento de la solución de Neumann en función del parámetro λ y se estudia el límite $\lambda \rightarrow 0^+$.

V.3. CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

Se considera el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases correspondiente a un cuerpo unidimensional de longitud finita, el cual será representado por el intervalo $(0, x_0)$ con $x_0 > 0$. Se supone que la temperatura de cambio de fase es nula. Se analizarán dos casos diferentes :

CASO 1.— La temperatura en el borde $x = 0$ es $B > 0$ y en el borde $x = x_0$ es $-C < 0$. Con estas imposiciones el problema es siempre a dos fases, con la fase líquida en la parte izquierda y la fase sólida en la parte derecha, estando ambas fases separadas por la frontera libre $x = s$, con $0 < s < x_0$. La formulación matemática de este problema, está dada por : Hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ y la temperatura $T = T(x)$, definida por:

$$(1) \quad T(x) = \begin{cases} T_2(x) > 0 & \text{si } 0 < x < s, \\ 0 & \text{si } x = s, \\ T_1(x) < 0 & \text{si } s < x < x_0, \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las siguientes condiciones :

$$(2) \quad \begin{cases} (i) & T_2''(x) = 0, \quad x \in (0, s) ; \quad T_1''(x) = 0, \quad x \in (s, x_0), \\ (ii) & T_1(s) = T_2(s) = 0, \quad k_1 T_1'(s) = k_2 T_2'(s), \\ (iii) & T_2(0) = B > 0, \quad T_1(x_0) = -C < 0. \end{cases}$$

Si se realiza el cambio de función incógnita [Du, Ta1]

$$(3) \quad u(x) = k_2 T^+(x) - k_1 T^-(x), \quad 0 < x < x_0,$$

donde T^+ y T^- representan respectivamente la parte positiva y negativa de la función T , entonces el problema (2) se reduce al siguiente :

$$(4) \quad u'' = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad \text{con } u(0) = k_2 B > 0, \quad u(x_0) = -k_1 C < 0.$$

Además, T puede reencontrarse a través de la relación :

$$(5) \quad T = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^-.$$

OBSERVACION 1.- La frontera libre $x = s$ del problema (2) ha desaparecido en la nueva formulación (4). Más aún, puede ser obtenida a través de la función u , pues se tiene la siguiente equivalencia :

$$(6) \quad u(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(s) = 0.$$

EJERCICIO 1.- (i) Obtenga la solución del problema (4) y por ende deducir que la solución del problema (2) está dada por :

$$(7) \quad s = \frac{e_0 x_0}{1 + e_0}, \quad e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C},$$

$$(8) \quad T(x) = \begin{cases} \frac{B}{s}(s - x) & \text{si } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{-C}{x_0 - s}(x - s) & \text{si } s \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

(ii) Verifique directamente que (7) y (8) es la solución del problema original (2).

CASO 2.— En el borde $x = 0$ se tiene una temperatura $B > 0$ y en el borde $x = x_0$ se tiene un flujo de calor saliente $q > 0$. Por lo tanto, el cuerpo pierde energía a través del borde $x = x_0$ con lo cual su temperatura será inferior del valor B . Con estas imposiciones, en general, el problema no es a dos fases. Se verá que el problema será a dos fases si q verifica una cierta desigualdad. La formulación matemática de este problema está dada por : Hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ (si existe) y la temperatura $T = T(x)$, definida por (1), de manera que se satisfagan las siguientes condiciones (2i, ii, iiibis), a quien se lo llamará problema (2bis), donde:

$$(2iibis) \quad \left| \begin{array}{ll} -k_2 T_2'(x_0) = q > 0 & \text{si } T(x_0) \geq 0, \\ -k_1 T_1'(x_0) = q > 0 & \text{si } T(x_0) < 0. \end{array} \right.$$

Utilizando el principio del máximo para ecuaciones elípticas se deduce que :

$$(9) \quad T(x) < B, \quad x \in (0, x_0).$$

EJERCICIO 2.— (i) Si se realiza el cambio de función incógnita (3), entonces el problema (2bis) se reduce al siguiente :

$$(10) \quad \left| \begin{array}{ll} u''(x) = 0, & x \in (0, x_0), \\ u(0) = k_2 B > 0, & -u'(x_0) = q > 0. \end{array} \right.$$

(ii) La solución de (10) está dada por :

$$(11) \quad u(x) = -q x + k_2 B.$$

(iii) El Caso 2 es un problema a dos fases si y sólo si

$$(12) \quad q > \frac{k_2 B}{x_0}.$$

(iv) Más aún, si la desigualdad (12) se verifica, entonces la solución del problema (2 bis) está dada por :

$$(13) \quad s = \frac{k_2 B}{q},$$

$$(14) \quad T(x) = \left| \begin{array}{ll} B(1 - \frac{x}{x_0}) & \text{si } 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{k_2 B}{k_1} (\frac{x}{x_0} - 1) & \text{si } s \leq x \leq x_0. \end{array} \right.$$

(v) Si $q \leq k_2 B/x_0$, entonces el Caso 2 es sólo un problema estacionario de conducción del calor para la fase líquida, cuya temperatura viene dada por :

$$(15) \quad T(x) = B - \frac{q}{k_2}x, \quad x \in [0, x_0].$$

(vi) Verifique directamente que (13) y (14) es la solución del problema original (2bis).

Se puede obtener la desigualdad (12) de una forma más simple, planteando el siguiente problema de conducción del calor estacionario (analizar la analogía con (10)) :

$$(10 \text{ bis}) \quad T''(x) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad \text{con } T(0) = B > 0, \quad -k_2 T'(x_0) = q > 0,$$

y observando que se tiene la equivalencia:

$$(12) \Leftrightarrow T(x_0) < 0.$$

Nótese que este método permite la obtención de la desigualdad (12) pero no da la expresión explícita de las temperaturas correspondientes a las fases líquida y sólida respectivamente.

V.4. UN MODELO DE ZONA PASTOSA A DOS FASES CON SOLUCION EXACTA

Se puede plantear un modelo de zona pastosa (“mushy zone”) para el problema de Stefan a dos fases (con densidades de masa iguales en ambas fases) para un material semi-infinito (representado por $x > 0$) en el cual se hacen las siguientes suposiciones (se generaliza a dos fases el modelo dado para el problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase en [SWA1]. Ver también [Ta11] y IV.7) [Ta10] :

H₁) La fase sólida, a temperatura $T = T_1(x, t) < 0$, se encuentra en la región $x > r(t)$, $t > 0$;

H₂) La fase líquida, a temperatura $T = T_2(x, t) > 0$, se encuentra en la región $0 < x < s(t)$, $t > 0$;

H₃) La región pastosa ocupa la región $s(t) < x < r(t)$, $t > 0$ a la temperatura $T = 0$ (de cambio de fase) y se hacen dos hipótesis sobre su estructura :

(i) El material en la zona pastosa contiene una fracción fija $\epsilon\lambda$ (con $0 < \epsilon < 1$ constante) del calor latente de fusión λ por unidad de masa;

(ii) El ancho de la zona pastosa es inversamente proporcional al gradiente de la temperatura en $x = s^-(t)$, llamando con $\gamma > 0$ a dicha constante de proporcionalidad.

Si el material semi-infinito se encuentra inicialmente en estado sólido a la temperatura inicial constante $-C < 0$, al cual se le impone una temperatura constante $B > 0$ en el borde fijo $x = 0$ para $t > 0$, entonces se obtienen los siguientes resultados:

- (i) Una solución exacta para $T_1(x,t)$, $T_2(x,t)$, $s(t)$ y $r(t)$ en función de la temperatura inicial y de borde, de los parámetros de la zona pastosa ϵ y γ , y de los coeficientes térmicos del material.
- (ii) Se obtiene una conclusión análoga a la dada en la parte (i) si se reemplaza en la hipótesis (H₃ii) el gradiente de temperatura en $x = s^-(t)$ por el gradiente de temperatura en $x = r^+(t)$.

(A) Teniendo en cuenta las hipótesis (H₁)-(H₃) se puede plantear el problema (P1) que consiste en hallar las dos fronteras libres $x=s(t)$, $x=r(t)$, definidas para $t > 0$ con $s(0) = r(0) = 0$ y la temperatura $T = T(x,t)$, definida para $x > 0$ y $t > 0$ de la siguiente manera:

$$(1) \quad T(x,t) = \begin{cases} T_2(x,t) > 0 & \text{si } 0 < x < s(t), t > 0, \\ 0 & \text{si } s(t) \leq x \leq r(t), t > 0, \\ T_1(x,t) < 0 & \text{si } r(t) < x, t > 0, \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las siguientes condiciones :

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_2 T_{2_{xx}} = T_{2_t}, & 0 < x < s(t), t > 0, \\ \alpha_1 T_{1_{xx}} = T_{1_t}, & r(t) < x, t > 0, \\ s(0) = r(0) = 0, \\ T_2(s(t), t) = T_1(r(t), t) = 0, & t > 0, \\ k_1 T_{1_x}(r(t), t) - k_2 T_{2_x}(s(t), t) = \rho \lambda [(1-\epsilon) \dot{s}(t) + \epsilon \dot{r}(t)], \\ - T_{2_x}(s(t), t) (r(t) - s(t)) = \gamma, & t > 0, \\ T_1(x, 0) = T_1(+\infty, t) = -C < 0, & x > 0, t > 0, \\ T_2(0, t) = B > 0, & t > 0, \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ es el calor latente de fusión por unidad de masa, $\rho > 0$ es la densidad de masa común a ambas fases y $k_i > 0$, $c_i > 0$, $\alpha_i = a_i^2 = \frac{k_i}{\rho c_i} > 0$ son la conductividad térmica, el calor específico y el coeficiente de difusión respectivamente de la fase i ($i=1$: fase sólida, $i=2$: fase líquida). Siguiendo la metodología de hallar soluciones autosemejantes se propone como solución de (P1) a:

$$(3) \quad \begin{cases} T_1(x,t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2 a_1 \sqrt{t}}\right), & T_2(x,t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2 a_2 \sqrt{t}}\right), \\ s(t) = 2 \sigma \sqrt{t}, & r(t) = 2 \omega \sqrt{t}, \end{cases}$$

que satisfacen las tres primeras condiciones de (2). Si se imponen las 6 condiciones restantes se obtiene que los 5 coeficientes A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , ω vienen dados en función de σ , de la siguiente manera :

$$(4) \quad \begin{cases} A_2 = B, & B_2 = \frac{-B}{\operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right)}, & A_1 = \frac{C \operatorname{erf}\left(\frac{\omega}{a_1}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\omega}{a_1}\right)}, & B_1 = \frac{-C}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\omega}{a_1}\right)}, \\ \omega = \omega(\sigma) = \sigma + \frac{\gamma a_2 \sqrt{\pi}}{2 B} \exp\left(\frac{\sigma^2}{a_2^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right), \end{cases}$$

y el coeficiente σ debe satisfacer la ecuación :

$$(5) \quad K_1(x) = K_2(x), \quad x > 0,$$

donde las funciones K_1 y K_2 están definidas para $x > 0$ por :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1(x) = \frac{k_2 B}{a_2 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{x}{a_2}\right) - \frac{k_1 C}{a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\omega(x)}{a_1}\right), \quad F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}, \\ K_2(x) = \rho \lambda \left[x + \frac{\epsilon \gamma a_2 \sqrt{\pi}}{2 B} \exp\left(\frac{x^2}{a_2^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{a_2}\right) \right], \quad F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)}. \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta que las funciones K_1 y K_2 satisfacen las siguientes propiedades :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1(0^+) = +\infty, \quad K_1(+\infty) = -\infty, \quad K_1' < 0, \quad \forall x > 0, \\ K_2(0^+) = 0, \quad K_2(+\infty) = +\infty, \quad K_2' > 0, \quad \forall x > 0, \end{array} \right.$$

se deduce que la ecuación (5) tiene una única solución $\sigma > 0$.

NOTA 1.— A continuación se dará una lista no completa de diversos problemas de tipo Stefan, en los cuales el conocimiento explícito de la solución exacta ha jugado un papel preponderante (más referencias sobre el tema podrán encontrarse en [Ta2]) :

- (i) Analogía al método de semejanza e inmovilización del dominio [Ru];
- (ii) Cambio de densidad en la transición de fase ($\rho_1 \neq \rho_2$) [BaTa, CaJa, FPT, ChGu, R];
- (iii) Acoplamiento de la temperatura y de la concentración (Cristalización de una aleación binaria) [R, SWA2, TsBo, WSA];
- (iv) Solidificación de aleaciones [Ho, TiGe, TiKo, WeCr];
- (v) Solidificación y fusión de un cuerpo compuesto [Ep];
- (vi) Presencia de multifases [R, SaTa, TrBr, Wei, Wi1, Wi2];
- (vii) Procesos de transferencia de calor y materia con cambio de fase en un medio poroso [Ch, FPT, Li1, Li2, Li3, Mi1, Mi2, PrGi];
- (viii) Absorción de un gas por un sólido [Ga];
- (ix) Oxidación de zirconio [DeGa1, DeGa2 (interacción entre UO_2 y Zr)];
- (x) Determinación de coeficientes térmicos desconocidos [BNT, DETV, StTa, Ta4, Ta5, Ta6, Ta12] (se basa en teoría matemática y aplicaciones desarrolladas en [ALT, Ca1, Ca2, Ca3, GST, Jo1, Jo2, MaTa]);
- (xi) Determinación de coeficientes térmicos desconocidos con la inclusión de una región pastosa

sólida-líquida [GoTa, Ta10];

(xii) Infiltración en medios porosos con zonas saturadas-no saturadas [Br, BrWh, BrTa, Ph];

(xiii) Aprovechamiento de la energía solar a través del uso de materiales de cambio de fase [AlSo, SoKe];

(xiv) Crecimiento de raíces de cultivo [RTC1, RTC2, ReTa, RTD];

(xv) Con coeficientes variables [ChSu, Rog1, Rog2, Ti].

NOMENCLATURA

k : conductividad térmica ,

c : calor específico ,

Ste : número de Stefan ,

s : posición del cambio de fase ,

t : tiempo ,

x : variable espacial ,

T : temperatura ,

B : temperatura en el borde fijo $x = 0$,

q_0 : coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x=0$,

Q_0 : coeficiente que caracteriza la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x=0$

λ : calor latente de fusión ,

ρ : densidad de masa ,

$\alpha = a^2 = \frac{k}{\rho c}$: coeficiente de difusión, $\xi = \frac{\sigma}{a}$: coeficiente adimensional,

σ : coeficiente que caracteriza la frontera libre $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$,

Sub-índices : $i=1$: fase sólida , $i=2$: fase líquida.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de revisión se ha realizado a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Aplicaciones de Problemas de Frontera Libre" del CONICET – UA, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

- [ACH] J. ALBRECHT – L. COLLATZ – K.H. HOFFMANN (Eds.), "Numerical treatment of free boundary value problems", ISNM No. 58, Birkhauser Verlag, Basel (1982).
- [AISo] V. ALEXIADES – A. D. SOLOMON, "Mathematical modeling of melting and freezing processes", Hemisphere - Taylor & Francis, Washington (1993).
- [AHK] S. N. ANTONSEV – K. H. HOFFMANN A. M. KHLUDNEV (Eds.), "Free boundary problems in continuum mechanics", ISNM # 106, Birkhauser Verlag, Basel (1992).
- [ALT] J.C. ARDERIUS – M. LARA – D.A. TARZIA, "Experimental-numerical determination of thermal coefficients through a phase-change process", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 23 (1996), 745 – 754.
- [Ar] V. S. ARPACI, "Conduction heat transfer", Addison-Wesley, Massachusetts (1966).
- [BaCa] C. BAIOCCHI – A. CAPELO, "Diseguazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariazionali, *Quaderni dell'Unione Matematica Italiana*, No. 4, 7, Pitagora Editrice, Bologna (1978).
- [BaTa] A.B. BANCORA – D.A. TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free boundary", *Latin Amer. J. Heat Mass Transfer*, 9 (1985), 215–222.
- [Ba] S.G. BANKOFF, "Heat conduction of diffusion with change of phase", *Advances in Chemical Engineering*, 5 (1964), 75–150.
- [Be] G.E. BELL, "A refinement of the heat balance integral method applied to a melting problem", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 21 (1978), 1357–1361.
- [Bl] H. BLOCK, "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", *Arkiv Matematik Astronomi Fysik*, 6 No. 31 (1911), 1–42.
- [BDF] A. BOSSAVIT – A. DAMLAMIAN – M. FREMOND (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Vol. III, IV, *Research Notes in Math*. No. 120, 121, Pitman, London (1985).
- [Bo] J.E. BOUILLET, "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, Rosario, 11 (1984), 75–104.
- [Br] M. BRILLOUIN, "Sur quelques problèmes non résolus de physique mathématique classique : Propagation de la fusion", *Annales de l'Inst. H. Poincaré*, 1 (1930/31), 285–308.
- [BrTa] A.C. BRIOZZO – D.A. TARZIA, "The explicit solution of a free boundary problem for a nonlinear absorption model of mixed saturated-unsaturated flow", To appear.
- [BNT] A.C. BRIOZZO – M.F. NATALE – D.A. TARZIA, "Determination of unknown thermal coefficients for Storm's type materials through a phase-change process", To appear.
- [Br] P. BROADBRIDGE, "Solution of a nonlinear absorption model of mixed saturated-unsaturated flow", *Water Resources Research*, 26 (1990), 2435–2443.
- [BrWh] P. BROADBRIDGE – I. WHITE, "Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model, 1, Analytic solutions", *Water Resources Research*, 24 (1988), 145–154.
- [Ca1] J.R. CANNON, "Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation", *Duke Math. J.*, 30 (1963), 313–323.
- [Ca2] J.R. CANNON, "Determination of certain parameters in heat conduction problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 8 (1964), 188–201.

- [Ca3] J.R. CANNON, "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).
- [CaJa] H.S. CARSLAW – J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).
- [ChRa] J. M. CHADAM – H. RASMUSSEN (Eds.), "Free boundary problems involving solids", Pitman Research Notes in Mathematics Series # 281, Longman, Essex (1993).
- [Ch] S. H. CHO, "An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium", Int. J. Heat Mass Transfer, 18 (1975), 1139–1142.
- [ChSu] S.H. CHO – J.E. SUNDERLAND, "Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity", J. Heat Transfer, 96C (1974), 214–217.
- [ChGu] S. W. CHURCHILL – J. P. GUPTA, "Approximations for conduction with freezing or melting", Int. J. Heat Mass Transfer, 20 (1977), 1251–1253.
- [Cr1] J. CRANK, "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).
- [Cr2] J. CRANK, "Free and moving boundary problems", Clarendon Press, Oxford (1984).
- [CrGu] J. CRANK – R. S. GUPTA, "A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue", J. Inst. Math. Appl., 10 (1972), 19–33.
- [Da] I.I. DANILYUK, "On the Stefan problem", Russian Math. Surveys, 40 (1985), 157–223.
- [Dat] A. DATZEFF, "Sur le problème linéaire de Stefan", Mémorial des Sciences Physiques No. 69, Gauthier–Villars, Paris (1970).
- [DeGa1] A. DENIS – E. A. GARCIA, "Diffusion in a semi-infinite system with a moving interphase considering solvent density change : Application to the oxidation of zirconium", J. Nuclear Material, 96 (1981), 127–140.
- [DeGa2] A. DENIS – E. A. GARCIA, "A model to describe the interaction between UO_2 and zircaloy in the temperature range 1000–1700 °C", J. Nuclear Materials, 116 (1983), 44–54.
- [DETV] H.A. DESTEFANIS – E. ERDMANN – D.A. TARZIA – L.T. VILLA, "A free boundary model applied to the estimation of the diffusion coefficient in a gas-solid system", International Communications Heat Mass Transfer, 20 (1993), 103–110.
- [Di] J.I. DIAZ, "Nonlinear partial differential equations and free boundaries", Vol. I : Elliptic equations, Research Notes in Math. No. 106, Pitman, London (1985).
- [DHLV] J. I. DIAZ – M. A. HERRERO – A. LIÑAN – J. L. VAZQUEZ (Eds.), "Free boundary problems: theory and applications", Pitman Research Notes in Mathematics Series # 323, Longman, Essex (1995).
- [Du] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche No. 185, LABORIA – IRIA, Rocquencourt (1976).
- [EcDr] E. R. G. ECKERT – R. M. DRAKE, Jr., "Analysis of heat and mass transfer", Mc Graw Hill, Tokyo (1972).
- [EIOc] C.M. ELLIOTT – J.R. OCKENDON, "Weak and variational methods for moving boundary problems", Research Notes in Math., No. 59, Pitman, London (1982).
- [Ep] M. EPSTEIN, "Heat conduction in the UO_2 -cladding composite body with simultaneous solidification and melting", Nuclear Sci. Eng., 51 (1973), 84–87.

- [Fa1] A. FASANO, "Alcune osservazioni su una classe di problemi a contorno libero per l'equazione del calore", *Le Matematiche*, 29 (1974), 397–411.
- [Fa2] A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, No. 13, Rosario (1987).
- [FaPr1] A. FASANO – M. PRIMICERIO, "General free boundary problems for the heat equation", *J. Math. Anal. Appl.*, Part I : 57 (1977), 694–723; Part II: 58 (1977), 202–231; Part III : 59 (1977), 1–14.
- [FaPr2] A. FASANO – M. PRIMICERIO (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Vol. I, II, *Research Notes in Math.* No. 78, 79, Pitman, London (1983).
- [FaPr3] A. FASANO – M. PRIMICERIO, "A critical case for the solvability of Stefan-like problems", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 5 (1983), 84–96.
- [FaPr4] A. FASANO – M. PRIMICERIO (Eds.), "Nonlinear diffusion problems", *Lecture Notes in Mathematics* No. 1224, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [FPT] A. FASANO – M. PRIMICERIO – D.A. TARZIA, "Similarity solutions in Stefan-like problems", *Stability and Analysis in Continuous Media*, To appear.
- [Fre] M. FREMOND, "Diffusion problems with free boundaries", in *Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics*, ICTP, Trieste (1976).
- [Fr] A. FRIEDMAN, "Partial differential equations of parabolic type", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1964).
- [FrBi] G.F. FROMENT – K.B. BISCHOFF, "Chemical reactor analysis and design", J. Wiley, New York (1979).
- [Ga] E. A. GARCIA, "Modèle pour l'analyse thermogravimétrique des phénomènes d'oxydation avec desquamation", *J. Less-Common Metals*, 78 (1981), 159–175.
- [GaSa] G.G. GARGUICHEVICH – M.C. SANZIEL, "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, Rosario, 11 (1984), 167–177.
- [GST] G.G. GARGUICHEVICH – M.C. SANZIEL – D.A. TARZIA, "Comparison of approximate methods for the determination of thermal coefficients through a phase-change problems", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 12 (1985), 451–464.
- [Ge1] M. GEVREY, "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", *J. Math. Pures Appl.*, (6) 9 (1913), 305–471.
- [Ge2] M. GEVREY, "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite)", *J. Math. Pures Appl.*, (6) 10 (1914), 105–148.
- [GoTa] A.M. GONZALEZ – D.A. TARZIA, "Determination of unknown coefficient of a semi-infinite material through a simple mushy zone model for the two-phase Stefan problem", *International Journal of Engineering Science*, 34 (1996), 34 (1996), 799 – 817.
- [Go] T.R. GOODMAN, "The heat balance integral and its application to problems involving a change of phase", *Trans. of the ASME*, 80 (1958), 335–342.
- [Gou] E. GOURSAT, "Cours d'analyse mathématique", Gauthier–Villars, Paris (1927).
- [Gu] J. A. GUZMAN, "Application of the heat transfer solution for the case of one-dimensional solidification with negligible latent heat", *Lat. Amer. J. Heat Mass Transfer*, 6 (1982), 41–51.

- [Hi] J.M. HILL, "One-dimensional Stefan Problems : an introduction", Longman, Essex (1987).
- [HoNi] K.H. HOFFMANN – M. NIEZGODKA, "Control of parabolic systems involving free boundaries", *Research Notes in Math.* N°79, Pitman, London (1983), 431–462.
- [HoSp1] K.H. HOFFMANN – J. SPREKELS (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", *Pitman Research Notes in Mathematics* No. 185, 186, Longman, Essex (1990).
- [HoSp2] K.H. HOFFMANN – J. SPREKELS (Eds.), "Free boundary value problems", *ISNM* No. 95, Birkhauser, Basel (1990).
- [Ho1] E. HOLMGREN, "Sur l'èquation de la propagation de la chaleur", *Arkiv Matematik Astronomi Fysik*, 4 No. 14 (1908), 1–11.
- [Ho2] E. HOLMGREN, "Sur l'èquation de la propagation de la chaleur, Deuxième note", *Arkiv Matematik Astronomi Fysik*, 4 No. 18 (1908), 1–28.
- [Ho] S.D. HOWISON, "Similarity solutions to the Stefan problem and the binary alloy problem", *IMA J. Appl. Math.*, 40 (1988), 147 – 161.
- [Jo1] B. F. JONES, Jr., "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part I : Existence and uniqueness", *J. Math. Mech.*, 11 (1962), 907–918.
- [Jo2] B. F. JONES, Jr., "Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equation", *Comm. Pure Appl. Math.*, 16 (1963), 33–44.
- [Jos] W. JOST, "Diffusion in solids, liquids, gases", Academic Press, New York (1952).
- [KiSt] D. KINDERLEHRER – G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).
- [LSU] O.A. LADYZENSKAJA – V.A. SOLONNIKOV – N.N. URAL'CEVA, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", *Amer. Math. Soc.*, Providence (1968).
- [LaCl] G. LAME – B.P. CLAPEYRON, "Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", *Annales Chimie Physique*, 47 (1831), 250–256.
- [Lev] O. LEVENSPIEL, "Chemical reaction engineering", J. Wiley, New York (1962).
- [Le] E. E. LEVI, "Sull'equazione del calore", *Ann. Mat. Pura Appl.*, (3) 14 (1908), 187–264.
- [LLCL] A. I. LIAPIS – G. G. LIPSCOMB – O. K. CROSSER – E. LIAPIS-TSIROYIANNI, "A model of oxygen diffusion in absorbing tissue", *Mathematical Modelling*, 3 (1982), 83–92.
- [Li1] S. LIN, "An exact solution of the sublimation problem in a porous medium", *J. Heat Transfer*, 103 (1981), 165–168.
- [Li2] S. LIN, "An exact solution of the sublimation problem in a porous medium, Part II – With an unknow temperature and vapor concentration at the moving sublimation front", *J. Heat Transfer*, 104 (1982), 808–811.
- [Li3] S. LIN, "An exact solution of the desublimation problem in a porous medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 25 (1982), 625–630.
- [Lio] J.L. LIONS, "Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles", *Presses de l'Univ. de Montréal*, Montréal (1976).
- [Lu] A. V. LUIKOV, "Analytical heat diffusion theory", Academic Press, New York (1968).
- [Lun1] V.J. LUNARDINI, "Heat transfer in cold climates", *Van Nostrand*, New York (1981).

- [Lun2] V.J. LUNARDINI, "Heat transfer with freezing and thawing", Elsevier, Amsterdam (1991).
- [Ma1] E. MAGENES, "Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems", in *Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations*, H.G. Garnier (Ed.), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht (1976), 239–312.
- [Ma2] E. MAGENES (Ed.), "Free boundary problems", Vol. I, II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (1980).
- [MaTa] G. MARTINEZ – D.A. TARZIA, "Un software para la determinación de coeficientes térmicos a través de un proceso con cambio de fase", *MECOM/91, AMCA, S.R. Idelsohn (Ed.), Mecánica Computacional*, 12 (1991), 621–627.
- [Me] A.M. MEIRMANOV, "Stefan problem", (in Russian), Nauka, Novosibirsk (1986).
- [MeTa] J.L. MENALDI – D.A. TARZIA, "Generalized Lamé–Clapeyron solution for a one-phase source Stefan problem", *Comput. Appl. Math.*, 12 (1993), 123 – 142.
- [Mi1] M. D. MIKHAILOV, "Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 18 (1975), 797–804.
- [Mi2] M. D. MIKHAILOV, "Exact solution for freezing of humid porous half-space", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19 (1976), 651–655.
- [MuSu] J. C. MUEHLBAUER – J. E. SUNDERLAND, "Heat conduction with freezing or melting", *Appl. Mech. Reviews*, 18 (1965), 951–959.
- [Ne] P. NEITTAANMAKI (Ed.), "Numerical methods for free boundary problems", ISNM No. 99, Birkhauser, Basel (1991).
- [NiPa] M. NIEZGODKA – I. PAWLOW (Eds.), "Recent advances in free boundary problems", Vol. 14, No. 1–3, p. 1–307, *Control and Cybernetics*, Warsaw (1985).
- [No] R.H. NOCHETTO, "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, Rosario, 11 (1984), 143–166.
- [OcHo] J.R. OCKENDON – W.R. HODGKINS (Eds.), "Moving boundary problems in heat flow and diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).
- [Oz] M. N. OZISIK, "Heat conduction", J. Wiley, New York (1980).
- [PeSl] C. L. PEKERIS – L. B. SLICHTER, "problem of ice formation". *J. Appl. Physics*, 10 (1939), 135–137.
- [Ph] J.R. PHILIP, "Theory of infiltration", *Adv. in Hydrosience*, 5 (1969), 215 – 296.
- [Pr] M. PRIMICERIO, "Problemi di diffusione a frontiera libera", *Bollettino Un. Mat. Italiana*, 18A (1981), 11–68.
- [PrGi] M. PRIMICERIO – R. GIANNI, "La filtración en medios porosos", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, N^o 18, Rosario (1989).
- [PrWe] M. H. PROTTER – H. F. WEINBERGER, "Maximun principles in diferencial equations", Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).
- [Qu] D. QUILGHINI, "Sul problema inverso di quello di Stefan", *Riv. Mat. Univ. Parma*, 8 (1967), 131–142.
- [RTC1] J.C. REGINATO – D.A. TARZIA – A. CANTERO, "On the free boundary problem for the

Michaelis–Menten absorption model for root growth”, *Soil Science*, 150 (1990), 722–729.

[RTC2] J.C. REGINATO – D.A. TARZIA – A. CANTERO, “On the free boundary problem for the Michaelis–Menten absorption model for root growth II. High concentrations”, *Soil Science*, 152 N.2 (1991), 63–71.

[ReTa] J.C. REGINATO – D.A. TARZIA, “The balance integral method applied to root growth of crops”, *International Journal of Engineering Science*, 31 (1993), 61–70.

[RTD] J.C. REGINATO – D.A. TARZIA – M.A. DZIOBA, “A model for root growth with root competition”, *Plant and Soil*, 15 (1993), 185–196.

[RiTa] R. RICCI – D.A. TARZIA, “Asymptotic behavior of the solutions of a class of diffusion-reaction equations”, *Proc. Int. Colloq. on Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Irsee-Germany, June 11–20 (1987), Vol. II, K.H. Hoffmann – J. Sprekels (Eds.), Longman, Essex, Pitman Research Notes in Mathematics, 186 (1990), 719–721.

[Ro1] J.F. RODRIGUES, “Obstacle problems in mathematical physics”, *North–Holland Mathematics Studies No. 134*, North–Holland, Amsterdam (1987).

[Ro2] J.F. RODRIGUES (Ed.), “Mathematical models for phase change problems”, Birkhauser, Basel (1989).

[Rog1] C. ROGERS, “On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of a reciprocal transformation”, *ZAMP*, 39 (1988), 122 – 128.

[Rog2] C. ROGERS, “On a class of moving boundary problems in non-linear heat conduction: Application of a Backlund transformation”, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 21 (1986), 249 – 256.

[R] L.I. RUBINSTEIN, “The Stefan problem”, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971).

[Ru] A. L. RUOFF, “An alternate solution of Stefan/s problem”, *Quart. Appl. Math.*, 16 (1958), 197–201.

[SaTa] M.C. SANZIEL – D.A. TARZIA, “Necessary and sufficient condition to obtain n phases in a one-dimensional medium with a flux condition on the fixed face”, *Math. Notae*, 33 (1989), 25–32.

[Sc] A. SCHATZ, “Free boundary problems of Stephan type with prescribed flux”, *J. Math. Anal. Appl.* 28 (1969), 569–277.

[Sh] B. SHERMAN, “Limiting behavior in some Stefan problems as the latent goes to zero”, *SIAM J. Appl. Math.*, 20 (1971), 319–327.

[SoKe] M. SOKOLOV – Y. KEIZMAN, “Performance indicators for solar pipes with change storage”, *Solar Energy*, 47 (1991), 339 – 346.

[So1] A. D. SOLOMON, “An easily ccomputable solution to a two-phase Stefan problem”, *Solar Energy*, 23 (1979), 525–528.

[So2] A. D. SOLOMON, “A note on the Stefan number in slab melting and solidification”, *Letters Heat Mass Transfer*, 8 (1981), 229–235.

[SWA1] A.D. SOLOMON – D.G. WILSON – V. ALEXIADES, “A mushy zone model with an exact solution”, *Letters Heat Mass Transfer*, 9 (1982), 319–324.

[SWA2] A.D. SOLOMON – D.G. WILSON – V. ALEXIADES, “Explicit solutions to change problems”, *Quart. Appl. Math.*, 41 (1983), 237–243.

[StTa] M.B. STAMPELLA – D.A. TARZIA, “Determination of one or two unknown thermal

coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", *Int. J. Eng. Science*, 27 (1989), 1407–1419.

[St1] J. STEFAN, "Ueber einige Probleme der Theorie der Waermeleitung", *Zitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe*, 98 (1889), 473–484.

[St2] J. STEFAN, "Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere", *Zitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe*, 98 (1889), 965–983. *Annalen der Physik und Chemie*, 42 (1891), 269–286.

[St3] J. STEFAN, "Ueber die Theorie der Eisbildung". *Monatshefte fur Mathematik und Physik*, 1 (1890), 1–6.

[SzTh] J. SZEKELY – N. J. THEMELIS, "Rate phenomena in process metallurgy", J. Wiley, New York (1971).

[SzEvSo] J. SZEKELY – J.W. EVANS – H.Y. SOHN, "Gas–solid reactions", Academic Press, New York (1976).

[Ta1] D.A. TARZIA, "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", *Math. Notae*, 28 (1979–1980), 145–156.

[Ta2] D.A. TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", *Math. Notae*, 29 (1981–1982), 147–241. Ver también, "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem", *Progetto Nazionale M.P.I. : Equazioni di Evoluzione e Applicazioni Fisico-Matematiche*, Firenze (1988) (con 2528 referencias). Está en preparación una versión actualizada con más de 4000 referencias sobre el tema.

[Ta3] D.A. TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", *Quart. Appl. Math.*, 39 (1981–1982), 491–497. Ver también "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", *Math. Notae*, 28 (1980–1981), 73–89.

[Ta4] D.A. TARZIA, "Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)", *Adv. Appl. Math.*, 3 (1982), 74–82.

[Ta5] D.A. TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26 (1983), 1151–1158.

[Ta6] D.A. TARZIA, "A new variant for the simultaneous calculation of some thermal coefficients of a semi-infinite material through a phase-change problem with an over-condition on the fixed face", *Latin Amer. J. Heat Mass Transfer*, 8 (1984), 227–235.

[Ta7] D.A. TARZIA, "An analysis of a bibliography on moving and free boundary problems for the heat equation. Some results for the one dimensional Stefan problem using the Lamé-Clapeyron and Neumann solutions", *Free Boundary Problems: Applications and Theory*, Vol. III, A. Bossavit– A. Damlamian– M. Frémond (Eds.), *Research Notes in Mathematics No. 120*, Pitman, London (1985), 84–102.

[Ta8] D.A. TARZIA "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, Rosario, 12 (1984), 5–36.

[Ta9] D.A. TARZIA "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, Rosario, 11 (1984), 33–61.

[Ta10] D.A. TARZIA, "Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for

- the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades mushy zone model", *Int. Comm. Heat. Mass Transfer*, 14 (1987), 219–228.
- [Ta11] D.A. TARZIA, "Neumann-like solution for the two-phase Stefan problem with a simple mushy zone model", *Computational and Applied Mathematics (ex Matemática Aplicada Computacional)*, 9 (1990), 201–211.
- [Ta12] D.A. TARZIA, "On the determination of the unknown coefficients through phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity", in *Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems II*, L.C. Wrobel–C.A. Brebbia (Eds.), *Computational Mechanics Publications*, Southampton (1993), 311–318.
- [Ta13] D.A. TARZIA, "A variant of the heat balance integral method and a new proof of the exponentially fast asymptotic behavior of the solutions in heat conduction problems with absorption", *International Journal Engineering Science*, 28 (1990), 1253–1259.
- [TaTu] D.A. TARZIA – C.V. TURNER, "A note on the existence of a waiting time for a two-phase Stefan problem", *Quart. Appl. Math.*, 50 (1992), 1–10.
- [TaVi] D.A. TARZIA – L.T. VILLA, "Mathematical considerations on the heat transfer with phase change with negligible latent heat", *Latin American Applied Research*, 21 (1991), 1–6.
- [Tay] A.B. TAYLER, "Mathematical models in applied mechanics", Clarendon Press, Oxford (1963).
- [TiGe] R. H. TIEN – G. E. GEIGER, "A heat-transfer analysis of the solidification of a binary eutectic system", *J. Heat Transfer*, 89C (1967), 230–234.
- [TiKo] R. H. TIEN – V. KOUMP, "Effect of density change on the solidification of alloys", *J. Heat Transfer*, 92C (1970), 11–16.
- [Ti] G. A. TIRSKII, "Two exact solutions of Stefan's nonlinear problems", *Soviet Physics Dokl.*, 4 (1959), 288–292.
- [TrBr] P. TRITSCHER – P. BROADBRIDGE, "A similarity solution of a multiphase Stefan problem incorporating general non-linear heat conduction", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37 (1994), 2113 – 2121.
- [TsBo] T. TSUBAKI – B. A. BOLEY, "One-dimensional solidification of binary mixtures", *Mech. Res. Comm.*, 4 (1977), 115–122.
- [Ug] M. UGHI, "On the porous media equation with either source or absorption", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, No. 22, Rosario (1991).
- [Vi] L.T. VILLA, "El problema inverso de Stefan", *CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, Rosario, 11 (1984), 105–131.
- [We] H. WEBER, "Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen", t. II, Braunschweig (1901), 118–122.
- [Wei] J.H. WEINER, "Transient heat conduction in multi-phase media", *British J. Appl. Physics*, 6 (1955), 361–363.
- [WeCr] T. D. WELCH – A. W. CRONENBERG, "A quantitative comparison of solidification analysis for single-component and mixed-oxide fuels", *Nuclear Sci. Eng.*, 67 (1978), 263–269.
- [Wi1] D.G. WILSON, "Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multi-phase Stefan problems", *SIAM J. Appl. Math.*, 35 (1978), 135–147.
- [Wi2] D. G. WILSON, "Lagrangian coordinates for moving boundary problems", *SIAM J. Appl. Math.*, 42 (1982), 1195–1201.

[WSA] D. G. WILSON – A. D. SOLOMON – V. ALEXIADES, "A shortcoming of the explicit solution for the binary alloy solidification problem", Letters Heat Mass Transfer, 9 (1982), 421–428.

[WSB1] D.G. WILSON – A.D. SOLOMON – P.T. BOGGS (Eds.), "Moving boundary problems", Academic Press, New York (1978).

[WrBr1] L.C. WROBEL – C.A. BREBBIA (Eds.), "Computational modelling of free and moving boundary problems", Vol. 1, 2, Walter de Gruyter, Berlin (1991).

[WrBr2] L. C. WROBEL – C. A. BREBBIA (Eds.), "Computational methods for free and moving boundary problems in heat and fluid flow", Computational Mechanics Publications, Southampton (1993).

[WSB2] L. C. WROBEL – B. SARLER – C. A. BREBBIA (Eds.), "Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems III", Computational Mechanics Publications, Southampton (1995).

Domingo Alberto TARZIA

Departamento de Matemática,
FCE, Universidad Austral,
Paraguay 1950,
(2000) Rosario, Argentina

Tel. : (041) 81 – 4990

Fax : (041) 81 – 0505

E – mail: tarzia@uaufce.edu.ar

y

CONICET.