CAPÍTULO 8

NÚMEROS COMPLEJOS

8.1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se ha excluido del estudio de los radicales el caso de índice par y radicando negativo; por ejemplo: $\sqrt{-4}$, o bien, las potencias de base negativa cuyo exponente es una fracción irreducible de denominador par, por ejemplo: $(-2)^{3/4}$, debido a que es imposible atribuirles algún significado en el conjunto de los números reales. Por otro lado, esta noción está relacionada con la no existencia de soluciones reales, por ejemplo, de la ecuación $x^2 + 4 = 0$

8.2. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

▲ Número complejo e igualdad

Definición 1. Se llama **número complejo** a todo par ordenado (a, b) de números reales. Se nota con $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos, es decir :

(1) $$\mathbb{C} = \{(a,\ b)\ /\ a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Dado el número complejo $z = (a,b)$ se dice que :

a es la **primera componente** o la **parte real** del número complejo z ($a=\mathbb{R}\mathrm{e}(z)$) ,

b es la **segunda componente** o la **parte imaginaria** del número complejo z ($b=\mathbb{I}\mathrm{m}(z)$) .

Definición 2. Dos números complejos (a,b) y (c,d) son **iguales** y se nota (a,b) = (c,d) si y sólo si sus componentes respectivos son iguales, es decir :

(2) $$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d .$$

▲ Operaciones con números complejos

Definición 3. En el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ se definen las siguientes operaciones :

1) Suma.

(3) $$(a,b) + (c,d) = (a + c , b + d) , \quad \forall\ (a,b), (c,d) \in \mathbb{C} .$$

2) Producto o Multiplicación.

(4) $$(a, b) . (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \quad , \quad \forall (a, b) , (c, d) \in \mathbb{C}$$

Proposición 1. El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ con la suma y el producto definidos anteriormente es un cuerpo conmutativo; es decir que ($\mathbb{C}$, + , x) es un cuerpo conmutativo con :

(5)
1) elemento neutro de la suma : (0,0) ;
2) elemento opuesto de la suma : $-(a,b) = (-a, -b)$;
3) elemento neutro del producto : (1,0) ;
4) elemento inverso del producto : $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, $(a,b) \neq (0,0)$

Demostración. Se realizarán las pruebas referentes a los elementos neutro, opuesto e inverso.

Elemento neutro. Si se designa con $(x, y) \in \mathbb{C}$ el elemento neutro para la suma se tiene que

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \quad , \quad \forall\ (a, b) \in \mathbb{C},$$

es decir:

$$x,y \in \mathbb{R} \quad / \quad a + x = a \quad , \quad b + y = b, \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$$

con lo cual $x = 0$, $y = 0$, es decir (5.1).

Elemento opuesto. Si se designa con (x, y) al opuesto del número complejo (a, b) se tiene que $(x, y) + (a,b) = (0 ,0)$, es decir:

$$x + a = 0 \quad , \quad y + b = 0,$$

con lo cual $x = -a$, $y = -b$, es decir (5.2).

Elemento inverso. Si se designa con (x,y) al inverso del número complejo $(a, b) \neq (0, 0)$ se tiene que $(x,y) \cdot (a,b) = (1,0)$, es decir:

$$\left|\begin{array}{l} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{array}\right.$$

que representa un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x,y cuya solución es única pues:

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$

Utilizando el Teorema de Cramer, la única solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

es decir (5.4) .

La demostración que el elemento neutro para el producto es el número complejo $(1,0) \in \mathbb{C}$ es muy similar a la realizada para la obtención del elemento inverso y por tanto queda como ejercicio, como asimismo todas las restantes propiedades para que ($\mathbb{C}$, + , x) sea un cuerpo conmutativo.

▲ Otras operaciones con números complejos

1) Diferencia.

$$(6) \qquad (a,b)-(c,d)=(a,b)+[-(c,d)]=(a,b)+(-c,-d)= \\ =(a-c,b-d) \quad , \quad \forall (a,b)\ ,\ (c,d)\in \mathbb{C}\ ;$$

2) División. Si (c,d) $\neq$ (0,0) entonces :

$$(7) \qquad \frac{(a,b)}{(c,d)}=(a,b)\,.\,(c,d)^{-1}=(a,b)\,.\left(\frac{c}{c^2+d^2},\frac{-d}{c^2+d^2}\right)= \\ =\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right),\quad \forall (a,b)\in\mathbb{C}$$

▲ Números complejos con segunda componente nula

Definición 4. Un número complejo tiene su segunda componente nula cuando es de la forma (x,0) con $x \in \mathbb{R}$.

Lema 2. Los números complejos con segunda componente nula verifican las siguientes propiedades ($\forall x,\ y \in \mathbb{R}$) :

1) (x,0) + (y,0) = (x+y,0) ; 2) (x,0) . (y,0) = (x.y ,0) ;

3) - (x,0) = (-x, 0) ; 4) $(x,0)^{-1}=\left(\frac{1}{x},0\right)$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$.

Demostración. Utilizando las definiciones de la suma y del producto de números complejos se obtiene:

a) (x,0) + (y, 0) = (x + y ,0 + 0) = (x + y ,0)
b) (x,0) · (y ,0) = (xy - 0 · 0 , x · 0 + y · 0) = (xy ,0)

Por otro lado, las propiedades 3) y 4) se deducen de las expresiones generales del opuesto y del inverso de un número complejo.

Observación 1. Se pueden identificar los números complejos con segunda componente nula, con los números reales, es decir que se notará :

$$(8) \qquad x = (x,0)\ ,\quad \forall x \in \mathbb{R}$$

▲ Potencia entera de un número complejo

Definición 5. Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces se definen:

$$(9) \qquad \begin{cases} z^n = z.z.....z \text{ (n veces)} & \text{si } n > 0, \\ z^n = 1 & \text{si } n = 0, \\ z^n = \dfrac{1}{z^{-n}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Proposición 3. Se tienen las siguientes propiedades:

$$(10) \qquad 1)\ z^n . z^m = z^{n+m} \quad , \quad \forall\, n,m \in \mathbb{Z} \ ; \qquad 2)\ \left(z^n\right)^m = z^{n\,m} \ , \quad \forall\, n,m \in \mathbb{Z}$$

8.3. FORMA BINÓMICA DEL NÚMERO COMPLEJO

▲ Unidad imaginaria

Teniendo en cuenta la suma y el producto de números complejos se deducen las siguientes igualdades:

$$(11) \qquad (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$$

donde

$$(12) \qquad a = (a,0)\ ,\ b = (b,0)\ ,\ i = (0,1)$$

Definición 6. Se llama **unidad imaginaria** y se lo nota por i al número complejo $i = (0,1)$

Definición 7. Se llama **forma binómica** del número complejo (a,b) a la expresión $a + bi$ con $a,b \in \mathbb{R}$

Definición 8. Se llama **número imaginario** a todo complejo con segunda componente no nula. Se llama **número imaginario puro** a todo complejo con primer componente nula.

▲ Potencias enteras de la unidad imaginaria

Se tienen las siguientes expresiones:

$$i^0 = 1 \quad ; \quad i^1 = i \quad ; \quad i^2 = (0,1)\,.\,(0,1) = (-1,0) = -1 \ ;$$

$$i^3 = i^2 . i = -\,i \quad ; \quad i^4 = i^2 . i^2 = (-1)\,.\,(-1) = 1 \quad ; \quad i^5 = i^4 \,.\, i = 1\,.\,i = i \ ;$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i}\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i \quad ; \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \ ;$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1}{-i}\frac{i}{i} = i \quad ; \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

Lema 4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la potencia n-ésima de la unidad imaginaria i está dada por

$$(13) \qquad i^n = i^r ,$$

donde r es el resto de la división de n por 4.

Demostración. Sea c el cociente y r el resto de la división de n por 4, es decir $n = 4c + r$. Por lo tanto:

$$i^n = i^{4c+r} = \left(i^4\right)^c . i^r = 1^c . i^r = 1 . i^r = i^r .$$

Observación 2. Si se tiene en cuenta que $i^2 = -1$, entonces se le puede dar sentido a la expresión $\sqrt{-1}$, más adelante se verá la raíz n-ésima de un número complejo.

Observación 3. El cuerpo de los números complejos no es ordenable, es decir, no existe un orden entre sus elementos como los números reales. A continuación se verá la imposibilidad de tal ordenación.

Para ello, se supone que es ordenable y por lo tanto que existe un conjunto $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ de manera que cumpla :

1) $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;

2) $z_1 \,.\, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, sólo una de las tres posibilidades es cierta, a saber:

$z \in \mathbb{C}^*$ ó $-z \in \mathbb{C}^*$ ó $z = 0$ (elemento neutro para la operación +)

Se verá que al número complejo $i = (0,1) \in \mathbb{C}$ no se le puede aplicar la parte 3). Se tienen las siguientes conclusiones:

(a) $i = (0,1) \neq (0,0)$;

(b) Si $i \in \mathbb{C}^*$ entonces, $-1 = i^2 = i \,.\, i \in \mathbb{C}^* \Rightarrow 1 = (-1) \,.\, (-1) \in \mathbb{C}^*$ lo cual es una contradicción pues $1 \in \mathbb{C}^*$ y $-1 \in \mathbb{C}^*$

(c) Si $-i \in \mathbb{C}^*$ entonces $-1 = (-i)^2 = (-i) \,.\, (-i) \in \mathbb{C}^*$ y la demostración concluye como en la parte (b).

Observación 4. El cuerpo de los números reales es ordenable, pues $\mathbb{R}^+$ es el conjunto que verifica trivialmente las tres propiedades 1) - 3), de la Observación 3.

8.4. CONJUGACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

▲ Conjugado y norma de un número complejo

Definición 9. Si $z = (a,b) = a + bi \in \mathbb{C}$ entonces se define el **número complejo conjugado** $\bar{z}$ de la siguiente manera :

$$\bar{z} = (a,-b) = a - bi \tag{14}$$

Definición 10. Se llama **norma de un número complejo** al producto del número complejo por su conjugado, es decir:

$$N(z) = z \cdot \bar{z} \tag{15}$$

con lo cual, si $z = a + bi$ entonces se tiene que :

$$N(z) = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Observación 5. El inverso del número complejo $z = a + bi$ viene dado por la siguiente expresión :

(16) $$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{N(z)}$$

Observación 6. La división de dos números complejos puede expresarse de la siguiente manera :

(17) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{N(z_2)},$$

lo cual permite realizar la división a través de una multiplicación evitando el cálculo del inverso del denominador.

Lema 5. La conjugación de números complejos verifica las siguientes propiedades $(\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C})$:

(18)

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $\forall\, z_2 \neq 0$

Demostración. Sean $z_1 = (a,b) = a + i\,b \in \mathbb{C}$ y $z_2 = (c,d) = c + d\,i \in \mathbb{C}$. Entonces :

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a,b) + (c,d)} = \overline{(a + c, b + d)} = (a + c, -b - d) = (a, -b) + (c, -d) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a,b) \cdot (c,d)} = \overline{(ac - bd, ad + bc)} = (ac - bd, -ad - bc) = (a, -b) \cdot (c, -d) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Por otro lado, las propiedades 2) y 4) surgen de las propiedades 1) y 3), respectivamente.

▲ Módulo de un número complejo

Definición 11. Se llama **módulo del número complejo** $z = (a,b) = a + b\,i$ al número real positivo o nulo dado por:

(19) $$|\,z\,| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Lema 6. El módulo de los números complejos verifica las mismas propiedades del valor absoluto de números reales.

8.5. OPERACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Utilizando las reglas usuales en Álgebra y teniendo en cuenta las definiciones anteriores, las diversas operaciones entre números complejos, dados en forma binómica, se pueden efectuar del siguiente modo:

Suma. $(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a+c) + (b+d)\,i$;
Producto. $(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$;
Diferencia. $(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i$;

Cociente. $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{a+bi}{c+di} \cdot \dfrac{c-di}{c-di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \dfrac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \dfrac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\, i$

Observación 7. Operar con el número complejo (a, b) como un par ordenado de números reales es lo mismo que operar con la forma binómica a + b i, teniendo en cuenta las potencias enteras de la unidad imaginaria.

Ejemplos.

(i) $(3 + 2i) \cdot (-2 + i) = -6 + 3i - 4i + 2i^2 = -6 - i - 2 = -8 - i$;

(ii) $\dfrac{2+3i}{-1+i} = \dfrac{2+3i}{-1+i} \cdot \dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{1-5i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\, i$

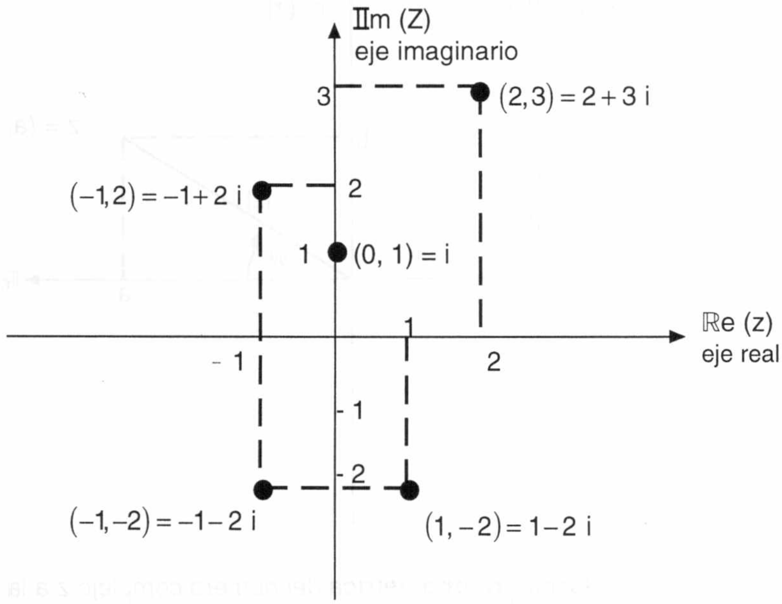
8.6. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

▲ Plano complejo

Para representar geométricamente los números complejos se hace corresponder a cada número complejo (a,b) el punto del plano cuyas coordenadas, referidas a un sistema de ejes cartesianos ortogonales son x = a , y = b. De este modo se establece una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos del plano.

Definición 12. Se llama **plano complejo** al plano en el cual se representan los números complejos. Se llama **eje real** al eje x y **eje imaginario** al eje y, ver Figura 8.1.

FIGURA 8.1



▲ Argumento de un número complejo

Definición 13. El **argumento de un número complejo z** es el ángulo que forma la semirrecta 0z (que contiene al punto de origen 0 y al punto representativo del número complejo z) con el semieje positivo del eje real. Se nota arg (z) = w y se tiene que $0 \le w < 2\pi$, ver Figura 8.2.

Observación 8. También se puede considerar que $-\pi < w \leq \pi$, o cualquier intervalo de longitud 2π.

Definición 14. Se llama **forma polar** del número complejo z a la expresión dada por $z = (|z|)_w$ donde |z| es el módulo de z y w es el argumento de z.

Observación 9. La forma polar de un número complejo z es equivalente a las coordenadas polares |z|, w del correspondiente punto z en el plano complejo.

Ejemplos. $1 = (1)_0$, $-1 = (1)_\pi$, $i = (1)_{\frac{\pi}{2}}$,

$-i = (1)_{\frac{3}{2}\pi}$, $1 + i = (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}}$, $1 - i = (\sqrt{2})_{-\frac{\pi}{4}}$

▲ Forma trigonométrica de un número complejo

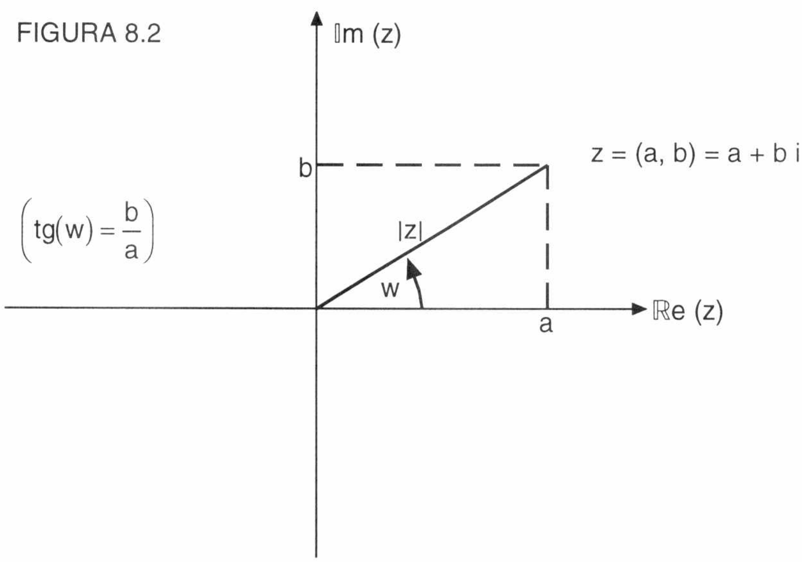
De la figura 8.2, por intermedio de la trigonometría y su aplicación a la resolución de triángulos rectángulos, se deduce que :

$$a = |z| \cos w \quad , \quad b = |z| \operatorname{sen} w$$

con lo cual el número complejo z se expresa de la siguiente manera :

$$z = a + bi = |z| \cos w + |z| \operatorname{sen} w \, i = |z| (\cos w + i \operatorname{sen} w) \,. \tag{20}$$

FIGURA 8.2



$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ w = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases} \qquad \left(\operatorname{tg}(w) = \dfrac{b}{a}\right)$$

$$\begin{cases} a = |z| \cos w \\ b = |z| \operatorname{sen} w \end{cases}$$

Definición 15. Se llama **forma trigonométrica** del número complejo z a la expresión :

$$|z| (\cos w + i \operatorname{sen} w) \tag{21}$$

Observación 10. Las formas polar y trigonométrica de un número complejo z son muy similares entre sí, la forma polar es más concisa; en cambio la forma trigonométrica da la forma binómica para poder operar con los números complejos.

A continuación se verá el pasaje de una forma a la otra, en forma análoga a lo hecho entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares de un punto del plano cartesiano.

▲ Pasaje de la forma binómica a la trigonométrica

Dada la forma binómica del número complejo $z = a + bi$, su correspondiente forma polar o trigonométrica se obtiene a través de la expresión :

$$(22) \qquad z = |z|_w = |z|(\cos w + i \operatorname{sen} w)$$

donde

$$(23) \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \qquad w = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \left(\text{ó } \operatorname{tg} w = \frac{b}{a}\right)$$

▲ Pasaje de la forma trigonométrica a la forma binómica

Dada la forma polar del número complejo $z = |z|_w$, su correspondiente forma binómica se obtiene a través de la expresión :

$$z = a + bi$$

donde,

$$(24) \qquad a = |z| \cos w \quad , \quad b = |z| \operatorname{sen} w$$

8.7. OPERACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA

▲ Operaciones en forma polar

Sean dos números complejos dados en forma polar por las siguientes expresiones:

$$z_1 = |z_1|_{w_1} = |z_1|(\cos w_1 + i\operatorname{sen} w_1) \quad , \qquad z_2 = |z_2|_{w_2} = |z_2|(\cos w_2 + i\operatorname{sen} w_2)$$

entonces,

$$z_1 \,.\, z_2 = |z_1|\,(\cos w_1 + i\operatorname{sen} w_1)\,|z_2|\,(\cos w_2 + i\operatorname{sen} w_2) =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,\left[(\cos w_1 \cos w_2 - \operatorname{sen} w_1 \operatorname{sen} w_2) + i\,(\cos w_1 \operatorname{sen} w_2 + \operatorname{sen} w_1 \cos w_2)\right] =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\left[\cos(w_1 + w_2) + i \operatorname{sen}(w_1 + w_2)\right] = \left(|z_1|\,|z_2|\right)_{w_1 + w_2}$$

es decir, el producto de dos complejos tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

En forma análoga, a lo anterior, se deducen las siguientes propiedades :

Proposición 7. Si $z = |z|_w$, $z_1 = |z_1|_{w_1}$, $z_2 = |z_2|_{w_2}$ son números complejos dados en su forma polar, entonces se tienen las siguientes expresiones :

(25)

1) $z_1 \cdot z_2 = (|z_1||z_2|)_{w_1+w_2}$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\right)_{w_1-w_2}$;

3) $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = \left(\dfrac{1}{|z|}\right)_{-w}$; 4) $\bar{z} = (|z|)_{-w}$

▲ **Fórmula de De Moivre**

Teniendo en cuenta que por reiteración de la fórmula del producto de complejos en forma polar se tiene

(26) $$z^n = (|z|_w)^n = (|z|^n)_{n\,w}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

se deduce, para $z = 1_w = \cos\, w + i\, \text{sen}\, w$, la siguiente expresión :

(27) $$(\cos w + i\ \text{sen}\ w)^n = \cos(nw) + i\ \text{sen}(nw), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

conocida como la **fórmula de De Moivre**.

Observación 11. La fórmula de De Moivre permite obtener cos(nx) y sen (nx) en función de cos x, sen x, n.

Ejemplos.

(i) De las igualdades:

$$\cos 2x + i\text{sen}\ 2x = (\cos\ x + i\text{sen}\ x)^2 = \cos^2 x + 2\ i \cos x\ \text{sen}\ x - \text{sen}^2 x =$$
$$= (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + i(2\cos\ x\ \text{sen}\ x) \ ,$$

se deduce, por igualdad de los números complejos, que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \quad , \quad \text{sen}\ 2x = 2\ \cos x\ \text{sen}\ x \quad ;$$

(ii) De las expresiones:

$$\cos\ 3x + i\text{sen}\ 3x = (\cos\ x + i\text{sen}\ x)^3 = \cos^3 x + 3\ i\ \cos^2 x\ \ \text{sen}\ x - 3\ \cos x\ \ \text{sen}^2 x - i\text{sen}^3 x =$$
$$= (\cos^3 x - 3\ \cos x\ \ \text{sen}^2 x) + i\ (3\ \cos^2 x\ \ \text{sen}\ x - \text{sen}^3 x) \ ,$$

se deduce, igualando las respectivas partes reales y partes imaginarias, que

$$\cos\ 3x = \cos^3 x - 3\ \cos\ x\ \text{sen}^2 x \quad , \quad \text{sen}\ 3x = 3\ \cos^2\ x\ \text{sen}\ x - \text{sen}^3 x$$

▲ Raíces de un número complejo

Definición 16. Dado $n \in \mathbb{N}$, se dice que z es la **raíz n-ésima** del número complejo A si y sólo si $z^n = A$. Se nota por $z = \sqrt[n]{A}$. En particular, si n = 2 se dice que z es la **raíz cuadrada** de A y si n = 3 se dice que z es la **raíz cúbica** de A.

Teorema 8. Si A es el complejo que tiene por forma polar la dada por ρ_ϕ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existen n raíces n-ésima z de A, las cuales están dadas por las siguientes expresiones :

$$z = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)_{\frac{\phi+2k\pi}{n}} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, n-1 \tag{28}$$

Demostración. Si $z = (|z|)_w$ es la raíz n-ésima de $A = \rho_\phi$ entonces se tiene que:

$$A = \rho_\phi = z^n = \left(|z|^n\right)_{n\,w}$$

de lo cual, por igualdad de módulos y congruencia de argumentos, se deduce que

$$\rho = |z|^n \quad , \quad \phi + 2\,k\,\pi = n\ w \qquad (k = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, n-1)$$

Cabe resaltar que si k = n entonces el ángulo $\phi + 2n\,\pi$ es congruente con ϕ y así sucesivamente para $k \geq n$. Por lo tanto, se tiene que:

$$|z| = \sqrt[n]{\rho} \quad , \quad w = \frac{\phi + 2\,k\,\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + 2\frac{k}{n}\pi$$

obteniéndose de este modo la expresión (28).

Ahora, sólo basta verificar que (28) es solución de $z^n = A$, pues:

$$z^n = \left(\left(\sqrt[n]{\rho}\right)_{\frac{\phi+2\,k\,\pi}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n_{n.\frac{\phi+2\,k\pi}{n}} = (\rho)_{\phi+2\,k\pi} = \rho_\phi = A$$

pues los ángulos ϕ y $\phi + 2\,k\,\pi$ (k = 0,1...., n -1) son congruentes entre sí.

Observación 12. Los n números complejos raíces del número complejo A = ρ_ϕ tienen todos igual módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y sus argumentos están dados por :

$$(29) \qquad \frac{\phi}{n} \ , \quad \frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n} \ , \quad \frac{\phi}{n}+\frac{4\pi}{n} \ , \quad ..... \ , \quad \frac{\phi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

Gráficamente están representados como los vértices de un polígono regular de n lados, cuando n ≥ 3, y cuyos argumentos consecutivos difieren entre sí un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$. Por lo tanto, para representar las n raíces se toma la circunferencia de centro en el punto origen y de radio $\sqrt[n]{\rho}$; se considera primero el ángulo $\frac{\phi}{n}$ (para k = 0) y luego sumándole el ángulo $\frac{2\pi}{n}$ se van obteniendo las restantes n -1 raíces.

Ejemplos.

(i) Los dos números complejos $\sqrt[2]{1}$ están dados por $(1 = 1_0)$:

$$1_0 \ , \quad 1_\pi$$

que son obviamente los números reales 1,-1 pues $1^2 = 1$ y $(-1)^2 = 1$;

(ii) los dos números complejos $\sqrt[2]{-1}$ están dados por (- 1 = 1_π):

$$1_{\frac{\pi}{2}} = i \ , \quad 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i$$

Además se verifica que $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$;

(iii) Los tres números complejos $\sqrt[3]{1}$ están dados por, ver Figura 8.3:

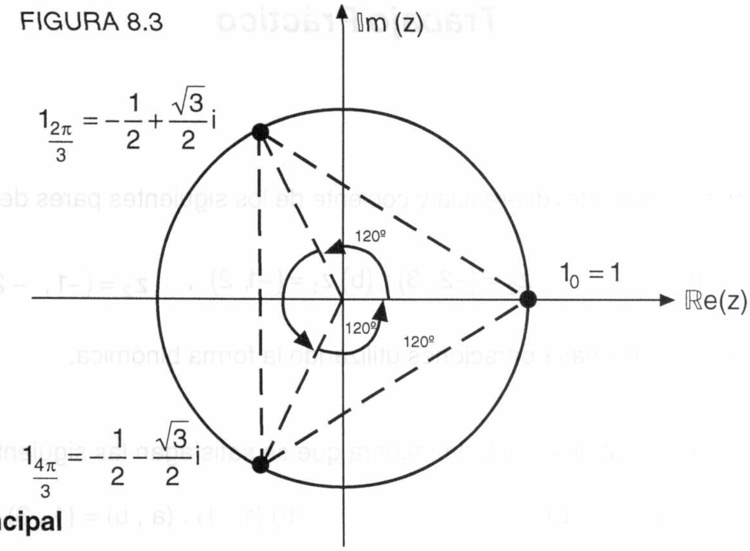
$$1_0 = 1 \ , \quad 1_{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ , \quad 1_{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \ .$$

Además se verifica que

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^3 = \frac{1}{8}\left(-1+\ 3\ \sqrt{3}\,i+9-3\sqrt{3}\,i\right) = \frac{8}{8} = 1 \ ;$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3 = -\frac{1}{8}\left(1+\ 3\ \sqrt{3}\,i-9-3\sqrt{3}\,i\right) = \frac{-8}{-8} = 1$$

FIGURA 8.3



▲ Raíz cuadrada principal

Observación 13. Todo número real negativo $-A$ (con $A > 0$) tiene dos raíces cuadradas que son los números imaginarios puros $i\sqrt{A}$ y $-i\sqrt{A}$, pues :

$$\left(i\sqrt{A}\right)^2 = \left(i\sqrt{A}\right).\left(i\sqrt{A}\right) = i^2\left(\sqrt{A}\right)^2 = -A \ ;$$

$$\left(-i\sqrt{A}\right)^2 = \left(-i\sqrt{A}\right).\left(-i\sqrt{A}\right) = i^2\left(\sqrt{A}\right)^2 = -A \ .$$

Ejemplos.

(i) Las raíces cuadradas de -16 son $4i$ y $-4i$;
(ii) Las raíces cuadradas de -36 son $6i$ y $-6i$

Definición 17. Se llama **raíz cuadrada principal** de $-A$ (con $A > 0$) a la raíz $i\sqrt{A}$ y se nota $\sqrt{-A} = i\sqrt{A}$. La otra raíz viene dada por $-i\sqrt{A}$ y se nota $-\sqrt{-A} = i\sqrt{A}$.

Ejemplo. Las raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 + 4x + 13 = 0$ están dadas por ($\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$):

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

con lo cual $x_1 = -2 + 3i$ y $x_2 = -2 - 3i$

Trabajo Práctico

1) Calcule la suma, producto, diferencia y cociente de los siguientes pares de números complejos :

(a) $z_1 = (2,\ 1)$, $z_2 = (-2,\ 3)$; (b) $z_1 = (-1,\ 2)$, $z_2 = (-1,\ -2)$

Calcule, además, las mismas operaciones utilizando la forma binómica.

2) Calcule los números reales a y b de manera que se satisfagan las siguientes ecuaciones :

(a) (2, a) . (1 , -1) = (1 , b) ; (b) (1 , 1) . (a , b) = (1 , 3) ;

(c) (a + 1 , 2 a - b) = (4 , 5) ; (d) (-a , b) = (b , a) + (3 , a)

3) Calcule las potencias 155 , 7, 9, 19, 23, -19, -70 de la unidad imaginaria i = (0 , 1).

4) Sean los siguientes números complejos :

$$z_1 = (-1\ ,\ 1)\ , \qquad z_2 = (1\ ,\ 2)\ , \qquad z_3 = (4\ ,\ -1)$$

Halle la forma binómica de los tres números complejos dados y realice las siguientes operaciones :

(a) $\dfrac{z_1\,\overline{z}_2 - (z_3)^2}{z_3}$ (b) $\dfrac{(-\overline{z}_1)\,(z_2)^2 + i\,z_3}{\overline{z}_1 + \overline{z}_3}$,

(c) $\dfrac{(z_1 - z_2)^2\,\overline{z}_3}{z_3}$.

5) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con incógnitas z_1 y z_2 :

(a) $\begin{vmatrix} z_1 + i\,z_2 = 1\ , \\ i\,z_1 + z_2 = 1 + i\ ; \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} (1+i)z_1 + (3-i)z_2 = 5\ , \\ (3+i)z_1 - (1-i)z_2 = 0\ ; \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} -\,z_1 + i\,z_2 = -1\ , \\ z_1 + i\,z_2 = 1 - i\ ; \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} z_1 + (1+i)z_2 = 1\ , \\ -\,i\,z_1 + 2\,i\,z_2 = 1 + i \end{vmatrix}$

6) Sean los siguientes números complejos :

$$z_1 = \sqrt{3} - i \ , \qquad z_2 = -\sqrt{3} + i \ , \qquad z_3 = -\,4\,i \ , \qquad z_4 = 1 \ .$$

(a) Represéntelos gráficamente en el plano complejo ;

(b) Halle sus respectivos módulos y argumentos ;

(c) Escríbalos en la forma polar y trigonométrica ;

(d) Represente gráficamente al número complejo opuesto, al conjugado y al opuesto del conjugado de cada uno de los cuatro números complejos dados .

7) Sean los siguientes números complejos :

$$z_1 = (2)_{120^{\circ}} \ , \qquad z_2 = (3)_{45^{\circ}} \ , \qquad z_3 = (4)_{300^{\circ}} \ ,$$

(a) Halle la forma binómica de cada uno de ellos ;
(b) Calcule el producto y el cociente entre dos cualesquiera de ellos utilizando la forma polar y la forma binómica.

8) Describa geométricamente los conjuntos de números complejos definidos de la siguiente manera:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathbb{R}\mathrm{e}(z) > 0\}$; (b) $\{z \in \mathbb{C} \ / -1 \leq \mathbb{R}\mathrm{e}(z) \leq 2\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} \ / -1 \leq \mathbb{R}\mathrm{e}(z) \leq 2 \wedge |z| = 1\}$;

(d) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2\}$;

(e) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < \mathbb{R}\mathrm{e}(z) < 1 \wedge 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$; (f) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \geq 1\}$;

(g) $\left\{z \in \mathbb{C} \ / \ |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\right\}$ (considere $-\pi < \arg(z) \leq \pi$); (h) $\left\{z \in \mathbb{C} \ / \ \frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$;

(i) $\left\{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 4 \ , \ \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}\right\}$

9) Escriba el número complejo $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ en la forma polar y calcule z^6 en dicha forma. Pase el resultado a la forma binómica. Verifique el resultado hallado realizando la operación directamente en forma binómica y aplicando el binomio de Newton.

10) Calcule las siguientes raíces de números complejos y represente gráficamente los complejos obtenidos:

(a) $\sqrt[2]{i}$; (b) $\sqrt[3]{i}$; (c) $\sqrt[3]{-1+i}$;

(d) $\sqrt[3]{1}$; (e) $\sqrt[4]{1}$; (f) $\sqrt[3]{-i}$

Respuestas Trabajo Práctico

1) (a) $z_1+z_2=4\,i$, $z_1-z_2=4-2\,i$, $z_1\,.\,z_2=-7+4\,i$, $z_1:z_2=\frac{1}{13}-\frac{8}{13}i$;

(b) $z_1+z_2=-2$, $z_1-z_2=4\,i$, $z_1\,.\,z_2=5$, $z_1:z_2=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

2) (a) $a=-1$, $b=-3$; (b) $a=2$, $b=1$;

(c) $a=3$, $b=1$; (d) $a=-1$, $b=-2$.

3) $i^{155}=-i$; $i^{7}=-i$; $i^{9}=i$; $i^{19}=-i$; $i^{23}=-i$; $i^{-19}=i$; $i^{-70}=-1$

4) (a) $-\frac{67}{17}+\frac{30}{17}i$; (b) $-2+\frac{5}{3}i$; (c) $\frac{13}{17}+\frac{84}{17}i$

5) (a) $z_1=1-\frac{i}{2}$, $z_2=\frac{1}{2}$; (b) $z_1=\frac{5}{12}-\frac{5}{12}i$, $z_2=\frac{5}{4}+\frac{5}{12}i$;

(c) $z_1=1-\frac{i}{2}$, $z_2=-\frac{1}{2}$; (d) $z_1=0$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

6) (b) $|z_1|=2$, $|z_2|=2$, $|z_3|=4$, $|z_4|=1$;

$\arg z_1=-\frac{\pi}{6}$, $\arg z_2=150^{\circ}$, $\arg z_3=-\frac{\pi}{2}$, $\arg z_4=0$;

(c) $z_1=2_{-\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; $z_2=2_{150^{\circ}}=2(\cos(150^{\circ})+i\,\text{sen}(150^{\circ}))$

$z_3=4_{-\frac{\pi}{2}}=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; $z_4=1_0=1(\cos(0^{\circ})+i\,\text{sen}(0^{\circ}))$

(d) $-z_1=-\sqrt{3}+i$, $\bar{z}_1=\sqrt{3}+i$, $-\bar{z}_1=-\sqrt{3}-i$;

$-z_2=\sqrt{3}-i$, $\bar{z}_2=-\sqrt{3}+i$, $-\bar{z}_2=-\sqrt{3}+i$;

$-z_3=4\,i$, $\bar{z}_3=4\,i$, $-\bar{z}_3=-4\,i$;

$-z_4=-1$, $\bar{z}_4=1$, $-\bar{z}_4=-1$

7) (a) $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,i$, $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$;

(b) $z_1 \,.\, z_3 = 4 + 4\sqrt{3}\,i$, $z_1 : z_3 = \frac{-1}{2}$, $z_1 : z_3 = 8_{60^\circ}$, $z_1 : z_3 = \left(\frac{1}{2}\right)_{-180^\circ}$

9) $2_{\frac{2\pi}{3}}$, $z^6 = 64_0$, $z^6 = \left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)^6 = \sum_{k=o}^{6} \binom{6}{k} (-1)^{6-k} \left(\sqrt{3}\,i\right)^k$

10) (a) $1_{\frac{\pi}{4}}$, $1_{\frac{5}{4}\pi}$;

(b) $1_{\frac{\pi}{6}}$, $1_{\frac{5}{6}\pi}$, $1_{\frac{3}{2}\pi}$;

(c) $\sqrt[6]{2}_{\frac{\pi}{4}}$. $\sqrt[6]{2}_{\frac{11}{12}\pi}$. $\sqrt[6]{2}_{\frac{19}{12}\pi}$;

(d) 1_0 , $1_{\frac{2}{3}\pi}$, $1_{\frac{4}{3}\pi}$;

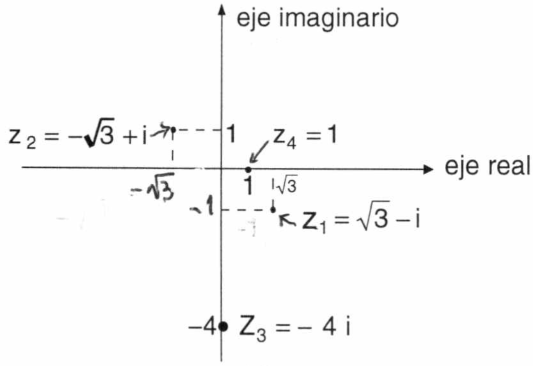
(e) 1_0 , $1_{\frac{\pi}{2}}$, 1_{π} , $1_{\frac{3}{2}\pi}$;

(f) $1_{-\frac{\pi}{6}}$, $1_{\frac{\pi}{2}}$, $1_{\frac{7}{6}\pi}$.

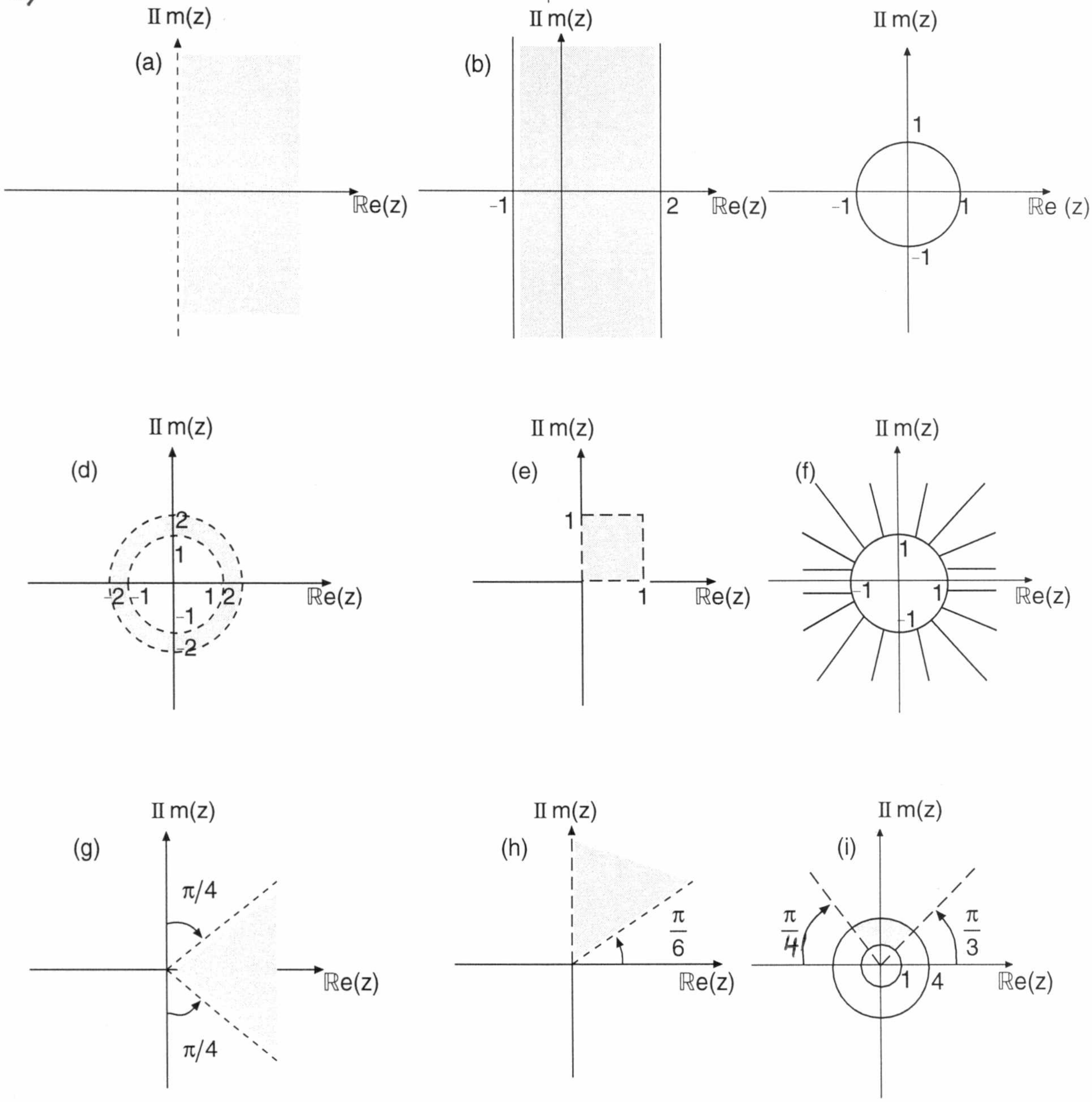
11) (b) $1_{\frac{\pi}{3}}$, $1_{\frac{4}{3}\pi}$, $1_{-\frac{\pi}{3}}$, $1_{\frac{2}{3}\pi}$;

(c) $\left(\sqrt[3]{2}\right)_0$, $\sqrt[3]{2}_{\frac{2}{3}\pi}$, $\sqrt[3]{2}_{\frac{4\pi}{3}}$, $1_{\frac{-\pi}{3}}$, $1_{\frac{\pi}{3}}$, 1_{π}

6a).


eje imaginario
eje real
$z_2 = -\sqrt{3} + i$
$z_4 = 1$
$Z_1 = \sqrt{3} - i$
$Z_3 = -4i$
-4

8)


(a)
(b)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
II m(z)
ℝe(z)
π/4
π/6
π/3

CAPÍTULO 9

POLINOMIOS

9.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 2 se han estudiado las expresiones algebraicas y en particular los polinomios: las operaciones, divisibilidad, cero o raíz de un polinomio, el Teorema del Resto y la Regla de Ruffini, la ecuación de segundo grado y la descomposición factorial del polinomio de segundo grado en factores de la forma:

$$(1) \qquad ax^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

donde x_1 y x_2 son las dos raíces de la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, dados por:

$$(2) \qquad x_1 = \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$$

Por otro lado, el polinomio de primer grado $a\,x + b$ tiene la descomposición factorial elemental siguiente:

$$(3) \qquad a\,x + b = a\,(x - x_0) \ ,$$

donde $x_0 = -\frac{b}{a}$ es la raíz o solución de la ecuación $a\,x + b = 0$

A continuación se verá, como tema central, el cálculo de los ceros o raíces y la descomposición factorial de un polinomio de grado n ≥ 3 (para los casos n = 1 y n = 2 el resultado es dado por (3) y (1), respectivamente). Previamente se dará un resumen de las propiedades básicas, algunas ya vistas en el Capítulo 2, que serán de gran utilidad en todo lo que sigue.

9.2. ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS

Sea x una variable para la cual están definidas sus potencias, los casos de interés resultan cuando $x \in \mathbb{R}$ ó $x \in \mathbb{C}$:

$$(4) \qquad x^0 = 1, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = x\,x, \qquad x^3 = x\,x\,x, \ \ldots$$

Definición 1. 1) Se llama **polinomio complejo (real)** en x de coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a la expresión siguiente:

$$(5) \qquad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ $(a_i \in \mathbb{R})$ son los **coeficientes**, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n$, y x es la **letra ordenatriz o variable.**

2) Se dice que el **grado del polinomio P**, se nota gr(P) es m si y sólo si m es el mayor exponente de la variable x que aparece en la expresión con coeficiente no nulo, es decir :

$$(6) \qquad gr(P) = m \Leftrightarrow a_m \neq 0 \;\wedge\; a_i = 0, \;\forall\, i > m$$

3) Se denomina **valor del polinomio P en** α, se indica por $P(\alpha)$ cuando en la expresión de P se sustituye el símbolo x por un número complejo α, por tanto x^i por α^i, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n$ y se obtiene el número complejo :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, \alpha^i \in C$$

4) Un número complejo $a \in C$ es un **cero o raíz** del polinomio P = P(x) cuando P(a) = 0.

Observación 1. 1) De acuerdo a 3) de la Definición 1, cada polinomio puede interpretarse como una función, llamada **función polinómica.**

$$(7) \qquad P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;/\; P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$$

2) Si P(x) es un **polinomio real**, es decir, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n$, entonces P puede pensarse como una función real $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir $P(x) \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Definición 2. Se nota con $\mathbb{C}[x]$ $(\mathbb{R}[x])$ al conjunto de todos los polinomios en la variable x con coeficientes complejos (reales).

Ejemplos.

1) Sea $P(x) = ix^2 + 2x - 1$. Entonces se puede definir $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;/\; P(x) = ix^2 + 2x - 1, \;\forall\, x \in \mathbb{C}$.

A saber: $P(1) = i + 2 - 1 = i + 1$;

$P(i) = i\, i^2 + 2\, i - 1 = -i + 2\, i - 1 = -1 + i$

2) Sea $P(x) = x^2 + 2x - 1$. Entonces se puede definir $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $P(x) = x^2 + 2x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
A saber: $P(1) = 1 - 2 - 1 = 2$

También se podría definir $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ / $P(x) = x^2 + 2x - 1$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

A saber: $P(i) = i^2 + 2i - 1 = -2 + 2i$.

Definición 3. Sean los polinomios $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, donde $a_n \neq 0$ con $a_i = 0$ $\forall i > n$, y $b_m \neq 0$ con $b_i = 0$ $\forall i > m$

1) Se dice que $P = Q \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} gr(P) = gr(Q) \text{ (es decir : } n = m) \\ a_i = b_i \ , \ \forall i = 0, \dots, n . \end{array} \right.$

2) Se define la suma P + Q y el producto P. Q de los polinomios P y Q de la siguiente manera :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)\, x^i , \tag{8}$$

$$(P\cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j\, x^{i+j} \tag{9}$$

3) Se define la división P : Q de los polinomios P y Q de la misma manera que fue realizada en el punto 2.2 del Capítulo 2.

Proposición 1. El grado de un polinomio tiene las siguientes propiedades :

$$(10) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{(i)} & gr(P + Q) \leq \operatorname{Max}\big(gr(P), gr(Q)\big) \\ \\ \text{(ii)} & gr(P.Q) = gr(P) + gr(Q) . \end{array} \right.$$

Demostración. Sean los polinomios $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, donde $a_n \neq 0$ con $a_i = 0$, $\forall i > n$, y $b_m \neq 0$ con $b_i = 0$ $\forall i > m$.

a) De la definición de suma se deduce que el exponente del término de mayor grado del polinomio P + Q es menor o igual a max(n, m). Más aún, cuando los grados de los polinomios P y Q son distintos (es decir $n \neq m$) entonces siempre vale el signo igual. En cambio, cuando los grados de los polinomios P y Q son iguales (es decir m = n) entonces:

- vale el signo igual si y sólo si $a_n + b_n \neq 0$,
- vale el signo menor si y sólo si $a_n + b_n = 0$

b) De la definición de producto se deduce que el término de mayor grado de P Q está dado por $a_n\, b_m\, x^{n+m}$ con coeficiente $a_n\, b_m \neq 0$ y por tanto se tiene (10ii).

Lema 2.1) El conjunto $\mathbb{C}[x]$ con la suma y el producto de polinomios es un **anillo con unidad**, es decir:

a) ($\mathbb{C}[x]$, +) es un grupo conmutativo en el cual el elemento neutro está definido por

(11) $$\mathbb{O}(x) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{C}$$

y el elemento opuesto de $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ está definido por

(12) $$(-P)(x) = -\,P(x) = \sum_{i=0}^{n} (-\,a_i) x^i.$$

b) El producto verifica la propiedad asociativa y conmutativa, es decir:

(i) $P \,.\, Q = Q \,.\, P$ (es decir : $P(x)\, Q(x) = Q(x)\, P(x), \ \forall\, x \in \mathbb{C}$)
(ii)) $(P \,.\, Q).\, S = P \,.\, (Q \,.\, P)$ (es decir : $(P(x)\, Q(x))\, S(x) = P(x)(Q(x)\, S(x)), \ \forall\, x \in \mathbb{C}$)

c) Se tiene la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de polinomios, es decir :

$P.\, (Q + S) = P \,.\, Q + P \,.\, S$ (es decir : $P(x)\, (Q(x) + S(x)) = P(x)\, Q(x) + P(x)\, S(x), \ \forall\, x \in \mathbb{C}$)

d) Existe el polinomio identidad $I \in \mathbb{C}[x]$, definido por:

(13) $$I(x) = 1 \ , \ \ \forall\, x \in \mathbb{C} \ ,$$

de manera que se tiene:

$$P \,.\, I = I \,.\, P = P \ , \ \forall\, P \in \mathbb{C}[x] \ \ (P(x)\, I(x) = I(x)\, P(x) = P(x) \ , \ \forall\, x \in \mathbb{C}, \ \forall\, P \in \mathbb{C}[x])$$

2) Además, se tiene la ley de anulación del producto:

(14) $$P \,.\, Q = 0 \Rightarrow P = 0 \ \text{ ó } \ Q = 0$$

es decir : $P(x)\, Q(x) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{C} \Rightarrow P(x) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{C}$ ó $Q(x) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{C}$.

Observación 2. No existe, en general, el inverso para la operación producto. ¿Cómo deben ser los polinomios P y Q para que se tenga P . Q = I, es decir P(x) . Q(x) = 1, $\forall\, x \in \mathbb{C}$?

Como caso particular de la división entre dos polinomios, ver Capítulo 2, se tiene el cociente de un polinomio por otro de primer grado de la forma (x - a) (con a $\in \mathbb{C}$). En este caso, los coeficientes del polinomio cociente C(x) y el resto R, que es un número real o complejo, pueden calcularse a través de la Regla de Ruffini (es imprescindible que el polinomio dividendo P(x) esté completo. Por otra parte, el Teorema del resto y sus consecuencias, ya vistas en el Capítulo 2, serán de gran utilidad en lo que sigue. En particular conviene resaltar el siguiente resultado, ver Capítulo 2:

Proposición 3. 1) La condición necesaria y suficiente para que un polinomio complejo $P = P(x) \in \mathbb{C}[x]$ sea divisible por el binomio (x - a) (con a $\in \mathbb{C}$) es que el resto de la división de P(x) por (x - a) sea R = 0. En este caso, se tiene que:

$$(15) \qquad P(x) = (x - a)\, C(x)\,.$$

2) Sea $P \in \mathbb{C}[x]$. Se tienen las siguientes equivalencias :

$$a \in \mathbb{C} \text{ es un cero o raíz del polinomio } P = P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ el resto R de la división de P por } (x - a) \text{ es } R = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (x - a)\, C(x)$$

donde C(x) es el polinomio cociente de la división de P(x) por el binomio (x - a)

9.3. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Para polinomios sobre el cuerpo de los números complejos vale el siguiente, su demostración no está al alcance del presente curso:

Teorema Fundamental del Álgebra. Todo polinomio de grado $n \geq 1$ admite una raíz compleja.

Teorema de Descomposición Factorial. Todo polinomio complejo $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ de grado $n \geq 1$ admite una única **descomposición factorial** de la forma :

$$(16) \qquad P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \ldots (x - \alpha_r)^{m_r}$$

donde a_n es el coeficiente del término de mayor grado en P y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son r raíces distintas de P que tienen **multiplicidades** (cantidad de veces que son raíces) $m_1, \ldots, m_r$, respectivamente, de manera que

$$(17) \qquad m_1 + \ldots + m_r = n$$

Demostración. Por el Teorema Fundamental del Álgebra el polinomio P(x) admite una raíz en $\mathbb{C}$ con lo cual P(x) es dvisible por $(x - \alpha_1)$. Sea m_1 el mayor entero de manera que P(x) sea divisible por $(x - \alpha_1)^{m_1}$. Tal entero m_1 existe y se tiene que $1 \leq m_1 \leq n$. Si se indica con $\mathbb{C}_1(x)$ al polinomio del cociente de la división de P(x) por $(x - \alpha_1)^{m_1}$, es decir:

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\ C_1(x)\ ,$$

que tiene por grado a $gr(C_1) = n - m_1 < n$

Si $gr(C_1) = 0$ se concluye el procedimiento. De lo contrario, repitiendo para $C_1(x)$ el mismo razonamiento realizado para P(x) se deduce que:

$$C_1(x) = (x-\alpha_2)^{m_2}\ C_2(x)\ ,$$

con $gr(C_2) = gr(C_1) - m_2 = n - (m_1 + m_2) < n$.

Si $gr(C_2) = 0$ se concluye el procedimiento, de lo contrario se lo repite inductivamente hasta obtener un polinomio C_r de grado gr $(C_r) = 0$ (es deir, C_r es una constante), en cuyo caso se tendrá:

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2} \dots (x-\alpha_r)^{m_r}\, C_r$$

con $n = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ por cuestión de grado. Si se efectúan los productos y se igualan los coeficientes del término de grado n se tiene que:

$$C_r = a_n \in \mathbb{C}$$

La unicidad de la descomposición se demuestra suponiendo que existe otra descomposición de la forma:

$$P(x) = \beta(x-\beta_1)^{n_1}(x-\beta_2)^{n_2} \dots (x-\beta_8)^{n_8}\ .$$

Igualando los términos de grado n en ambas expresiones de P, se deduce que $\beta = a_n$

Por otro lado, como α_i es raíz de P debe ser necesariamente igual a algún β_j , y por ser la multiplicdad m_i el mayor entero para el cual el polinomio P es divisible por $(x-\alpha_i)^{m_i}$ se tiene que m_i debe ser igual a n_j. Repitiendo el proceso se deduce la unicidad.

Corolario 4. Todo polinomio complejo de grado n tiene exactamente n raíces complejas, contadas cada una con su correspondiente multiplicidad.

Siguiendo una metodología análoga a la anterior, se deduce una propiedad que resultará muy útil desde el punto de vista práctico.

Lema 5. Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 2$. Si α es una raíz de P entonces las restantes raíces de P son las raíces del cociente que se obtiene al dividir P(x) por $(x - \alpha)$

Demostración. Si α es una raíz de P entonces $P(x) = (x - \alpha)\, C(x)$. Si β es una raíz de C, entonces $C(\beta) = 0$ y por ende $P(\beta) = (\beta - \alpha)\, C(\beta) = 0$, con lo cual β es también raíz de P

Como gr(C) = n - 1, C tiene n - 1 raíces y como faltan encontrar (n - 1) raíces de P, éstas son exactamente todas las raíces de C.

9.4. POLINOMIOS A COEFICIENTES REALES

Todo lo dicho anteriormente se aplica a polinomios con coeficientes reales, como caso particular. Se verán ahora algunas propiedades particulares que solamente son válidas para polinomios reales.

Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio a coeficientes reales (es decir $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall$ i = 0,... , n)

Teorema 6. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de P entonces $\overline{\alpha}$ es también raíz de P.

Demostración. Como $\overline{a}_i = a_i \in \mathbb{R}$, $\forall$ i = 0, ... ,n , y teniendo en cuenta las propiedades de la operación conjugación de números complejos, se deduce que :

$$P(\overline{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\overline{\alpha})^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i \overline{\alpha^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0 \quad , \tag{17}$$

con lo cual $\overline{\alpha}$ es raíz de P.

De esta importante propiedad se deducen algunas consecuencias :

Corolario 7.

1) El número de raíces complejas de un polinomio real es par ;
2) Todo polinomio real de grado impar admite al menos una raíz real ;
3) En la descomposición factorial de P los factores $(x - \alpha)\ (x - \overline{\alpha})$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ pueden reemplazarse por la forma :

$$x^2 + bx + c \ , \qquad \text{con } b,\ c \in \mathbb{R}$$

Demostración. 1) y 2) surgen inmediatamente del hecho que las raíces complejas vienen de a pares
3) Se tiene la igualdad

$$(x - \alpha)\ (x - \overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha} = x^2 - 2\ \mathbb{R}\text{e}(\alpha)x + |\ \alpha\ |^2 \ ,$$

con lo cual $b = -2\mathbb{R}\text{e}(\alpha) \in \mathbb{R}$, $c = |\ \alpha\ |^2 \in \mathbb{R}$

9.5. EL CÁLCULO DE RAÍCES

Sólo se desarrollarán algunos métodos simples que permiten realizar cálculos para casos particulares. Se conoce que para polinomios de grado 1 y 2 existen fórmulas que permiten calcular sus respectivas raíces. También existen fórmulas con radicales que permiten calcular las raíces de los polinomios de grado 3 y 4, las cuales no son tan simples como para los grados menores 1 y 2 y, por tanto, no se desarrollarán en este curso. Por otra parte, se debe resaltar que todo polinomio de grado mayor o igual a 5 no es resoluble por radicales, es decir, no existen fórmulas para el cálculo de sus raíces.

El problema se complica enormemente cuando hay raíces complejas y por supuesto si los coeficientes son además complejos. Por tanto, se consideran solamente los polinomios a coeficientes reales.

▲ Raíces Racionales de Polinomios a Coeficientes Racionales

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio real de grado n a coeficientes racionales:

$$a_i = \frac{p_i}{q_i}, \ \forall\ i = 0, 1, \ldots, n$$

Si se define:

$$\delta = \text{mcm}(q_0, q_1, \ldots, q_n)$$

entonces el polinomio P puede expresarse de la siguiente manera :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i}{q_i} x^i = \frac{1}{\delta} T(x)$$

donde el polinomio T(x) que viene dado por :

$$T(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i \ , \quad \text{con } b_i = p_i \frac{\delta}{q_i} \in \mathbb{Z} \ , \ \forall\ i = 0, 1, \ldots, n$$

resulta ser un polinomio a coeficientes enteros b_i, $\forall\ i = 0, 1, \ldots, n$. Con lo cual, para el estudio de las raíces, se puede restringir el estudio a polinomios reales a coeficientes enteros pues las raíces de P y T son iguales.

Se tiene el siguiente teorema que da condiciones necesarias para que un número racional sea raíz de un polinomio real a coeficientes enteros:

Teorema de Gauss. Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio real a coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall\ i = 0, 1, \ldots, n$. Si $\frac{p}{q}$ (p y q enteros y primos entre sí, con $q \neq 0$) es raíz de P(x) entonces :

(18)
- (i) a_0 es múltiplo de p ;
- (ii) a_n es múltiplo de q

Demostración. Si $\frac{p}{q}$ es raíz de P(x) entonces $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, es decir:

$$(19) \qquad a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

y por consiguiente:

$$(20) \qquad a_n\, p^n + a_{n-1}\, p^{n-1}\, q + \ldots + a_1\, p\, q^{n-1} + a_0\, q^n = 0$$

a) Si $p = 0$ en (20) entonces $a_0\, q^n = 0$, es decir, $a_0 = 0$, y por ende la propiedad es válida. Si $p \neq 0$, de (20), se deduce que :

$$-\,a_0\, q^n = a_n\, p^n + a_{n-1}\, p^{n-1}\, q + \ldots + a_1\, pq^{n-1} = p\left[a_n\, p^{n-1} + a_{n-1}\, p^{n-2}\, q + \ldots + a_1\, q^{n-1}\right],$$

es decir,

$$(21) \qquad \frac{-\,a_0\, q^n}{p} = a_n\, p^{n-1} + a_{n-1}\, p^{n-2}\, q\; + \ldots + a_1\, q^{n-1} \in \mathbb{Z},$$

con lo cual a_0 debe ser múltiplo de p pues al ser p y q primos entre sí lo mismo sucederá para q^n y p.

b) De (20) se deduce que:

$$-\,a_n\, p^n = a_{n-1}\, p^{n-1}\, q + \ldots + a_1\, pq^{n-1} + a_0\, q^n = q\left[a_{n-1}\, p^{n-1} + \ldots + a_1\, pq^{n-2} + a_0\, q^{n-1}\right],$$

es decir,

$$(22) \qquad -\frac{a_n\, p^n}{q} = a_{n-1}\, p^{n-1} + \ldots + a_1\, pq^{n-2} + a_0\, q^{n-1} \in \mathbb{Z},$$

con lo cual a_n debe ser múltiplo de q, pues al ser p y q primos entre sí lo mismo sucederá para p^n y q.

Definición 4. Un polinomio se dice **mónico** si el coeficiente del término de mayor grado es 1, es decir,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \ \text{ es mónico } \ \Leftrightarrow \ a_n = 1.$$

Corolario 8. Todas las raíces racionales de un polinomio mónico a coeficientes enteros (racionales) son enteros.

Demostración. Como $a_n = 1$, entonces todos los posibles valores de q para posibles raíces racionales $\frac{p}{q}$ son $q = \pm 1$, de donde surge que todas las posibles raíces racionales son enteras.

Para calcular las raíces racionales de un polinomio real a coeficientes enteros (racionales) se procede primero a calcular las posibles raíces racionales de acuerdo al Teorema de Gauss y luego una verificación con cada una de ellas, a través de la Regla de Ruffini, permite resolver el problema.

Se resalta que siempre conviene comenzar calculando con los valores enteros para luego seguir con los fraccionarios. Además, una vez obtenida una raíz se debe tener en cuenta que las raíces restantes son las raíces del polinomio cociente. Es importante continuar con el polinomio cociente por las siguientes razones:

(i) para poder detectar las raíces dobles, triples del polinomio original ;

(ii) se abrevian los cálculos pues se trabaja con un polinomio de un grado menor ;

(iii) si gr(p) = n y por algún método se logró detectar (n - 2) raíces, por aplicación reiterada del procedimiento anterior, entonces se llega a un cociente que es un polinomio de grado 2 que contendrá las restantes dos raíces. Para dicho polinomio de segundo grado, sus raíces se calculan por la resolvente de la correspondiente ecuación de segundo grado.

A través de este procedimiento se pueden hallar, cuando existen, las dos raíces complejas, una conjugada de la otra, del polinomio dado. En caso contrario, las raíces complejas, como asimismo las irracionales, son difíciles de detectar.

Ejemplo. Se desea calcular las raíces del polinomio:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \quad ,$$

para el cual se tienen,

$$n = 4 \quad , \quad a_n = a_4 = 1 \quad , \quad a_0 = -6$$

Por tanto, las raíces racionales, si existen, deben hallarse entre las siguientes :

posibles p: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 ,

posibles q: ± 1 ,

posibles $\frac{p}{q}$: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6

Se aplica entonces la Regla de Ruffini para cada una de las posibles raíces $\frac{p}{q}$, comenzando por $\alpha = 1$:

	1	-3	-3	11	-6	→ (coeficientes del polinomio P)
1		1	-2	-5	6	
	1	-2	-5	6	0	→ (1 es raíz)
1	1	1	-1	-6		
	1	-1	-6	0 → (1 es nuevamente raíz)		
1		1	0			
	1	0	-6≠ 0 → (1 es raíz doble)			

Se detectó que $\alpha_1 = 1$ es raíz doble y que el polinomio cociente resultante es el dado por $C(x) = x^2 - x - 6$. Como C es un polinomio de segundo grado, aplicando la resolvente se obtienen las restantes dos raíces:

$$\frac{1+\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

es decir: $\alpha_2 = 3$ y $\alpha_3 = -2$, con lo cual la descomposición factorial del polinomio P está dada por :

$$P(x) = (x-1)^2 (x-3)\ (x+2)$$

A continuación se verán otras condiciones necesarias para que exista una raíz entera de un polinomio a coeficientes enteros.

Teorema 9. Si x_0 es una raíz entera del polinomio P(x) a coeficientes enteros, entonces :

1) $(x_0 - 1)$ es un divisor de P(1); es decir, que P(1) es múltiplo de $(x_0 - 1)$;

2) $(x_0 + 1)$ es un divisor de P(-1); es decir, que P(-1) es múltiplo de $(x_0 + 1)$.

Demostración. Si $x_0 \in \mathbb{Z}$ es una raíz del polinomio P(x) entonces que $P(x) = (x - x_0)\, C(x)$ donde C(x) es el polinomio cociente de la división exacta del polinomio P(x) con el binomio $(x - x_0)$.

Los coeficientes de C(x) son números enteros debido a que x_0 y los coeficientes de P(x) son también enteros. Por lo tanto, si se calculan los valores de P(x) para $x = 1$ y $x = -1$ se obtienen :

$$P(1) = (1 - x_0)\ C(1) = [-\ C(1)](x_0 - 1)\ ,$$

$$P(-1) = (-1 - x_0)\ C(-1) = [-C(-1)](x_0 + 1)\ ,$$

de donde surgen las conclusiones (i) y (ii) al ser $-C(1) \in \mathbb{Z}$ y $-C(-1) \in \mathbb{Z}$

Observación 3. Una aplicación de las dos propiedades anteriores consiste en utilizar la proposición contrarrecíproca, es decir:

1) Si $(x_0 - 1)$ no es un divisor de P(1), entonces x_0 no es una raíz de P(x) ;

2) Si $(x_0 +1)$ no es un divisor de P(-1), entonces x_0 no es una raíz de P(x)

Observación 4. Como 1 y -1 son siempre posibles raíces racionales de P se aconseja calcular en primer lugar los valores de P(1) y P(-1). Si P(1) = 0 entonces 1 es raíz de P y la consecuencia 1) no dice nada pues cualquier número es divisor del cero. En caso contrario, es decir cuando $P(1) \neq 0$, a través de 1) se pueden descartar como raíz algunas de las posibles raíces enteras detectadas a través del Teorema de Gauss.

En forma análoga, si P(-1) = 0 entonces -1 es raíz de P y la consecuencia 2) no dice nada.

En caso contrario, es decir cuando $P(-1) \neq 0$, a través de (ii) se pueden descartar como raíz algunas de las posibles raíces enteras detectadas a través del Teorema de Gauss.

▲ Cálculo Aproximado de Raíces Reales

Sea P(x) un polinomio real a coeficientes enteros. Se consideró previamente el estudio de las raíces racionales exactas. Ahora se intentará acercarse, de algún modo, a las raíces reales. Nuestro interés particular reside en la aproximación de las raíces irracionales, pues para las raíces racionales se ha visto, en el párrafo anterior cómo se detectan y se calculan. Este procedimiento puede ser dividido en tres etapas:

1) Acotación de las raíces reales : consiste en encontrar un intervalo del eje real en el cual estén contenidas todas las raíces reales ;

2) Separación de las raíces reales : consiste en encontrar intervalos más pequeños de manera que cada uno contenga una sola raíz real ;

3) Aproximación de las raíces reales : consiste en aproximar a las raíces irracionales tanto como se desee, una vez que la correspondiente raíz haya sido separada.

• Acotación de las raíces reales

Esta etapa consiste en encontrar un intervalo cerrado $[\lambda, L]$ del eje real en el cual estén contenidas todas las raíces reales, en principio, tanto las racionales como las irracionales.

Definición 5. Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ a coeficientes enteros. Entonces :

1) $L \in \mathbb{R}$ es una **cota superior de las raíces de P** $\Leftrightarrow$ toda raíz real α de P satisface $\alpha \leq L$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(x) \neq 0, \ \forall x > L$$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior de las raíces de P** $\Leftrightarrow$ toda raíz real α de P satisface $\alpha \geq \lambda$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(x) \neq 0, \ \forall x < \lambda$$

Teorema de Laguerre Thibault. Sean $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado $n \geq 1$ y $L > 0$. Si en la división de P(x) por el binomio $(x - L)$, el resto es no negativo y el polinomio cociente tiene todas sus coeficientes no negativos y no nulos simultáneamente, entonces L es una cota superior de las raíces reales de P.

Demostración. Sean $R \geq 0$ el resto y C(x) el polinomio cociente de la división de P por el binomio $(x - L)$, es decir, $P(x) = C(x)\,(x - L) + R$. Si $gr(P) = n$ entonces $gr(C) = n - 1$ que por hipótesis satisface:

$$C(x) = C_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + C_1\,x + C_0\ ,$$

con

$$C_i \geq 0 \quad , \quad \forall\, i = 0,1, \ldots ,n-1, \text{ no todos simultáneamente nulos.}$$

Por lo tanto, $\forall\ \alpha > L$ se tiene:

$$P(\alpha) = (\alpha - L)\, C(\alpha) + R > 0$$

es decir que α no es raíz de P, con lo que L resulta ser cota superior de las raíces de P.

Observación 5. Si el resto R = 0 y todos los coeficientes del polinomio cociente C son no negativos y no todos nulos simultáneamente, entonces la cota superior L es además un cero de P.

Observación 6. En la práctica se "prueba" con valores naturales de L comenzando de 1.

Observación 7. Si el coeficiente de la mayor potencia de P es negativo, es decir $a_n < 0$, entonces se tendrá siempre que $C_{n-1} < 0$ cualquiera sea el número $L > 0$ utilizado. Para evitar este inconveniente, en lugar del polinomio P se utiliza el polinomio opuesto $-P$ que tendrá ahora como coeficiente de la mayor potencia al número $-a_n > 0$ y por lo tanto eligiendo un $L > 0$ adecuado se caerá en las hipótesis del teorema anterior para detectar una cota superior de las raíces reales. Esto se justifica debido al hecho que los polinomios P y $-P$ tienen las mismas raíces.

Este mismo procedimiento permite calcular una cota inferior λ de las raíces reales de P.

Dado $P \in \mathbb{R}[x]$, se define el polinomio $Q \in \mathbb{R}[x]$ de la siguiente manera :

$$(24) \qquad Q(x) = P(-x) \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Lema 10. El polinomio Q tiene las siguientes propiedades :

1) gr(Q) = gr(P) ;

2) Las raíces de Q son las raíces de P cambiadas de signo, es decir :

$$(25) \qquad \alpha \text{ es raíz de } Q \Leftrightarrow (-\alpha) \text{ es raíz de } P\,.$$

Demostración. Sea P el polinomio:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n.$$

Entonces el polinomio Q viene dado por:

$$(26) \qquad Q(x) = P(-x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (-x)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i\, x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i$$

donde sus respectivos coeficientes b_i, $\forall\ i = 0,1, \dots, n$ están expresados por :

$$(27) \qquad b_i = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad i \text{ es par }, \\ - a_i & \text{si} \quad i \text{ es impar }. \end{cases}$$

a) Como $b_n = (-1)^n\ a_n \neq 0$ entonces gr(Q) = gr(P) = n.
b) α es raíz de Q $\Leftrightarrow$ $Q(\alpha) = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(-\alpha) = 0$ $\Leftrightarrow$ $-\alpha$ es raíz de P .

Corolario 11. Si L' es una cota superior de las raíces reales de Q entonces $\lambda = -L'$ es una cota inferior de las raíces reales de P.

Demostración. Si L' es una cota superior de las raíces reales de Q entonces $Q(x) \neq 0,\ \forall\ x > L'$, es decir, $P(-x) \neq 0,\ \forall\ x > L' = -\lambda$. Por lo tanto se tiene (llamando $z = -x$)

$$P(z) \neq 0\ ,\quad \forall\, z < \lambda\ ,$$

con lo cual λ es una cota inferior de las raíces reales de P .

Observación 8. El conocimiento del intervalo $[\lambda, L]$ permite desechar como raíces del polinomio a todas aquellas posibles raíces racionales (dadas por el Teorema de Gauss) que no se encuentren en dicho intervalo.

• Separación de raíces reales

Los métodos de separación y de aproximación de raíces se basan fundamentalmente en el siguiente resultado :

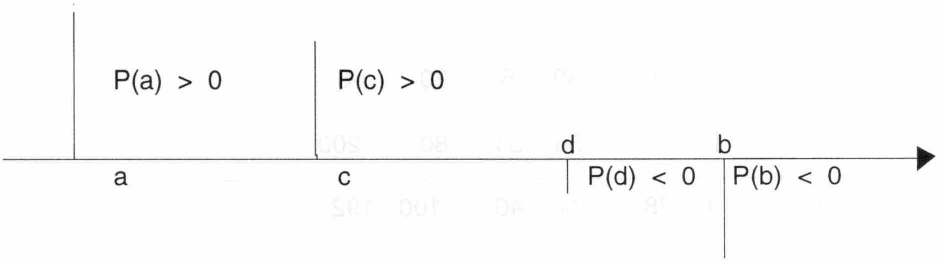
Teorema de Bolzano. Si un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ asume valores de distinto signo en los extremos de un intervalo [a,b], es decir: $P(a) . P(b) < 0$, entonces existe al menos una raíz $\alpha \in (a,b)$ de P. Más aún, puede asegurarse que existe un número impar de raíces en el intervalo [a,b].

Observación 9. Según el Teorema de Bolzano sólo interesa el signo del polinomio P en los extremos de un dado intervalo. Una vez que se detecta un cambio de signo se tiene garantizada la existencia de una raíz real. Este proceso de obtener los signos de P en diferentes valores de la variable independiente se reitera hasta poder separar todas las raíces.

• Aproximación de raíces reales. Método Dicotómico

Si se supone que el polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ a coeficientes enteros tiene una raíz real α en el intervalo (a,b), obviamente se supone que α es irracional pues si α fuese racional se lo podría detectar a través del Teorema de Gauss y la Regla de Ruffini, se desea determinar la misma con un error menor que cierto número dado.

Sean P(a) > 0 y P(b) < 0 como en la figura siguiente y se considera un c $\in$(a,b), generalmente, según el **método dicotómico**, se elige el punto medio $c=\frac{a+b}{2}$: se calcula P(c). Si P(c) = 0 entonces la raíz buscada es α = c ; en caso contrario, según sea el signo de P(c) se tendrá el intervalo más pequeño en el cual se encontrará la raíz. Si P(c) > 0 entonces la raíz se encuentra en el intervalo (c,b), si fuese P(c) < 0 entonces la raíz se encontrará en el intervalo (a,c).



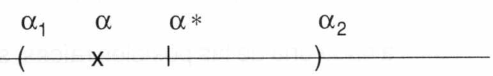
Se continúa con el procedimiento con el intervalo (c,b). Entonces se elige d $\in$(c,b), generalmente el punto medio $d=\frac{c+b}{2}$, y se calcula P(d). Si P(d) = 0 entonces α = d es la raíz buscada. Si P(d) < 0, respectivamente P(d) > 0, entonces la raíz buscada se encuentra en el intervalo (c,d), respectivamente (d,b).

Si se supone que luego de un número finito de pasos la raíz α está en el intervalo, suficientemente pequeño, (α_1,α_2), entonces el proceso anterior se suspende y se elige como **raíz aproximada** el punto medio de dicho intervalo, dado por:

(28) $$\alpha^*=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\in(\alpha_1,\alpha_2)$$

El **error** $\in$ que se comete no puede calcularse exactamente (pues no se conoce el valor exacto α) pero sí puede acotarse como:

(29) $$\in\ =|\alpha-\alpha^*|<\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$$



Observación 10. La acotación anterior puede utilizarse para saber en qué momento se debe interrumpir el proceso dicotómico. Por ejemplo, para tener una raíz aproximada con un error menor a 0,01 se debe aplicar el método dicotómico hasta obtener un intervalo de separación (α_1,α_2) de la raíz buscada con una amplitud $\alpha_2-\alpha_1=0{,}02$.

Ejemplo. Sea P(x) el siguiente polinomio, es el polinomio P_3 del problema 7:

$$P(x)=6x^6-11x^5+26x^4-39x^3+6x^2+20x-8$$

que tiene las siguientes posibles raíces racionales:

$$\pm 1\,,\quad \pm 2\,,\quad \pm 4\,,\quad \pm 8\,,\quad \pm\frac{1}{2}\,,$$
$$\pm\frac{1}{3}\,,\quad \pm\frac{1}{6}\,,\quad \pm\frac{2}{3}\,,\quad \pm\frac{4}{3}\,,\quad \pm\frac{8}{3}$$

Se utiliza la Regla de Ruffini para detectar cotas superiores de las raíces de P(x) y de Q(x) = P(- x):

coeficientes de P $\rightarrow$	6	-11	26	-39	6	20	-8
2		12	2	56	34	80	200
	6	1	28	17	40	100	192

con lo cual L = 2 es una cota superior de las raíces de P.

Coeficientes de Q $\rightarrow$	6	11	26	39	6	-20	-8
1		6	17	43	82	88	68
	6	17	43	82	88	68	60

con lo cual $\lambda = -1$ es una cota inferior de las raíces reales de P.

Por lo tanto, las posibles raíces racionales de P están dadas por :

$$\pm 1\,,\quad \pm\frac{1}{2}\,,\quad \pm\frac{1}{3}\,,\quad \pm\frac{1}{6}\,,\quad \pm\frac{2}{3}\,,\quad \pm\frac{4}{3}$$

Debido al hecho que $P(-1) = Q(1) = 60 \neq 0$ y como $8 + 1 = 9$ no es divisor de 60 se tiene que 8, una de las posibles raíces de P, no es raíz de P; lo cual también puede deducirse, en forma más simple, por el hecho de que 8 no se encuentra en el intervalo $(\lambda, L) = (-1,2)$

Aplicando la Regla de Ruffini a cada una de las posibles raíces, se obtiene la siguiente descomposición factorial de P:

$$P(x) = 6\,(x-1)^2\,(x-\frac{1}{2})\,(x+\frac{2}{3})\,(x+2i)\,(x-2i)\ ,$$

o en forma equivalente, en el cuerpo de los números reales, dado por:

$$P(x) = 6\,(x-1)^2\,(x-\frac{1}{2})\,(x+\frac{2}{3})\,(x^2+4)$$

Trabajo Práctico

1) Dado los siguientes polinomios

$P(x) = x^4 - x^3 + i\,x - 2 + i$, $\qquad Q(x) = x^2 + (1+i)\,x + 1$,

$R(x) = x^3 + 2\,i\,x + 1$, $\qquad S(x) = x^5 + (1-i)\,x - i$,

calcule las expresiones :

(a) $2\,P\,Q - 3\,R + S$, (b) $P\,R\,S + 2\,Q$ (c) $3(Q + S) + 2\,R$,

(d) $\dfrac{2\,P}{R}$, (e) $\dfrac{S}{R} - Q$, (f) $R(2\,Q^2 - P) - S$

2) Halle los valores de a, b $\in \mathbb{C}$ para que los siguientes pares de polinomios sean iguales :

(a) $x^3 - 3\,x^2 + x - 3$, $\qquad (x-3)\,(x+a)\,(x+b)$;

(b) $\left(2\,i\,x^2 + a\right)\left(x^3 + b\,x + 3\,i\right)$, $\qquad 2\,i\,x^5 + (1+2\,i)\,x^3 - 6x^2 + x + 3\,i$;

(c) $x^3 - 3\,x + 2$, $\qquad (x+a)(x+b)^2$

3) Aplicando la Regla de Ruffini, calcule el resto y el cociente de la división de los siguientes polinomios por $(x - x_0)$, donde x_0 es el valor indicado :

(a) $2\,x^5 - 3\,x^4 + x^2 - 1$, $\qquad x_0 = 4,\ 5, -1,\ 2, -3,\ i$;

(b) $x^4 + i\,x^3 + i\,x + 1$, $\qquad x_0 = i, -i,\ 1, -1,\ 3$

4) Halle, aplicando el Teorema del resto, el valor que toma el polinomio $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$ para los valores enteros de x comprendidos entre -5 y 5

5) Halle un polinomio que tenga las siguientes raíces :

(a) 1 como raíz doble y -1 como raíz triple ;

(b) 2, 3, - 5 como raíces simples y - 2,1 como raíces dobles ;

(c) 2, 1 + i , 1 - i como raíces simples.

6) Determine el valor del $m \in \mathbb{R}$ de manera que x_1 sea raíz del polinomio dado ;

(a) $P_1(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + mx - 1,$ $\qquad x_1 = 3;$

(b) $P_2(x) = -x^5 + x^3 + 3x^2 + x - m,$ $\qquad x_1 = 1$

7) Sean los siguientes polinomios a coeficientes enteros :

$P_1(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^2 - 40x - 1$; $\qquad P_2(x) = 8x^3 + 22x^2 - 7x - 3$;

$P_3(x) = 6x^6 - 11x^5 + 26x^4 - 39x^3 + 6x^2 + 20x - 8$;

$P_4(x) = 4x^7 - 16x^6 + 21x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 6x^2 + x - 1;$

$P_5(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x - 2$; $\qquad P_6(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 24x - 52$;

$P_7(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8;$ $\qquad P_8(x) = x^5 - x^3 - 2x$

(a) Calcule una cota superior y una cota inferior para las raíces de los polinomios ;

(b) Escriba los posibles ceros racionales de los polinomios. Elimine aquellos posibles ceros utilizando las cotas obtenidas en la parte (a) y el Teorema 9 ;

(c) Hallar los ceros racionales de los polinomios ;

(d) En el caso en que se determine una raíz real (no racional) en algún intervalo de números reales, aproxímelas al centésimo ;

(e) En los casos posibles, determine la descomposición factorial de los polinomios .

8) (a) Calcule $m \in \mathbb{R}$ de manera que el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - mx + 5$ sea divisible por el binomio $(x - i)$;

(b) Para el valor de m hallado, descomponga factorialmente el polinomio dado.

Respuestas Trabajo Práctico

1) (a) $2x^6+(1+2\,i)\,x^5-2\,i\,x^4+(-5+2\,i)\,x^3+(-6+4\,i)\,x^2+(-5-7\,i)\,x-7+i$;

(b) $x^{12}-x^{11}+2\,i\,x^{10}+(1-i)\,x^9-2\,x^8-3\,x^7-i\,x^5+(-3+3\,i)\,x^4+(-1+5\,i)\,x^3$
$+(-3+i)\,x^2+(-2+7\,i)\,x+2+4\,i$;

(c) $-x^7-(1+i)\,x^6+2\,x^5+(1+i)\,x^3+(1+i)\,x^2+(4+6\,i)\,x+5-2\,i$;

(d) $2x-2+\dfrac{-4\,i\,x^2+(-2+6\,i)x-2+2\,i}{x^3+2\,i\,x+1}$;

(e) $\dfrac{-x^2+(-3-i)\,x+1}{x^3+2\,i\,x+1}-(1+i)\,x-1-2\,i$;

(f) $x^7+(5+4\,i)\,x^6+(3+6\,i)\,x^5+(-3+13\,i)\,x^4+(1+11\,i)\,x^3+(-2+12\,i)\,x^2+(5+12\,i)\,x+4$

2) (a) $a=i$, $b=i$ $\wedge$ $a=-i$, $b=i$;
(b) $a=1$, $b=1$;
(c) $a=2$, $b=-1$

3) (a)

$x_0=4$, $C(x)=2\,x^4+5\,x^3+20\,x^2+81x+324$, $R(x)=1295$;

$x_o=5$, $C(x)=2\,x^4+7\,x^3+35\,x^2+176\,x+880$, $R(x)=4399$;

$x_0=-1$, $C(x)=2\,x^4-5\,x^3+5\,x^2-4\,x+4$, $R(x)=-5$;

$x_0=2$, $C(x)=2\,x^4+x^3+2\,x^2+5\,x+10$, $R(x)=19$;

$x_0=-3$, $C(x)=2\,x^4-9\,x^3+27\,x^2-80\,x+240$, $R(x)=-721$;

$x_0=i$, $C(x)=2\,x^4+(-3+2\,i)\,x^3+(-2-3\,i)\,x^2+(4-2\,i)\,x+2+4\,i$,

$R(x)=-5+2\,i$;

(b)

$x_0 = i \quad , \quad C(x) = x^3 + 2\,i\,x^2 - 2\,x - i \quad , \quad R\,(x) = 2\,;$

$x_0 = -\,i \quad , \quad C(x) = x^3 + i \quad , \quad R\,(x) = 2\,;$

$x_0 = 1 \quad , \quad C(x) = x^3 + (1+i)\,x^2 + (1+i)\,x + (1+2\,i) \quad , \quad R\,(x) = 2 + 2\,i\,;$

$x_0 = -1 \quad , \quad C(x) = x^3 + (-1+i)\,x^2 + (1-i)\,x + (-1+2\,i) \quad , \quad R\,(x) = 2 - 2\,i\,;$

$x_0 = 3 \quad , \quad C(x) = x^3 + (3+i)x^2 + (9+3\,i)\,x + (27+10\,i) \quad , \quad R\,(x) = 82 + 30\,i$

4) $P(-5) = 769 \quad , \quad P(-4) = 331 \quad , \quad P(-3) = 113 \quad , \quad P(-2) = 25 \quad ,$

$P(-1) = 1 \quad , \quad P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 13 \quad , \quad P(3) = 65 \quad ,$

$P(4) = 211 \quad , \quad P(5) = 529$

5) (a) $P(x) = (x-1)^2 (x+1)^3\,;$

(b) $P(x) = (x-2)\,(x-3)\,(x+5)\,(x+2)^2\,(x-1)^2$

6) (a) $m = -\dfrac{152}{3}\,;$ (b) $m = 4$

7) P_1: (a) $L = 5 \quad , \quad \lambda = -3$ (b) ± 1 (c) no tiene (d) $\left(-\dfrac{1}{8}, 0\right)\,;$

P_2: (a) $L = 1 \quad , \quad \lambda = -4$ (d) $\pm 1,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{4},\ \pm\dfrac{1}{8},\ \pm\dfrac{3}{2},\ \pm\dfrac{3}{8},\ -3,\ \pm\dfrac{3}{4}$

(e) $P_2(x) = 8\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x+3)\left(x + \dfrac{1}{4}\right)\,;$

P_3: (a) $L = 2 \quad , \quad \lambda = -1$ (b) $\pm\dfrac{4}{3},\ \pm\dfrac{2}{3},\ 2,\ \pm\dfrac{1}{3},\ \pm 1,\ \pm\dfrac{1}{6},\ \pm\dfrac{1}{2}$

(c) $1, \dfrac{1}{2}\,;$ (e) $P_3(x) = 6\,(x - \dfrac{1}{2})\,(x-1)^2\,(x + \dfrac{2}{3})\,(x+2\,i)\,(x-2\,i)$

P_4: (a) $L = 4$, $\lambda = -1$ (b) $\pm\frac{1}{4}, \ \pm 1, \ \pm\frac{1}{2}$ (e) $P_4(x) = 4\,(x-1)^5\,(x+\frac{1}{2})^2$;

P_5: (a) $L = 1$, $\lambda = -2$ (b) $\pm 1, \ 2$ (e) $P_5 = (x-1)\,(x+1)^2\,\left(x^2+x+2\right)$;

P_6: (a) $L = 6$, $\lambda = -2$ (b) $\pm 1, 2, 4$

(e) $P_6 = (x-2)\,(x+2)\,\left(x-(3+2\,i)\right)\,\left(x-(3-2\,i)\right)$;

P_7: (a) $L = 7$, $\lambda = 0$ (b) $4 , 2 , 1$ (e) $P_7(x) = (x-2)^3$;

P_8: (a) $L = 2$, $\lambda = -2$ (b) 0 (e) $P_8(x) = x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x+i)\,(x-i)$

8) (a) $m = 4$;

(b) $P(x) = (x-i)\,(x+i)\,(x-2-i)\,(x-2+i)$

BIBLIOGRAFÍA

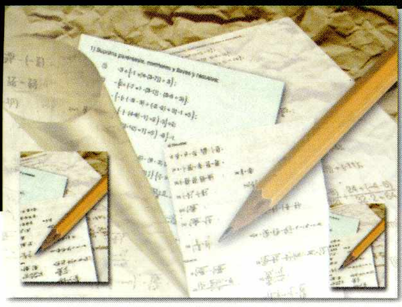
- A. ALVAREZ ALVAREZ, "Uso de la calculadora en el aula", Narcea, Madrid (1995).
- C. AMIGO - P. PEÑA - A. PÉREZ - A. RODRÍGUEZ - F. SIVIT, "Matemáticas", Vol. 3 (1994), Vol. 4 (1995), McGraw - Hill, Madrid.
- J.L. ANTÓN BOZAL et al., "Taller de Matemáticas", Narcea, Madrid (1994).
- M. BARRAT, "Les mathématiques", Nathan, París (1995).
- N.H. CARIONE - S.G. CARRANZA - M.T. DIÑEIRO - M.L. LATORRE - E.E. TRAMA, "Matemática 3" Santillana, Buenos Aires (1995).
- M.E. CARMINATI de LIMONGELLI - M.J. ROCA de SILVA, "Viaje por el mundo de la Matemática", A - Z Editora, Buenos Aires (1993).
- S.R. CLEMENS - P. G. O'DAFFER - T.J. COONEY; "Geometría con aplicaciones y solución de problemas"; Addison - Wesley Iberoamericana, Wilmington (1989).
- A. DICKENSTEIN, "Mate Max. La Matemática en todas partes", Libros del Quirquincho, Buenos Aires (1994).
- S. ENGLEBERT - S. PEDEMONTI - S. S. SEMINO; "Matemática A - Z", Vol. 1 y 2, A - Z Editora, Buenos Aires (1995).
- P. FAURING - F. GUTIÉRREZ, "Olimpíada Matemática Argentina. Problemas", Vol. 1 (1993), Vol. 3 1994), Vol. 4 (1994), Vol. 5 (1994), Red Olímpica, Buenos Aires.
- C. GAUTIER - D. GERLL - A. GOLDEMBERG, "Classes de seconde et première", Ellipses, París (1994).
- A. GHIZZETTI; "Lecciones de análisis matemático", Vol. 1, EUCA, Buenos Aires (1968).
- M.O. GONZÁLEZ - J. D. MANCILL; "Álgebra elemental moderna", Vol. 1 y 2, Kapelusz, Buenos Aires (1991).
- M. de GUZMÁN - J. COLERA - A. SALVADOR, "Matemáticas. Bachillerato 1", Anaya, Madrid (1993).
- M. de GUZMÁN - J. COLERA, "Matemáticas 1 COU", Anaya, Madrid (1993).

- E. F. HAEUSSLER - R. S. PAUL, "Matemática para administración y economía", Grupo Editorial Iberoamericano, México (1992).
- E. HINRICHSEN - N. BUSCHIAZZO - S. FILIPPUTTI - S. S. de HINRICHSEN, "Olimpíada Matemática Argentina. Problemas 2", Red Olímpica, Buenos Aires (1994).
- A. R. LÓPEZ, "Matemática moderna", Vol. 1, 2 y 3, Editorial Stella, Buenos Aires (1971).
- MARCHETTI de De SIMONE - M. GARCÍA de TURNER, "Matemática", Vol. 4 y 5, AZ Editora Buenos Aires (1991).
- A. E. MASCO de NASINI - R. LÓPEZ, "Lecciones de álgebra y geometría analítica", Tomo 1, 2, EUCA, Buenos Aires (1972).
- L. PANCORBO - Ma. V. BECERRA - R. MARTÍNEZ - R. RODRÍGUEZ, "Matemáticas 1" McGraw Hill, Madrid (1995).
- G. POLYA, "Cómo plantear y resolver problemas ", Trillas, México (1994)
- H. RABUFFETTI, "Temas de álgebra. Funciones", El Ateneo, Buenos Aires (1989).
- H. RABUFFETTI, "Introducción al análisis matemático (Cálculo I)", El Ateneo, Buenos Aires (1991).
- C. REPETTO, "Manual de análisis matemático"; Vol.1, Macchi, Buenos Aires (1989).
- P. SADOVSKY - M. L. MELGUIZO - C. L. RUBINSTEIN de WALDMAN, "Matemática 1", Santillana, Buenos Aires (1988).
- P. SADOVSKY - M. KASS - M. G. PANIZZA - M.I. REYNA, "Matemática 2", Santillana, Buenos Aires (1988).
- G. SÁNCHEZ VÁSQUEZ. "Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos"; Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", Sevilla (1996).
- L.A. SANTALÓ, "Matemática. Iniciación a la creatividad"; Vol. 1 (1993), 2 (1993, y 3 (1995), Kapelusz, Buenos Aires.
- R. SCHADLER, "Geometry problems", Dale Seymour Publications, Palo Alto (1984).
- J. SEVESO - G. FERRARINI, "Olimpíada Matemática Ñandú. Problemas" Vol. 1 (1994), Vol.2 (1994), Vol. 3 (1995), Vol. 4 (1996), Red Olímpica, Buenos Aires.
- A.SOIFER, "Les mathématiques par la résolution de problèmes", Éditions du Choix, Argenteuil (1995).
- D. SOLOW, "Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas", Limusa, México (1993).

- V.W. de SPINADEL, "Cálculo 1" y "Suplemento al Cálculo 1 ", Nueva Librería, Buenos Aires (1983).
- S.K. STEIN, "Cálculo y geometría analítica, McGraw-Hill, México (1984).
- E.W. SWOKOWSKI, "Álgebra y trigonometría con geometría analítica", Grupo Editorial Iberoamérica, México (1988).
- D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", Parte I (23 páginas), Parte II (15 páginas), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1995).
- D.A. TARZIA, "Matemática" Curso EGB, 3er, Ciclo Área Matemática, Programa Nacional de Capacitación Docente, Red Federal de Formación Docente Continua (Min. Educación Prov. Córdoba), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Rosario (1996) (80 páginas).
- D.A. TARZIA - N.D. GURRUCHAGA, "Operaciones", Curso EGB Bloque 2, 2do. Ciclo Área Matemática, Programa Nacional de Capacitación Docente, Red Federal de Formación Docente Continua (Min. Educación Prov. Santa Fe), Departamento de Matemática, FCE, Universidad Rosario (1996) (29 páginas).
- J.A. TIRAO, "Matemática 1", Kapelusz, Buenos Aires (1985).
- C.A. TREJO - J.E. BOSCh, "Ciclo medio de matemática moderna", Cursos 1, 2, 3, 4 y 5, EUDEBA, Buenos Aires (1977).
- E.P. VANCE, "Álgebra y trigonometría, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (1986).
- N. VÁZQUEZ de TAPIA - A. TAPIA de BIBILONE - C.A. TAPIA, "Matemática", Vol. 1, 2, 3, y 4, Angel Estrada, Buenos Aires (1980).

ÍNDICE ALFABÉTICO

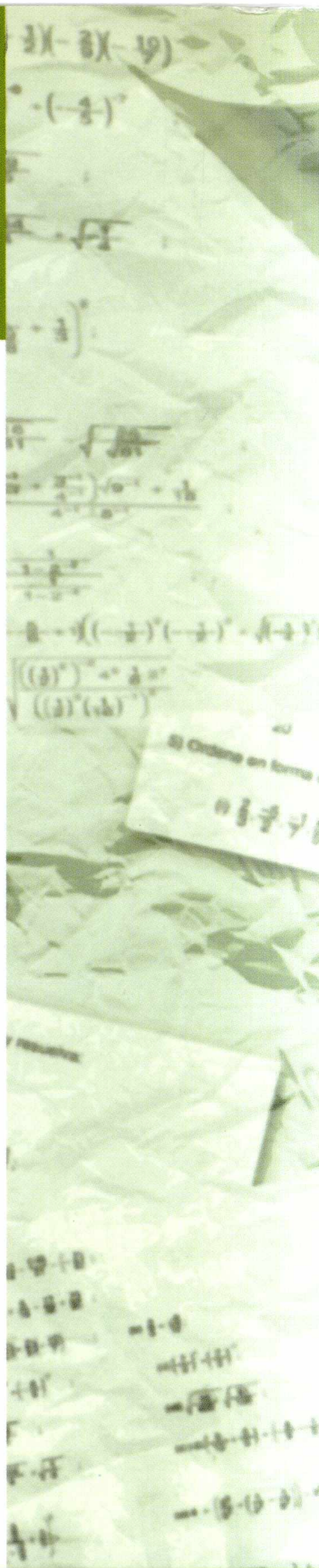
A continuación se explicitan las palabras claves que se han utilizado en el texto. El número indica el capítulo en el cual el concepto está definido o mencionado. Cuando todos los sub-ítemes pertenecen al mismo capítulo sólo se mencionará el correspondiente número para el respectivo ítem.



CURSO DE NIVELACIÓN DE

MATEMÁTICA

Domingo A. TARZIA



Domingo Alberto Tarzia posee los diplomas de **"Licenciado en Matemática"** (1972) y **"Licenciado en Física"** (1977) de la **Universidad Nacional de Rosario** (Rosario, Argentina) y los de **"Diplôme d'Etudes Approfondies d'Analyse Numérique"** (1977), **"Doctorat de 3ème Cycle: Mécanique Théorique des Solides - Analyse Numérique"** (1979) y **"Habilitation à Diriger des Recherches"** (1991) de la **Université Pierre-et-Marie-Curie (Université de Paris VI)** (París, Francia).

Es **Director del Departamento de Matemática** de la **Facultad de Ciencias Empresariales (Rosario) de la Universidad Austral** e **Investigador Principal** de la carrera del Investigador Científico y Tecnológico del **CONICET** (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, dependiente de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la República ARGENTINA).

Su tema de investigación son las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (elípticas y parabólicas), en particular las inecuaciones variacionales y los llamados problemas de frontera libre, entre los cuales merecen destacarse los procesos de transferencia de calor con cambio de fase, conocidos en la literatura científica como "Stefan problem".

Es autor de varias monografías y de más de sesenta artículos publicados en numerosas revistas científicas de jerarquía internacional. Por su trayectoria se le ha otorgado el Premio "Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales" - año 1986 - en Matemática, denominado "Alberto González Domínguez".

956-278-091-0

9 789562 780919

McGraw-Hill Interamericana

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies