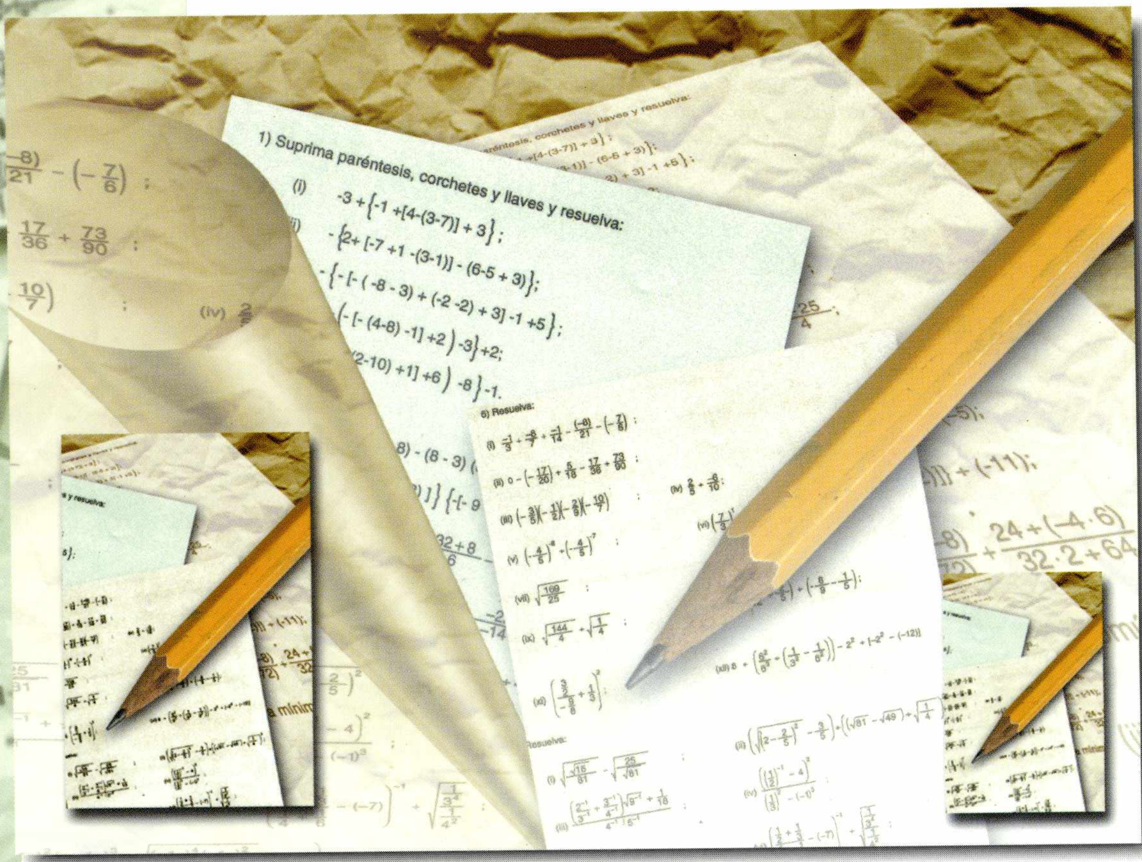
CURSO DE NIVELACIÓN DE
MATEMÁTICA



Domingo A. TARZIA

McGraw Hill

CURSO DE NIVELACIÓN DE MATEMÁTICA

CURSO DE NIVELACIÓN DE MATEMÁTICA

Domingo Alberto TARZIA
Universidad Austral, Facultad de Ciencias Empresariales, Departamento de Matemática y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina

McGraw-Hill
Interamericana

SANTIAGO · BUENOS AIRES · CARACAS · GUATEMALA · LISBOA · MADRID · MÉXICO
NUEVA YORK · PANAMÁ · SAN JUAN · SANTAFÉ DE BOGOTÁ · SÃO PAULO
AUCKLAND · HAMBURGO · LONDRES · MILÁN · MONTREAL · NUEVA DELHI · PARÍS
SAN FRANCISCO · SIDNEY · SINGAPUR · ST. LOUIS · TOKIO · TORONTO

Curso de Nivelación Matemática

McGRAW–HILL / INTERAMERICANA DE CHILE LTDA.
Seminario, 541– Providencia
Teléfono: 635 17 14
Santiago (Chile)

Reg. Prop. Intelectual: 112.123
I.S.B.N.: 956-278-091-0

Editora: Patricia Ortega Wiedmaier.
Diagramación: Kernel Ltda.
Diseño de Portada: Fuerza Creativa

Impreso por: Salesianos S.A.

IMPRESO EN CHILE / PRINTED IN CHILE

PRÓLOGO

La Matemática siempre ha ocupado un lugar de privilegio en los programas escolares y ha influido explícitamente e implícitamente en la formación e información del estudiante, con distinto énfasis a lo largo del tiempo. Hoy, a estas dimensiones formativa e informativa, más dirigidas hacia el sujeto, se suma lo social, por cuanto la Matemática, desde su lenguaje y desde su método, se ha constituido en un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico en que se vive. Es desde esta potencialidad que la matemática puede contribuir en forma privilegiada al logro de los objetivos que la Ley Federal de Educación puntualiza para la Educación General Básica (EGB) y el Polimodal, pues colabora con el desarrollo individual y social de los alumnos, propiciando en ellos "la búsqueda de la verdad" y en relación con ella, el juicio crítico, el rigor en el método de trabajo, la presentación honesta de los resultados, la simplicidad y exactitud en el lenguaje, la valorización de las ideas ajenas y del trabajo compartido. Pero es importante comprender que el cambio propuesto no se limita exclusivamente a los contenidos, sino más bien a los procedimientos que involucren nuevas operaciones de pensamiento desde la enseñanza de la Matemática y a un cambio de actitudes para su aprendizaje. La resolución de ejercicios y sobre todo de problemas combinados que conecten y entrelacen los conceptos matemáticos se consideran fundamentales en el crecimiento matemático. Es aquí donde el docente juega su rol de maestro, y no de un repetidor, para poder incentivar a los estudiantes en la creatividad, que es la actividad por excelencia del ser humano para la cual la Matemática juega un rol primordial.

Este curso de nivelación de Matemática tiene como objetivo realizar una puesta al día de algunos de los temas fundamentales que han sido tratados en la Escuela Secundaria (números reales y sus operaciones, expresiones algebraicas, ecuaciones de primer grado y de segundo grado, sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, representación gráfica en el plano, geometría y trigonometría del plano, resolución de triángulos, teoría de conjuntos, relaciones y funciones entre conjuntos, valor absoluto, inecuaciones de primer y segundo grado, funciones reales elementales y sus gráficas, números complejos, raíces de polinomios). Se presentan las definiciones, propiedades y demostraciones principales para poder utilizarlas en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación.

El centro del curso está representado por el Capítulo 7 sobre las funciones reales elementales cuya enseñanza es uno de los aspectos que unifica el saber matemático. Su manejo es de fundamental importancia, tanto en la Matemática como en cualquier otra ciencia que tenga por lenguaje a la Matemática. Por otro lado, se ha pretendido comenzar por los temas básicos, como son las operaciones de números reales (Capítulo 1) y las expresiones algebraicas (Capítulo 2). Se ha reservado a la teoría de conjuntos el Capítulo 5 (la parte más abstracta del curso en la que se estudian las relaciones y las funciones entre conjuntos) después de tener un adecuado manejo algebraico y geométrico. Dichos Capítulos 1 y 2 son complementados en los Capítulos 3 (sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), 6 (números reales), 8 (números complejos) y 9 (polinomios). Por su parte, el Capítulo 5 es, a su vez, complementado con el 7 (funciones reales elementales y sus representaciones gráficas).

Conviene hacer notar la importancia que se le asigna a la resolución de problemas con parámetros o con muchas soluciones (por ejemplo: ecuaciones e inecuaciones de primer grado con parámetros, ecuaciones e inecuaciones de segundo grado con parámetros, ecuaciones e inecuaciones irracionales con parámetros, sistemas de ecuaciones de primer grado con parámetros, ecuaciones e inecuaciones en las cuales intervengan valores absolutos, obtención de la opción óptima a través del estudio de funciones reales, etc.) que incentivan la creatividad en Matemática.

En este curso se muestran las bases sobre las cuales se levanta el edificio matemático para estar luego en condiciones óptimas para entender la matemática universitaria y poder aplicarla en la resolución de problemas prácticos de la vida real. Ha sido utilizado desde 1991 en el curso pre-universitario (Capítulos 1 al 4) y de Matemática para Empresas I (Capítulos 5 al 9) en la carrera de Licenciatura en Ciencias Empresariales que se desarrolla en la Facultad de Ciencias Empresariales (con sede en la ciudad de Rosario) de la Universidad Austral. El curso puede ser desarrollado en 100 horas reloj, que incluye el tiempo dedicado tanto al desarrollo de los conceptos teóricos como a la resolución de problemas. Una estimación por capítulos es la siguiente: Capítulo 1 (6 hs.), Capítulo 2 (13 hs.), Capítulo 3 (7 hs.), Capítulo 4 (10 hs.), Capítulo 5 (16 hs.), Capítulo 6 (11 hs.), Capítulo 7 (23 hs.), Capítulo 8 (7 hs.), Capítulo 9 (7 hs.).

El desarrollo teórico del curso se complementa con:

– **Guía de Trabajos Prácticos:** Consiste en la resolución de ejercicios y problemas, por cada uno de los capítulos. Tendrá por objetivo la comprensión de los conceptos matemáticos dados en el curso y la resolución de problemas combinados que conecten diversos conceptos entre sí. Muchos de los problemas (que se indican en Problemas Complementarios en el respectivo capítulo) no están ordenados para evitar el encasillamiento en la metodología de resolución de los problemas. La mayoría de dichos problemas complementarios tiene por objetivo principal el de pensar y razonar en Matemática, como una forma de incrementar la correspondiente creatividad que resulta ser vital no sólo en el aprendizaje de la Matemática sino en la vida cotidiana.

– **Trabajos Prácticos Especiales:** Consiste en la resolución de problemas sobre un determinado tema, en general, de interés a la Economía y a la Empresa. Tendrá por objetivo la aplicación de los conocimientos matemáticos, desarrollados en el curso, en problemas específicos. Al final del Capítulo 7 se desarrolla el trabajo práctico especial: "Aplicaciones de las funciones reales elementales a problemas de Economía y de la Empresa".

Los enunciados de los ejercicios y problemas, que forman los Trabajos Prácticos, se encuentran al final de cada capítulo. Las respectivas respuestas, en su gran mayoría, se hallan a continuación de tales enunciados.

Quisiera agradecer a mis colegas Adriana Briozzo, Graciela Garguichevich, Norma Gurruchaga y María Fernanda Natale, por la lectura y sugerencias realizadas para mejorar el presente texto.

Domingo Alberto Tarzia
Rosario.

DEDICADO A

mi esposa Norma y mis hijos María Silvina y Pablo Alberto por su paciencia, cariño y comprensión;

la memoria de mis queridos padres y por sus innumerables sacrificios que hicieron por mí.

CONTENIDO

resta. Operaciones con monomios: suma, resta, producto y cociente. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Operaciones con polinomios: suma, resta, producto de un polinomio y un monomio, producto de dos polinomios, cociente de un polinomio con un monomio, cociente de dos polinomios. Polinomio resto. Disposición práctica del cociente de polinomios. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Cero o raíz de un polinomio. Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de sus bases. Productos especiales: cuadrado y cubo de un binomio, cuadrado de un trinomio, diferencia de cuadrados. Propiedades y aplicaciones.

2.3. Factoreo de expresiones algebraicas. Factor común. Descomposición en grupos de igual número de términos con un factor común en cada grupo. Trinomio cuadrado perfecto. Cuatrinomio cubo perfecto. Diferencia de cuadrados. Suma o diferencia de potencias de igual grado. Propiedades y aplicaciones.

2.4. Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación. Reducir varias expresiones algebraicas a común denominador. Operaciones con fracciones algebraicas: suma, resta, multiplicación y división. Fracciones compuestas. Propiedades y aplicaciones.

2.5. Operaciones en una variable. Identidad algebraica. Ecuación algebraica. Incógnitas. Miembros de una ecuación. Solución de una ecuación. Resolver una ecuación. Diferentes tipos de clasificaciones en: Ecuación compatible, indeterminada e incompatible; Ecuación entera, fraccionaria e irracional; Ecuación en primer grado en la incógnita x. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas x, y; Ecuación numérica, ecuación literal o paramétrica. Ecuaciones equivalentes. Metodología para resolver una ecuación. Principio de la adición y principio de la multiplicación. Propiedades y aplicaciones.

2.6. Ecuación de primer grado en una variable. Porcentaje. Problemas de aplicación. Propiedades y aplicaciones.

2.7. Ecuación de segundo grado en una variable. Raíces. Discriminante. Resolvente. Relaciones entre raíces y los coeficientes de una ecuación de segundo grado. Factorización del trinomio de segundo grado. Hallar dos números conociendo su suma y su producto. Problemas de optimización. Propiedades y aplicaciones.

2.8. En trabajos prácticos: Regla de tres simple y compuesta. Porcentaje de ganancia y descuento. Propiedades y aplicaciones.

Capítulo 3: Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

3.1. Una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Infinitas soluciones. Propiedades y aplicaciones.

3.2. Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Coeficientes del sistema y términos independientes. Solución. Sistema de ecuaciones determinado o compatible, indeterminado e incompatible. Condición necesaria y suficiente para distinguir los tres casos. Propiedades y aplicaciones.

3.3. Diferentes métodos de resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Método de sustitución. Método de igualación. Método de reducción o de sumas y restas. Método de determinantes. Matriz cuadrada de orden dos. Determinante de una matriz cuadrada de orden dos y Regla de Cramer. Método de triangulación o de Gauss. Método gráfico: Sistema de coordenadas en una recta, sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano, abscisa y ordenada, función real, representación gráfica de la función y=mx+h, pendiente y ordenada al origen, resolución gráfica de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, intersección de dos rectas. Propiedades y aplicaciones.

3.4. Interpretación geométrica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Propiedades y aplicaciones.

3.5. Resolución de otros sistemas de ecuaciones. Propiedades y aplicaciones.

3.6. Problemas de aplicaciones. Propiedades y aplicaciones.

3.7. Resolución de un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Propiedades y aplicaciones.

Capítulo 4: Geometría y trigonometría del plano

4.1. Propiedades básicas de la geometría del plano. Propiedades de rectas y ángulos. Bisectrices y mediatrices. Propiedades en la circunferencia. Angulo central. Triángulos equiláteros, isósceles y rectángulos. Propiedad fundamental de los ángulos interiores de un triángulo. Triángulos congruentes. Medianas, alturas y puntos notables en un triángulo. Cuadriláteros, trapecios, paralelógramos, rectángulos, rombos y cuadrados. Propiedades y aplicaciones.

4.2. Triángulos semejantes. Segmentos proporcionales a otros dos. Semejanza de triángulos. Casos de semejanza de triángulos. Teorema de Thales. Propiedades y aplicaciones.

4.3. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras. Altura y área de un triángulo equilátero en función del lado. Diagonal de un cuadrado. Representación gráfica de los números √n(n ∈ /N). Relaciones métricas en un triángulo rectángulo. Propiedades y aplicaciones.

4.4. Relaciones métricas en un triángulo cualquiera. Cálculo del cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo y a un ángulo obtuso, en un triángulo, en función de los otros lados. Cálculo de una altura y del área de un triángulo, conociendo sus lados. Fórmula de Herón. Cálculo de la distancia de un vértice a un punto cualquiera del lado opuesto. Cevianas. Fórmula de Stewart. Cálculo de las medianas en función de los lados. Propiedades y aplicaciones.

4.5. Relaciones trigonométricas. Las relaciones entre los lados de un triángulo dependen del ángulo y no de los lados. Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo: seno, coseno y tangente de un ángulo. Relaciones recíprocas: cosecante, secante y cotangentes de un ángulo. Relación trigonométrica pitagórica. Propiedades y aplicaciones.

4.6. El radián. Medidas de ángulos en grados y en radianes. La circunferencia trigonométrica. Angulo positivo y ángulo negativo. Propiedades y aplicaciones.

4.7. Relaciones trigonométricas para ángulos particulares: 0, 30, 45, 60 y 90 grados. Propiedades y aplicaciones.

4.8. Propiedades de las relaciones trigonométricas. Relaciones trigonométricas: de ángulos opuestos, de ángulos complementarios, de ángulos suplementarios, de ángulos que difieren en 90°, de suma y resta de ángulos, del ángulo doble, del ángulo mitad, en función del ángulo mitad. Reducción al primer cuadrante. La pendiente de una recta como la tangente de un ángulo. Propiedades y aplicaciones.

4.9. Relaciones trigonométricas inversas (arco seno, arco coseno y arco tangente trigonométrica). Propiedades y aplicaciones,

4.10. Resolución de triángulos rectángulos: diferentes casos. Propiedades y aplicaciones.

4.11. Relaciones que se verifican en un triángulo rectángulo cuando se traza la altura correspondiente a la hipotenusa. Proyección de un punto sobre una recta. Proyección de un segmento sobre una recta. Estudio de diferentes casos. Propiedades y aplicaciones.

4.12. En trabajos prácticos: Medias aritméticas, geométrica, armónica y media cuadrática de dos números. Terna pitagórica. Propiedades y aplicaciones.

Capítulo 5: Elementos de la teoría de conjuntos

5.1. Conjuntos, elementos y pertenencia. Definición de un conjunto por extensión y por comprensión. Notaciones. Diagramas de Venn. Conjuntos iguales, finitos, infinitos y disjuntos. Subconjunto. Inclusión, igualdad y complementación de conjuntos. Conjunto de las partes de un conjunto. Propiedades y aplicaciones.

5.2. Operaciones con conjuntos: intersección, unión, diferencia, diferencia simétrica. Leyes de De Morgan. Par ordenado. Producto cartesiano. Propiedades y aplicaciones.

5.3. Relaciones entre conjuntos. Gráficos. Representación por lista, por tabla o matriz, por diagrama cartesiano y por flechas. Relaciones binarias. Dominio de imagen de una relación. Relación inversa. Propiedades de las relaciones binarias: reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica, de equivalencia y de orden. Clases de equivalencia. Propiedades y aplicaciones.

5.4. Funciones. Función de un conjunto a otro. Dominio, codominio y ley funcional. Conjunto imagen y preimagen de una función. Igualdad de funciones. Función identidad. Función constante. Restricción y prolongación de una función. Composición de funciones. Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas. Correspondencia biunívoca. Función inversa. Involución. Función real. Representación gráfica de una función. Propiedades y aplicaciones.

5.5. Ecuaciones. Igualdad formal. Incógnita, solución o raíz y conjunto de soluciones de una ecuación. Resolución de una ecuación. La ecuación $f(x)=b$. La ecuación $f(x)=g(x)$. Propiedades y aplicaciones.

5.6. Conjuntos equipotentes. Cardinal de un conjunto. Conjunto numerable. Sucesión. Potencia del continuo. Propiedades y aplicaciones.

5.7. Principio de inducción matemática (inducción completa). Hipótesis de inducción. El símbolo de sumatoria. Indice de la sumatoria y rango de variación. Factorial. Número combinatorio. Fórmula de Stieffel. Triángulo aritmético de Tartaglia. Potencia de un binomio. Binomio de Newton. Propiedades y aplicaciones.

Capítulo 6. Números Reales

6.1. El cuerpo de los números reales. Ley de composición interna. Operación. Estructura de grupo conmutativo y de cuerpo conmutativo. Propiedades fundamentales de los cuerpos conmutativos. Leyes asociativa, conmutativa y distributiva. Elemento neutro y simétrico (opuesto o recíproco). Números racionales e irracionales. El número $\sqrt{2}$ no es racional. Propiedades y aplicaciones.

6.2. Desigualdades entre números reales. Propiedades y aplicaciones.

6.3. Intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos e ilimitados. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$. Propiedades y aplicaciones.

6.4. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita. Dominio de definición de la ecuación o de la inecuación. Ecuaciones equivalentes y transformaciones regulares. Ecuaciones e inecuaciones racionales. Inecuaciones de primer grado con parámetros. Propiedades y aplicaciones.

6.5. Valor absoluto de un número real. Desigualdad triangular. Propiedades y aplicaciones.

6.6. Distancia entre dos números reales. Entorno y entorno reducido de un punto. Propiedades y aplicaciones.

6.7. Cota superior, extremo superior y elemento máximo de un conjunto de números reales. Cota inferior, extremo inferior y elemento mínimo de un conjunto de números reales. Conjunto acotado. Punto de acumulación de un conjunto de números reales. Propiedades y aplicaciones.

Capítulo 7: Funciones Reales

7.1. Sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Cuadrantes, ejes y coordenadas. Distancia y punto medio entre dos puntos del plano. Propiedades y aplicaciones.

7.2. Características de las funciones reales. Representación gráfica. Variable independiente y variable dependiente. Simetría de las gráficas de una función y de su inversa. Clasificación en: funciones algebraicas, racionales, enteras o polinomiales, potenciales, fraccionarias, homográficas, irracionales, exponenciales, logarítmicas, hiperbólicas y trigonométricas. Funciones decreciente y estrictamente decreciente, creciente y estrictamente creciente. Funciones monótonas y estrictamente monótonas. Funciones periódicas. Período fundamental. Partición de un intervalo y función escalera. Funciones de trazo continuo o discontinuo. Operaciones elementales con funciones reales: suma, resta, producto, cociente y producto por un escalar. Gráficas de funciones obtenidas a partir de una dada. Traslaciones de gráficas en forma vertical y horizontal. Funciones reales elementales y sus representaciones gráficas: constante, identidad, signo, lineal, valor absoluto, parte entera, mantisa, escalón recíproca (hipérbola equilátera), parábola cuadrática y parábola cúbica, raíz cuadrada y raíz cúbica. Propiedades y aplicaciones.

7.3. La recta en el plano. La función polinómica de primer grado. Diferentes representaciones: ecuación explícita, ecuación implícita (general) y ecuación segmentaria de una recta en el plano. Pasaje de una forma a otra. Significado geométrico de los coeficientes. Haz de rectas que pasa por un punto. Recta que pasa por dos puntos. Angulo entre dos rectas. Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad entre dos rectas. Inecuaciones de primer grado en dos variables. Sistemas de inecuaciones de primer grado en dos variables. Conjunto convexo. Propiedades y aplicaciones.

7.4. Función homográfica. Asíntona vertical y asíntona horizontal. Representación gráfica. Propiedades y aplicaciones.

7.5. Función cuadrática. La función polinómica de segundo grado. Ecuación de segundo grado con una incógnita y raíces. Gráfica de la función de segundo grado. Vértice de una parábola. Signo de la función de segundo grado. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita. Intersección de gráficas en el plano. Intersección de una recta con una parábola, de una recta con una hipérbola y de dos parábolas. Ecuación de abscisas. Inecuaciones de segundo grado con parámetros. Ecuación bicuadrada. Propiedades y aplicaciones.

7.6. Función exponencial. Gráficas de las funciones exponenciales con bases $a > 1$ y $0 < a < 1$. Propiedades y aplicaciones.

7.7. Función logaritmo. Logaritmo natural y decimal. Gráfica de la función logaritmo natural. Propiedades y aplicaciones.

7.8. Funciones hiperbólicas (seno, coseno y tangente hiperbólica). Propiedades y aplicaciones.

7.9. Funciones hiperbólicas inversas (argumento seno, argumento coseno y argumento tangente hiperbólica) y sus gráficas. Propiedades y aplicaciones.

7.10. Funciones trigonométricas. La variable real radián. Las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente y sus correspondientes funciones recíprocas. Funciones trigonométricas inversas (arco seno, arco coseno y arco tangente trigonométrica). Representación gráfica de las funciones trigonométricas y sus inversas. Angulo formado por dos rectas no paralelas. Coordenadas polares en el plano. Polo y eje polar. La recta y la circunferencia en coordenadas polares. Propiedades y aplicaciones.

7.11. Ecuaciones e inecuaciones irracionales. La transformación elevar al cuadrado. Dominio de definición de una ecuación o de una inecuación irracional. Resolución de una inecuación irracional. Representación gráfica. Propiedades y aplicaciones.

7.12. En Trabajos Prácticos: Aplicaciones de las funciones reales elementales a problemas de la economía y de la empresa. Interés compuesto. Costos, ingresos y utilidades. Determinación de la opción óptima.

Capítulo 8: Números Complejos

8.1. Introducción

8.2. El cuerpo de los números complejos. Definición de un número complejo. Componente real y componente imaginaria. Igualdad entre números complejos. Operaciones con números complejos: suma, resta, producto y cociente. Elemento neutro, elemento opuesto, elemento unidad y elemento inverso. Complejos con segunda componente nula. Parte real y parte imaginaria. Propiedades y aplicaciones.

8.3. Forma binómica de un número complejo. Unidad imaginaria. Potencia entera de la unidad imaginaria. Propiedades y aplicaciones.

8.4. Conjugación de números complejos. Norma y módulo de un complejo. Propiedades y aplicaciones.

8.5. Operaciones de números complejos en forma binómica. Propiedades y aplicaciones.

8.6. Representación geométrica de los números complejos. Plano complejo. Argumento de un número complejo. Forma polar y trigonométrica de un número complejo. Pasaje de una forma a la otra. Propiedades y aplicaciones.

8.7. Operaciones de números complejos en forma polar o trigonométrica. Producto y cociente de números complejos en forma polar. Fórmula de De Moivre. Raíz n-ésima complejo y de la unidad. Raíz cuadrada principal de un número real negativo. Propiedades y aplicaciones.

Capítulo 9: Polinomios

9.1. Introducción

9.2. Algunas nociones básicas. Polinomio complejo. Grado y coeficientes de un polinomio. Función polinómica. Igualdad entre polinomios. Operaciones con polinomios. Propiedades y aplicaciones.

9.3. Descomposición factorial de un polinomio. Multiplicidad de una raíz. Propiedades y aplicaciones.

9.4. Polinomios a coeficientes reales. Propiedades de las raíces complejas conjugadas. Propiedades y aplicaciones.

9.5. El cálculo de las raíces. Raíces racionales de polinomios a coeficientes racionales. Teorema de Gauss. Cálculo aproximado de las raíces reales. Cotas superior e inferior del conjunto de las raíces reales. Acotación, separación y aproximación de las raíces reales. Teorema de Laguerre-Thibault. Método dicotómico. Raíz aproximada. Error de aproximación. Propiedades y aplicaciones.

INTRODUCCIÓN

▲ ALGUNOS TÉRMINOS MATEMÁTICOS

En matemática existen cuatro términos que se encontrarán frecuentemente siempre que se trate con demostraciones. Estos son proposición (propiedad), lema, teorema y corolario. Una **proposición** o **propiedad** es un enunciado de interés que se está tratando de demostrar. Algunas proposiciones son consideradas (subjetivamente y muchas veces también objetivamente) extremadamente importantes y se las llama **teoremas.**

La demostración de un teorema puede ser muy larga, por lo que resulta más fácil realizar la demostración por "partes". Por ejemplo, para demostrar "P implica Q", puede ser necesario demostrar primero que "P implica C", luego, que "C implica D" y, finalmente, que "D implica Q". Cada una de las proposiciones obtenidas podría presentarse por separado, y éstas se llaman **lemas.** En otras palabras, un lema es una proposición preliminar cuyos resultados se utilizarán en la demostración de un teorema. Por otro lado, se denomina **corolario** a toda proposición que surge casi inmediatamente como resultado de que un teorema o proposición es verdadero. En resumen, una proposición o propiedad es un enunciado que se trata de demostrar que es verdadero. Un teorema es una proposición importante. Un lema es una proposición preliminar que va a utilizarse en la demostración de un teorema, y un corolario es una proposición que surge como resultado inmediato de un teorema.

Un **ejemplo** es un caso particular o concreto de una propiedad o proposición verdadera. En cambio, un **contraejemplo** es un caso particular o concreto que indica que una determinada propiedad o proposición es falsa.

Un aporte importante al crecimiento intelectual y a la iniciación a la creatividad es el poder particionar una demostración larga en la concatenación de lemas cortos, los cuales son unos independientes de los otros; es decir, que los lemas o resultados intermedios representan implicancias verdaderas que por concatenación y/o reiteración ayudan a demostrar el resultado o teorema fundamental.

▲ PROBLEMA FUNDAMENTAL EN LA MATEMÁTICA: P IMPLICA Q

Dadas dos proposiciones P y Q, un problema de fundamental interés en matemáticas es el de demostrar que si P es verdadero, entonces Q es verdadero. Una demostración es un método formal para realizar esta tarea. A menudo, las formas particulares de P y Q pueden indicar el camino a seguir.

Para poder hacer una demostración, se debe saber exactamente lo que significa demostrar que "si P es verdadero entonces Q es verdadero". La proposición P se llama a menudo **hipótesis** y el postulado Q **tesis.** Para abreviar, la proposición "si P es verdadero entonces Q es verdadero", se reduce a "si P entonces Q", o simplemente "P implica Q" (que se nota: $P \Leftrightarrow Q$).

Parece razonable que las condiciones bajo las cuales "P implica Q" es verdadero dependerán de si P y Q son verdaderos. Por lo tanto, hay cuatro posibles casos a considerar:

- P es verdadero y Q es verdadero;
- P es verdadero y Q es falso;
- P es falso y Q es verdadero;
- P es falso y Q es falso.

Una **tabla de verdad** es un método para determinar cuándo una proposición, por ejemplo: "P implica Q" es verdadera, debiendo examinarse todos los posibles valores de la verdad de las proposiciones individuales P y Q.

Cuando se trata de demostrar que "P implica Q" es verdadero, se puede suponer que la proposición de la izquierda de la palabra "implica" es verdadera. La meta es concluir que el postulado de la derecha es verdadero. Se debe tener en cuenta que una demostración de la proposición "P implica Q" no es un intento de verificar si P y Q son verdaderos, sino demostrar que Q es una **consecuencia** de haber supuesto que P es verdadero.

En general, la habilidad para demostrar que Q es verdadero dependerá mucho del hecho de que se haya supuesto que P es verdadero y, finalmente, se tendrá que descubrir la relación entre P y Q.

Existen muchas maneras de decir que "P implica Q":

- Cuando P es verdadero, Q debe ser también verdadero;
- Q se deduce de P;
- Q es una consecuencia necesaria de P;
- P es condición suficiente para Q;
- P sólo si Q.

Otras tres proposiciones relacionadas con "P implica Q", llamada **Proposición directa**, son:

1) "Q implica P" (llamada **Proposición recíproca**),
2) "NO P implica NO Q" (llamada **Proposición inversa**),
3) "NO Q implica NO P" (llamada **Proposición contrarrecíproca**),

donde NO P y NO Q son la negación de P y de Q, respectivamente.

Las proposiciones directa y contrarrecíproca están relacionadas entre sí según la siguiente equivalencia:

Teorema 1: Si P y Q son dos proposiciones entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NO } Q \Rightarrow \text{NO } P).$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Se tiene (NO Q) y se quiere probar que (NO P) es válido, es decir, que P no es verdadero. Si se supone, por utilización del método por contradicción, que P es verdadero entonces Q es también verdadero, por hipótesis, lo cual es un absurdo. Por lo tanto (NO P) es verdadero.

$\Rightarrow$) Se prueba de una manera análoga a lo anterior.

Observación 1. La equivalencia anterior es muy útil en Matemática: Por ejemplo, en este curso se la utilizará para hallar una proposición equivalente a la definición de función inyectiva en el Capítulo 5. Dicha equivalencia resulta ser la que se usará generalmente en la práctica.

▲ PROBLEMAS POR RESOLVER Y PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

En Matemática existen dos tipos de problemas fundamentales, a saber: los problemas por resolver y los problemas por demostrar.

❑ PROBLEMAS POR RESOLVER

El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema. La incógnita es lo que se busca o lo que se pide. Estos problemas pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos, son problemas serios o simples acertijos. Los principales elementos del problema por resolver son: la incógnita, los datos y la condición.

Para encontrar la solución a estos problemas hay que conocer, de modo preciso, los elementos principales: incógnita, datos y condición. A continuación se detallan preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos que, para la mayoría de los problemas, resultan ser de gran utilidad:

- ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?
- Distinga las diversas partes de la condición.
- Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.
- Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
- No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra; ¿en qué medida la incógnita queda entonces determinada?, ¿cómo puede variar?, ¿puede deducir de los datos algún elemento útil?
- ¿Podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita?; ¿podría cambiar la incógnita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos?, ¿ha utilizado la condición por completo?

❑ PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

El propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. Los elementos de estos problemas son, si es un problema matemático usual, la hipótesis y la conclusión del teorema que hay que probar.

Para resolverlos deben conocerse exactamente sus partes principales: hipótesis y conclusión. A continuación se detallan preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos que, para la mayoría de los problemas, resultan ser de gran utilidad:

- ¿Cuál es la hipótesis?, ¿cuál es la conclusión?
- Distinga las diversas partes de la hipótesis.
- Encuentre la relación entre hipótesis y conclusión.
- Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o similar.
- No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte; ¿sigue siendo válida la conclusión?
- ¿Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil?; ¿podría pensar en otra hipótesis de la cual se pudiera deducir fácilmente la conclusión?, ¿podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí?
- ¿Ha empleado la hipótesis completa?

Observación 2. Por regla general, los problemas por resolver tienen mayor importancia en la matemática elemental mientras que los problemas por demostrar son más importantes en la matemática superior. Hay que tener en cuenta que el pasar del uno al otro implica un pasaje de la **etapa de lo concreto** a la **etapa de lo abstracto** que comienza a partir de los 13 años.

CAPÍTULO 1

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

1.1. INTRODUCCIÓN. SUCESIVAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NÚMERO

Los distintos subconjuntos de números reales que se utilizan en la práctica diaria se deducen a partir de sucesivas **ampliaciones** del conjunto de los **números naturales** $\mathbb{N}=\{1,2,3,4...\}$. El concepto de conjunto y sus aplicaciones a relaciones y funciones entre conjuntos será tratado con detalles en el Capítulo 5.

En $\mathbb{N}$, con la operación suma, se pueden plantear problemas que no siempre tienen solución, como es el siguiente:

"Sean n, m $\in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Hallar $x \in \mathbb{N}$ de manera que $n+x=m$".

Por ejemplo: ¿existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $5+x=2$? La respuesta es negativa, pues no se puede encontrar ningún número natural x que lo verifique. Si, en cambio, se considera este problema en el conjunto de los **números enteros** $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$ la respuesta al planteo anterior es afirmativa, al existir el número entero $x=-3$ que soluciona el problema pues $5+(-3) = 2$. Luego, es necesario considerar el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ (una ampliación de $\mathbb{N}$) para encontrar soluciones a problemas que no existen en $\mathbb{N}$.

Volviendo a la pregunta anterior pero formulada de otra manera:

¿$\forall n, m \in \mathbb{N}, \exists\, x \in \mathbb{Z}$ tal que $n + x = m$?

La respuesta es afirmativa pues existe un único $x \in \mathbb{Z}$, definido por $x=m-n$, que satisface la ecuación dada.

También en $\mathbb{Z}$ hay problemas que no siempre tienen solución. Por ejemplo, para la operación producto:

"Sean n, m $\in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$ y m un número que no es múltiplo de n. Entonces ¿existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $nx=m$?"

Por ejemplo: ¿Qué número entero x verifica que $3x = 2$?. Ningún número entero lo verifica pero sí el número fraccionario $x = \frac{2}{3}$, pues $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$.

Luego, es necesario considerar una ampliación del conjunto de los números enteros: el conjunto Q de **números racionales (fraccionarios)** para resolver problemas como el planteado arriba. Son números fraccionarios los de la forma $\frac{m}{n}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. (La diferencia entre números racionales y fraccionarios se verá con más detalle en el problema 11 del capítulo 5). Por otra parte, todo número entero puede también considerarse fraccionario debido al hecho que $m = \frac{m}{1}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Hasta aquí se consideraron tres conjuntos de números, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ que guardan la siguiente relación de inclusión: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. La pregunta simple que uno puede plantearse es:

"¿Existen otros números que no sean números racionales?"

La respuesta es afirmativa y para poder justificarla se puede considerar el siguiente problema: "¿cuánto mide la diagonal de un cuadrado cuyos lados tienen una longitud unitaria? o, dicho de otra forma, ¿cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos dos lados iguales tienen una longitud unitaria?". Utilizando el Teorema de Pitágoras (ver capítulo 4), resulta que la respuesta es $\sqrt{2}$. Pero, inmediatamente surge la cuestión: ¿ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$? Puede demostrarse que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (ver el capítulo 6).

Luego, existen números que no son racionales y que son llamados **números irracionales** ($\mathbb{I}$). Son números irracionales, por ejemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{3}{7}\sqrt{2}$, π, etc. Este conjunto de números irracionales junto con el conjunto de números racionales determinan el conjunto de **números reales** $\mathbb{R}$; es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Son números reales: 2, 0, -74, $\frac{3}{8}, -\frac{15}{2}, \sqrt{2}$.

En el siguiente cuadro se sintetizan los conjuntos de números que se han considerado hasta aquí:

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \quad (\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset) \\ & & \uparrow \\ & & \mathbb{I} \end{array}$$

Así como se amplió el conjunto de números naturales, el conjunto de números reales también puede ser ampliado a un nuevo conjunto de números: el conjunto de los **números complejos** $\mathbb{C}$ (ver el Capítulo 8). En $\mathbb{C}$, se encuentran soluciones a problemas, como el siguiente:

"Hallar $x \in \mathbb{R}$ / $x^2 + 1 = 0$"

que en $\mathbb{R}$ no tiene solución, y que en $\mathbb{C}$ tiene dos soluciones dadas por $x = i$ y $x = -i$ donde $i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ es la **unidad imaginaria.**

1.2. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

A continuación se verán las operaciones y las propiedades fundamentales en los diferentes conjuntos numéricos.

▲ Números Naturales ($\mathbb{N}$)

El conjunto de los números naturales es el dado por:

$$\mathbb{N} = \{ 1,2,3,4,5,6,7,.......\}.$$

❑ Propiedades de la suma (o adición)

a) Es una operación cerrada, es decir: $a + b \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$;

b) Conmutativa: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$;

c) Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c, \in \mathbb{N}$;

d) Cancelativa: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$, $\forall a, b, c, \in \mathbb{N}$;

e) Uniforme: $b = c \Rightarrow a + b = a + c$, $\forall a \in \mathbb{N}$

❑ Propiedades de la diferencia (o sustracción)

a) No es una operación cerrada. Contraejemplo: $3-5 = -2 \notin \mathbb{N}$.

La diferencia entre dos números naturales existe si y sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo, es decir: $\forall$ a, b $\in \mathbb{N}$, se tiene

$$a - b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a > b$$

b) No se verifica la propiedad conmutativa. Contraejemplo: $3 - 5 = -2 \neq 2 = 5 - 3$;

c) No es asociativa. Contraejemplo: $7- (5 - 2) =7 -3 = 4 \neq 0 = 2 - 2 = (7 - 5) -2$;

d) Cancelativa: $b - a = c - a \Rightarrow b = c$;

e) Uniforme: $b = c \Rightarrow b - a = c - a$.

❑ Reglas de supresión de paréntesis

$$a + (b - c) = a + b - c \quad ; \quad a + (b + c) = a + b + c$$

$$a - (b + c) = a - b - c \quad ; \quad a - (b - c) = a - b + c$$

❑ Propiedades del producto

a) Es una operación cerrada: $a \cdot b \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$;

b) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a \ \ \forall a, b \in \mathbb{N}$;

c) Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)\cdot c \ \forall \ a, b, c \in \mathbb{N}$;

d) Existencia del **elemento neutro**: $\exists \ 1 \in \mathbb{N} \ / \ a \cdot 1 = 1\cdot a = a, \ \forall \ a \in \mathbb{N}$;

e) Cancelativa: $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c, \ \forall a \in \mathbb{N}$;

f) Uniforme: $b = c \Rightarrow a \cdot b = a \cdot c, \ \forall a \in \mathbb{N}$.

g) Propiedades distributivas del producto con respecto a la suma y la diferencia:

$$a\cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad ; \quad a\cdot (b - c)= a \cdot b - a \cdot c$$

Como consecuencia de la propiedad conmutativa del producto se obtienen las propiedades distributivas siguientes:

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad ; \quad (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$

❏ Propiedades del cociente

a) No es una operación cerrada. Contraejemplo: $3 \div 2 = 1,50 \notin \mathbb{N}$.
El cociente entre dos números naturales existe en el caso que el dividendo es múltiplo del divisor.

b) No es conmutativo. Contraejemplo: $8 \div 4 = 2 \neq 0,50 = 4 \div 8$;

c) No es asociativo. Contraejemplo: $8 \div (4 \div 2) = 8 \div 2 = 4 \neq 1 = 2 \div 2 = (8 \div 4) \div 2$;

d) Cancelativa: $a \div b = c \div b \Rightarrow a = c$;

e) Uniforme: $a = c \Rightarrow a \div b = c \div b$;

f) Propiedad distributiva del cociente respecto a la suma y a la diferencia: Esta propiedad es válida sólo a derecha:

$$(a + b) \div c = a \div c + b \div c \quad ; \quad (a - b) \div c = a \div c - b \div c$$

▲ Números enteros ($\mathbb{Z}$)

El conjunto de números enteros es el dado por:

$$\mathbb{Z}=\{.....,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....\} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3.....\}$$

❏ Propiedades de la suma

Se verifican las mismas propiedades de la suma de números naturales. Además, se tiene:

a) Existencia del elemento neutro :

$$\exists\, 0 \in \mathbb{Z} \,/\, a + 0 = 0 + a = a,\ \forall\, a \in \mathbb{Z};$$

b) Existencia del elemento opuesto, es decir:

$$\forall\, a \in \mathbb{Z},\ \exists\, -a \in \mathbb{Z} \,/\, a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

❏ Propiedades de la diferencia

Se verifican las propiedades b), c), d) y e) de la diferencia de números naturales, excepto la propiedad a), es decir, la diferencia de números enteros es una **operación cerrada**, pues:

$$a - b \in \mathbb{Z},\ \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Además, se tiene:

a) En la diferencia, el elemento neutro de la suma verifica:

$$a - 0 = a,\ \forall a \in \mathbb{Z}.$$

❏ Reglas de supresión de paréntesis

Son válidas las mismas reglas citadas en los números naturales ($\mathbb{N}$).

❑ Propiedades del producto

Se verifican las mismas propiedades del producto de números naturales.
Además, se tiene:

a) Ley de anulación del producto: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$

❑ Propiedades del cociente

El cociente entre dos números enteros existe en el caso en que el dividendo es múltiplo del divisor y, además, el divisor es distinto de cero. Se verifican las mismas propiedades del cociente de números naturales.

❑ Reglas de signos para el producto y el cociente

$$
(2)\quad \left|\begin{array}{l}
a \cdot b > 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0). \\
a \cdot b < 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b > 0). \\
a \div b > 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0). \\
a \div b < 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b > 0).
\end{array}\right.
$$

▲ Números racionales ($\mathbb{Q}$)

El conjunto de los números fraccionarios es el dado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / \, p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}.$$

El conjunto de los números racionales se definirá con más detalle en el Capítulo 5 a través de una relación de equivalencia entre números fraccionarios. Por el momento, y sin pérdida de generalidad, se puede suponer que ambos conjuntos, el de los números fraccionarios y el de los racionales, son iguales.

❑ Definición de suma y diferencia

Suma: $$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s} \quad , \quad q \neq 0 \, , \, s \neq 0$$

Diferencia: $$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s - r \cdot q}{q \cdot s} \quad , \quad q \neq 0 \, , \, s \neq 0$$

❑ Propiedades de la suma y de la diferencia

La suma y diferencia de números racionales gozan de las mismas propiedades que la suma y diferencia de números enteros. También son válidas las reglas de supresión de paréntesis mencionadas en los números enteros.

❑ Definición de producto y cociente

Producto $$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{p\cdot r}{q\cdot s}$$

Cociente $$\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{p\cdot s}{q\cdot r}.$$

Definición 1. Dos fracciones se dicen **equivalentes** o iguales cuando el producto de los extremos es igual al producto de los medios, es decir

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s}\Leftrightarrow ps=qr.$$

❑ Propiedades del producto

Se verifican las propiedades vistas en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Además, existe el **elemento recíproco o inverso** para todo número racional distinto de cero, es decir:

$$(4)\qquad \forall\ \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\ \text{con}\ p\neq 0\wedge q\neq 0,\ \exists\ \frac{q}{p}\in\mathbb{Q}\ /\ \frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}=1.$$

❑ Propiedades de la división

Se verifican las propiedades mencionadas en $\mathbb{N}$ excepto a), es decir, la división en $\mathbb{Q}$ es una **operación cerrada**:

$$(5)\qquad \frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot r}\in\mathbb{Q},\ \forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}\qquad \text{con } r\neq 0\ ,\ s\neq 0.$$

❑ Orden en $\mathbb{Q}$

Observación 1. En el conjunto $\mathbb{Q}$ se puede considerar que todo número $p\div q$ (con $q\neq 0$) tiene el divisor q siempre positivo y que el signo del número lo asume el dividendo p, es decir: si $p\div q\in\mathbb{Q}$ entonces se puede considerar que $q>0$ y $p\in\mathbb{Z}$.

Ejemplos: (i) $\frac{5}{3}=+\frac{5}{3}=\frac{+5}{3}$; (ii) $-\frac{5}{3}=\frac{-5}{3}$

Definición 2. Si $b>0$ y $d>0$, entonces se define el siguiente **orden** en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ ($\forall a, c\in\mathbb{Z}$):

$$(6)\qquad \frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}\quad\Leftrightarrow\quad a\cdot d\leq c\cdot b.$$

En forma análoga se definen los símbolos " $<$ ", " $\geq$ " y " $<$ ".

Ejemplos:

(i) $\frac{3}{7} \leq \frac{8}{9}$ pues $3 \cdot 9 = 27 \leq 56 = 7 \cdot 8$;

(ii) $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} \leq \frac{-1}{5} = \frac{-1}{5}$ pues $(-3) \cdot 5 = -15 \leq -5 = 5 \cdot (-1)$;

(iii) $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \leq \frac{3}{4}$ pues $(-1) \cdot 4 = -4 \leq 6 = 2 \cdot 3$

Observación 2. Cuando dos fracciones tienen igual denominador entonces la definición anterior es equivalente al orden de los numeradores, pues si b > o se tiene:

(7) $$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{b} \Leftrightarrow ab \leq cb \Leftrightarrow a \leq c\,.$$

Este hecho resulta útil para ordenar números racionales hallando previamente las fracciones equivalentes de igual denominador.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{7} = \frac{27}{63} \leq \frac{56}{63} = \frac{8}{9}$$

▲ Números reales ($\mathbb{R}$)

Todas las operaciones, vistas anteriormente, cumplen en $\mathbb{R}$, las mismas propiedades que las de los números racionales. En resumen, la suma de números reales satisface las siguientes propiedades fundamentales ($\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$):

a) Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$;

b) Conmutativa: $a + b = b + a$;

c) Existencia del elemento neutro: $\exists\ 0 \in \mathbb{R}\ / a + 0 = 0 + a = a$;

d) Existencia del elemento opuesto, es decir,

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, -a \in \mathbb{R}\ / \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

En resumen, el producto de números reales satisface las siguientes propiedades fundamentales. ($\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$):

a) Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

b) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$;

c) Existencia del elemento neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R}\ / a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

d) Existencia del elemento recíproco:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)\ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}\ /\ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1\ ;$$

e) Propiedades distributivas del producto con respecto a la suma :

$$a\ .\ (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

f) Orden: Todo número real verifica una y sólo una de las siguientes posibilidades:

(8) ✓ $x = 0$, ✓ $x > 0$ (número positivo), ✓ $x < 0$ (número negativo) .

Definición 3. ✓ Se denota con $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales positivos.
✓ Sean a, b $\in \mathbb{R}$. Se dice que a es **mayor que** b (y se nota $a > b$) si y sólo si $(a - b) > 0$ (es decir: $a - b \in \mathbb{R}^+$). En forma equivalente se dice que b es **menor que** a.

Por otro lado, la **diferencia de números reales** se define en función de la operación suma de la siguiente manera :

(9) $$a - b = a + (-b)\ ,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

y el **cociente de números reales** se define en función de la operación producto de la siguiente manera:

(10) $$a \div b = a \cdot b^{-1}\ ,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0\ .$$

Observación 3. Justifique el hecho que el elemento neutro para la operación suma (el cero) no tiene elemento inverso o recíproco para la operación producto, es decir $\frac{x}{0}$ no tiene sentido cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

Ayuda: Pruebe que el cero verifica la siguiente propiedad: $0\ .\ a = a \cdot 0 = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$)

1.3 POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

▲ Potenciación

Definición 4. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces:

(11)
$$a^1 = a\ ; \qquad a^0 = 1\ \forall\ a \neq 0\ ;$$
$$a^n = a..\ a..\ a.....a\ (n \text{ veces})\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ ;$$
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ \forall a \neq 0\ ,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Propiedades de la potenciación:

a) Propiedad distributiva respecto del producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

b) Propiedad distributiva respecto del cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $\forall b \neq 0$;

c) Producto de potencias de igual base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

d) Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;

e) Potencia de potencias: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

▲ Radicación

Definición 5. La **raíz enésima de un real a** es el real b cuya potencia enésima es a, es decir:

$$(12) \qquad b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a \qquad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

($a \in \mathbb{R}$ cuando n es impar; en cambio, debe ser $a \geq 0$ cuando n es par).

En la notación $\sqrt[n]{x}$ se indica con $\sqrt[n]{\ }$ el **signo radical**, con x el **radicando** y con n el **índice de la raíz.**

Se puede determinar el signo de la raíz según que el índice sea par o impar, y el radicando positivo o negativo.

Ejemplos:

i) $\sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$;

ii) $\sqrt[3]{-8} = -2$ pues $(-2)^3 = -8$;

iii) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ pues $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$;

iv) $\sqrt[4]{-16}$ no es posible calcularla en $\mathbb{R}$, pues ningún número real elevado a exponente par da por resultado un número negativo (se puede dar una respuesta en el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$)

Propiedades de la radicación:

a) Propiedad distributiva respecto del producto: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

b) Propiedad distributiva respecto del cociente: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

c) Radicación de radicaciones: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Definición 6. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces la **potenciación con exponente fraccionario** se define, utilizando la radicación, de la siguiente manera ($a \in \mathbb{R}$ cuando n es impar; en cambio, debe ser ≥ 0 cuando n es par):

$$(13) \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \ (a \neq 0) \ , \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$$

Observación 4. Tanto la potenciación como la radicación **no son distributivas** con respecto a la suma y a la diferencia.

Contraejemplos:

i) $\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \neq 14 = 8 + 6 \ \sqrt{64} + \sqrt{36}$;

ii) $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8 \neq 4 = 10 - 6 = \sqrt{100} - \sqrt{36}$;

iii) $(2+3)^2 = 5^2 = 25 \neq 13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$;

iv) $(4-3)^2 = 1^2 = 1 \neq 7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$

Observación 5. Los radicales no se deben dejar en el denominador. El proceso de eliminar todos los signos radicales del denominador se llama **racionalización del denominador**. Para lograrlo se multiplica y se divide la correspondiente fracción por una adecuada expresión, de manera de eliminar la raíz en el denominador.

Por ejemplo:

(i) $$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ;$$

(ii) $$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3}{3-2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

En el último ejemplo se usufructúa la diferencia de cuadrados que se verá con más detalles en el Capítulo 2.

1.4 REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES

Definición 7.

1) Se llama **representación decimal de un número x** $\in \mathbb{R}$ a la siguiente expresión:

(14) $$x = \pm\,[r_o + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{100} + \frac{r_3}{1000} + \ldots + \frac{r_n}{10^n} + \ldots] = \pm\, r_o, r_1 r_2 r_3 \ldots r_n \ \ldots \ .$$

donde

(15) $r_o \in \mathbb{N} \cup \{0\}, r_i \in \{0,1,2,3,\ldots,8,9\}, \ \forall\, i \in \mathbb{N},$

+ : número real positivo, - : número real negativo

En general, cuando el número real x es positivo el signo correspondiente se omite. Por otro lado, la parte decimal entera $r_o \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ puede representarse de la siguiente manera (en el caso $r_o \neq 0$):

(16) $r_o = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$,donde $a_i \in \{0,1,2,3,\ldots,8,9\}, \ \forall\, i = 0,1, \ldots,k$

con $a_k \neq 0$ ($a_i = 0, \ \forall\, i > k$)

2) Se dice que la **representación decimal es finita** cuando $r_n \neq 0$ y $r_i = 0, \ \forall i \in \mathbb{N}$, con $i \geq n + 1$.

3) Se dice que la **representación decimal es infinita** cuando no es finita.

4) Se dice que la **representación decimal infinita es periódica** cuando a partir de un cierto índice $n_o \in \mathbb{N}$ un subconjunto de los números r_i (con $n_o \leq i < n_o + m$ y $m \in \mathbb{N}$ cualquiera) comienza a repetirse en forma periódica, es decir, consecutivamente.

Ejemplos:

i) Los siguientes números reales tienen representación decimal finita:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \quad ; \quad \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Más aún, todos los números que tienen una representación decimal finita son números racionales. Si un número tiene m cifras a la derecha de la coma entonces basta multiplicar el número por 10^m y luego dividirlo por 10^m para obtener el correspondiente número fraccionario.

ii) Los siguientes números reales tienen representación decimal infinita periódica:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333.... = 0{,}\overline{3}\ ; \qquad \frac{5}{3} = 1{,}666\ .... = 1{,}\overline{6}\ ;$$

$$\frac{35}{99} = 0{,}353535..... = 0{,}\overline{35}; \qquad \frac{233}{990} = 0{,}23535.... = 0{,}2\,\overline{35}.$$

Todos los números que tienen una representación decimal infinita periódica son números racionales.

(iii) Los siguientes números reales tienen una representación infinita no periódica; todos ellos son números irracionales:

$$\pi = 3{,}141592653589793\ ....; \qquad e = 2{,}718281828459045........\ ;$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135........\ ; \qquad \sqrt{3} = 1{,}7320508\ ....$$

Observación 6. Son números racionales los que tienen una representación decimal finita o infinita periódica; por lo tanto, son números irracionales los que tienen una representación decimal infinita con infinitos dígitos no nulos y sin ninguna periodicidad.

❑ Forma de hallar el número racional dado por una representación decimal infinita periódica

Se analizará la forma de hallar el número racional dado por una representación decimal infinita periódica a través de varios ejemplos, de los cuales se podrá extraer una regla general del correspondiente cálculo, pero se recomienda, para cada caso concreto, realizar un procedimiento análogo al explicitado aquí:

1) Sea $x_1 = 0{,}\overline{3}$. Si se multiplica por 10 se tiene $10\,x_1 = 3{,}\overline{3}$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{rl} 10x_1 & = 3{,}\overline{3} \\ x_1 & = 0{,}\overline{3} \\ \hline 9\,x_1 & = 3 \end{array} \qquad \text{restando miembro a miembro resulta}$$

Luego, se obtiene:

$$x_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Sea $x_2 = 0,\overline{35}$. Si se multiplica por 100 se tiene $100\,x_2 = 35,\overline{35}$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{lcl} 100\,x_2 & = & 35,\overline{35}. \\ x_2 & = & 0,\overline{35} \\ \hline 99x_2 & = & 35 \end{array}$$ restando miembro a miembro resulta

Luego, se obtiene:

$$x_2 = \frac{35}{99}$$

3) Sea $x_3 = 0,2\overline{35}$. Si se multiplica por 10 y por 1.000 se tiene $10\,x_3 = 2,\overline{35}$ y $1.000\,x_3 = 235,\overline{35}$, respectivamente. Por lo tanto:

$$\begin{array}{lcl} 1.000\,x_3 & = & 235,\overline{35} \\ 10\,x_3 & = & 2,\overline{35} \\ \hline 990\,x_3 & = & 233 \end{array}$$ restando miembro a miembro resulta

Luego, se obtiene:

$$x_3 = \frac{233}{990}$$

4) Sea $x_4 = 0,\overline{9}$. Si se multiplica por 10 se tiene $10\,x_4 = 9,\overline{9}$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{lcl} 10\,x_4 & = & 9,\overline{9} \\ x_4 & = & 0,\overline{9} \\ \hline 9\,x_4 & = & 9 \end{array}$$ restando miembro a miembro resulta

Luego se deduce que $x_4 = 1$

¿De este caso, qué se puede deducir?

Trabajo Práctico

1) Suprima paréntesis, corchetes y llaves y resuelva:

(i) $-3+\{-1+[4-(3-7)]+3\}$;

(ii) $-\{2+[-7+1-(3-1)]-(6-5+3)\}$;

(iii) $-\{-[-(-8-3)+(-2-2)+3]-1+5\}$;

(iv) $-\{-(-[-(4-8)-1]+2)-3\}+2$;

(v) $-\{-(-[-(2-10)+1]+6)-8\}-1$.

2) Resuelva:

(i) $(4-6)(4-7)(4-8)-(8-3)(8-9)(8-4)$;

(ii) $-16-\{-[3+(-5+2)]\}\{-[-9-(-12)]\}$;

(iii) $\frac{-7-3}{2}-\frac{16-24}{-8}+\frac{-32+8}{-6}-\frac{1-25}{4}$;

(iv) $\frac{-16+31-29}{8-13-2}+\frac{8-17-6}{-16+8+7}+\frac{-22-17-6}{-14-11+10}$;

(v) $\{[(-45-5)\div(-3+8)]\div(-5)-[-(15-3)\div 4]\}\div(-5)$;

(vi) $-\{-[(-4+12+7)\div 5+8-(-12+11-10)(-2)]\}\div(-11)$;

(vii) $\frac{(-90)\div(-6)}{(-12)\div 4}+\frac{48\div(-6)}{(-100)\div 25}-\frac{(-200)\div(-8)}{360\div(-72)}+\frac{24\div(-4\cdot 6)}{32\cdot 2\div 64}$

3) Reduzca los siguientes números racionales a mínimo común denominador:

(i) $\frac{3}{4},\frac{7}{6},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$; (ii) $\frac{-1}{5},\frac{13}{8},\frac{-9}{20}$;

(iii) $\frac{4}{9},\frac{5}{24},\frac{7}{36},\frac{4}{45}$.

4) Simplifique las siguientes fracciones:

(i) $\frac{12}{20}$; (ii) $\frac{-24}{128}$; (iii) $\frac{-54}{66}$

5) Ordene en forma creciente o decreciente los siguientes números racionales:

(i) $\frac{2}{3},\frac{-5}{2},\frac{-1}{7},\frac{4}{5}$; (ii) $\frac{-1}{3},\frac{1}{3},\frac{-3}{8},\frac{-8}{7}$

6) Resuelva:

(i) $\frac{-1}{3}+\frac{-8}{7}+\frac{-1}{14}-\frac{(-8)}{21}-\left(-\frac{7}{6}\right)$;

(ii) $0-\left(-\frac{17}{20}\right)+\frac{5}{18}-\frac{17}{36}+\frac{73}{90}$;

(iii) $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{10}{7}\right)$; (iv) $\frac{2}{5}\div\frac{-6}{10}$;

(v) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-8}\div\left(-\frac{4}{5}\right)^{-7}$; (vi) $\left(\frac{7}{3}\right)^{1}\div\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$;

(vii) $\sqrt{\frac{169}{25}}$; (viii) $\sqrt{\frac{49}{400}}\,\sqrt{\frac{81}{100}}$;

(ix) $\sqrt{\frac{144}{4}}\div\sqrt{\frac{1}{4}}$; (x) $(-2)\left(\frac{5}{12}+\frac{2}{5}\right)\div\left(-\frac{8}{9}-\frac{1}{5}\right)$;

(xi) $\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{9}{8}}+\frac{1}{3}\right)^{2}$; (xii) $8\div\left(\frac{6^2}{6^3}\div\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}\right)\right)-2^2\div[-2^2-(-12)]$

7) Resuelva:

(i) $\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{81}}-\sqrt{\frac{25}{\sqrt{81}}}$; (ii) $\left(\sqrt{\left(2-\frac{2}{5}\right)^2}-\frac{3}{5}\right)\div\left(\left(\sqrt{81}-\sqrt{49}\right)\div\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$;

(iii) $\dfrac{\left(\frac{2^{-1}}{3^{-1}}+\frac{3^{-1}}{4^{-1}}\right)\sqrt{9^{-1}}+\frac{1}{18}}{4^{-1}\cdot 5^{-1}}$; (iv) $\dfrac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-4\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-(-1)^3}$;

(v) $\dfrac{1-\frac{1}{1-2^{-2}}}{1-\frac{1}{1-2^{-4}}}$; (vi) $\left(\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}-(-7)\right)^{-1}+\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{4^2}}}$;

(vii) $\left(-\frac{5}{6}+1\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3\div\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2}-(-1)^4\right)$;

(viii) $\sqrt{\dfrac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-2}4^5\,\frac{1}{8}\,2^7}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}\right)^2}}$

8) Resuelva:

(i) $\left(\dfrac{\frac{0,3}{5}}{\frac{0,2}{8}} - \dfrac{\frac{1}{0,4}}{\frac{1}{0,16}}\right)^4$; (ii) $\dfrac{\frac{4,01}{5} + 0,99 \cdot 0,2}{\frac{0,312}{0,3} - (0,2)^3 \cdot 5^3 \cdot (0,2)^2}$;

(iii) $\dfrac{\frac{1}{1-0,75} + \frac{1}{2-1,25} + \frac{1}{3-2,5}}{\frac{1}{\frac{1}{2}-0,4} + \frac{1}{\frac{1}{5}-0,1} + \frac{1}{\frac{1}{4}-0,15}}$;

(iv) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,5+\frac{1}{4}} - 0,2} + \dfrac{1}{\frac{\frac{1+0,6}{2}+0,25}{3}}$

9) Convierta las siguientes expresiones decimales periódicas en fracciones:

(i) $0,\overline{5}$; (ii) $0,\overline{39}$; (iii) $0,\overline{483}$;
(iv) $0,\overline{10}$; (v) $0,00\overline{1}$; (vi) $0,0\overline{90}$

10) Transforme en fracciones las expresiones decimales y realice las siguientes operaciones:

(i) $\dfrac{0,\overline{3}}{0,3}$; (ii) $0,\overline{1} + 0,\overline{9}$; (iii) $\dfrac{0,\overline{1} - 3,\overline{7}}{11}$; (iv) $\dfrac{0,5 - 0,\overline{3}}{0,\overline{5}}$;

(v) $\left(\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 0,\overline{1}}{\frac{2}{3}}\right)^{-2}$; (vi) $\left(\dfrac{[(0,5)^2 + 0,\overline{3}] \cdot 1,4\overline{6}}{2,\overline{4} + 0,\overline{3}}\right)^{-1}$;

(vii) $\dfrac{0,02\overline{20} - 0,3\overline{7}}{0,5\overline{87}} \cdot 1,6$; (viii) $[(0,3\overline{7} - 0,1) - (3,1 + 2,\overline{1})] \div \dfrac{1}{3}$;

(ix) $\sqrt{-(-0,2)^2 + 0,0\overline{4}} + 0,\overline{6} \cdot 0,\overline{3}$; (x) $\dfrac{\sqrt[3]{0,027} - 0,\overline{3}}{0,0\overline{5}} + \dfrac{\sqrt{0,00\overline{9}}}{\sqrt{3,\overline{9}}}$

11) Escriba el término que falta (expresado por ?) en las siguientes expresiones:

(i) $\dfrac{?}{6} = 2$; (ii) $\dfrac{?}{0,03} = 4$; (iii) $\dfrac{?}{\frac{5}{6}} = \dfrac{4}{3}$

12) Calcule el valor x en las siguientes expresiones:

(i) $\dfrac{4x-6}{5} = \dfrac{16-4x}{20}$; (ii) $\dfrac{9+x}{x} = \dfrac{7}{4}$;

(iii) $\dfrac{12x}{20+x} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{0,5}$; (iv) $\dfrac{x}{x+\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{17}{40}}$;

Problemas Complementarios

1) Ordene, de menor a mayor, los siguientes números racionales; use el concepto de fracción equivalente:

$$\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ \frac{7}{10}\ ;\ \frac{3}{8}\ ;\ \frac{5}{4}\ ;\ \frac{4}{5}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{7}{5}\ ;\ \frac{3}{11}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{5}{7}$$

2) Complete las siguientes operaciones:

(i)

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & 3 & \ldots \\ + & & 4 & \ldots & 6 \\ & & \ldots & 8 & 9 \\ \hline & \ldots & 2 & 8 & 4 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 7 & 3 \\ + & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & 8 & 2 & 7 \\ \hline & \ldots & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 8 & 7 \\ + & 4 & 6 & \ldots \\ & \ldots & 8 & 4 \\ \hline & 8 & \ldots & 9 \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & \ldots & 3 & \ldots \\ - & \ldots & 2 & \ldots & 1 \\ \hline & 3 & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

(v)

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 2 & 3 & 9 \\ x & & & & \ldots & \ldots \\ \hline & & \ldots & \ldots & 7 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & 4 & 8 & \end{array}$$

(vi)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \ldots, & 1 & \ldots \\ & x & & & \ldots, & \ldots & 7 \\ \hline & & & 4 & 3 & 3 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 8 & \ldots & & \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}$$

(vii)

$$\begin{array}{cccc|ccc} 7 & 5 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \cline{5-7} 3 & 4 & 9 & & 1 & \ldots & \ldots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ & & 0 & 8 & & & \end{array}$$

3) En cada uno de los siguientes problemas encuentre todas las soluciones:

(i) Utilizando solamente una vez las cifras 1,3,4,5 y 8, complete la siguiente operación:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 7 & \ldots & 6 \\ + & & 1 & \ldots & 5 & \ldots \\ \hline & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots \end{array}$$

(ii) Utilizando solamente una vez las cifras 2,4,5,6 y 7, complete la siguiente operación:

		6	.....	.....	1
+		7	9	7	.....
	1	4	.....	9	.....

4) En un negocio hay 4.000 bicicletas. Se vende un cierto número de ellas y, de las que quedan, se sabe que el 63.6363...% son plegables y que el 92,2297297297....% no son de carrera. ¿Cuántas bicicletas se vendieron?

5) Encuentre el número intruso entre los siguientes números reales:

(i) $8{,}9 \cdot 10^{-3}$; (ii) $14{,}7 \cdot 10^{-2}$; (iii) $0{,}0014 \cdot 10^{2}$;

(iv) $124{,}1 \cdot 10^{-2}$; (v) $0{,}0001 \cdot 10^{3}$; (vi) $384{,}517 \cdot 10^{-4}$;

(vii) $0{,}1$; (viii) $9 \cdot 10^{-1}$

6) Una con una flecha los números iguales:

$0{,}05$	5
$0{,}5 \cdot 10^{3}$	$50 \cdot 10^{-3}$
$500 \cdot 10^{-5}$	$0{,}005$
$0{,}05 \cdot 10^{2}$	500
50	$5000 \cdot 10^{-2}$
5000	$50 \cdot 10^{2}$
$0{,}5 \cdot 10^{2}$	$0{,}5$
$0{,}05 \cdot 10$	50

7) Estudie las potencias del 7. ¿Con qué cifra terminará el número 7^{50}?

8) ¿Cuál es el número de cifras del producto $5^{17} \cdot 4^{9}$?

9) (i) Cada letra utilizada (A, P, R, S) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra de manera que se obtenga la siguiente suma:

		R	A	S
+		P	A	R
	A	S	S	A

(ii) Cada letra utilizada (A,B) representa a un dígito entre 0 y 9. Halle los valores de cada letra, de manera que se obtenga la siguiente suma:

$$AB + BA = 99$$

10) Verifique que no es posible determinar el dividendo y el divisor de una división sabiendo que el dividendo es menor que 3.000, el cociente es 82 y el resto es 47.

11) Compare e indique cuál de los siguientes números es el mayor; si es posible, sin utilizar tablas de raíces:

(i) $\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt{5}$; (ii) $\sqrt[3]{14}$ y $\sqrt{6}$; (iii) $\sqrt[3]{14}$ y $\sqrt{5}$;

(iv) 0,00001 y $(81)^{-\frac{5}{2}}$; (v) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{3}-1$; (vi) $\sqrt[4]{7}$ y $\sqrt[6]{20}$

12) Según los gráficos:

2 9 5

conteste las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuál es la cifra más grande?; (ii) ¿Cuál es el número más grande?

13) En un club de 2.200 socios, $\frac{2}{5}$ de los socios practican natación, $\frac{1}{4}$ practica tenis y $\frac{3}{10}$ practica rugby.

(i) ¿Qué parte del total de socios no practica deporte?

(ii) ¿Qué porcentaje del total de socios practica algún deporte?

(iii) ¿Cuál es el deporte que agrupa más socios?

(iv) ¿Cuántos socios practican natación y tenis?

14) Se elige un número de dos cifras AB con A $\neq$ B. Se invierten sus cifras BA. Se resta el menor del mayor y se suman las cifras del resultado. Demuestre que siempre se obtiene el mismo resultado final.

¿Cuál es?

15) ¿Los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11?

16) Complete los cuadrados con los cinco dígitos 1,2,3,4 y 5, de manera que no se repitan en ninguna de las franjas horizontales, verticales y oblicuas .

(i)

		4		
	1	....	....	
....	....	5	....	....
	....	....	....	
		3		

(ii)

		....		
	3	....	2	
....	....	4	....	5
	....	....	....	
		...		

17) Demuestre que el producto de un número de una cifra "a" por otro número formado por n cifras "b" tiene el mismo resultado que el producto de un número formado por una cifra "b" por otro número formado por n cifras "a", es decir que: a x bbb...b = b x aaa... a.

18) Utilizando la definición de la división ($D = d \cdot c + r$), complete el siguiente cuadro:

D	d	c	r
.....	423	178	20
6661	54	.....	19
1457	.....	32	17
3291	62	53	.....

19) Halle dos números de tres dígitos cuyo producto sea 555555.

20) Sean a, b, c, d > 0. Demuestre que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces se tiene $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Definiciones.-

(i) Los **números pares** son los siguientes:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12,......

que se pueden expresar, de manera general, por la expresión

número par = 2n, con n = 0,1, 2, 3, 4, 5, 6,........

(ii) Los **números impares** son los siguientes:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,.........

que se pueden expresar, de manera general, por la expresión

número impar = 2n + 1, con n = 0,1, 2, 3, 4, 5, 6,.........

o en forma equivalente, por la expresión

número impar = 2n - 1, con n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

21) Complete y justifique por "par" o "impar" cada una de las siguientes proposiciones; entendiendo que en caso de la diferencia hay que restar el número menor del mayor:

(i) La suma de dos números pares es ....
(ii) La suma de dos números impares es ....
(iii) La suma de un número par y otro impar es ....
(iv) La suma de tres números pares es ....
(v) La suma de tres números impares es ....
(vi) La suma de cuatro números impares es......
(vii) La suma de cuatro números pares es ....
(viii) La diferencia de dos números impares es.........
(ix) La diferencia de dos números pares es ....
(x) El producto de dos números pares es ....
(xi) El producto de un número par y otro impar es ....

22) Indique y justifique si las siguientes proposiciones son siempre ciertas:

(i) La suma de dos números naturales consecutivos no es divisible por 2;

(ii) La suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3;

(iii) La suma de cuatro números naturales consecutivos no es divisible por 4;

(iv) La suma de cinco números naturales consecutivos es divisible por 5;

(v) Si n es un número natural par, entonces $n^2 - 1$ es el producto de dos números naturales impares consecutivos;

(vi) Si n es un número natural impar, entonces $n^2 -1$ es múltiplo de 4; ¿Será también múltiplo de 8?

23) Ubique los números: 72, 7, 40, 70, 95, 13 y 28 en los lugares correspondientes:

Múltiplos del 8	Impares	Múltiplos del 7	
	///////		Pares
			Múltiplos del 5
/////////////			Primos

Definición.- Se llama **sexagesimal** al sistema de numeración posicional de base 60.

Ejemplos:

(i) En un reloj se tiene: 1 hora = 60 minutos, 1 minuto = 60 segundos;

(ii) En ángulo se tiene: 1 grado = 60 minutos, 1 minuto = 60 segundos.

24) Complete las siguientes tablas:

Horas	Minutos	Segundos
3	....	.....
.....	150	.....
.....	.....	39.600
1/2	.....	.....

Grados	Minutos	Segundos
60	.....	.....
.....	15	.....
.....	.....	7.200

Definición.- El **sistema de numeración romano** es un sistema no posicional que permite representar números con letras. Es no posicional pues el valor de las letras no depende de su lugar o posición, es decir, conservan siempre un mismo valor.

Los símbolos fundamentales del sistema romano son los siguientes:

Número (Sistema decimal)	Número (Sistema romano)
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1.000	M

Para expresar los números naturales en el sistema romano se deben tener en cuenta las siguientes reglas:

i) Todo símbolo escrito a la derecha de otro símbolo de mayor o igual valor se le suma a éste (ej. 11 = XI);
ii) Todo símbolo escrito a la izquierda de otro símbolo de mayor valor se le resta a éste:

- I sólo puede colocarse a la izquierda de V y X (ej. 4 = IV ; 9 = IX);
- X Sólo puede colocarse a la izquierda de L y C (ej. 40 = XL; 90 = XC);
- C sólo puede colocarse a la izquierda de D y M (ej. 400 = CD; 900 = CM);

iii) Sólo pueden repetirse los símbolos I, X, C y M, a lo sumo tres veces (ej. 113 = CXIII);

iv) Para escribir un número mayor que 3999 se colocan rayas horizontales sobre el número. Cada raya horizontal sobre un número equivale a multiplicarlo por mil (ej. 14568 = $\overline{\text{XIV}}$ DLXVIII).

25) Ordene, de menor a mayor, los siguientes números romanos:

XCIX; CDXXIII; CDXLIV; DCLXI; CXII;

CCLIII; CCCXCVII; $\overline{\text{CVII}}$CCCXLVI; $\overline{\text{CIX}}$DLIX.

Definiciones.-

(i) Los **números triangulares** son los dados por la sucesión de números

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3\ldots\ldots$$

es decir: 1, 3, 6, 10, ...

(ii) Los **números cuadrangulares** son los dados por la sucesión de números

$$Q_n = n^2 \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

es decir: 1,4, 9, 16, ...

(iii) Los **números perfectos** son aquellos que son iguales a la suma de todos sus divisores, excepto el número mismo.

(iv) **Dos números son amigos** cuando la suma de los divisores de uno de ellos, exceptuando el número mismo, es igual al otro y recíprocamente.

26) Verifique que:

(i) La diferencia entre dos números cuadrangulares consecutivos es la sucesión de los números impares;

(ii) Los números 36, 1225 y 41616 son números triangulares y cuadrangulares simultáneamente;

(iii) La suma de 2 números triangulares consecutivos es un número cuadrangular;

(iv) Los números 6, 28, 496 y 8128 son números perfectos;

(v) Los números 220 y 284 son amigos. Idem con 1184 y 1210 y, con 2620 y 2924.

Definición: Un cuadrado se dice **mágico** respecto de la operación suma (producto) cuando la suma (producto) de las filas, de las columnas, y de las dos diagonales es constante.

27) Cuadrados mágicos respecto de la suma:

(i) Complete los siguientes cuadrados mágicos con los números del 1 al 9 con constante 15. ¿La solución es única?

a)

8	.....	.....
.....	5	.....
.....	....	.....

b)

.....	.....	.....
.....	.....	1
2	.....	.....

(ii) ¿Es posible construir un cuadrado mágico con los nueve números siguientes: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,19?

28) Cuadrados mágicos respecto del producto:

(i) Complete el siguiente cuadrado mágico.

3	.....	.....
.....	6	.....
.....	1	12

29) ¿Cuál es la menor de las siguientes fracciones

$$\frac{5}{x}, \qquad \frac{x+1}{5}, \qquad \frac{5}{x-1}, \qquad \frac{x}{5}, \qquad \frac{5}{x+1},$$

si $x > 5$?

30) ¿Los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11?

Respuestas Trabajo Práctico

1) (i) 7 ; (ii) 10 ; (iii) 6 ; (iv) 4 ; (v) 4

2) (i) -4 ; (ii) -16 ; (iii) 4 ; (iv) 20 ; (v) -1 ; (vi) 1 ; (vii) 1

3) (i) $\frac{9}{12}, \frac{14}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}$; (ii) $\frac{-8}{40}, \frac{65}{40}, \frac{-18}{40}$;

(iii) $\frac{160}{360}, \frac{75}{360}, \frac{70}{360}, \frac{32}{360}$.

4) (i) $\frac{3}{5}$; (ii) $\frac{-3}{16}$; (iii) $\frac{-9}{11}$

5) (i) $\frac{-5}{2}, \frac{-1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$; (ii) $\frac{-8}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}$

6) (i) 0 ; (ii) $\frac{22}{15}$; (iii) $\frac{2}{21}$; (iv) $-\frac{2}{3}$; (v) $-\frac{5}{4}$;

(vi) $\frac{49}{9}$; (vii) $\frac{13}{5}$; (viii) $\frac{63}{200}$; (ix) 12 ; (x) $\frac{3}{2}$;

(xi) 1 ; (xii) $\frac{7}{2}$

7) (i) $-\frac{13}{9}$; (ii) $\frac{1}{16}$; (iii) 20 ; (iv) $\frac{18}{5}$;

(v) 5 ; (vi) $\frac{5}{9}$; (vii) $-\frac{1}{2}$; (viii) 2^8

8) (i) 16 ; (ii) 1 ; (iii) $\frac{11}{45}$; (iv) 5

9) (i) $\frac{5}{9}$; (ii) $\frac{13}{33}$; (iii) $\frac{161}{333}$;

(iv) $\frac{10}{99}$; (v) $\frac{1}{900}$; (vi) $\frac{1}{11}$

10) (i) $\frac{10}{9}$; (ii) $\frac{10}{9}$; (iii) $-\frac{1}{3}$; (iv) $\frac{3}{10}$;

(v) $\frac{5625}{64}$; (vi) $\frac{250}{77}$; (vii) $-\frac{2348}{2425}$; (viii) $-\frac{74}{5}$;

(ix) $\frac{13}{45}$; (x) $-\frac{11}{20}$

11) (i) 12 ; (ii) 0,12 ; (iii) $\frac{10}{9}$

12) (i) $x = 2$; (ii) $x = 12$; (iii) $x = 10$; (iv) $x = \frac{1}{5}$;

(v) $x = 32$; (vi) $x = \frac{17}{2}$; (vii) $x = \frac{9}{14}$; (viii) $x = \frac{125}{7}$;

(ix) $x = \pm\frac{2}{5}$; (x) $x = \pm 12$; (xi) $x = \pm 10$; (xii) $x = \pm\frac{6}{5}$

Respuestas Problemas Complementarios

1) $\frac{3}{11}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; 1 ; $\frac{5}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{5}{2}$

3) (ii) Tiene dos soluciones ; 4) Se vendieron 744 bicicletas ; 5) Es el (iv)

7) Con 9 ; 8) 18 cifras

9) (i) R = 8, A = 1, S = 3, P = 5

(ii) (0,9), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1), (9,0)

11) (i) $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5}$; (ii) $\sqrt[3]{14} < \sqrt{6}$; (iii) $\sqrt{14} > \sqrt{5}$;

(iv) $0{,}00001 < (81)^{-\frac{5}{2}}$; (v) $\sqrt[3]{5} > \sqrt{3} - 1$; (vi) $\sqrt[4]{7} < \sqrt[6]{20}$

12) (i) 2 ; (ii) 9

13) (i) $\frac{1}{20}$; (ii) 95% ; (iii) natación ; (iv) 1430 socios.

14) Es el número 9

15) Sí ;

27) (i) a) Tiene dos soluciones

29) $\frac{5}{x+1}$

30) Sí

CAPÍTULO 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Expresión literal: es la reunión de letras y números reales combinados entre sí y sometidos a operaciones matemáticas.

Expresión algebraica: es toda expresión literal en la que aparece una combinación finita de las siguientes operaciones matemáticas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

i) $x+y$; ii) $\dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{xy}}$; iii) $\dfrac{2x^2-3y^2}{ax+by}$; iv) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Expresión algebraica entera: es toda expresión algebraica en la que las operaciones matemáticas de que se compone son las siguientes: suma, resta, multiplicación y potenciación con exponente natural.

Ejemplos.

i) $x^2-2xy+y^2$; ii) $ax+b$; iii) ax^2+bx+c.

Expresión algebraica fraccionaria o fracción algebraica: es el cociente de dos expresiones algebraicas enteras, siendo la segunda no nula. El numerador y el denominador de la fracción se llaman **dividendo** y **divisor,** respectivamente.

Ejemplos:

i) $\dfrac{3x^2-x+1}{ax^2+bx+c}$; ii) $\dfrac{2xy+x^2+x^3}{x^2-y^2}$.

Monomio: es toda expresión algebraica entera en la que no intervienen las operaciones suma ni resta.

Ejemplos:

i) $-2ax^2$; ii) $\dfrac{1}{3}a^2xy^2$.

Coeficiente de un monomio: es el número real que precede al monomio (se sobreentiende que en el caso de que hayan varios factores numéricos, éstos se multiplican entre sí).

Ejemplos: los monomios $-2ax^2$, $\dfrac{1}{3}a^2xy^2$ tienen por coeficientes -2, $\dfrac{1}{3}$, respectivamente.

Monomios semejantes: dos monomios son semejantes cuando tienen las mismas letras con los mismos exponentes, es decir, cuando difieren solamente por los coeficientes.

Ejemplo:

$$3ax^2 \; ; \qquad -\frac{1}{3}ax^2$$

Grado de un monomio: es la suma de los exponentes de todas sus letras.

Ejemplos: el monomio $4x^2y^3z$ es de sexto grado y el monomio 5 es de grado cero.

Polinomio: es la suma algebraica de monomios, llamados **términos** del polinomio. Cuando el polinomio tiene sólo dos términos se llama **binomio,** cuando tiene sólo tres términos se llama **trinomio,** etc.

Ejemplos:

(i) $a+b$, $ax+b$ son binomios ; (ii) $a^2+2ab+b^2$ es un trinomio;

(iii) $-3x^3+4x^2+2x-1$ es un polinomio.

Grado de un polinomio: es el mayor de los grados de los monomios que componen el polinomio.

Ejemplos: el polinomio $2x^2+a$ es de segundo grado y el polinomio $4x^5+ax+1$ es de quinto grado.

Polinomio homogéneo: es todo polinomio en el que todos sus términos son del mismo grado.

Ejemplo: el polinomio $3x^2+2xy-y^2$ es un polinomio homogéneo de segundo grado.

Polinomio ordenado respecto de una de sus letras: es cuando los términos del polinomio están dispuestos de modo que los exponentes de dicha letra **(letra ordenatriz)** vayan aumentando o disminuyendo sucesivamente desde el primer término hasta el último. La ordenación será **creciente** o **decreciente**, según que los exponentes de la letra ordenatriz vayan de menor a mayor, o viceversa. El monomio de grado cero en la letra ordenatriz se denomina término independiente.

Ejemplo: el polinomio $3ax^3-6x^4+bx^2-c+dx$, ordenado en forma decreciente respecto de la letra ordenatriz x, está dado por:

$$-6x^4+3ax^3+bx^2+dx-c$$

Polinomio completo: es todo polinomio que contiene términos de todos los grados de la letra ordenatriz, desde el más elevado hasta el grado cero.

Ejemplo: $-3x^3+4ax^2+5b^2x-5a^3$ es un polinomio completo en la letra x.

Observación 1. Si un polinomio es incompleto, entonces puede completarse escribiendo las potencias que faltan afectándolas del coeficiente 0 (cero).

Ejemplo: el polinomio x^4-1 puede completarse de la forma $x^4+0x^3+0x^2+0x-1$

Valor numérico de una expresión algebraica: es el número real que resulta al reemplazar las letras por números determinados y ejecutar las operaciones en la expresión dada.

Ejemplo: el valor numérico de la expresión algebraica $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$ para a = 3 y b =2 es 25, pues

$$\frac{3^2+2\cdot 3\cdot 2+2^2}{3^2-2\cdot 3\cdot 2+2^2}=\frac{25}{1}=25$$

Observación 2. Una expresión algebraica tiene un valor numérico para cada sistema de valores que se atribuyan a sus letras, siempre que las operaciones a las que están sometidas sean posibles. Por ejemplo, la expresión $(x^2+2x+1)\div(x-1)$ carecerá del valor numérico cuando $x=1$, pues no es posible realizar la división cuando el divisor es nulo.

2.2. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS

Se utilizan, en todos los casos, las propiedades de los números reales.

▲ Operaciones con monomios semejantes

1) Suma: $\left(8ab^2\right)+\left(-5ab^2\right)=\left[8+(-5)\right]ab^2=3ab^2$;

2) Resta: $\left(8ab^2\right)-\left(-5ab^2\right)=\left[8-(-5)\right]ab^2=13ab^2$

▲ Operaciones con monomios

1) Suma: $(3ab)+(2ax)=3ab+2ax$;

$(3ab)+(2ax)+(2ab)=5ab+2ax$

2) Resta: $(3ab)-(2ax)=3ab-2ax$

3) Producto: $(3ab)\cdot(2ax)=6a^2bx$

4) Cociente: $(3ab)\div(2ax)=3ab\cdot 2^{-1}a^{-1}x^{-1}=\dfrac{3b}{2x}$

5) Máximo común divisor (MCD): el MCD de dos o más monomios es un **monomio de grado máximo** que divide simultáneamente a todos los monomios dados.

Ejemplo: MCD $\left(14x^2y^3z\,;-21x^4y^5z^2a\,;35x^3y^4z^5b\right)=7x^2y^3z$

Observación 3. Todo monomio semejante al $7x^2y^3z$ es también el MCD de los tres monomios dados en el ejemplo anterior.

6) Mínimo Común Múltiplo (mcm): el mcm de dos o más monomios es un **monomio de grado mínimo** que sea divisible simultáneamente por todos los monomios dados.

Ejemplo: mcm $\left(14x^2y^3z\,;-21x^4y^5z^2a\,;35x^3y^4z^5b\right)=210\,x^4y^5z^5ab$

▲ Operaciones con polinomios

Se resalta la conveniencia de ordenar los polinomios antes de efectuar operaciones.

1) Suma: $\left(3ax^2-2a^2x+a\right)+\left(5ax^2+3a^2x-ax^3-2a\right)=8\,ax^2+a^2x-a\,x^3-a$

2) Resta: $\left(3ax^2-2a^2x+a\right)-\left(5ax^2+3a^2x-ax^3-2a\right)=-\,2ax^2-5a^2x+ax^3+3a$

3) Producto:

a) Producto de un polinomio y un monomio: se utiliza la propiedad distributiva

$$(a+b+c)\cdot d=a\cdot d+b\cdot d+c\cdot d$$

Ejemplo:

$$\left(3ax^2 - 2a^2x + a\right) \cdot (-2ax) = -6a^2x^3 + 4a^3x^2 - 2a^2x$$

b) Producto de dos polinomios: se utiliza la propiedad distributiva en forma reiterativa como se muestra en el ejemplo siguiente:

$$\begin{aligned}(a+b+c)\,(d+e) &= (a+b+c) \cdot d + (a+b+c) \cdot e = \\ &= ad + bd + cd + ae + be + ce\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}&\left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right)\left(2x^2 - x + 2\right) = \left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right) \cdot 2x^2 + \\ &\left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right)(-x) + \left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right) \cdot (2) = \\ &= \left(6x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 2x^2\right) + \left(-3x^4 + 2x^3 - x^2 + x\right) + \\ &+ \left(6x^3 - 4x^2 + 2x - 2\right) = 6x^5 - 7x^4 + 10\,x^3 - 7x^2 + 3x - 2\end{aligned}$$

La ordenación de los polinomios facilita el cálculo del producto. Se tiene, por ejemplo, la siguiente disposición práctica:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & 3x^3 & - & 2x^2 & + & x & - & 1 \\ & x & & & & & & 2x^2 & - & x & + & 2 \\ \hline & 6x^5 & - & 4x^4 & + & 2x^3 & - & 2x^2 & & & & \\ + & & - & 3x^4 & + & 2x^3 & - & x^2 & + & x & & \\ & & & & & 6x^3 & - & 4x^2 & + & 2x & - & 2 \\ \hline & 6x^5 & - & 7x^4 & + & 10x^3 & - & 7x^2 & + & 3x & - & 2 \end{array}$$

4) Cociente:

a) Cociente de un polinomio con un monomio: se utiliza la propiedad distributiva siguiente

$$(a+b+c) \div d = \frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = a \div d + b \div d + c \div d$$

Ejemplo:

$$\left(2ax^2 + bx + 3\right) \div (2ab) = \frac{x^2}{b} + \frac{x}{2a} + \frac{3}{2ab}$$

Observación 4. En general, la división de dos polinomios no es exacta.

b) Cociente de dos polinomios: sean $P = P\,(x)$ y $Q = Q(x)$ dos polinomios en la letra ordenatriz x (sus respectivos coeficientes pueden depender de otras letras) con grados $gr(P) \geq gr(Q)$. Entonces, existen dos polinomios en la letra ordenatriz x : $C = C\,(x)$ (**polinomio cociente**) y $R = R(x)$ (**polinomio resto**) de manera que se tiene igualdad:

$$(1) \qquad P(x) = Q(x)\,C\,(x) + R(x), \quad \text{con } gr(R) < gr(Q)$$

Observación 5. Si Q es un polinomio de primer grado entonces el resto R es un polinomio de grado cero en dicha letra, es decir, un número real.

Ejemplo: disposición práctica para $P \div Q$

Sean $P(x) = 8x^3 + 2ax^2 - 7a^2x + 2a^3$, $Q(x) = 4x^2 + 3ax - a^2$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 8x^3 & + & 2ax^2 & - & 7a^2x & + & 2a^3 & 4x^2 + 3ax - a^2 \\ \cline{9-9}
- & & & & & & & & 2x - a \\
 & 8x^3 & + & 6ax^2 & - & 2a^2x & & & \\ \cline{1-7}
 & & - & 4ax^2 & - & 5a^2x & + & 2a^3 & \\
- & & & & & & & & \\
 & & - & 4ax^2 & - & 3a^2x & + & a^3 & \\ \cline{3-7}
 & & & & - & 2a^2x & + & a^3 &
\end{array}
$$

con lo cual:

$$C(x) = 2x - a \quad , \qquad R(x) = -2a^2x + a^3$$

Por otro lado, se puede verificar que:

$$
\begin{aligned}
Q(x)\,C(x) + R(x) &= \left(4x^2 + 3ax - a^2\right)(2x - a) + \left(-2a^2x + a^3\right) = \\
&= 8x^3 - 4ax^2 + 6ax^2 - 3a^2x - 2a^2x + a^3 - 2a^2x + a^3 = \\
&= 8x^3 + 2ax^2 - 7a^2x + 2a^3 = P(x)
\end{aligned}
$$

Conviene resaltar que cuando P o Q no son polinomios completos, **conviene**, a los efectos del cálculo, completarlos previamente.

c) Cociente de un **polinomio entero en la letra ordenatriz x por otro de primer grado de la forma x - a (a ∈ $\mathbb{R}$):**

Ejemplo: sean $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, $Q(x) = x - 1$ (con $a = 1$)

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 4x & - & 1 & x \quad - \quad 1 \\ \cline{9-9}
- & & & & & & & & 3x^2 + x + 5 \\
 & 3x^3 & - & 3x^2 & & & & & \\ \cline{1-8}
 & & & x^2 & + & 4x & - & 1 & \\
 & & - & & & & & & \\
 & & & x^2 & - & x & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 5x & - & 1 & \\
 & & & & - & & & & \\
 & & & & & 5x & - & 5 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 4 &
\end{array}
$$

con lo cual:

$$C(x) = 3x^2 + x + 5 \; , \qquad R(x) = 4$$

En este caso, los coeficientes del polinomio cociente C(x) y el resto R (que es un número real) pueden calcularse a través del siguiente **procedimiento práctico** (**Regla de Ruffini**), para el cual es imprescindible que el polinomio dividendo esté completo:

		3	-2	4	-1	← coeficientes de P
número real a →	1		3	1	5	
coeficientes de C →		3	1	5	4	← resto R

Teorema del resto. El resto R de la división de un polinomio P = P(x) en la letra ordenatriz x por el binomio (x - a), con $a \in \mathbb{R}$, es el valor numérico que toma dicho polinomio cuando, en él, se sustituye la letra x por a, es decir: R = P(a).

Demostración. Si se divide el polinomio P = P(x) por el binomio (x - a), se tiene que

(2) $$P(x) = (x - a)\, C(x) + R,$$

donde C = C(x) es el polinomio cociente y R es el resto de la división. Por lo tanto, calculando el valor numérico de P para x=a, se obtiene

(3) $$P(a) = (a - a)\, C(a) + R = 0 \,.\, C(a) + R = 0 + R = R$$

Corolario 1. La condición necesaria y suficiente para que un polinomio entero P = P(x) en la letra ordenatriz x sea **divisible** por el binomio (x - a) es que el resto de la división de P(x) por (x - a) sea R = 0

Ejemplo: sean $P(x) = x^5 - 3\,bx^4 + 5\,b^2x^3 - 8\,b^3x^2 + 6\,b^4x - 4\,b^5$, $Q(x) = x - 2\,b$, con $b \in \mathbb{R}$. Aplicando la Regla de Ruffini:

	1	$-3b$	$5b^2$	$-8b^3$	$6b^4$	$-4b^5$
$2b$		$2b$	$-2b^2$	$6b^3$	$-4b^4$	$4b^5$
	1	$-b$	$3b^2$	$-2b^3$	$2b^4$	0

Se tiene que:

$$C(x) = x^4 - bx^3 + 3b^2x^2 - 2b^3x + 2b^4 \quad , \quad R = 0$$

con lo cual el polinomio P es divisible por Q ; es decir P = Q · C

Definición 1. Un número real $a \in \mathbb{R}$ es un **cero o raíz** del polinomio P = P(x) cuando P(a) = 0 ; es decir, cuando el resto de la división de P por (x - a) es cero.

d) Divisibilidad de la **suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases:**

Se trata de dividir $\left(x^m \pm a^m\right)$ por $(x \pm a)$ con $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Se pueden presentar los siguientes cuatro casos:

1) $\underline{\left(x^m + a^m\right) \div (x - a)}$. Se tienen:

$$P(x) = x^m + a^m \ , \quad Q(x) = x - a$$

El resto de la división de P por Q viene dado por

$$R = P(a) = a^m + a^m = 2a^m \neq 0 \, ,$$

con lo cual nunca P es divisible por Q.

2) $\underline{\left(x^m + a^m\right) \div (x + a)}$. Se tienen:

$$P(x) = x^m + a^m \ , \qquad Q(x) = x + a = x - (-\,a)$$

El resto de la división de P por Q viene dado por

$$R = P(-\,a) = (-\,a)^m + \left(a^m\right) = (-1)^m a^m + a^m = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si m es impar} \\ & \\ 2a^m \neq 0 & \text{si m es par} \end{array} \right.$$

con lo cual P es divisible por Q solamente cuando m es impar.

3) $\underline{\left(x^m - a^m\right) \div (x - a)}$. Se tienen:

$$P(x) = x^m - a^m \ , \quad Q(x) = x - a$$

El resto de la división de P por Q viene dado por

$$R = P(a) = a^m - a^m = 0 \ , \ \forall \ m \ ,$$

con lo cual P es siempre divisible por Q, cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$.

4) $\underline{\left(x^m - a^m\right) \div (x + a)}$. Se tienen:

$$P(x) = x^m - a^m \ , \qquad Q(x) = x + a = x - (-\,a)$$

El resto de la división de P por Q viene dado por

$$R = P(-\,a) = (-\,a)^m - \left(a^m\right) = (-1)^m a^m - a^m = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si m es par ,} \\ & \\ -2a^m \neq 0 & \text{si m es impar} \end{array} \right.$$

con lo cual P es divisible por Q solamente cuando m es par.

Resumen:

P	Q	P es divisible por Q
$x^m + a^m$	$x-a$	nunca
$x^m + a^m$	$x+a$	si m es impar
$x^m - a^m$	$x-a$	siempre
$x^m - a^m$	$x+a$	si m es par

Ejemplos: utilizando la Regla de Ruffini se obtienen las siguientes divisiones exactas:

P	Q	$C = P \div Q$
$x^2 - a^2$	$x-a$	$x+a$
$x^2 - a^2$	$x+a$	$x-a$
$x^3 - a^3$	$x-a$	$x^2 + xa + a^2$
$x^3 + a^3$	$x+a$	$x^2 - xa + a^2$
$x^4 - a^4$	$x-a$	$x^3 + x^2a + xa^2 + a^3$
$x^4 - a^4$	$x+a$	$x^3 - x^2a + xa^2 - a^3$
$x^5 - a^5$	$x-a$	$x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4$

5) Productos especiales

a) Cuadrado de un binomio:

(i) $(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

(ii) $(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

b) Cubo de un binomio:

(i) $(a+b)^3 = (a+b)^2\,(a+b) = (a^2 + b^2 + 2ab)\,(a+b) =$

$= a^3 + b^2a + 2a^2b + a^2b + b^3 + 2ab^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(ii) $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 + b^2 - 2ab)\,(a-b) =$

$= a^3 + b^2a - 2a^2b - a^2b - b^3 + 2ab^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

c) Cuadrado de un trinomio:

$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + c^2 + 2(a+b)\,c =$

$= a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

d) Diferencia de cuadrados:

$(a+b)\,(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

2.3. FACTOREO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición 2. Factorear un polinomio es transformarlo en un producto de factores.

Se tienen los siguientes casos:

Caso 1. Factor común: un factor común de un polinomio es el MCD de todos sus términos.

Ejemplos:

(i) $4x^2y+8xy^2+4y^3=4y\left(x^2+2xy+y^2\right)$;

(ii) $2a\,(x-y)+b(y-x)=2a(x-y)-b(x-y)=(x-y)\,(2a-b)$

Observación 6. Cabe resaltar que el factor común y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma son la misma cosa, todo depende si se mira desde el término de la derecha o desde el término de la izquierda.

Caso 2. Descomposición en grupos de igual número de término con un factor común en cada grupo:

Para emplear este método se empieza por agrupar los términos del polinomio en binomios o trinomios, etc., descomponiendo luego cada uno de estos binomios o trinomios en dos factores de manera de obtener un factor común a todas las expresiones parciales del polinomio.

Ejemplos:

(i) $x^2+ax-bx-ab=\left(x^2+ax\right)+(-bx-ab)=x\,(x+a)-b\,(x+a)=(x+a)\,(x-b)$;

(ii) $x^3-2x^2-x+2=\left(x^3-2x^2\right)+(-x+2)=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)\,\left(x^2-1\right)$

Caso 3. Trinomio cuadrado perfecto: es todo trinomio formado por dos términos que son cuadrados perfectos y un tercer término que es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

Ejemplos:

(i) $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$;

(ii) $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2=(b-a)^2$;

(iii) $\frac{1}{9}x^4y^2+\frac{10}{3}ax^2y+25\,a^2=(\frac{1}{3}x^2y+5a)^2$

Caso 4. Cuatrinomio cubo perfecto: es todo cuatrinomio formado por dos términos que son cubos perfectos, un tercer término que es el triple del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo, y un cuarto término que es el triple de la base del primer cubo por el cuadrado de la base del segundo.

Ejemplos:

(i) $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=(a+b)^3$;

(ii) $a^3-b^3-3a^2b+3ab^2=a^3+(-b)^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2=(a-b)^3$;

(iii) $\frac{8}{27}a^3-\frac{4}{3}a^2+2a-1=(\frac{2}{3}a-1)^3$

Caso 5. Diferencia de cuadrados: toda diferencia de cuadrados se puede transformar en el producto de la suma de las bases por la diferencia de las mismas bases.

Ejemplos:

(i) $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$;

(ii) $a^4 - 1 = \left(a^2\right)^2 - 1^2 = \left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right) = \left(a^2+1\right)(a+1)\,(a-1)$;

(iii)

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 9a^2 - b^2 - 6ab = (2x-y)^2 - (3a+b)^2 = (2x-y+3a+b)\,(2x - y - 3a - b)$$

Caso 6. Suma o diferencia de potencias de igual grado: (ver operaciones con polinomios, letra d), caso 4).

Ejemplos:

(i) $\left(x^3 - a^3\right) = (x-a)\left(x^2 + xa + a^2\right)$;

(ii) $\left(x^3 + a^3\right) = (x+a)\left(x^2 - xa + a^2\right)$;

(iii) $\left(x^4 - a^4\right) = (x-a)\left(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3\right)$;

(iv) $\left(x^4 - a^4\right) = (x+a)\left(x^3 - x^2a + xa^2 - a^3\right)$

2.4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS - SIMPLIFICACIONES

Definición 3. Simplificar una expresión algebraica fraccionaria es transformarla en otra equivalente cuyos términos contengan menos factores comunes.

Metodología. Para simplificar una expresión algebraica fraccionaria se realizan las siguientes operaciones:

✓ se descomponen el numerador y el denominador en un producto de factores;

✓ se suprimen los factores comunes al numerador y al denominador, dividiéndolos por su MCD.

Ejemplos:

(i) $\dfrac{15\,x^4y^2z^3}{20\,x^2y^3z} = \dfrac{\left(5x^2y^2z\right)\left(3x^2z^2\right)}{\left(5x^2y^2z\right)(4y)} = \dfrac{3x^2z^2}{4y}$;

(ii) $\dfrac{2x+2-xy-y}{3x+3+xy+y} = \dfrac{2(x+1)-y(x+1)}{3(x+1)+y(x+1)} = \dfrac{(x+1)\,(2-y)}{(x+1)\,(3+y)} = \dfrac{2-y}{3+y}$;

(iii) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2} = \dfrac{(a+b)\,(a-b)}{(a-b)\,(a-b)} = \dfrac{a+b}{a-b}$

Definición 4. Reducir varias fracciones algebraicas a un común denominador es transformarlas en otras equivalentes que tengan el mismo denominador.

Metodología. Para reducir varias fracciones algebraicas a un común denominador se realizan las siguientes operaciones:

✓ se simplifica cada fracción algebraica;

✓ se toma como común denominador al mcm de los denominadores de todas las fracciones algebraicas.

Ejemplos:

1) $\dfrac{x^2+xy}{x^2};\ \dfrac{z^2-zd}{yz};\ \dfrac{c^2}{z} \xrightarrow{\text{paso (i)}} \dfrac{x+y}{x};\ \dfrac{z-d}{y};\ \dfrac{c^2}{z} \xrightarrow{\text{paso (ii)}} \dfrac{yz\,(x+y)}{xyz};\ \dfrac{xz\,(z-d)}{xyz};\ \dfrac{xyc^2}{xyz}$

2) $\dfrac{x}{x+y};\ \dfrac{y\,(x+y)}{10\,(x^2-y^2)};\ \dfrac{z\,(x+y)^2}{(x+y)\,(x^2-y^2)} \xrightarrow{\text{paso (i)}} \dfrac{x}{x+y};\ \dfrac{y}{10\,(x-y)};\ \dfrac{z}{x-y}$

$$\xrightarrow{\text{paso (ii)}} \frac{10x\,(x-y)}{10\,(x^2-y^2)};\ \frac{y\,(x+y)}{10\,(x^2-y^2)};\ \frac{10z\,(x+y)}{10\,(x^2-y^2)}$$

▲ Operaciones con fracciones algebraicas

• Suma:

1) Si tienen igual denominador: $\dfrac{a}{d}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{d}$;

2) Si no tienen igual denominador: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$,

o en forma equivalente:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\dfrac{\text{mcm}\,(b,d)}{b}\cdot a+\dfrac{\text{mcm}\,(b,d)}{d}\cdot c}{\text{mcm}\,(b,d)}$$

Comúnmente se dice que en la suma se ha sacado el común denominador.

• Resta: Se realiza teniendo en cuenta la operación suma, es decir:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{ad-bc}{bd}=\frac{\dfrac{\text{mcm}\,(b,d)}{b}\cdot a-\dfrac{\text{mcm}\,(b,d)}{d}\cdot c}{\text{mcm}\,(b,d)}$$

Ejemplos:

(i) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{a\,(a+b)+a\,(a-b)}{(a-b)\,(a+b)}=\dfrac{a^2+ab+a^2-ab}{a^2-b^2}=\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$;

(ii) $\dfrac{a+1}{2a-2}-\dfrac{a-1}{2a+2}+\dfrac{a^2+1}{a^2-1}-\dfrac{4a}{a^2-1}=\dfrac{a+1}{2(a-1)}-\dfrac{a-1}{2(a+1)}+\dfrac{a^2+1}{a^2-1}-\dfrac{4a}{a^2-1}=$

$$= \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2 + 2\left(a^2+1\right) - 8a}{2\left(a^2-1\right)} =$$

$$= \frac{a^2+2a+1-\left(a^2-2a+1\right)+2a^2+2-8a}{2\left(a^2-1\right)} = \frac{2a^2-4a+2}{2\left(a^2-1\right)}$$

$$= \frac{2\left(a^2-2a+1\right)}{2\left(a^2-1\right)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)\,(a+1)} = \frac{a-1}{a+1}$$

- Multiplicación: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$,

- División: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

Ejemplos:

(i) $$\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{(1-x)+2x}{1-x^2}\;\frac{1-x}{x} =$$

$$= \frac{1+x}{(1+x)\,(1-x)}\;\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}\;;$$

(ii) $$\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) \div \frac{2y}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)+(x+y)}{x^2-y^2}\;\frac{x^2-y^2}{2y} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

Definición 5. Las fracciones compuestas tienen por términos (numerador y denominador) a otras fracciones algebraicas.

Ejemplos:

(i) $$\frac{1+\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y} - y} = \frac{\frac{y+x}{y}}{\frac{x^2-y^2}{y}} = \frac{y+x}{y}\;\frac{y}{x^2-y^2} = \frac{y+x}{(x+y)\,(x-y)} = \frac{1}{x-y}$$

(ii) $$\frac{\frac{1}{x^2-1}}{1-\frac{x+1}{x-\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{x^2-1}}{1-\frac{x+1}{\frac{x^2-1}{x}}} = \frac{\frac{1}{x^2-1}}{1-\frac{(x+1)\,x}{x^2-1}} = \frac{\frac{1}{x^2-1}}{1-\frac{x}{x-1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2-1}}{\frac{(x-1)-x}{x-1}} = \frac{1}{x^2-1}\;\frac{x-1}{-1} = -\frac{1}{x+1}$$

2.5. ECUACIONES EN UNA VARIABLE

Se darán algunas definiciones.

Identidad algebraica. Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verificada cualesquiera sean los valores atribuidos a las variables (letras) contenidas en las dos expresiones, excluidos aquellos valores para los cuales al menos una de las dos expresiones algebraicas pierde significado. También se llama **igualdad incondicional.**

Ejemplo: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ es una identidad

Ecuación algebraica. Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verificada solamente para valores particulares de las variables (letras) contenidas en las dos expresiones.

Incógnitas. Son las variables (letras) que aparecen en una ecuación algebraica.

Miembros de la ecuación. Son las dos expresiones algebraicas que forman la ecuación. Se llama **primer miembro** a la expresión algebraica que se encuentra a la izquierda del signo igual y **segundo miembro** al que se encuentra a la derecha.

Solución de la ecuación. Son los valores que, atribuidos a las variables incógnitas, producen una igualdad entre los dos miembros de la ecuación.

Resolver una ecuación. Consiste en hallar todas las soluciones de la ecuación dada.

Ejemplos: la ecuación $x + 1 = 0$ tiene una sola solución $x = -1$; la ecuación $x = x$ tiene infinitas soluciones al ser una identidad; la ecuación $x^2 = -1$ no tiene ninguna solución real.

Una ecuación puede clasificarse, de acuerdo al número de incógnitas en:

- ✓ ecuación con una incógnita;
- ✓ ecuación con dos incógnitas, etc.

A un conjunto de dos o más ecuaciones (igualdades a satisfacerse) se llama **sistema de ecuaciones**. Se puede hablar de un sistema de n ecuaciones con m incógnitas con $n, m \in \mathbb{N}$.

Una ecuación algebraica, en la incógnita x, se clasifica en:

1) entera: cuando los dos miembros de la ecuación son expresiones algebraicas enteras respecto de la letra x.

2) fraccionaria: cuando al menos uno de los dos miembros de la ecuación son expresiones algebraicas fraccionarias que contienen la incógnita en el denominador;

3) irracional: cuando al menos uno de los dos miembros de la ecuación son expresiones algebraicas que contienen la incógnita como radicando.

Ejemplos:

(i) $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se llama **ecuación de primer grado en la incógnita x.** Es una ecuación algebraica entera con una incógnita.

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c, \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se llama **ecuación de segundo grado en la incógnita x.** Es una ecuación algebraica entera con una incógnita.

(iii) Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x, y es el dado por

$$\left| \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{array} \right.$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$;

(iv) $3x + 1 = \dfrac{x^2}{x-5}$ es una ecuación fraccionaria en la incógnita x ,

(v) $3x + 1 = x + \sqrt{x-1}$ es una ecuación irracional en la incógnita x .

Una ecuación algebraica puede clasificarse en:

✓ numérica: cuando contiene sólo números excepto de la incógnita;

✓ literal o paramétrica: cuando contiene letras o parámetros que representan números bien determinados además de la incógnita.

Ejemplos. La ecuación x +1=0 es numérica y tiene por única solución x = -1; la ecuación x + m = 0 es literal y tiene por única solución x = - m, para cada valor del parámetro o letra $m \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones equivalentes. Dos ecuaciones algebraicas en la misma incógnita se dicen equivalentes cuando todas las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de la segunda y, viceversa, todas las soluciones de la segunda ecuación son también solución de la primera.

Ejemplo. Se tiene que x = 3 es solución de las dos ecuaciones x - 3 = 0 y x^2-9 = 0; en cambio, x = - 3 es solución de la segunda ecuación pero no de la primera. Por lo tanto, las ecuaciones x - 3 = 0 y x^2 - 9 = 0 no son equivalentes.

Proposición 2. Dos ecuaciones equivalentes a una tercera son equivalentes entre sí.

Una ecuación o sistema de ecuaciones puede clasificarse en:

✓ Compatible o determinado: cuando tiene un número finito de soluciones;
✓ Indeterminado: cuando tiene infinitas soluciones;
✓ Incompatible: cuando no existe ninguna solución.

▲ Metodología para resolver una ecuación

Debido al hecho que dos ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones, es claro que cuando se quiere resolver una ecuación se puede resolver una cualquiera que sea equivalente a la dada; y por lo tanto será particularmente muy ventajoso cuando la segunda ecuación se presente en una forma más simple que la primera. El procedimiento que se seguirá para resolver una ecuación consistirá en la transformación de la ecuación en otra equivalente pero más simple, y así sucesivamente, hasta arribar a una ecuación equivalente a la dada, de la cual se sabe con facilidad encontrar sus soluciones.

Por lo tanto, se comprende que es esencial ver cuáles son las operaciones que se pueden hacer sobre una ecuación para transformarla en otra equivalente. Se tienen las siguientes propiedades.

• Principio de la adición. Si a ambos miembros de una ecuación se le suma un mismo número real, o una misma expresión algebraica en la incógnita x que se pueda calcular para cada valor de la x, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ejemplo. La ecuación $2x - 6 = 0$ es equivalente a la ecuación $2x = 6$, que se obtiene sumando a ambos miembros el número real 6.

Observación 7. Si la expresión que se suma no se puede calcular para cada valor de la x entonces puede suceder que las dos ecuaciones no sean equivalentes. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 4$, que tiene por soluciones $x = -2$ y $x = 2$, no es equivalente a la ecuación $x^2 + \frac{1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$ pues la expresión $\frac{1}{x-2}$ no está definida para $x = 2$.

• Principio de la multiplicación. Si a ambos miembros de una ecuación se le multiplica por un mismo número real distinto de cero, o una misma expresión algebraica en la incógnita x que se pueda calcular para cada valor de la x y que no se anule jamás, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ejemplo. La ecuación $2x = 6$ es equivalente a la ecuación $x = 3$, que se obtiene multiplicando a ambos miembros por el mismo número real $1/2$.

Observación 8. Si la expresión que se multiplica no es distinta de cero para cada valor de la x, entonces puede suceder que las dos ecuaciones no sean equivalentes. Por ejemplo, la ecuación $x = 2$ (que tiene por solución $x = 2$) no es equivalente a la ecuación $x^2 = 2x$ que tiene por soluciones $x = 0$ y $x = 2$, a pesar de haberse multiplicado a ambos miembros por la misma expresión algebraica x, la cual se anula para $x = 0$.

De acuerdo a todo lo visto anteriormente las ecuaciones algebraicas enteras a coeficientes numéricos se pueden transformar en otras expresiones equivalentes, en las cuales no figuren denominadores y con un segundo miembro igual a cero. Por lo tanto, el primer miembro de estas ecuaciones resultará un polinomio en la incógnita x, con lo cual la ecuación se reduce a la expresión

$$P(x) = 0 \tag{5}$$

donde P es un polinomio en la letra x. El grado del polinomio P se llama **grado de la ecuación** $P(x) = 0$.

2.6. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO EN UNA VARIABLE

Definición 6. Se llama **ecuación de primer grado en la incógnita x** a la siguiente expresión:

$$ax + b = 0, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{6}$$

Teorema 3. La ecuación de primer grado (6) en la incógnita x tiene una única solución dada por:

$$x = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R} \tag{7}$$

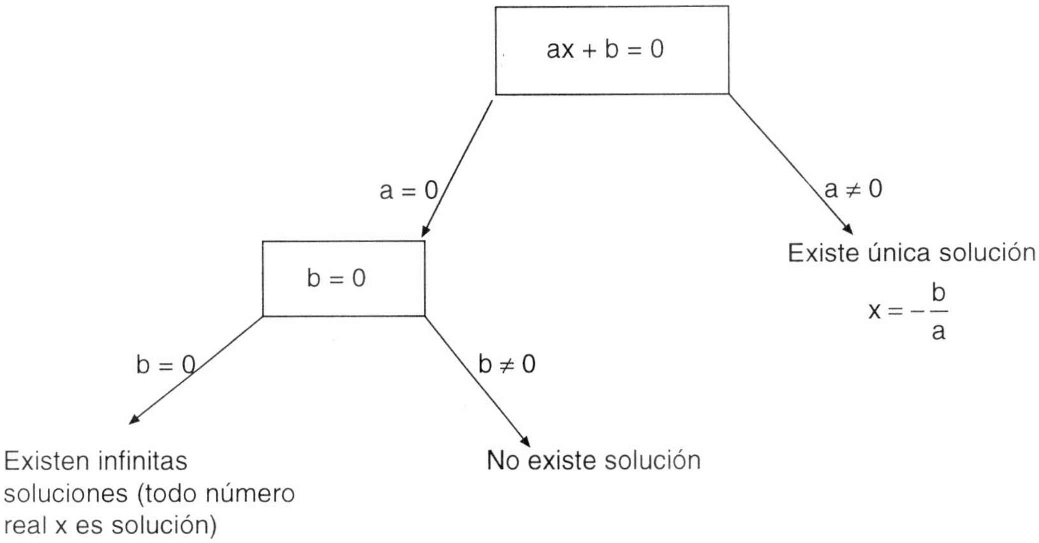
Demostración. Se tienen las siguientes equivalencias:

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax = -b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a} \tag{8}$$

Observación 9. La ecuación $ax + b = 0$ ($a,b \in \mathbb{R}$) con $a = 0$ posee las siguientes particularidades:

1) Tiene infinitas soluciones $x \in \mathbb{R}$ cuando $b=0$;
2) No tiene soluciones cuando $b=0$.

El estudio de la ecuación $ax+b=0$ (con $a,b, \in \mathbb{R}$) se puede resumir en el siguiente cuadro:



Ejemplos:

(i) La solución de la ecuación $2x-3=0$ es $x=\dfrac{3}{2}$

(ii) Sea la ecuación fraccionaria siguiente:

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=0$$

Esta ecuación puede transformarse en una ecuación entera multiplicándola por la expresión (x^2-1). Además $(x^2-1)=(x+1)\,(x-1)=\text{mcm}\,(x^2-1,\ x-1,\ x+1)$. Por lo tanto, para $x\neq \pm 1$, se tiene,

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=0 \iff 1+3\,(x+1)-2\,(x-1)=0 \iff$$

$$\iff 1+3x+3-2x+2=0 \iff x+6=0 \iff x=-6$$

Por otra parte, se puede verificar directamente que $x=-6$ es solución de la ecuación dada, pues:

$$\frac{1}{(-6)^2-1}+\frac{3}{(-6)-1}-\frac{2}{(-6)+1}=\frac{1}{35}-\frac{3}{7}+\frac{2}{5}=\frac{1-15+14}{35}=\frac{0}{35}=0$$

Problemas de aplicación. Numerosos problemas se pueden llevar a la resolución de ecuaciones, en particular de las ecuaciones de primer grado.

En numerosas aplicaciones interviene la noción de **porcentaje**. En muchos casos es muy útil saber expresar el porcentaje como una fracción o número decimal, por ejemplo:

$$10\%=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}10\,; \qquad 15\%=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}=0{,}15\,;$$

$$50\%=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}=0{,}50 \qquad 100\%=\frac{100}{100}=1$$

Ejemplos:

(i) Un padre tiene 40 años y su hijo 10 años. ¿En cuántos años la edad del padre será el triple de la edad de su hijo?

Solución. Se indica con x la cantidad de años que deben transcurrir (incógnita del problema) para que la edad del padre sea igual al triplo de la edad del hijo. Entonces se puede plantear la siguiente ecuación de primer grado:

$$x + 40 = 3\,(x + 10)$$

Dicha ecuación es equivalente a la dada por $x + 40 = 3x + 30$, es decir $2x = 10$, cuya única solución es $x = 5$. Por otra parte, dentro de 5 años el padre y el hijo tendrán 45 y 15 años, respectivamente.

(ii) Sea $C \in \mathbb{R}$ el costo de una determinada mercadería. ¿Cuál debe ser el valor de venta para que el comerciante en una determinada promoción, con un descuento del 10%, gane un 20% sobre el costo?; dar además el valor de venta para un costo de \$6 y de \$9.

Solución. Se indica con x el valor de venta de la mercadería (incógnita del problema) cuyo costo es C. Entonces, se puede plantear la siguiente ecuación literal de primer grado:

$$x - 10\ \%\, x = C + 20\ \%\, C\,,$$

es decir, $x - \frac{x}{10} = C + \frac{C}{5}$. Por lo tanto, se tiene $\frac{9}{10}x = \frac{6}{5}C$ cuya solución está dada por $x = \frac{4}{3}C$.

Además, si el costo es $C = \$\,6$ ó $C = \$\,9$ entonces se tiene un valor de venta $x = \$\,8$ ó $x = \$\,12$, respectivamente. Por otra parte, se tiene que la ganancia, en un día diferente al de la promoción, es del 33,3 %

(pues $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$).

2.7 ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE

Definición 7. 1) Se llama **ecuación de segundo grado en la incógnita x** a la siguiente expresión:

(9) $$ax^2 + bx + c = 0\,, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

2) Se llama **discriminante** de la ecuación(9) a la expresión

(10) $$\Delta = b^2 - 4ac$$

Teorema 4. 1) Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación (9) tiene dos soluciones, dadas por las expresiones siguientes:

(11) $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación (9) tiene una sola solución doble, dada por la expresión siguiente:

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{12}$$

3) Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación (9) no tiene ninguna solución real. Tiene dos raíces complejas, una es la conjugada de la otra, dadas por las expresiones siguientes:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, i, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, i, \tag{13}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

Demostración. Completando el cuadrado de un binomio se tienen las siguientes igualdades:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

y, por consiguiente, se deduce la siguiente equivalencia:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Por lo tanto, se tienen las siguientes conclusiones:

1) Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación (9) es equivalente a la ecuación:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

cuyas dos soluciones están dadas por (11).

2) Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación (9) es equivalente a la ecuación:

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

cuya única solución está dada por (12).

3) Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación (9) no tiene solución real. Tiene dos soluciones complejas, dadas por (13)

Observación 10. Independientemente del signo del discriminante Δ, las raíces de la ecuación de segundo grado $a\,x^2 + bx + c = 0$ están dadas por la expresión

(13 bis) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta > 0$, entonces los coeficientes a, b, c de la ecuación (9) están relacionados con las dos raíces o ceros (11) de la misma ecuación de la siguiente manera:

Proposición 5. Si $\Delta > 0$, entonces se tienen las relaciones:

(14) $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ , \qquad (15)\ \ x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$$

Demostración. Utilizando las expresiones (13), se obtienen:

(a) $$x_1 + x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\frac{b}{a}\ ,$$

(b) $$x_1\, x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Observación 11. Las relaciones (14) y (15) continúan aún siendo válidas para los otros dos casos $\Delta = 0$ y $\Delta < 0$.

Se verá a continuación que la proposición recíproca de la anterior es también válida, es decir:

Lema 6. Si dos números reales x' y x'' son tales que:

$$1)\ \ x' + x'' = -\frac{b}{a}\ , \qquad 2)\ \ x'\, x'' = \frac{c}{a}$$

donde a, b, c $\in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ entonces, se tiene que x' y x'' son raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración. De 1) se puede despejar x'' como $x'' = -x' - \frac{b}{a}$; reemplazando en 2) se tiene que $x'\left(-x' - \frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a}$ es decir $-(x')^2 - \frac{b}{a}x' = \frac{c}{a}$ con lo cual, multiplicando por a, se deduce que

$$a\,(x')^2 + b\,x' + c = 0$$

De la misma manera, despejando x' de 1) y reemplazándola en (2) se obtiene que $a\,(x'')^2 + bx'' + c = 0$. Por lo tanto, x' y x'' son soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

Corolario 7. Para que los números reales x' y x'' sean soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es necesario y suficiente que se tenga:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \qquad x'\,x'' = \frac{c}{a} \tag{16}$$

Proposición 8. Si x_1 y x_2 son las dos raíces reales de la ecuación (9) (es decir $\Delta > 0$), entonces se tiene la siguiente factorización para el polinomio de segundo grado, dada por:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Demostración. Se verán dos formas de demostración.

a) Por utilización de las relaciones entre las raíces x_1 y x_2, y los coeficientes a, b y c:

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2\right] = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\,x^2 + bx + c$$

b) Por utilización de la resolvente y de la diferencia de cuadrados se tienen las siguientes igualdades:

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c$$

Observación 12. 1) Si $\Delta = 0$, entonces la factorización (17) viene dada por:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \tag{18}$$

2) Si $\Delta < 0$ entonces no existe factorización en el cuerpo de los números reales.

Corolario 9. Sea $\Delta > 0$, entonces:

1) si $b = 0$ entonces se tiene $x_2 = -x_1$;

2) si $c = 0$ entonces las dos raíces están dadas por $x_1 = -\frac{b}{a}, x_2 = 0$;

3) si a y c tienen igual signo, ambos positivos o ambos negativos, entonces las dos raíces x_1 y x_2 tienen igual signo. Además, el signo de las raíces está dado por el signo de número $-\frac{b}{a}$

4) si a y c tienen distintos signos (uno es positivo y el otro es negativo) entonces las dos raíces x_1 y x_2 tienen distintos signos.

Demostración. a) Si b = 0 entonces $\Delta = -4ac$ y por ende se tiene que

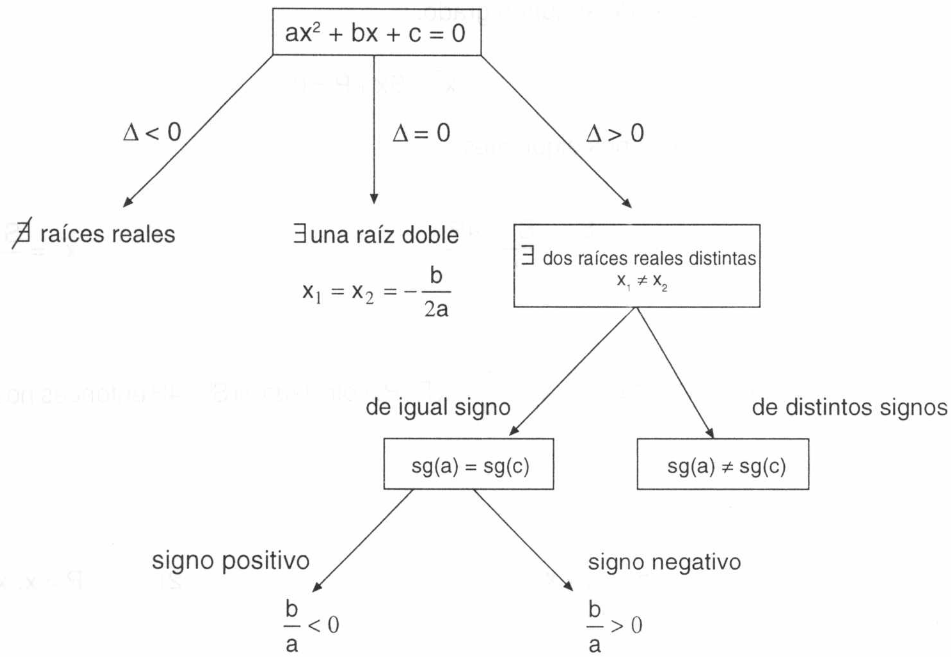
(19) $$x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -x_1$$

b) Si c = 0 entonces $\Delta = b^2$ y por ende se tiene que $x_1 = -\frac{b}{a}$; $x_2 = 0$

c) Por (15) se tiene que $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ con lo cual las dos raíces tienen igual signo. Dicho signo será el signo de la suma de las dos raíces y, por (14), será el signo del número $-b/a$.

d) Surge nuevamente de (15) al ser $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$

Resolución de la ecuación de segundo grado: los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente cuadro:



Ejemplos.

(i) La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real pues $\Delta = -4 < 0$. Sus dos soluciones complejas son $x = \pm i$

(ii) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una única solución real (doble) x = 1 pues $\Delta = 0$. Además $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

(iii) La ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ tiene dos soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ pues $\Delta = 9 > 0$. Como $a = 1 > 0$ y $c = -2 < 0$ se verifica además que las dos raíces tienen signos opuestos. Por Proposición 8 se tiene que $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

(iv) La ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ tiene dos soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ pues $\Delta = 1 > 0$. Como $a = 1 > 0$ y $c = 2 > 0$ se verifica además que las dos raíces tienen igual signo, el cual coincide con el signo del número $\frac{-b}{a} = 3 > 0$. Por Proposición 8 se tiene $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

Corolario 10. Una ecuación de segundo grado que tiene por raíces a dos números reales x_1 y x_2 está dada por:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \tag{20}$$

Demostración. Es suficiente con elegir a=1 en la igualdad (17)

$$0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Problema. Dados la suma S y el producto P de dos números reales x_1 y x_2, se desea conocer dichos números x_1 y x_2

Solución.- Si los datos S y P verifican la desigualdad $S^2 \geq 4P$ entonces los números reales x_1 y x_2 son las dos raíces de la ecuación de segundo grado.

$$x^2 - Sx + P = 0 \tag{21}$$

que vienen dados por las expresiones siguientes:

$$x_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \tag{22}$$

Más aún, si $S^2 = 4P$ entonces, $x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = \sqrt{P}$. Por otro lado, si $S^2 < 4P$ entonces no existen soluciones reales.

Demostración. Se tienen

1) $S = x_1 + x_2$, 2) $P = x_1 x_2$

Por lo tanto:

a) De 1) se obtiene $x_2 = S - x_1$, que reemplazado en 2) se deduce que $P = x_1 (S - x_1)$, es decir $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$, con lo cual x_1 es raíz de la ecuación (21).

b) Análogamente, se deduce que x_2 es raíz de la ecuación (21) al ser las condiciones 1) y 2) simétricas en x_1 y x_2

c) Las dos soluciones de la ecuación (21) están dadas por (22) al ser

$$\Delta = (-S)^2 - 4 \cdot 1 \cdot P = S^2 - 4P \geq 0$$

por hipótesis.

d) Si $S^2 = 4P$ entonces, de (22), se deduce que $x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = \sqrt{P}$

Ejemplos. (i) Si $S = 4$ y $P = 3$ entonces $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$

(ii) Si $S = 2$ y $P = -15$ entonces $x_1 = -3$ y $x_2 = 5$

Teniendo en cuenta el problema anterior se deducen los siguientes resultados de problemas de optimización geométricos:

Corolario 11. 1) Si los dos números x e y son variables pero tienen suma S constante, entonces su producto P (que es variable) satisface la desigualdad $P \leq \frac{S^2}{4}$. Por lo tanto, el valor máximo de P es $\frac{S^2}{4}$, lo cual se obtiene cuando

$$x = y = \frac{S}{2}$$

2) Si los dos números positivos x e y son variables pero tienen su producto $P = xy$ constante, entonces su suma S positiva (que es variable) satisface la desigualdad $S \geq 2\sqrt{P}$. Por lo tanto, el valor mínimo de S es $2\sqrt{P}$, lo cual se obtiene cuando

$$x = y = \sqrt{P}$$

Ejemplos. (i) De todos los rectángulos de base x, y altura y, que tienen igual perímetro, $2x + 2y = C > 0$, el que tiene mayor área, xy, es el cuadrado, cuyos lados valen $x = y = \frac{C}{4}$;

ii) De todos los rectángulos de base x, y altura y, que tienen la misma área ($xy = A$), el que tiene el menor perímetro, $2x + 2y$, es el cuadrado, cuyos lados valen $x = y = \sqrt{A}$.

Trabajo Práctico

I. Operaciones con expresiones algebraicas

1) Halle el valor numérico de las siguientes expresiones:

(i) $x^2+2xy+y^2$ para $x=2$, $y=3$

(ii) $x^2-2xy+y^2$ para $x=5$, $y=3$

(iii) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ para $x=13$, $y=3$

(iv) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para $a=5$, $b=12$, $c=4$

2) Efectúe las siguientes operaciones:

(i) $a-\{5b-[a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)]\}$

(ii) $a^2-\{5ab^2-[a^2+3a-(3a-3ab^2)-(a^2-2ab^2-a)]\}$

(iii) $5\ mc^2-[x^2-(3c-3mc^2)+2c-(x^2-2mc^2-c)]$

(iv) $(x-a)\ (x-b)\ (x-c)$

(v) $(a+b)^3-(a-b)^3-2b^3$

(vi) $(x-y)(x+y)-[xy-(xy-x^2)]$

3) Efectúe las siguientes operaciones:

(i) $(8a^4b^2-6a^3b^3+4a^2b^4-2a^2b^2)\div(-2a^2b^2)$

(ii) $(a^2+4ab+3b^2)\div(a+b)$

(iii) $(81x^8-16y^8)\div(3x^2-2y^2)$

(iv) $(x^4+8x^3+24x^2+32x+16)\div(x+2)$

(v) $(6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-13x+2)\div(2x^2-3x+2)$

(vi) $(6x^5+x^4-6x^3+2x^2-5x-2)\div(3x^2-x+2)$

4) Halle el polinomio cociente y el polinomio resto de las siguientes divisiones y verifique el resultado hallado:

(i) $(5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 171x + 4) \div (x^2 + 3x + 1)$

(ii) $(4x^3 - 5x^2 + 3x - 2) \div (2x - 3)$

(iii) $(3x^4 + 5ax^3 - a^2x^2 - 6a^3x + 2a^4) \div (3x^2 - ax - 2a^2)$

(iv) $(ax^3 + 2a^2x^2 + bx + ab^2) \div (bx + ab)$

5) Aplique la Regla de Ruffini para hallar las siguientes divisiones:

(i) $(3x^4 - 2x + 1) \div (x - 1)$ (ii) $(x^7 + 1) \div (x + 1)$

(iii) $(1000x^3 - 1) \div (10x - 1)$ (iv) $(3x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x - 6) \div (x - 2)$

(v) $(3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1) \div (x - 3)$

6) Halle, sin efectuar la operación cociente, el resto de las siguientes divisiones:

(i) $(x^5 + 1) \div (x - 1)$

(ii) $(x^7 + b^7) \div (x + b)$

(iii) $(3x^3 + 5x^2 - 6x) \div (x - 1)$

(iv) $(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2) \div (x + 1)$

(v) $(x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5) \div (x - 2b)$

7) Efectúe las siguientes operaciones:

(i) $(a^2 - b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2$ (ii) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

(iii) $(a^2b - ab^2)^2 \div (a^2b^2)$ (iv) $(a^2b - ab^2)^3 \div (a^3b^3)$

(v) $\left((3a + b)^2 - (2a + 3b)^2 + 8b^2\right)^2 \div \left(-\frac{1}{2}a^2\right)$

8) Halle el MCD y el mcm de los siguientes binomios:

(i) $3\,a^2b$; $6\,ab$ (ii) $120\,x^3y^2z^4$; $54\,xy^5z^3$

(iii) $12\,ab$; $9\,bc$ (iv) $10\,a^3b^2$; $15\,a^3b$

(v) $7\,x^2$; $14\,y^2$; $21xy$; $6\,x^2y$.

II. Factoreo de expresiones algebraicas

1) Saque el factor común en las siguientes expresiones:

(i) $25a^2 + 30a^4 - 35a^6$ (ii) $6a^2x^3 - 3ax^4 + 21\,a^2x^5$

(iii) $15a^2x^2 - 30a^2x^3 + 105a^2x^4 - 75a^2x^5$

2) Factoree, por agrupaciones, las siguientes expresiones:

(i) $x^2+ax+bx+ab$ (ii) $ac-ad-bc+bd$

(iii) $ab-ac-b+c$ (iv) $ab-a-b+1$

(v) $ax^2+ay^2-bx^2-by^2$ (vi) $4x^2+6xy-6xz-9yz$

(vii) $27a^3-18a^2b+12ab^2-8b^3$ (viii) $5a^3b-10a^2b^2-7a^4c+14a^3bc$

(ix) $a^5-a^4-a^3+a^2+a-1$ (x) $a^2+2ab+3ac-ax-2bx-3cx$

3) Factoree los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

(i) $a^2+a+\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{a^2}{16}-\frac{3}{2}ab+9b^2$

(iii) a^6-2a^3+1 (iv) $4x^2+2ax+\frac{a^2}{4}$

4) Factoree los siguientes cuatrinomios cubos perfectos:

(i) $27a^3+108a^2+144a+64$ (ii) $a^3x^3-3a^2x^2by+3axb^2y^2-b^3y^3$

(iii) $-1-\frac{3}{2}a-\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{8}a^3$ (iv) $a^6+3a^5+3a^4+a^3$

5) Factoree las siguientes diferencias de cuadrados:

(i) $a^2x^2-b^2y^2$ (ii) $\frac{x^2}{4}-4y^2$ (iii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

(iv) $\left(a^2-b^2\right)^2-\left(a^2+b^2\right)^2$ (v) $(a-b+c)^2-(a+b-c)^2$

(vi) $81a^4-b^4$ (vii) x^8-y^8

6) Factoree las siguientes sumas o diferencias de potencias de igual grado:

(i) $8a^3-b^3$ (ii) x^5-1 (iii) $x^3-8y^3z^3$ (iv) a^3b^3+1

7) Factoree, combinando los varios casos de factoreo:

(i) $a^2+2ab+b^2-c^2$ (ii) $a^2-b^2+2bc-c^2$

(iii) $5a^2b-45bm^2$ (iv) $2a^3bc-18ab^3c$

(v) $9a^3-12a^2b+4ab^2$ (vi) x^3y-xy^3 ;

(vii) $a^5x^2+6a^3x+9a$ (viii) x^3+x^2-4x-4

(ix) $3a^5-48ab^8$ (x) $x^4+x^3-x^2-x$

8) Halle el MCD y el mcm de las siguientes expresiones:

(i) a^3-1	; a^2-2a+1	; $a-1$	
(ii) $a+b$	; $a-b$	; a^2-b^2	
(iii) $a-1$	; $a+1$	; a^2-1;	a^2+1
(iv) $6a-6b$	; $9a^2-9b^2$		
(v) $a+x$	; a^2-ax+x^2	; a^3+x^3	

III) Simplificación de expresiones algebraicas

1) Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

(i) $\dfrac{-21a^2b^3c^4}{3abc}$; (ii) $\dfrac{a^2-1}{ab+b}$; (iii) $\dfrac{x^2-4a^2}{bx+2ab}$;

(iv) $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}$; (v) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$; (vi) $\dfrac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$;

(vii) $\dfrac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$; (viii) $\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2+4abc}$;

(ix) $\dfrac{x^2-1}{(1+ax)^2-(x+a)^2}$.

2) Efectúe las siguientes operaciones sobre fracciones algebraicas y simplifique:

(i) $x-\dfrac{x^2-1}{x}$; (ii) $a-x+\dfrac{x^2}{a+x}$; (iii) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a}{a+b}$;

(iv) $\dfrac{1+5x}{1-5x}-\dfrac{1-5x}{1+5x}$; (v) $\dfrac{30x}{9x^2-1}+\dfrac{4}{3x-1}-\dfrac{5}{3x+1}$;

(vi) $\left(a+\dfrac{b^2-a^2}{a}\right)a$; (vii) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\dfrac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$;

(viii) $\dfrac{ax}{a+x}\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$; (ix) $\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)$;

(x) $\dfrac{2a}{2b-c}\left(\dfrac{b+c}{3}-\dfrac{c}{2}\right)$; (xi) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)$;

(xii) $\dfrac{a-b}{2b}\left(\dfrac{a+b}{2(a-b)}-\dfrac{a-b}{2(a+b)}+\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}\right)$;

(xiii) $\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)\left(\dfrac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

(xiv) $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)$; (xv) $\left(a+\dfrac{b-a}{1+ab}\right)\div\left(1-\dfrac{1+ab}{a(b-a)}\right)$;

(xvi) $\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\div\left(2x-1+\dfrac{15}{x-3}\right)$;

(xvii) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{x}{ab}\right)(a+b+x)\div\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{x^2}{a^2b^2}\right)$;

(xviii) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)x^2\div\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)\right]$;

(xix) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\div\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+c}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+c}}$; (xx) $\dfrac{a}{c}-\dfrac{\dfrac{ad-bc}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}$;

(xxi) $\dfrac{a^2b^2}{c}\div\left\{\dfrac{a^2c^2}{b^2}\div\left(\left(\dfrac{b^2c^2}{a}\ \dfrac{ac}{b^2}\right)\div\left(\dfrac{ab}{c^2}\ \dfrac{bc}{a^2}\right)\right)\right\}$;

(xxii) $\dfrac{\dfrac{\dfrac{x+1}{y}}{x+\dfrac{1}{y}}-\dfrac{xy+x}{xy+1}+1}{\dfrac{x+1}{xy+1}+\dfrac{y^2+y}{y^2+\dfrac{y}{x}}-1}$;

(xxiii) $\dfrac{x^2}{1-x}+\dfrac{\dfrac{x^2}{x-2}-x+2}{3x-2-\dfrac{x^2}{2-x}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-x}}$

IV) Ecuación de primer grado en una variable

1) Resuelva las siguientes ecuaciones numéricas de primer grado:

(i) $2x-1=x+2$; (ii) $4x+2=x+17$;

(iii) $5-3\,(2x+1)=2x-4\,(3x-5)-2$; (iv) $(x+1)^2-4=2x+(x-2)\,(x+2)+1$;

(v) $7\,(x-2)+x=3\,(x-8)+5x$; (vi) $7\left[3-(7-x)\right]-(x-6)=4\left[3-(6-x)\right]$;

(vii) $5x-1=7-\dfrac{x}{3}$; (viii) $2x+\dfrac{17-x}{2}=\dfrac{8-3x}{3}+\dfrac{25}{3}$;

(ix) $x+\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{3x-4}{2}-2=\dfrac{x-2}{2}$; (x) $(2x+1)^2-2\,(x+\frac{1}{2})\,(2x-1)+x+\dfrac{7}{2}=3$.

2) Resuelva las siguientes ecuaciones literales de primer grado en la incógnita x; m, a, b $\in\mathbb{R}$:

(i) $7x-3m=0$; (ii) $3\,(x-m)-\dfrac{m}{2}=2\,(2m-x)$;

(iii) $2b\,(x-a)+ab=3b\,(x+a)$; (iv) $\dfrac{3x-2a}{3}+6b=x+5b-\dfrac{2a}{3}$;

(v) $a\,(x-2b)+(a+b)^2=b\,(2a+b)-x\,(b-a)+a\,(a-2b)$;

(vi) $ab\,(a+b)^2x-a^2b^2(a+b)=(a+b)\,x-ab$;

(vii) $\dfrac{x+a}{a-b}-\dfrac{x+b}{a+b}=\dfrac{2\,(x-b)}{a-b}-\dfrac{x-a}{a+b}$;

(viii) $\dfrac{x-2b}{a+2b}-\dfrac{x+2b}{a-2b}=\dfrac{4ab}{4b^2-a^2}$; (ix) $\dfrac{bx}{a^2+b^2}=\dfrac{2a}{a^4-b^4}+\dfrac{bx}{b^2-a^2}$

3) Resuelva las siguientes ecuaciones fraccionarias, numéricas y literales, que conducen a ecuaciones de primer grado en la incógnita x; m $\in\mathbb{R}$:

(i) $\dfrac{2}{7x-7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{1}{14x-14}$; (ii) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{4}{5x-5}=\dfrac{9}{5}-\dfrac{3x}{x-1}$;

(iii) $\dfrac{x-1}{2-3x}=\dfrac{2x+3}{3x-2}-3$; (iv) $m\left(1-\dfrac{m}{x}\right)+\dfrac{1}{m}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-1=0$;

(v) $\left(\dfrac{x+m}{x-m}+\dfrac{m-x}{x+m}\right)\dfrac{x-m}{2x}=\dfrac{m}{x-m}$

4) Resuelva los siguientes problemas que conducen a ecuaciones de primer grado:

(i) Halle el número que sumado a su triplo da 60;

(ii) Halle el número que disminuido de su mitad y sumado a su triplo da 35;

(iii) Descomponga el número 20 en dos sumandos de manera que uno sea la cuarta parte del otro;

(iv) Halle dos números cuya suma es 32 y su diferencia es 4;

(v) Halle tres números de manera que la suma de los tres sea 54, que el segundo sea el doble del primero y el tercero sea el triplo del segundo;

(vi) ¿Qué número se debe agregar al numerador y al denominador de la fracción $\dfrac{3}{5}$ para obtener una fracción equivalente a $\dfrac{5}{6}$?

(vii) En un curso de 31 alumnos, los varones son la mitad más uno de las mujeres. ¿Cuántos son los varones y las mujeres del curso?

(viii) Una persona compra una mercadería pagando \$30 por adelantado y 12 cuotas fijas por un valor igual a 1/15 del precio total. ¿Cuánto cuesta la mercadería?

(ix) Si hoy el precio de una mercadería es de \$1.210, ¿cuál fue el precio exactamente 2 años antes si se considera un incremento en los precios del 10% anual durante ambos años?

(x) Un vendedor de frutas compró una cierta cantidad de manzanas a razón de 3 kilos por \$ 0,50 y vendió todo el lote a razón de 4 kilos por \$ 1. ¿Cuántos kilos compró el comerciante si la ganancia obtenida fue de \$ 10?

V) Ecuación de segundo grado en una variable

1) Resuelva las siguientes ecuaciones numéricas de segundo grado:

(i) $x^2 - 5x + 6 = 0$; (ii) $x^2 - 5x - 14 = 0$;

(iii) $3x^2 - 7x + 2 = 0$; (iv) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{1}{2} = 3 - \dfrac{x+1}{x+2}$;

(v) $(3x-2)^2 + (2x+3)^2 = 26$; (vi) $2x^2 - 3x + 7 = 0$;

(vii) $6x - 18 - (x+1)^2 = x^2 - (x+2)^2$; (viii) $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{x} = 2 + \dfrac{x}{x - \frac{1}{2}}$;

(ix) $x^2 - 6\sqrt{2}x + 6 = 0$.

2) Resuelva las siguientes ecuaciones literales de segundo grado en la incógnita x; a, b $\in \mathbb{R}$:

(i) $\dfrac{2}{3}abx - \left(x + \dfrac{ab}{3}\right)^2 = -\dfrac{a^2b^2}{9} - 3abx$; (ii) $\dfrac{x-a}{x-2a} + \dfrac{x-3a}{x-4a} = \dfrac{5}{4}$;

(iii) $\left(\dfrac{x}{a} + b\right)\left(\dfrac{x}{a} - b\right) = 0$; (iv) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$;

(v) $bx^2 - (a+b)\,x + a = 0$; (vi) $36x^2 - 12ax + a^2 = 0$;

(vii) $(2x-a)\,(x+a) = (2x-a)^2$; (viii) $a^2\left(x^2 - \dfrac{ax}{b^2}\right) - b\left(\dfrac{a}{b^2} - x\right) = 0$

3) Escriba una ecuación de segundo grado que tenga por raíces las siguientes duplas de números:

(i) 3 , 5 ; (ii) $2, \dfrac{1}{3}$; (iii) $-1, \dfrac{2}{5}$

4) Halle dos números cuya suma sea S y cuyo producto sea P:

(i) S = 0 , P = - 2 ; (ii) S = 11 , P = 18 ; (iii) $S = \dfrac{7}{6}$, $P = \dfrac{1}{3}$.

5) (i) Determine el valor de m de manera que la ecuación:

$$5x^2 - (2m-1)\,x + 2m = 0$$

tenga una de sus raíces igual a 3,

(ii) Determine el valor de m de manera que la ecuación $2x^2 - mx + 18 = 0$, admita dos raíces iguales;

(iii) Determine el valor de m, de manera que la suma de las raíces de la ecuación

$$(m+2)\,x^2 - (9m+2)\,x + 3 = 0 \text{ sea } 7 .$$

6) Resuelva los siguientes problemas que conducen a ecuaciones de segundo grado:

(i) Halle dos números cuya suma sea 8 y la suma de sus cuadrados sea 34 ;

(ii) Halle el número que supera en 10 al triple de su raíz cuadrada ;

(iii) Halle dos números de manera que su suma sea 10 y la suma de sus cubos sea 730 ;

(iv) Halle dos números de manera que su diferencia sea 3 y la diferencia de sus cuadrados sea 39 ;

(v) Halle dos números cuya suma sea 14 y la suma de sus recíprocos sea $\frac{7}{24}$

Otros problemas sobre la ecuación de segundo grado y sus aplicaciones se verán en el Capítulo 7 como problemas previos al estudio de la función cuadrática; por ejemplo, los problemas 15 a 26 en los cuales, además, se utiliza la noción de conjuntos que a su vez se verá en el Capítulo 5.

Problemas Complementarios

1) (i) En una empresa constructora de caminos se informa que 20 obreros pavimentaron 30 km de un camino en 12 días. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

Nº de Km del camino a pavimentar	Nº de días utilizados	Nº de obreros empleados
30	12	20
18	8	.....
40	....	32
.....	16	15

(ii) Si se representan con c, d y x el número de Km del camino a pavimentar, el número de días utilizados y el número de obreros empleados, respectivamente, halle la relación entre dichas tres variables.

2) (i) En un supermercado se realizan descuentos sobre los precios de los diferentes artículos. Complete la siguiente tabla:

Precio de los artículos ($)	Suma a pagar luego del descuento ($)	Descuento (en %)
.....	40	20
50	.....	15
60	48	.....

(ii) Si se representan con C, P y d el precio del artículo antes del descuento, el precio del artículo a pagar luego del descuento y el porcentaje de descuento (tanto por uno o expresado en decimal), respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

3) (i) Un comerciante compra mercaderías que luego vende aplicándoles un porcentaje de ganancia. Complete la siguiente tabla:

Precio de compra ($)	Precio de venta ($)	Ganancia (en %)
30	36	....
.....	88	10
45	....	15
....	39,60	20

(ii) Si se representan con C, V y g el precio de compra de una mercadería, el precio de venta de una mercadería y el porcentaje de ganancia (tanto por uno o expresado en decimal), respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

4) ¿Qué porcentaje de aumento tiene el precio de un artículo que pasa por las manos de tres intermediarios, cada uno de los cuales vende el producto un 50% más caro de lo que le costó?

5) Si el dueño de un negocio ordena subir un 25% el precio original de sus zapatillas en vidriera, para luego ofrecer a los compradores una rebaja sobre este último precio, de un 20% más un 10%. ¿Con qué porcentaje vende respecto al precio original?

(i) Con una rebaja de un 5% ; (ii) Con una rebaja de un 10% ;
(iii) Con una rebaja de un 12,5% ; (iv) Con un aumento de un 10%.

6) (i) Un fabricante mayorista vende a un comerciante minorista un determinado producto al valor de $30 la unidad. El fabricante le ofrece colocar una etiqueta de precio a cada producto para conveniencia del minorista en períodos de estabilidad económica. Se necesita conocer el precio que se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio de venta al público en 20%, en una oferta promocional, y obtener una utilidad del 12% sobre el costo del producto. Calcule además el porcentaje de la ganancia que obtiene el comerciante minorista en los días que no efectúa la promoción.

(ii) Idem para el caso en que el comerciante minorista compre el producto al valor de $ C, C es un valor positivo cualquiera y representa el caso de estudio que debe realizar el minorista para efectuar la promoción de sus numerosos productos que tiene en venta. Es un problema real que se plantea como un problema paramétrico.

7) Las temperaturas se miden en grados Celsius o en grados Fahrenheit (de uso corriente en los países anglosajones). La relación entre las dos escalas es la siguiente:

$$F = \frac{9C+160}{5} \left(= \frac{9C}{5} + 32 \right)$$

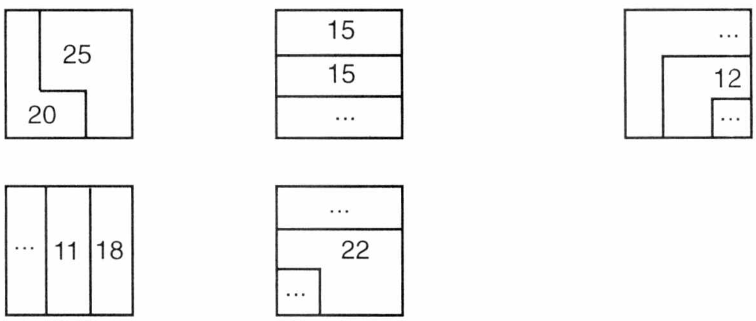
donde C y F representan los grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente. Complete la siguiente tabla:

Grados Celsius	Grados Fahrenheit
10	—
—	68
—	10

8) Escriba los números del 1 al 9, en la tabla de 3 filas y 3 columnas siguientes:

....	....	......
....	.....	......
......	.....	....

de manera que satisfagan las sumas indicadas:



9) Determine si los siguientes números α y β son naturales, y en caso positivo indique el correspondiente valor:

(i) $\alpha = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ (ii) $\beta = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

10) ¿Cuánto vale la siguiente expresión $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\ldots\ldots}}}}}$?

11) Juan puede hacer un trabajo en 5 días y, en cambio, José puede hacerlo en 3 días. ¿En qué tiempo lo harán trabajando conjuntamente?

12) (i) Julián lleva un canasto con manzanas. Encuentra a tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que le dio al primero más dos; y al tercero la mitad de lo que le dio al segundo más dos. ¿Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?

(ii) Al día siguiente lleva otro canasto con manzanas. Encuentra a sus tres amigos y les da: al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo la mitad de las que quedan más dos; y al tercero la mitad de las sobrantes más dos. ¿Cuántas manzanas llevaba al principio, si aún le sobra una manzana?

13) (i) En un hotel se informa que 20 pasajeros en 3 días pagaron $1.800. Considerando ese dato, complete la siguiente tabla:

Nº de pasajeros	Nº de días	Pago en $
20	3	1.800
15	2	....
40	.....	6.000
......	4	1.200

(ii) Si se representan con p, d y x el número de pasajeros, el número de días y el pago (en $), respectivamente, halle la relación que existe entre dichas tres variables.

14) (i) Para numerar las páginas de un libro se usaron 495 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

(ii) ¿Idem al anterior, si se hubiesen utilizado 6.725 cifras?

Respuestas Trabajo Práctico

I.

1) (i) 25 ; (ii) 4 ; (iii) 1.000 ; (iv) -2

2) (i) a ; (ii) $a+a^2$; (iii) 0 ;
(iv) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$
(v) $6a^2b$; (vi) $-y^2$

3) (i) $-4a^2+3ab-2b^2+1$; (ii) $a+3b$;
(iii) $27x^6+18x^4y^2+12x^2y^4+8y^6$; (iv) $x^3+6x^2+12x+8$;
(v) $3x^3+7x^2-5x+1$; (vi) $2x^3+x^2-3x-1$

4) (i) $C(x)=5x^2-17x+43$, $R(x)=59x-39$;
(ii) $C(x)=2x^2+\frac{x}{2}+\frac{9}{4}$, $R(x)=\frac{19}{4}$;
(iii) $C(x)=x^2+2ax+a^2$, $R(x)=-a^3x+4a^4$;
(iv) $C(x)=\frac{a}{b}x^2+\frac{a^2}{b}x+\frac{b-a^3}{b}$, $R(x)=ab^2-ab+a^4$

5) (i) $C(x)=3x^3+3x^2+3x+1$, $R=2$;
(ii) $C(x)=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$, $R=0$;
(iii) $C(x)=100x^2+10x+1$, $R=0$;
(iv) $C(x)=3x^3+x^2-6x-19$, $R=-44$;
(v) $C(x)=3x^3+7x^2+22x+61$, $R=184$

6) (i) 2 ; (ii) 0 ; (iii) 2 ; (iv) 0 ; (v) 0

7) (i) $2a^4+2b^4$; (ii) $a+b-2\sqrt{ab}$; (iii) a^2+b^2-2ab ;
(iv) $a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$; (v) $-50a^2+120ab-72b^2$.

8) (i) $3ab$, $6a^2b$; (ii) $6xy^2z^3$; $1080x^3y^5z^4$;
(iii) $3b$, $36abc$; (iv) $5a^3b$; $30a^3b^2$; (v) 1 ; $42x^2y^2$

II.

1) (i) $5a^2(5+6a^2-7a^4)$; (ii) $3ax^3(2a-x+7ax^2)$;
(iii) $15a^2x^2(1-2x+7x^2-5x^3)$

2) (i) $(x+a)(x+b)$; (ii) $(a-b)(c-d)$; (iii) $(a-1)(b-c)$;
(iv) $(a-1)(b-1)$; (v) $(a-b)(x^2+y^2)$ (vi) $(2x-3z)(2x+3y)$;
(vii) $(9a^2+4b^2)(3a-2b)$;
(viii) $(5a^2b-7a^3c)(a-2b)=a^2(5b-7ac)(a-2b)$;
(ix) $(a-1)(a^4-a^2+1)$;(x) $(a-x)(a+2b+3c)$

3) (i) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{4}-3b\right)^2$

(iii) $(a^3-1)^2$ (iv) $\left(2x+\frac{a}{2}\right)^2$

4) (i) $(3a+4)^3$ (ii) $(ax-by)^3$

(iii) $-\left(1+\frac{a}{2}\right)^3$ (iv) $a^3(a+1)^3$

5) (i) $(ax-by)(ax+by)$ (ii) $\left(\frac{x}{2}+2y\right)\left(\frac{x}{2}-2y\right)$

(iii) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$ (iv) $-4a^2b^2$

(v) $4a(c-b)$ (vi) $(9a^2+b^2)(3a+b)(3a-b)$

(vii) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

6) (i) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$ (ii) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

(iii) $(x-2yz)(x^2+2xyz+4y^2z^2)$ (iv) $(ab+1)(a^2b^2-ab+1)$

7) (i) $(a+b+c)(a+b-c)$ (ii) $(a+b-c)(a+c-b)$
(iii) $5b(a+3m)(a-3m)$ (iv) $2abc(a+3b)(a-3b)$
(v) $a(3a-2b)^2$ (vi) $xy(x+y)(x-y)$ (vii) $a(a^2x+3)^2$
(viii) $(x+2)(x-2)(x+1)$ (ix) $3a(a^2+4b^4)(a+2b^2)(a-2b^2)$
(x) $x(x+1)^2(x-1)$

8) (i) $a-1$, $(a-1)(a^3-1)$ (ii) 1 , a^2-b^2
(iii) 1 , a^4-1 (iv) $3(a-b)$, $18(a^2-b^2)$
(v) 1 , a^3+x^3

III.

1) (i) $-7ab^2c^3$ (ii) $\frac{a-1}{b}$ (iii) $\frac{x-2a}{b}$

(iv) $\frac{a-1}{a+1}$ (v) $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ (vi) $\frac{c+d}{a}$

(vii) $\frac{3(x-a)}{x+a}$ (viii) $\frac{a(b-c)}{b}$ (ix) $\frac{1}{a^2-1}$

2) (i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{a^2}{a+x}$ (iii) $\frac{2a^2}{a^2-b^2}$ (iv) $\frac{20x}{1-25x^2}$

(v) $\frac{9}{3x-1}$ (vi) b^2 (vii) 1 (viii) $x-a$

(ix) $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$; (x) $\frac{a}{3}$; (xi) 3 ; (xii) 1 ;

(xiii) $\frac{x+y}{x-y}$; (xiv) $\frac{a+x}{ax}$; (xv) $\frac{ab(a-b)}{ab+1}$

(xvi) $\frac{1}{2}$; (xvii) ab ; (xviii) 2x ; (xix) $\frac{b+c-a}{a+c-b}$

(xx) $\frac{ax+b}{cx+d}$; (xxi) ab^2c ; (xxii) $\frac{1}{x}$; (xxiii) -2x .

IV.

1) (i) 3 ; (ii) 5 ; (iii) 4 ; (iv) Identidad ($x \in \mathbb{R}$) ;
(v) Incompatible ; (vi) 5 ; (vii) 3/2 ;
(viii) 1 ; (ix) 2 ; (x) - 1 / 2

2) (i) $\frac{3m}{7}$; (ii) $\frac{3m}{2}$; (iii) $\left|\begin{array}{l} -4a \text{ si } b \neq 0 \\ \text{Identidad si } b = 0 \end{array}\right.$; (iv) $\left|\begin{array}{l} \text{Identidad si } b = 0 \\ \text{Incompatible si } b \neq 0 \end{array}\right.$

(v) 0 si $b \neq 0$; (vi) $\frac{ab}{a+b}$; (vii) 3b si ($a \neq b \wedge a \neq -b$) ;

(viii) Si ($a \neq 2b \wedge a \neq -2b$) entonces $\left|\begin{array}{l} 0 \text{ si } b \neq 0 \\ \text{Identidad si } b = 0 \end{array}\right.$

(ix) $\frac{-1}{ab}$ si ($a \neq b \wedge a \neq -b \wedge$ $(a \neq 0 \vee b \neq 0)$) .

3) (i) $\frac{1}{4}$; (ii) 0 ; (iii) $\frac{4}{3}$; iv) 1 + m ; (v) 3m

4) (i) 15 ; (ii) 10 ; (iii) 16 y 4 ; (iv) 18 y 14 ;
(v) 6,12,36 ; (vi) 7 ; (vii) 11 y 20 ; (viii) 150
(ix) 1000 ; (x) 120 ;

V.

1) (i) 2,3 ; (ii) - 2,7 ; (iii) $\frac{1}{3}$,2 ; (iv) 0, -3 ;
(v) -1, 1 ; (vi) No existen soluciones reales ; (vii) 3,5 .
(viii) $-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$; (ix) $3\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3}$

2) (i) 0, 3ab ; (ii) 0, $\frac{10a}{3}$; (iii) $\pm$ ab ; (iv) a, 2a ;

(v) $\frac{a}{b}, 1$; (vi) $\frac{a}{6}$; (vii) $\frac{a}{2}, 2a$; (viii) $\begin{cases} -\frac{b}{a^2}, \frac{a}{b^2} & si\ a \neq -b \\ \frac{1}{a} & si\ a = -b \end{cases}$

3) (i) $x^2 - 8x + 15 = 0$; (ii) $3x^2 - 7x + 2 = 0$; (iii) $5x^2 + 3x - 2 = 0$

4) (i) $\pm\sqrt{2}$; (ii) 2, 9 (iii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

5) (i) 12 ; (ii) $\pm$ 12 ; (iii) 6 .

6) (i) 3, 5 ; (ii) 25 ; (iii) 1, 9 ; (iv) 8 , 5
(v) 6 , 8 .

Respuestas Problemas Complementarios

1) (ii) $x = 8 \frac{c}{d}$

2) (ii) P = C (1 - d)

3) (ii) $g = (\frac{V}{C} - 1)$

4) 237,5%

5) Vale (ii)

6) (i) El precio es $42, ganando un 40% los días sin promoción.
(ii) P= 1,4C

9) (i) $\alpha = 4$ (ii) $\beta = 2$

10) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

11) $\frac{15}{8}$ días

12) (i) 76 manzanas, (ii) 36 manzanas

13) (ii) x = 30 pd

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

3.1. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Definición 1. Una **ecuación de primer grado con dos incógnitas x, y** es la dada por la expresión siguiente:

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y = \gamma,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ son números reales dados de manera que α y β no se anulen simultáneamente, es decir $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Proposición 1. La ecuación de primer grado (1) con dos incógnitas x, y, tiene siempre infinitas soluciones, es decir, existen siempre infinitos pares o duplas de números que sustituidos respectivamente en las incógnitas x, y satisfacen la ecuación.

Demostración. Sean $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Si se atribuye a y un determinado valor y_o entonces la incógnita x satisface la ecuación de primer grado

$$(2) \qquad \alpha x = \gamma - \beta y_o$$

cuya única solución es $x = \dfrac{\gamma - \beta y_o}{\alpha}$. Por ende, existen infinitos pares de números x, y que satisfacen la ecuación (1) al ser y_o arbitrario.

Si $\alpha = 0$ (el caso $\beta = 0$ es análogo) entonces la ecuación (1) se reduce a la ecuación $\beta y = \gamma$ que resulte ser, para cada x real, una ecuación de primer grado en la incógnita y cuya única solución está dada por $y = \dfrac{\gamma}{\beta}$. Por lo tanto, existen infinitos pares x, $\dfrac{\gamma}{\beta}$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen la ecuación (1)

Ejemplo. La ecuación de primer grado 2x - y = -1 con dos incógnitas x, y admite infinitas soluciones, algunas de las cuales pueden especificarse en una **tabla de valores** de la forma siguiente:

x	y
0	1
1/2	2
-1	-1

Observación 1. Cuando se analice el método gráfico (ver el punto 3.3.6.) se dará una interpretación geométrica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas (el conjunto de todas las infinitas soluciones representa una recta en el plano (ver Capítulo 7).

3.2. SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Definición 2. Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas x, y es el dado por:

$$(3) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{i)} & \alpha x + \beta y = \gamma, \\ \\ \text{(ii)} & \alpha' x + \beta' y = \gamma', \end{array} \right.$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$ de manera que respectivamente α, β y α', β' no sean nulos simultáneamente. Se dice también que el sistema (S) está escrito en **forma normal.**

Los números $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ se llaman **coeficientes del sistema de ecuaciones** y los números γ, γ' se llaman **términos independientes.**

Definición 3. Se llama solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas x, y a un par ordenado de números reales de manera que, sustituidos respectivamente en las letras x, y, satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

Definición 4. Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas significa hallar todas las soluciones del sistema.

Definición 5. El sistema de ecuaciones (S) se dice:

1) Determinado o Compatible: cuando admite un número finito de soluciones;
2) Indeterminado: cuando admite un número infinito (no finito) de soluciones;
3) Incompatible: cuando no admite ninguna solución.

Se desea hallar una regla que permita decidir si el sistema (S) admite o no soluciones y, en caso afirmativo, cuántas admite.

Se considera primero el caso en que uno de los coeficientes de las incógnitas sea nulo, por ejemplo:

$$\beta = 0 \,, \alpha \neq 0 \,, \alpha' \neq 0 \,, \beta' \neq 0 \,,$$

con lo cual el sistema (S) se puede escribir de la forma:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha x = \gamma, \\ \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \qquad \text{con } \alpha \neq 0, \alpha' \neq 0, \beta' \neq 0. \end{array} \right.$$

Teorema 2. El sistema (4) admite una única solución dada por:

$$(5) \qquad x = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad\qquad y = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta'}$$

Demostración. La primera ecuación de (4) es una ecuación de primer grado en la incógnita x, cuya única solución está dada por $x = \frac{\gamma}{\alpha}$. Sustituyendo el valor así encontrado en el lugar de la letra x, en la segunda ecuación del sistema (4), se obtiene la ecuación:

$$\alpha' \frac{\gamma}{\alpha} + \beta' y = \gamma'$$

que resulta ser una ecuación de primer grado en la incógnita y. Esta ecuación admite una única solución dada por:

$$y = \frac{1}{\beta'} \left(\gamma' \frac{\alpha' \gamma}{\alpha} \right) = \frac{\alpha\gamma' - \alpha' \gamma}{\alpha\beta'}$$

con lo cual se obtiene (5)

Ejemplo. Sea el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left| \begin{array}{l} 3y = 9 \\ 3x + 5y = 9 \end{array} \right.$$

De la primera ecuación se deduce que y = 3. Reemplazando dicho valor en la segunda ecuación se obtiene la siguiente ecuación de primer grado en la incógnita x:

$$3x + 15 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 6 = 0,$$

cuya única solución es x = -2. Por lo tanto, el sistema admite una única solución dada por x = -2, y = 3.

Se supone ahora que los coeficientes de las incógnitas del sistema (3) son todos no nulos, es decir:

$$\alpha \neq 0 , \beta \neq 0 , \alpha' \neq 0 , \beta' \neq 0$$

Se analizarán los siguientes tres casos:

$$(6) \qquad \text{(i)} \quad \frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'} \qquad \text{(iii)} \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Caso 1. Si se supone que los coeficientes de las incógnitas del sistema (3) no son proporcionales, es decir:

$$(7) \qquad \frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'} \qquad\qquad (\alpha \beta' - \beta \alpha' \neq 0)$$

entonces existe una única solución dada por las siguientes expresiones:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$$

(8) $$x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$ (9) $$y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

Demostración. La ecuación (3i) puede escribirse bajo la forma $y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta}$. Sustituyendo, en la ecuación (3ii) la expresión encontrada en lugar de la letra y, se obtiene el sistema equivalente siguiente:

(10)
$$\left|\begin{array}{l} y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta}\ , \\[2ex] \alpha' x + \beta' \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta} = \gamma' \end{array}\right.$$

Realizando las operaciones indicadas en la segunda ecuación, se tiene el nuevo sistema equivalente:

(11)
$$\left|\begin{array}{l} y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta}\ , \\[2ex] (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, x = \gamma\beta' - \beta\gamma' \end{array}\right.$$

Como la segunda ecuación contiene sólo la incógnita x cuyo coeficiente es $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, entonces se obtiene x a través de la expresión (8). Sustituyendo esta expresión, en lugar de la letra x, en la primera ecuación del sistema (11) se deduce.

$$y = \frac{\gamma - \alpha\dfrac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}}{\beta} = \frac{\dfrac{\gamma\alpha\beta' - \gamma\beta\alpha' - \alpha\gamma\beta' + \beta\alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}}{\beta}$$
$$= \frac{\alpha\beta\gamma' - \gamma\beta\alpha'}{\beta(\alpha\beta' - \beta\alpha')} = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta'\,\beta\alpha'}$$

que resulta ser la expresión (9)

Ejemplo. La solución del sistema

$$\left|\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{array}\right.$$

está dada por x =1, y = 0 pues $2 \cdot (-1) - (1) \cdot (1) = -2 - 1 = -3 \neq 0$

Caso 2. Si se supone que los coeficientes de las incógnitas del sistema (3) son proporcionales, sin serlo con los términos independientes, es decir:

(12) $\quad \dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'} \neq \dfrac{\gamma}{\gamma'} \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0\ ;\ \alpha\gamma' - \gamma\alpha' \neq 0\ ;\ \beta\gamma' - \gamma\beta' \neq 0)$

entonces el sistema (3) es incompatible, es decir, no existe ninguna solución.

Demostración. De (12) se deduce

(13) $\quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \quad , \quad \beta\gamma' - \gamma\beta' \neq 0$

Teniendo en cuenta lo realizado anteriormente, el sistema (3) es equivalente al sistema (11) que en este caso resulta ser:

(14) $$\begin{cases} y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta} \\ 0x = \beta\gamma' - \beta'\gamma \quad (\neq 0) \end{cases}$$

Basta ahora observar que la segunda ecuación del sistema (11) no puede ser satisfecha por ningún valor de la letra x, al ser $\beta\gamma' - \beta'\gamma \neq 0$.

Ejemplo. El sistema $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$

$$\begin{vmatrix} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{vmatrix}$$

no tiene ninguna solución pues, $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3}$

Caso 3. Si se supone que los coeficientes de las incógnitas del sistema y los términos independientes de las dos ecuaciones son proporcionales entre sí, es decir:

(15) $\quad \dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'} = \dfrac{\gamma}{\gamma'} \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0\ ;\ \alpha\gamma' - \gamma\alpha' = 0\ ;\ \beta\gamma' - \gamma\beta' = 0)$

entonces el sistema (3) es indeterminado, es decir, existen infinitas soluciones.

Demostración. De (15) se deduce

(16) $\quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \quad , \quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = 0 ,$

y, por lo tanto, el sistema (11) que es equivalente al sistema (3) se transforma en:

(17) $$\left|\begin{array}{l} y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta} \\ 0x = 0 \end{array}\right.$$

Como la segunda ecuación de (17) es una identidad, es decir, se satisface cualquiera sea el valor que se atribuya a la letra x, entonces el sistema (17) y por ende el sistema (3), admiten como soluciones todas las soluciones de la primera ecuación que, como se sabe, son infinitas.

Ejemplo. El sistema:

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{array} \right.$$

admite infinitas soluciones, las cuales surgen de la ecuación $y = 2 - 2x$. Algunas de ellas están dadas en la siguiente tabla de valores:

x	y
0	2
1	0
2	-2
-1	4
1/2	1

3.3. DIFERENTES MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

A continuación se verán seis diferentes métodos para obtener la solución del sistema (S) de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, a saber:

1) Método de sustitución;
2) Método de igualación;
3) Método de reducción o de sumas y restas;
4) Método de determinantes (Regla de Cramer);
5) Método de triangulación (Método de Gauss);
6) Método gráfico.

Se explicitará la metodología de los seis métodos y se la aplicará, como ejemplo, para la resolución del siguiente sistema:

$$(18) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{(i) } 5x - y = 5\,, \\ \text{(ii) } -2x + 3y = 11, \end{array} \right.$$

cuya única solución está dada por:

$$(19) \qquad x = 2\,,\ \ y = 5$$

▲ **Método de sustitución**. Se procede de la siguiente manera:

1) Se resuelve una de las dos ecuaciones respecto de una incógnita, por ejemplo, la y;

2) Se sustituye dicha expresión en el lugar de la y en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación de primer grado en la incógnita x;

3) Se resuelve la ecuación hallada respecto de la incógnita x;

4) Se obtiene el valor de la incógnita y sustituyendo el valor de la x en la respectiva expresión encontrada anteriormente en 1).

Ejemplo. De la ecuación (18i) se obtiene $y = 5x - 5$. Reemplazando dicha expresión en la ecuación (18ii) se deduce para la x la ecuación de primer grado,

$$0 = -2x + 3y - 11 = -2x + 3(5x - 5) - 11 = -2x + 15x - 15 - 11 = 13x - 26$$

cuya solución es $x = 2$. Luego, se tiene $y = 5 \cdot (2) - 5 = 10 - 5 = 5$, es decir, la solución (19).

▲ **Método de igualación**. Se procede de la siguiente manera:

1) Se resuelve la primera ecuación respecto de una incógnita, por ejemplo, la y:
2) Se resuelve la segunda ecuación respecto de la misma incógnita y;
3) Se igualan las dos expresiones halladas para obtener una ecuación de primer grado en la incógnita x;
4) Se resuelve la ecuación hallada respecto de la incógnita x;
5) Se obtiene el valor de la incógnita y sustituyendo el valor de la x en cualquiera de las dos expresiones encontradas anteriormente en 1) o en 2).

Ejemplo. De la ecuación (18i) se obtiene $y = 5x - 5$. De la ecuación (18ii) se obtiene $y = \frac{11}{3} + \frac{2}{3}x$

Igualando las dos expresiones halladas, se deduce para x la siguiente ecuación de primer grado.

$$5x - 5 = \frac{11}{3} + \frac{2}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad 5x - \frac{2}{3}x = \frac{11}{3} + 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{13}{3}x = \frac{26}{3},$$

cuya solución es $x = 2$. Luego, se tiene $y = 5 \cdot (2) - 5 = 10 - 5 = 5$, es decir, la solución (19).

▲ **Método de reducción o de sumas y restas**. Se procede de la siguiente manera:

1) Se multiplican las dos ecuaciones de manera que los coeficientes de una de las incógnitas, por ejemplo la y, sean iguales.

2) Si los nuevos coeficientes de la y en las dos ecuaciones tienen signos contrarios entonces se suman las dos ecuaciones, obteniéndose una ecuación de primer grado en la incógnita x. Por el contrario, si tienen igual signo entonces se restan las dos ecuaciones.

3) Se resuelve la ecuación hallada respecto de la incógnita x.

4) Se obtiene el valor de la incógnita y, repitiendo los tres pasos anteriores, pero con los coeficientes de la x.

Ejemplo. Para hallar el valor de la y, se multiplica la ecuación (18i) por 2 y la ecuación (18ii) por 5, obteniéndose el siguiente sistema equivalente:

$$\left| \begin{array}{l} 10x - 2y = 10, \\ -10x + 15y = 55 \end{array} \right.$$

Sumando ambas ecuaciones se deduce para la ecuación de primer grado 13y = 65, cuya solución es $y = \frac{65}{13} = 5$

Para hallar el valor de x, se multiplica la ecuación (18i) por 3 y la ecuación (18ii) por 1, obteniéndose el siguiente sistema equivalente:

$$\left| \begin{array}{l} 15x - 3y = 15, \\ -2x + 3y = 11 \end{array} \right.$$

Sumando ambas ecuaciones se deduce para x la ecuación de primer grado 13x = 26, cuya solución es x = 2, es decir, la solución (19).

▲ Método de determinantes. Regla de Cramer

Definición 6. Se llama **matriz cuadrada de orden 2** a una tabla de cuatro números dispuestos en dos filas y dos columnas de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Los números reales a, b, c, d se llaman **coeficientes de la matriz M.** Los números a,c y b,d representan respectivamente la **primera y segunda columna** de la matriz M. Los números a,b y c,d representan respectivamente la **primera y la segunda fila** de la matriz M.

Definición 7. Se llama **determinante de la matriz cuadrada M de orden 2** al siguiente número real:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R},$$

que resulta ser el producto de los coeficientes de la **diagonal principal** menos el producto de los coeficientes de la **diagonal secundaria.**

El **método de determinantes (Regla de Cramer)** consiste en expresar la solución (8) del sistema de ecuaciones (3) de la siguiente manera, cuando se cumplan las condiciones (7) que aseguran que existe una única solución:

1) La incógnita x se obtiene como una fracción teniendo por denominador el determinante de la matriz de coeficientes del sistema y por numerador el determinante que se obtiene al sustituir la primera columna de la matriz de coeficientes del sistema por la columna de términos independientes, es decir:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \quad ;$$

2) la incógnita y se obtiene como una fracción teniendo por denominador el determinante de la matriz de coeficientes del sistema y, por numerador el determinante que se obtiene al sustituir la segunda columna de la matriz de coeficientes del sistema por la columna de términos independientes, es decir:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

Ejemplo. La solución del sistema de ecuaciones (18) viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15 + 11}{15 - 2} = \frac{26}{13} = 2 \quad ;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{55 + 10}{15 - 2} = \frac{65}{13} = 5 \quad ,$$

que resulta ser la dada por (19).

▲ **Método de triangulación o de Gauss**. Consiste en obtener un sistema de ecuaciones, equivalente al lado, que sea del tipo triangular.

$$(T1) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \; , \\ \qquad ay = b \; , \end{array} \right. \qquad (\alpha, \beta, \gamma, a, b \in \mathbb{R})$$

o del tipo

$$(T2) \quad \left| \begin{array}{l} \beta y + \alpha x = \gamma \; , \\ \qquad cx = d \; , \end{array} \right. \qquad (\alpha, \beta, \gamma, c, d \in \mathbb{R})$$

Se procede de la siguiente manera

1) Si uno de los 4 coeficientes α, β, β', α' es nulo, entonces el sistema (3) es del tipo triangular (T1) ó (T2), ya sea intercambiando las ecuaciones o las incógnitas (ver el sistema de ecuaciones (5) analizado anteriormente):

2) Si los 4 coeficientes α, β, α', β' no son nulos, entonces se puede obtener el sistema triangular (T1) realizando las siguientes operaciones:

(a) Se multiplica la ecuación (3i) por el número α' y la ecuación (3ii) por α ;

(b) Como los coeficientes de la incógnita x son iguales se obtiene una ecuación de primer grado en la incógnita y reemplazando la segunda ecuación por la diferencia de ella misma con la primera ecuación;

(c) Se multiplica la primera ecuación por el número $1/\alpha'$, con lo cual se tiene un sistema de ecuaciones equivalente al sistema (3), con la particularidad de tener iguales la primera ecuación.

Este procedimiento se resume a través de las siguientes equivalencias.:

$$(3) \quad \left|\begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha' \alpha x + \alpha' \beta y = \alpha' \gamma \\ \alpha \alpha' x + \alpha \beta' y = \alpha \gamma' \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha' \alpha x + \alpha' \beta y = \alpha' \gamma \\ (\alpha \beta' - \alpha' \beta) y = \alpha \gamma' - \alpha' \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow (T1) \left|\begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \\ ay = b \end{array}\right.$$

donde

$$(20) \qquad a = \alpha\beta' - \alpha'\beta \quad , \quad b = \alpha y' - \alpha' y \, ;$$

3) Se resuelve la ecuación de primer grado en la incógnita y ó en la incógnita x, segunda ecuación del sistema triangular, dependiendo si el sistema de ecuaciones equivalente al (3) es del tipo (T1) o del tipo (T2), respectivamente:

4) Se obtiene el valor de la otra incógnita x ó de la y sustituyendo el valor obtenido de la y ó de la x en la primera ecuación y resolviendo la ecuación de primer grado respectiva.

Procedimiento práctico. El presente método tiene un procedimiento práctico para obtener del sistema (3) el nuevo sistema equivalente (T1), a saber:

	(debe ser $\neq 0$)		
coef. de la 1ªec. de (3) y de (T1) $\rightarrow$	α	β	γ
coef. de la 2ªec. de (3) $\rightarrow$	α'	β'	γ'
coef. de la 2ªec. de (T1) $\rightarrow$	0	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$
	$\uparrow$ columna de coef. de la incógnita x	$\uparrow$ columna de coef. de la incógnita y	$\uparrow$ col. de términos independientes

Observación 2

1) El coeficiente α debe ser no nulo para poder aplicar este método.

2) Si $\alpha = 0$ entonces el sistema (3) es del tipo triangular intercambiando las dos ecuaciones, procedimiento que no altera las soluciones del sistema.

3) Si $\alpha' = 0$ entonces el sistema (3) es de tipo triangular y por ende no se debe efectuar nada.

Ejemplo. Aplicando el procedimiento práctico al sistema (18), se tiene:

5	-1	5
-2	3	11
$5 \cdot 3 - (-1)(-2) = 13$		$5 \cdot 11 - 5(-2) = 65$

con lo cual el sistema (T1), equivalente al sistema (18), está dado por:

$$\left|\begin{array}{l} 5x - y = 5, \\ \\ 13y = 65 \end{array}\right.$$

De la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{65}{13} = 5$. Reemplazando dicho valor en la primera ecuación se tiene para x, la ecuación de primer grado siguiente: $5x - 5 = 5$, es decir, $5x = 10$ cuya solución es $x = \frac{10}{5} = 2$, es decir (19).

▲ Método gráfico

❑ **Sistema de coordenadas en una recta.** Se establece una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta, es decir, a cada número real le corresponde un único punto de la recta y viceversa, a cada punto de la recta le corresponde un único número real. La metodología es la siguiente: se toman dos puntos sobre la recta, uno es el **punto origen** O y el otro es el **punto unidad** U, a la derecha del punto origen. De esta manera, el punto O divide a la recta en dos semirrectas: la **semirrecta positiva** o **semieje positivo**, que contiene al punto U y la **semirrecta negativa** o **semieje negativo**, que no contiene al punto U.

Entonces se introduce el siguiente **sistema de coordenadas:**

1) Al punto origen O se le hace corresponder el número 0 (cero) ;

2) Al punto unidad U se le hace corresponder el número 1 (uno) ;

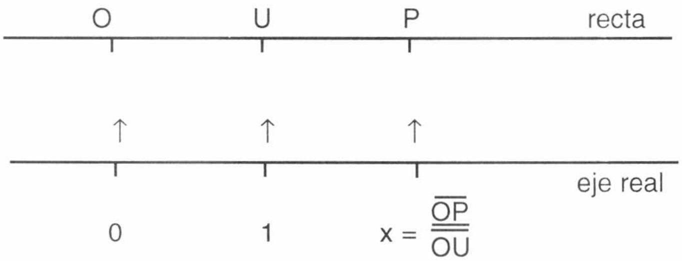
3) A todo punto P del semieje positivo se le asigna el número real x que mide la distancia $\overline{OP}$ con respecto a la unidad $\overline{OU}$. A dicho número real x se lo llama **abscisa o coordenada** del punto P de la recta.

4) A todo punto P' del semieje negativo se le asigna el opuesto del número real positivo que mide la distancia $\overline{P'O}$ con respecto a la unidad $\overline{OU}$.

Entonces, la **correspondencia biunívoca o biyección** entre los puntos de una recta r con el conjunto de los números reales está dada a través del sistema de coordenadas así construido, es decir:

punto origen $O \in r \leftrightarrow$ número real $0 \in \mathbb{R}$;
punto unidad $U \in r \leftrightarrow$ número real $1 \in \mathbb{R}$;
punto $P \in r \leftrightarrow$ número real $x \in \mathbb{R}$ de manera que :

(21) $$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OU}}$$



Dicha correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta con el conjunto de los números reales es un **postulado esencial** para la construcción de la Geometría Analítica.

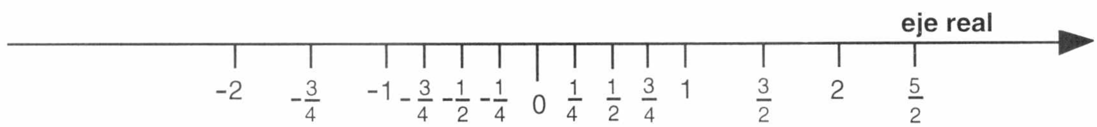
Por otra parte, se tiene que:

(a) Un número natural n se corresponde con el punto de la recta que se obtiene al llevar n veces consecutivas el segmento unidad, desde el punto origen hacia la derecha.

(b) Un número racional positivo de la forma $\frac{p}{q}$ con p, q $\in \mathbb{N}$, sin factores comunes, se corresponde con el punto de la recta que se obtiene al llevar p veces consecutivas la q-ava parte del segmento unidad, desde punto origen hacia la derecha;

(c) La correspondencia de los números irracionales en la recta no es tan simple, a modo de ejemplo el número $\sqrt{2}$ se obtiene como la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de lado unitario. Por reiterada aplicación del Teorema de Pitágoras, ver capítulo 4, se pueden hallar los números $\sqrt{n}$ con n $\in \mathbb{N}$. Por otro lado, haciendo girar una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ se puede representar al número π en la recta real.

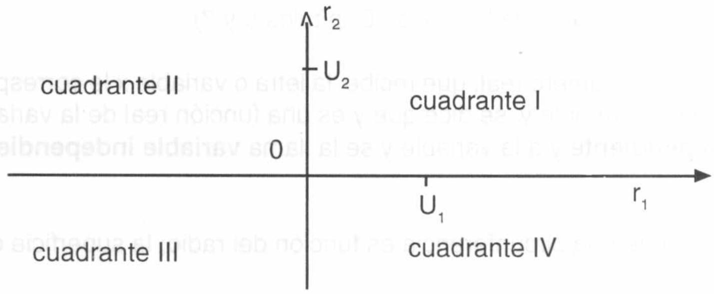
Ejemplo.



Sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Siguiendo con la metodología empleada para determinar un sistema de coordenadas en la recta se establecerá una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales.

Se toman en el plano dos rectas r_1 y r_2 perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto O que se llamará **punto origen.** Se toman sobre cada recta r_i (i=1, 2) el punto unidad $U_i \in r_i$, y se establece sobre r_i el correspondiente sistema de coordenadas. Se considera que r_1 es la recta que se toma horizontal estando U_1 a la derecha del punto O. Análogamente, se considera que r_2 es la recta que se toma vertical estando U_2 arriba del punto O.

Las dos rectas dividen al plano en 4 regiones llamadas **cuadrantes** que se designarán como primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y cuarto cuadrante. Se enumeran en el sentido antihorario, como I,II,III y IV, comenzando con el cuadrante I en el que ambas coordenadas son positivas.



A la recta r_1 se la conoce como **eje de las abscisas** o directamente como **eje x** y a la recta r_2 como el **eje de las ordenadas** o directamente como **eje y.** A ambas rectas se les da el nombre de **ejes coordenados.**

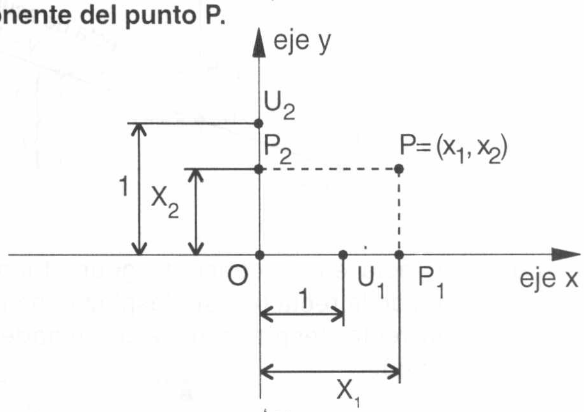
Sea P un punto cualquiera del plano, por él se trazan rectas paralelas a los ejes coordenados y se determinan los puntos $P_1 \in r_1$ y $P_2 \in r_2$, respectivamente. Teniendo en cuenta el sistema de coordenadas sobre r_1 y r_2, se obtienen los dos números reales siguientes:

$$(22) \qquad x_1 = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OU_1}} \in \mathbb{R} \qquad\qquad x_2 = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OU_2}} \in \mathbb{R}$$

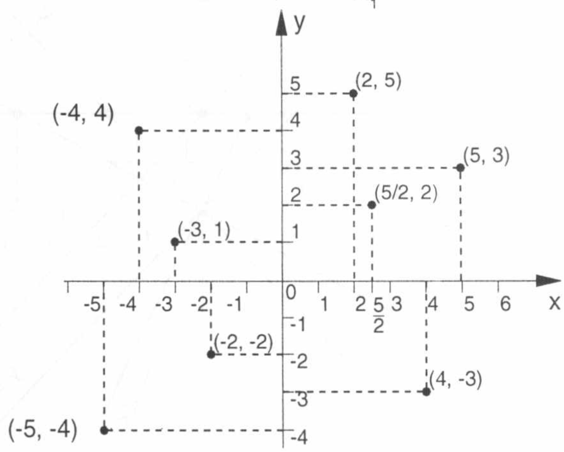
De este modo, el punto P del plano determina, en forma única, un par ordenado (x_1,x_2) de números reales y recíprocamente, realizando el proceso inverso, es decir, que se tiene una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y el conjunto de los pares ordenados de números reales, a través de la ley:

$$(23) \qquad P \leftrightarrow (x_1, x_2)$$

El par ordenado de números reales (x_1, x_2) así obtenido, recibe el nombre de **coordenadas cartesianas ortogonales** del punto P. Dichas coordenadas dependen del sistema de coordenadas elegidas sobre cada recta r_i, i=1,2. En general, se simboliza con x, en lugar de x_1, a la **primera componente del punto P** y con y, en lugar x_2, a la **segunda componente del punto P.**



Ejemplo.



❑ **Función real** (Se pueden ver más detalles en los Capítulos 5 y 7)

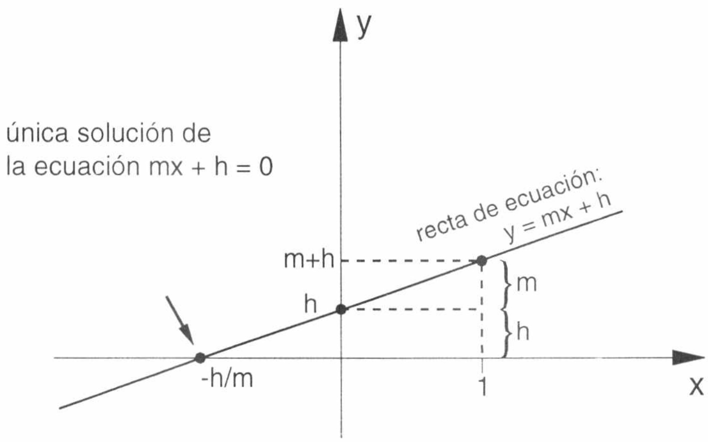
Cuando a cada valor numérico, número real, que recibe la letra o variable x le corresponde un **único valor** bien determinado de la letra o variable y, se dice que y es una función real de la variable x. A la variable x se la llama **variable independiente** y a la variable y se la llama **variable independiente.**

Ejemplos. La longitud de una circunferencia es función del radio; la superficie del círculo es función del radio.

Procedimiento para representar gráficamente una función real. Para representar gráficamente una función, se empieza por dar a la variable independiente x (real) distintos valores, hallando al mismo tiempo los correspondientes valores de la variable dependiente y (real); luego se representan por medio de un sistema de coordenadas en el plano todos los puntos cuyas coordenadas son los valores x, y. La **gráfica de la función** será la curva que una a todos esos puntos (ver Capítulo 7).

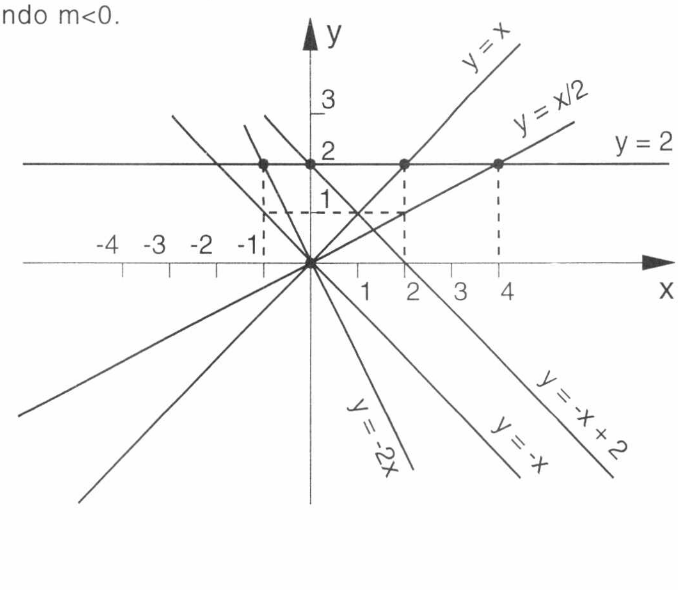
❑ **Representación gráfica de la función y = mx + h**

La función real $y = y(x) = mx + h$ (a cada número real x le hace corresponde el número real $y = mx + h$) tiene por representación gráfica una recta, cualesquiera sean los números reales $m,h \in \mathbb{R}$. Al número m se lo llama la **pendiente de la recta** y al número h se lo llama **ordenada al origen.**

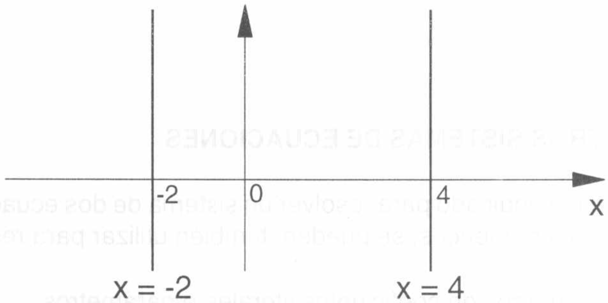


La pendiente m de una recta es un concepto geométrico que se puede interpretar de la siguiente manera: si de un punto de la recta uno se desplaza una unidad hacia la derecha, entonces se encontrará otro punto de la recta desplazándose m unidades hacia arriba cuando $m>0$ y $-m$ unidades hacia abajo cuando $m<0$.

Ejemplos.



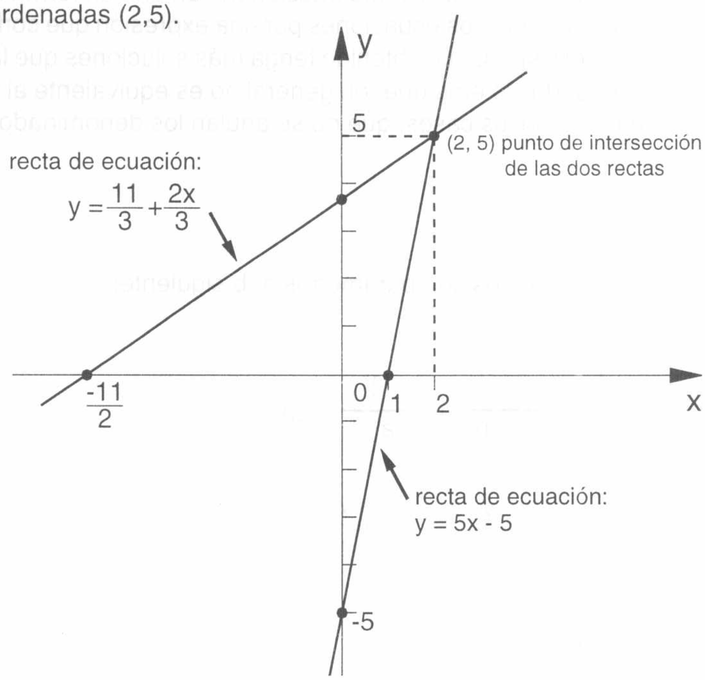
Observación 3. Con la metodología anterior se pueden representar todas las rectas del plano excepto la recta vertical. Intercambiando los roles de la letra x con el de la letra y, se puede ver que $x = 4$ representa la recta vertical con abscisa siempre 4, independiente del valor de y (se piensa en la función real que a cada valor de la variable independiente real y se le asigna el valor 4 de la variable dependiente x).



❑ Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Si se representan gráficamente cada una de las dos rectas del sistema de ecuaciones, entonces la solución del sistema, si existe, está dada por las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Ejemplo. El sistema de ecuaciones (12) puede pensarse gráficamente como la intersección de la recta $5x - y = 5$, es decir: $y = 5x - 5$, con la recta $-2x + 3y = 11$, es decir: $y = \frac{11}{3} + \frac{2x}{3}$. El punto de intersección tiene coordenadas (2,5).



3.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.

De acuerdo al método gráfico, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede interpretar geométricamente de la siguiente manera:

1) Sistema determinado (existe única solución). Las dos rectas se intersectan geométricamente en un punto del plano de coordenadas (x_o, y_o), de manera que $x = x_o$, $y = y_o$ resulta ser la única solución del sistema de ecuaciones.

2) Sistema indeterminado (existen infinitas soluciones). Las dos rectas son coincidentes y, por lo tanto, las coordenadas de todo punto de la recta son soluciones del sistema de ecuaciones.

3) Sistema incompatible (no existe ninguna solución). Las dos rectas son paralelas entre sí, no coincidentes.

3.5. RESOLUCIÓN DE OTROS SISTEMAS DE ECUACIONES

Los procedimientos que se han indicado para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de primer grado, con coeficientes numéricos, se pueden también utilizar para resolver :

1) sistemas de primer grado con coeficientes literales o parámetros;

2) sistemas con ecuaciones fraccionarias que dan lugar a un sistema de ecuaciones de primer grado.

En el caso 1) es necesario excluir los eventuales particulares valores de las letras o parámetros que hacen perder de significado al menos una de las ecuaciones del sistema. Por otra parte, se deberá también analizar si existen particulares valores de los parámetros para los cuales el sistema resulta incompatible, indeterminado o determinado.

En el caso 2), como para transformar el sistema fraccionario en uno en forma normal, en general, se debe multiplicar a ambos miembros de las dos ecuaciones por una expresión que contiene al menos una de las dos incógnitas, puede ser que el sistema así obtenido tenga más soluciones que las reales. Por lo tanto, después de haber resuelto el segundo sistema que, en general no es equivalente al sistema original dado, es necesario verificar, en la mayoría de los casos, que no se anulan los denominadores de las ecuaciones del sistema dado:

Ejemplos.

i) Resolver el sistema de ecuaciones con parámetros a, b siguiente:

$$(E_1) \quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a \\[2ex] \dfrac{x-y}{2ab} = \dfrac{x+y}{a^2+b^2} \end{array}\right.$$

En primer lugar se debe suponer que:

$$(H_1) \qquad a \neq b \quad , \quad a \neq -b \, , \quad a \neq 0 \quad , \quad b \neq 0$$

para eliminar los valores de los parámetros para los cuales el sistema (E_1) no tiene sentido o no está definido al anularse, al menos, uno de lo denominadores.

Si se multiplica la primera ecuación por mcm $(a + b; a - b) = a^2 - b^2$ y la segunda ecuación por mcm $(2ab; a^2 + b^2) = 2ab(a^2 + b^2)$ se obtiene:

$$(E1) \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (a-b)x + (a+b)y = 2a(a^2-b^2) \\ (a^2+b^2)(x-y) = 2ab(x+y) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (a-b)x + (a+b)y = 2a(a^2-b^2) \\ (a-b)^2x - (a+b)^2y = 0 . \end{array} \right.$$

El determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas del último sistema de ecuaciones, equivalente al (E_1), está dado por:

$$\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ (a-b)^2 & -(a+b)^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a+b)^2 - (a+b)(a-b)^2 =$$

$$= -(a+b)(a-b)\Big((a+b)+(a-b)\Big) = -2a(a+b)(a-b) = -2a(a^2-b^2) \neq 0,$$

con lo cual el sistema (E_1) tiene única solución. Esta solución viene dada por:

$$\mathbf{x} = \frac{\begin{vmatrix} 2a(a^2-b^2) & a+b \\ 0 & -(a+b)^2 \end{vmatrix}}{-2a(a^2-b^2)} = \frac{-2a(a^2-b^2)(a+b)^2}{-2a(a^2-b^2)} = (a+b)^2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a-b & 2a(a^2-b^2) \\ (a-b)^2 & 0 \end{vmatrix}}{-2a(a^2-b^2)} = \frac{-2a(a^2-b^2)(a-b)^2}{-2a(a^2-b^2)} = (a-b)^2$$

ii) Resolver el sistema de ecuaciones fraccionario siguiente:

$$(E_2) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{2x}{y} - 1 = \dfrac{1}{y} \\ \\ 7 + \dfrac{4y}{x} = -\dfrac{19}{x} . \end{array} \right.$$

En primer lugar se debe suponer que, si existen soluciones, las incógnitas deben satisfacer las condiciones:

$$(H_2) \qquad x \neq 0 \qquad , \qquad y \neq 0.$$

para eliminar los valores que anulan los denominadores.

Si se multiplica la primera ecuación por y, y la segunda ecuación por x, se tiene el sistema:

$$\left|\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{array}\right.$$

que tiene única solución dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -19 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 19}{8 + 7} = \frac{-15}{15} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-38 - 7}{8 + 7} = \frac{-45}{15} = -3$$

iii) Resolver el sistema de ecuaciones fraccionario siguiente:

$$(E_3) \quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{3x - 2y}{x - 2} = 1, \\ \dfrac{5x + 9}{3x + 2y} = \dfrac{19}{12} \end{array}\right.$$

En primer lugar se debe suponer que, si existen soluciones, las incógnitas deben satisfacer las condiciones:

$$(H_3) \qquad x \neq 2 \quad , \qquad 3x + 2y \neq 0$$

para eliminar los valores que anulan los denominadores.

Si se multiplica la primera ecuación por (x - 2), y la segunda por 12(3x + 2y), se tiene el sistema:

$$\left|\begin{array}{l} 3x - 2y = x - 2 \\ 12(5x + 9) = 19(3x + 2y) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x - y = -1 \\ 3x - 38y = -108 \end{array}\right.$$

El último sistema tiene única solución dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -108 & -38 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -38 \end{vmatrix}} = \frac{38 - 108}{-38 + 3} = \frac{-70}{-35} = 2\,;$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -108 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -38 \end{vmatrix}} = \frac{-108+3}{-38+3} = \frac{-105}{-35} = 3\,.$$

pero esta solución (x=2, y=3) no satisface el sistema (E_3) al no verificar la hipótesis $x\neq 2$ de la condición (H_3). Por tanto, el sistema (E_3) no tiene ninguna solución (es incompatible).

3.6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Encontrar la fracción que resulta ser igual a $\frac{1}{3}$ cuando se suma 1 al numerador, e igual a $\frac{1}{4}$ cuando se aumenta 1 al denominador.

Solución. Se indica con x el numerador de la fracción y, con y el denominador de la fracción. Las dos condiciones se traducen en el siguiente sistema fraccionario:

$$(A_1)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Se supone que la incógnita y satisface las condiciones:

$$y \neq 0 \qquad , \qquad y \neq -1$$

para eliminar los valores que anulan los denominadores en (A_1).

Si se multiplica la primera ecuación por 3y = mcm (3;y), y la segunda por 4(y+1) =mcm (4; y +1) se obtiene el sistema de ecuaciones de primer grado siguiente:

$$\left|\begin{array}{l} 3\,(x+1) = y \\ 4x = y+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x - y = -3 \\ 4x - y = 1 \end{array}\right.$$

cuya solución está dada por:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3+1}{-3+4} = \frac{4}{1} = 4\,;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3+12}{-3+4} = \frac{15}{1}$$

Por otro lado, puede verificarse que $x = 4$, $y = 15$ es la solución del sistema (A_1).

2) Encontrar las medidas de los lados de un rectángulo sabiendo que:

(i) el área del rectángulo no cambia de si se aumenta la altura en 3 metros y se disminuye la base en 3 metros;

(ii) el área del rectángulo aumenta en 16 metros cuadrados si se aumenta la altura en 5 metros y se disminuye la base en 3 metros.

Solución. Se indica con x (metros) la medida de la altura y con y (metros) la medida de la base del rectángulo; el área del rectángulo estará dada por la expresión xy. Las dos condiciones se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(A_2) \quad \left| \begin{array}{l} (x+3)(y-3) = xy \\ (x+5)(y-3) = xy + 16 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} xy - 3x + 3y - 9 = xy \\ xy - 3x + 5y - 15 = xy + 16 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -3x + 3y = 9 \\ -3x + 5y = 31 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} -x + y = 3 \\ \Leftrightarrow \\ -3x + 5y = 31, \end{array} \right.$$

cuya única solución está dada por $x = 8$, $y = 11$.

3) Hallar dos números positivos de manera que su suma sea 42 y su cociente sea 5.

Solución. Se indica con x, y los dos números positivos. Las dos condiciones se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(A_3) \quad \left| \begin{array}{l} x + y = 42 \\ \dfrac{x}{y} = 5. \end{array} \right. \qquad (x > 0 , y > 0)$$

como $y > 0$, se puede multiplicar la segunda ecuación por y, obteniéndose el sistema siguiente:

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 42 \\ x = 5y \end{array} \right. \underset{\text{(sustitución)}}{\Leftrightarrow} \left| \begin{array}{l} 5y + y = 42 \\ x = 5y \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 6y = 42 \\ \\ x = 5y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = 7 \\ \\ x = 5y \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 35, \ y = 7$$

Se puede verificar que $x = 35$, $y = 7$ es la solución del sistema (A3)

3.7. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES INCÓGNITAS

Los métodos de resolución, que se estudiaron para los sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se pueden aplicar también a los sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. En general, se aconseja el método de sustitución: se despeja una de las tres incógnitas de una de las tres ecuaciones en función de las otras dos incógnitas, y se reemplaza en las dos ecuaciones restantes, obteniéndose para estas dos incógnitas un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Una vez resuelto dicho sistema, se obtiene la tercera incógnita utilizando la expresión anteriormente hallada.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema:

$$(G1) \quad \left| \begin{array}{l} x + 2y + 10z = 79 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x + 3y - 5z = -9 \end{array} \right.$$

De la primera se obtiene $x = 79 - 2y - 10z$, con lo cual se tiene que:

$$(G1) \quad \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 79 - 2y - 10z \\ 2(79 - 2y - 10z) + y - z = 5 \\ 4(79 - 2y - 10z) + 3y - 5z = -9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 79 - 2y - 10z \\ -3y - 21z = -153 \\ -5y - 45z = -325 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 79 - 2y - 10z \\ y - 7z = 51 \\ y + 9z = 65. \end{array} \right.$$

El sistema de ecuaciones con incógnitas y, z está dado por:

$$\left| \begin{array}{l} y + 7z = 51 \\ \\ y + 9z = 65 \end{array} \right.$$

cuya única solución es $y = 2$, $z = 7$. Por lo tanto, de la primera ecuación se deduce que $x = 5$.

Además, puede verificarse que $x = 5$, $y = 2$, $z = 7$ es la solución de (G1).

Trabajo Práctico

1) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. En el caso en que la solución sea única, hállela a través de todos los métodos: sustitución, igualación, reducción, determinantes, triangulación y gráfico:

(i) $\left| \begin{array}{l} 3x + y = 5 \quad ; \\ 3x + 2y = 4 \end{array} \right.$ (ii) $\left| \begin{array}{l} 3x - y = 6 \quad ; \\ 5x + y = 10 \end{array} \right.$ (iii) $\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 17 \; ; \\ - x + 9y = 2 \end{array} \right.$

(iv) $\left| \begin{array}{l} 2x + 6y = 3; \\ 6x + 18y = 1 \end{array} \right.$ (v) $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \quad ; \\ -4x + 6y = -2 \end{array} \right.$ (vi) $\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 2 \; ; \\ 6x - 12y = -1 \end{array} \right.$

(vii) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{3x}{5} + y = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$ (viii) $\left| \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x - 4y = 9. \end{array} \right.$

2) Resuelva los siguientes sistemas paramétricos de primer grado con dos incógnitas:

(i) $\left| \begin{array}{l} x + y = 2a \quad ; \\ 2x + ay = 2a^2 \end{array} \right.$ (ii) $\left| \begin{array}{l} ax - 3y = a \quad ; \\ x + ay = 1 \end{array} \right.$

(iii) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \quad ; \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} \end{array} \right.$ (iv) $\left| \begin{array}{l} x + y = 2a \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{array} \right.$

(v) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \; ; \\ bx - ay = 0 \end{array} \right.$ (vi) $\left| \begin{array}{l} x / a + y / b = 1 \\ x / b + y / a = 1. \end{array} \right.$

3) Resuelva los siguientes sistemas fraccionarios:

(i) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{2x}{y} - 1 = \dfrac{1}{y} \quad ; \\ 7 + \dfrac{4y}{x} = - \dfrac{19}{x} \end{array} \right.$ (ii) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{y + 4} = 0 \quad ; \\ \dfrac{1}{3x + 1} - \dfrac{1}{5y} = 0 \end{array} \right.$

(iii) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x + y}{x - y} = 9 \\ \dfrac{2x - y}{3x + 8} = \dfrac{6}{23} . \end{array} \right.$

4) Resuelva los siguientes problemas que conducen a un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

(i) Halle dos números positivos que sean entre sí como 7 es a 3, y cuya diferencia sea 132.

(ii) En un corral, en que hay gallinas y conejos, se cuentan 60 cabezas y 160 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

(iii) En un edificio, las puertas tienen 4 cristales y las ventanas tienen 6 cristales. Si se cuentan 30 aberturas y 172 cristales, ¿cuántas puertas y ventanas hay?

(iv) Halle dos números positivos de manera que su suma sea 105 y su cociente sea 2/5.

(v) Halle dos números positivos de manera que su suma y su cociente sea 5.

(vi) Halle el número de pesos que tienen Luis y José, sabiendo que:

a) si Luis da \$20 a José, éste tendrá el doble de lo que le queda a Luis;

b) si José da \$20 a Luis, éste tendrá el triple de lo que le queda a José.

5) Resuelva los siguientes sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas:

(i) $\left|\begin{array}{l} x + y + z = 2 \quad , \\ 2x + 3y + 5z = 11 \quad , \\ x - 5y + 6z = 29 \quad ; \end{array}\right.$ (ii) $\left|\begin{array}{l} x + 5y + 3z = 6 \quad , \\ 3x + 15y - 4z = -8 \quad , \\ -2x + y - 5z = 1 \quad ; \end{array}\right.$

(iii) $\left|\begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \quad , \\ 2x + 3y + 4z = 4 \quad , \\ 5x - 4y - 3z = 20 \; . \end{array}\right.$

6) Una concesionaria de autos vendió en el año 1991 cuatro veces más autos grandes que pequeños y en el año 1992 vendió tres veces más autos pequeños que grandes. Se supone que el precio promedio de venta de los autos pequeños es de \$ 5.000 y el de los autos grandes es de \$ 8.000. Se solicita que responda a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si, en ambos años, se vendieron el mismo número de autos?;

(ii) ¿Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si el número de autos que se vendieron en el año 1992 es ocho quintos de lo que se vendieron en el año 1991?;

(iii) ¿Cuál es la razón de la venta (en pesos) del año 1992 respecto del año 1991 si se vendieron 1.000 autos en el año 1992 y 800 autos en el año 1991?

Ayuda: plantee un sistema de ecuaciones que incluya todos los casos contemplados, suponiendo que:

$G_2(G_1)$ es el número de autos grandes vendidos en el año 1992 (1991);

$P_2(P_1)$ es el número de autos pequeños vendidos en el año 1992 (1991);

$N_2(N_1)$ es el número de autos vendidos en el año 1992 (1991);

$V_2(V_1)$ es la recaudación (en pesos) de autos vendidos en el año 1992 (1991).

Deduzca que se tiene la relación

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{115}{148}\,\frac{N_2}{N_1}$$

y luego obtenga la solución para todos los casos planteados.

7) Un vendedor de telas gana el 30% sobre el precio de costo; pero un día descubre un metro defectuoso que hace aumentar sus beneficios al 33%. ¿Cuánto mide en realidad el metro defectuoso?

8) Determine los resultados de cada partido si la posición final de un cuadrangular de fútbol es la dada por la siguiente tabla en la cual se tiene en cuenta que:

(a) J, G, E y P representan la cantidad de partidos jugados, ganados, empatados y perdidos, respectivamente;

(b) GF y GC representan la cantidad de goles a favor y en contra, respectivamente;

(c) El puntaje es la suma de los puntos obtenidos en el torneo a razón de 3, 1 y 0 puntos por partido ganado, empatado y perdido, respectivamente.

Resultados / Equipos	J	G	E	P	GF	GC	**PUNTAJE**
A	3	3	0	0	7	2	9
B	3	2	0	1	3	3	6
C	3	0	1	2	3	6	1
D	3	0	1	2	0	2	1

Respuestas Trabajo Práctico

1) (i) $x = 2$, $y = -1$; (ii) $x = 2$, $y = 0$; (iii) $x = 7$, $y = 1$;

iv) incompatible ; (v) indeterminado ; (vi) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$;

(vii) $x = 1$, $y = -3$; (viii) $x = 7$, $y = 3$.

2) (i) $a = 2$: indeterminado , $a \neq 2$: única solución $x = 0$, $y = 2a$;

ii) única solución $\forall\, a \in \mathbb{R}$: $x = 1$, $y = 0$;

(iii) $a = 0$ ó $b = 0$: el sistema no está definido ,

$a \neq 0$ y $b \neq 0$: única solución $x = a$, $y = b$;

(iv) $a = b$: indeterminado , $a \neq b$: única solución $x = a + b$, $y = a - b$;

(v) $a = 0$ ó $b = 0$: el sistema no está definido ,

$a \neq 0$ y $b \neq 0$: Unica solución $x = a$, $y = b$;

(vi) $a = 0$ ó $b = 0$: el sistema no está definido ,

$a \neq 0$ y $b \neq 0$: | $a = b$: indeterminado ,
| $a = -b$: incompatible ,
| $a \neq \pm b$: única solución $x = \dfrac{ab}{b+a}$, $y = \dfrac{ab}{b+a}$

3) (i) $x = -1$, $y = -3$; (ii) $x = -2$, $y = -1$; (iii) $x = 5$, $y = 4$

4) (i) 231 y 99 ; (ii) 40 gallinas y 20 conejos ;

(iii) 4 puertas y 26 ventanas (iv) 30 y 75 ;

(v) $\frac{25}{6}$ y $\frac{5}{6}$; (vi) Luis tiene \$52 y José \$44 .

5) (i) $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$ (ii) $x = -5$, $y = 1$, $z = 2$

(iii) $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

6) (i) $\frac{115}{148}$; (ii) $\frac{46}{37}$; (iii) $\frac{575}{592}$.

8) Los resultados de los partidos son los siguientes:

A: 2	vs	B: 0 ;	A: 4	vs	C: 2 ;
A: 1	vs	D: 0 ;	B: 2	vs	C: 1 ;
B: 1	vs	D: 0 ;	C: 0	vs	D: 0 .

CAPÍTULO 4

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA DEL PLANO

A continuación se enunciarán propiedades elementales correspondientes a rectas, ángulos, circunferencias y cuadriláteros. En cambio, los triángulos serán tratados con más detalles, sobre todo lo referente a los Teoremas de Thales y de Pitágoras, relaciones trigonométricas y la resolución de triángulos rectángulos. Las nociones elementales de la Geometría del plano como asimismo las demostraciones más simples se suponen conocidas o se dejan como ejercicio.

Se designarán las rectas (también los segmentos) con letras minúsculas, los ángulos con letras mayúsculas o griegas. Por ejemplo, en un triángulo, “a”, “b”, “c” son las longitudes de los lados, y “A”, “B”, “C”, los ángulos opuestos correspondientes; en un cuadrilátero ABCD los vértices consecutivos están en ese orden, y los lados a, b, c, d, también a partir de $\overline{AB} = a$ (se indica con $\overline{AB}$ la **medida del segmento** AB).

4.1. PROPIEDADES BÁSICAS DE LA GEOMETRÍA DEL PLANO

▲ Propiedades de rectas y ángulos

Definición 1. (i) La **bisectriz** de un ángulo divide a éste en dos partes iguales.
(ii) La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular que pasa por su punto medio.

Proposición 1. Si dos rectas paralelas a, b, se cortan por una secante c, entonces, ver Figura 4.1:

1) los ángulos alternos internos 3, 5 son iguales;
2) los ángulos alternos externos 1, 7 son iguales;
3) los ángulos correspondientes 1, 5 son iguales;
4) los ángulos colaterales internos 4, 5 son suplementarios;
5) los ángulos colaterales externos 1, 8 son suplementarios.

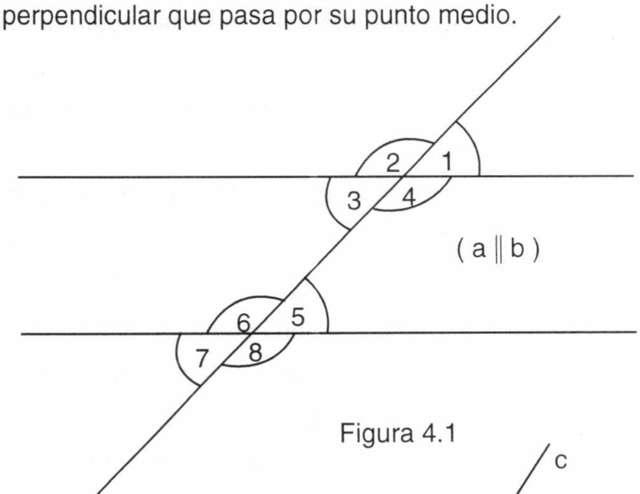


Figura 4.1

Proposición 2. Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son: iguales si ambos son agudos, menores de 90^0, o ambos son obtusos, mayores de 90, y suplementarios, si uno es agudo y el otro obtuso, ver Figura 4.2.

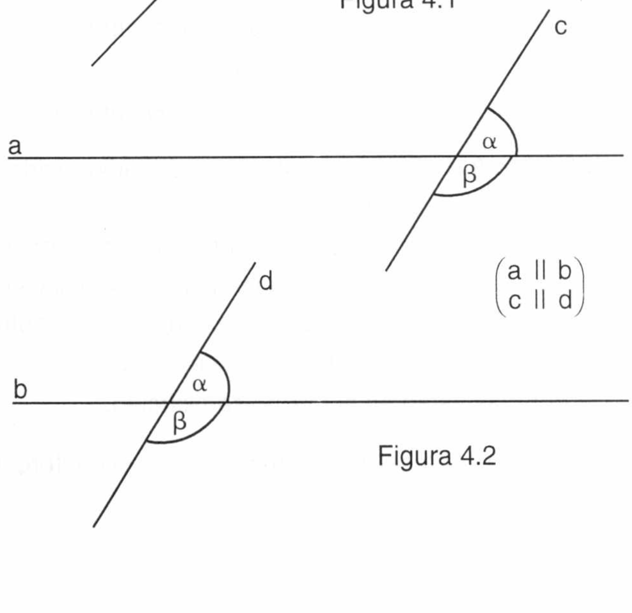


Figura 4.2

Proposición 3. Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales si ambos son agudos o ambos son obtusos; y suplementarios, si uno es agudo y el otro obtuso.

Proposición 4. 1) Las bisectrices de dos ángulos suplementarios son perpendiculares.

2) Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de las rectas que forman el ángulo y recíprocamente.

Proposición 5. Si por el punto medio de un segmento se traza una perpendicular (mediatriz) sus puntos equidistan de los extremos del segmento, y recíprocamente.

❑ Propiedades en la circunferencia

Proposición 6. 1) El diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos correspondientes en dos partes iguales.

2) La tangente en un punto es perpendicular al radio correspondiente a ese punto y recíprocamente.

Proposición 7. 1) Las posiciones relativas de dos circunferencias en un plano son: exteriores (con intersección vacía), tangentes exteriores (se intersectan en un solo punto), secantes (se intersectan en dos puntos diferentes), tangentes interiores (se intersectan un un solo punto), interiores y concéntricas (con intersección vacía).

2) Si dos circunferencias son tangentes exteriores o tangentes interiores, el punto de contacto está alineado con los centros.

3) Si dos circunferencias son secantes, la recta que une los centros es mediatriz de la cuerda común.

4) Si dos circunferencias tienen centros O y O', y radios r y r', respectivamente, y si $d=\overline{OO'}$ es la distancia entre los centros O y O', entonces se verifica:

(a) $d > r + r'$: si son exteriores ;

(b) $d = r+r'$: si son tangentes exteriores ;

(c) $r - r' < d < r + r'$: si son secantes ;

(d) $d = r - r'$: si son tangentes interiores ;

(e) $d < r - r'$: si son interiores ;

(f) $d = 0$; si son concéntricas .

Proposición 8. 1) En la circunferencia de radio unidad la medida de un ángulo central (formado por dos radios) es la del arco que abarca.

2) La medida de un ángulo inscripto, formado por dos cuerdas, es la mitad del ángulo central correspondiente al mismo arco. Se pueden presentar varios casos, a saber (ver Figura 4.3) :

(a) el ángulo está formado por una cuerda y un diámetro;

(b) las cuerdas están en diferentes semicírculos ;

(c) las cuerdas están en el mismo semicírculo.

Observación 1. La ecuación analítica de la circunferencia en el plano será vista en el Capítulo 7.

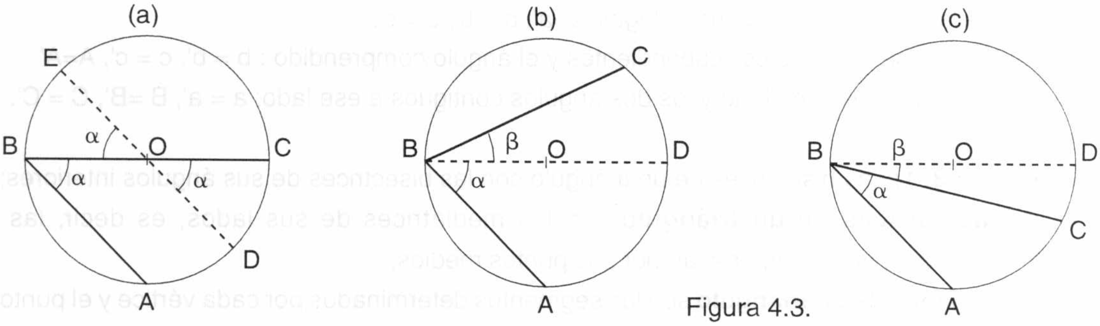


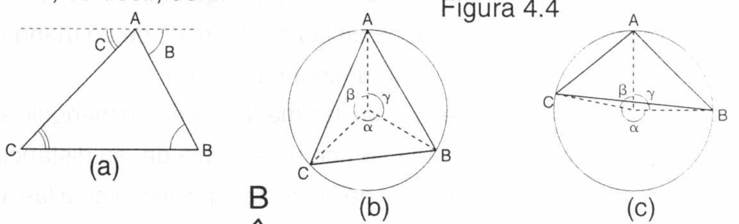
Figura 4.3.

❑ Triángulos

Definición 2. En el conjunto de los triángulos, polígonos de tres lados, se definen los siguientes casos particulares.

1) Equiláteros: tienen los tres lados iguales.
2) Isósceles: tienen dos lados iguales.
3) Rectángulos: tienen un ángulo recto; es decir, 90°

Figura 4.4



Teorema 9.

1) Propiedad fundamental. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, es decir, 180° (ver Figura 4.4.).

2) El ángulo exterior de un triángulo (el adyacente a uno de sus ángulos) es igual a la suma de los dos ángulos no adyacentes (ver Figura 4.5)

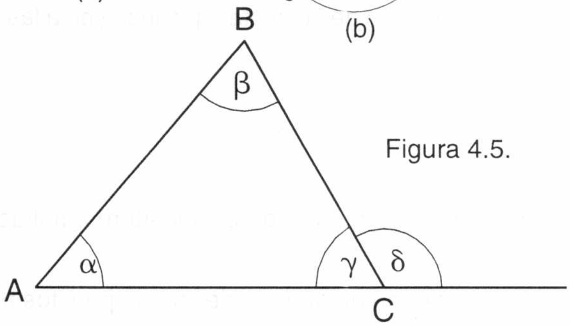


Figura 4.5.

Demostración:

1) Se verá la prueba de este importante resultado de la geometría del plano a través de dos métodos diferentes. El primero, ver Figura 4.4.(a), consiste en trazar desde el vértice A del triángulo ABC una recta paralela al lado opuesto BC. Teniendo en cuenta la igualdad de ángulos alternos internos se tiene que la suma de los ángulos interiores es un llano (2 rectos).

El otro método consiste en considerar la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, ver Proposición 12, más abajo, y la Figura 4.4 casos (b) y (c), según sea el caso en que el centro de la circunferencia pertenezca o no al triángulo. Utilizando la Proposición 8 (2) se tiene que la suma de los ángulos interiores del triángulo es la mitad de dos llanos, es decir 180°, pues $\angle A = \frac{\alpha}{2}$, $\angle B = \frac{\beta}{2}$, $\angle C = \frac{\gamma}{2}$ con $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.

2) Como, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ por ser ángulos interiores al triángulo ABC y además $\gamma + \delta = 180^\circ$ por ser ángulos adyacentes, son suplementarios, entonces $\delta = \alpha + \beta$ (ver Figura 4.5).

Proposición 10. En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales (triángulos isósceles) y a mayor lado se opone mayor ángulo.

Proposición 11. Dos triángulos ABC y A'B'C', de lados a, b, c y a', b', c', respectivamente, son iguales **(congruentes)** si se tiene uno de los siguientes casos:

1) los tres lados iguales a sus homólogos: $a=a'$, $b = b'$, $c = c'$.

2) dos lados iguales a sus correspondientes y el ángulo comprendido : $b = b'$, $c = c'$, $A=A'$

3) un lado igual a su homólogo y los dos ángulos contiguos a ese lado: $a = a'$, $B =B'$, $C = C'$.

Definición 3. 1) Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos interiores;

2) las **mediatrices de un triángulo** son las mediatrices de sus lados, es decir, las rectas perpendiculares a los mismos, que pasan por sus puntos medios;

3) las **medianas de un triángulo** son los segmentos determinados por cada vértice y el punto medio del lado opuesto del mismo;

4) las **alturas de un triángulo** son las distancias de cada vértice a la recta que incluye el lado opuesto.

Proposición 12. En un triángulo se tienen los siguientes **puntos notables:**

1) Las bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto llamado **incentro,** que resulta ser el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo.

2) El punto de intersección de las mediatrices de un triángulo se llama **circuncentro,** que resulta ser el centro de la circunferencia circuncripta al mismo.

3) El punto de intersección de las medianas de un triángulo se llama **baricentro,** o centro de gravedad, del mismo; su distancia a cada vértice es el doble de su distancia al punto medio del lado opuesto.

4) El punto de intersección de las rectas que incluyen a las alturas de un triángulo se llama **ortocentro** del mismo.

❑ Cuadriláteros

Definición 4. En el conjunto de los Cuadriláteros, polígonos de 4 lados, se definen los siguientes casos particulares:

1) Trapezoides: no tienen ningún par de lados opuestos paralelos.

2) Trapecios: tienen un par de lados opuestos paralelos.

3) Paralelógramos: tienen los dos pares de lados opuestos paralelos.

Dentro de los paralelógramos se tienen los subconjuntos siguientes:

4) Rectángulos: tienen cuatro ángulos rectos. Son cuadriláteros equiángulos.

5) Rombos: tienen cuatro lados iguales. Son cuadriláteros equiláteros.

6) Cuadrados: rectángulos y rombos a la vez.

Proposición 13. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale cuatro ángulos rectos, es decir, 360°.

Demostración. Se divide al cuadrilátero en dos triángulos y, como la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos interiores de los dos triángulos, se tiene el resultado por utilización de la propiedad fundamental de los triángulos.

Proposición 14. En todo trapecio la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos es paralela a las bases, se llaman así a los lados paralelos, y de longitud igual a la semisuma de éstas.

Demostración. Por ser E, F, puntos medios de los lados AD, BC, de los triángulos ABC, ACD, respectivamente, en que se ha descompuesto el trapecio, los segmentos EM, FM, paralelas medias respecto de las bases coinciden en el punto M, y además, como, ver Figura 4.6:

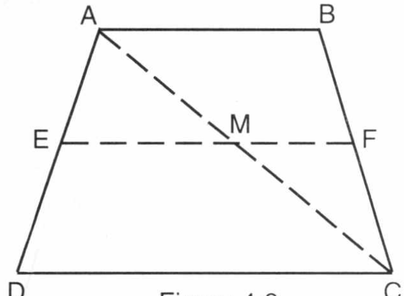


Figura 4.6.

(1) $$\overline{FM} = \frac{\overline{BA}}{2}, \quad \overline{EM} = \frac{\overline{CD}}{2}$$

entonces se tiene

(2) $$\overline{EM} + \overline{FM} = \frac{\overline{BA} + \overline{CD}}{2} = \overline{EF}.$$

Proposición 15. En todo paralelógramo se verifica, ver Figura 4.7:

1) Los lados opuestos son iguales.
2) Los ángulos opuestos son iguales.
3) Las diagonales se cortan en su punto medio I.

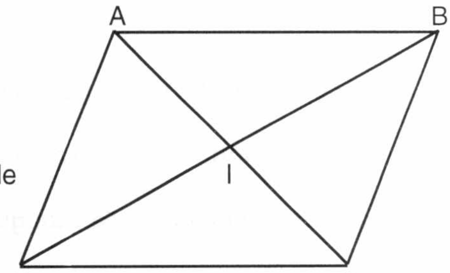


Figura 4.7

Recíprocamente, un cuadrilátero es un paralelógramo si se cumple una sola de las condiciones anteriores. 1), 2), 3).

Proposición 16. Si las diagonales de un paralelógramo son:

1) iguales, entonces es un rectángulo;
2) perpendiculares, entonces es un rombo;
3) iguales y perpendiculares, entonces es un cuadrado.

4.2. TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Definición 5. Dos segmentos son **proporcionales** a otros dos cuando la razón de las medidas de los dos primeros es igual a la de los dos últimos.

Ejemplos:

Los segmentos AB y CD son proporcionales a los segmentos A'B' y C'D', pues:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3}{4} \qquad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Definición 6. Dos triángulos son semejantes cuando tienen los ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales, es decir, ver Figura 4.8.

(3) $$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \end{cases}$$

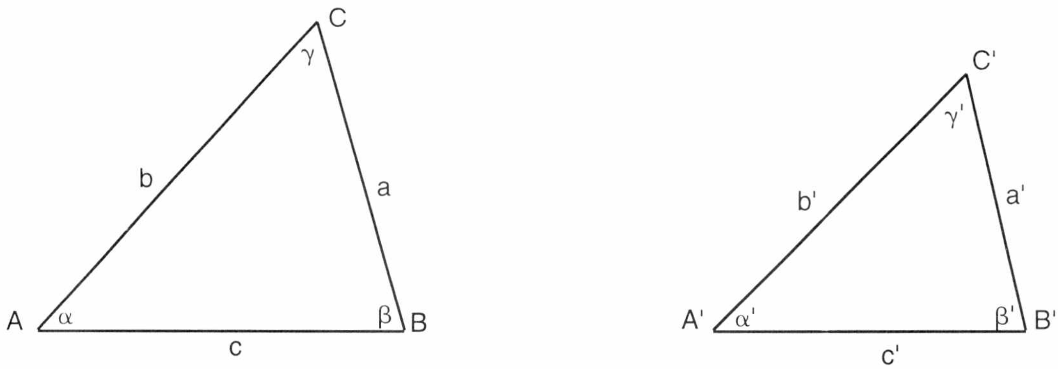


Figura 4.8.

Proposición 17. Dos triángulos iguales y dos triángulos equiláteros son triángulos semejantes.

Demostración: es una aplicación directa de la definición de semejanza de triángulos.

Casos de semejanza de triángulos: dos triángulos son semejantes cuando:

1) tienen respectivamente proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido;
2) tienen respectivamente iguales dos ángulos;
3 tienen respectivamente proporcionales los tres lados;
4) tienen respectivamente proporcionales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos iguales.

Teorema de Thales. Si varias paralelas cortan a dos rectas de un plano, los segmentos determinados en una de éstas son proporcionales a los correspondientes de la otra, es decir, ver Figura 4.9:

(4) $$r_1 \,//\, r_2 \,//\, r_3 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

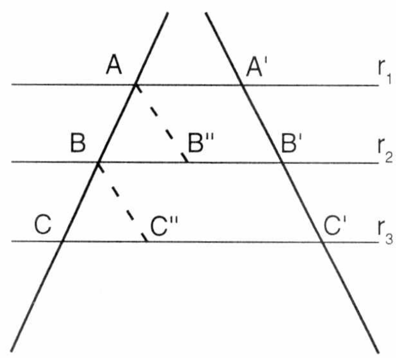


Figura 4.9.

Demostración. Por los puntos A y B se trazan los segmentos AB″ y BC″ que son paralelos entre sí a la transversal A'C'. Por lo tanto, los cuadriláteros AA'B'B″ y BB″C'C″ son paralelógramos, pues los lados opuestos son paralelos por hipótesis y por construcción. Por ende, se deduce que $\overline{A'B'} = \overline{AB''}$ y $\overline{B'C'} = \overline{BC''}$.

Por otro lado, los triángulos $\overset{\triangle}{BAB''}$ y $\overset{\triangle}{CBC''}$ son semejantes, pues tienen los tres ángulos iguales. Entonces se obtiene

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{BC''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

que resulta ser la tesis (4).

Corolario 1 del Teorema de Thales. Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales; es decir, ver figura 4.10

(5) $\quad DD' // BC \Rightarrow \quad \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AD'}}{\overline{D'C}}$

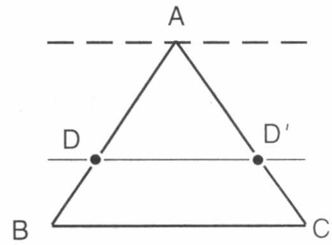


Figura 4.10

Demostración Por el vértice A del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se traza una paralela al lado opuesto BC; por lo tanto, la tesis es obtenida por aplicación directa del Teorema de Thales.

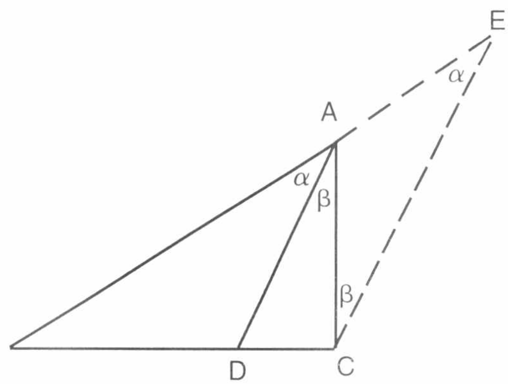
Corolario 2 del Teorema de Thales. En todo triángulo la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados; es decir, ver Figura 4.11.

(6) $\quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$

Demostración. Se prolonga el segmento AB y por el vértice C del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se traza una recta paralela a la bisectriz AD del ángulo A. Dichas dos rectas se intersectan en el punto E; ver Figura 4.11.

El triángulo $\overset{\triangle}{CAE}$ es isósceles pues $\alpha = \beta$ al ser AD la bisectriz del ángulo A. Por lo tanto, se tiene que $\overline{AE} = \overline{AC}$ y la tesis se obtiene por aplicación directa del Corolario 1 del Teorema de Thales.

Figura 4.11



4.3 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

▲ El Teorema de Pitágoras y sus consecuencias

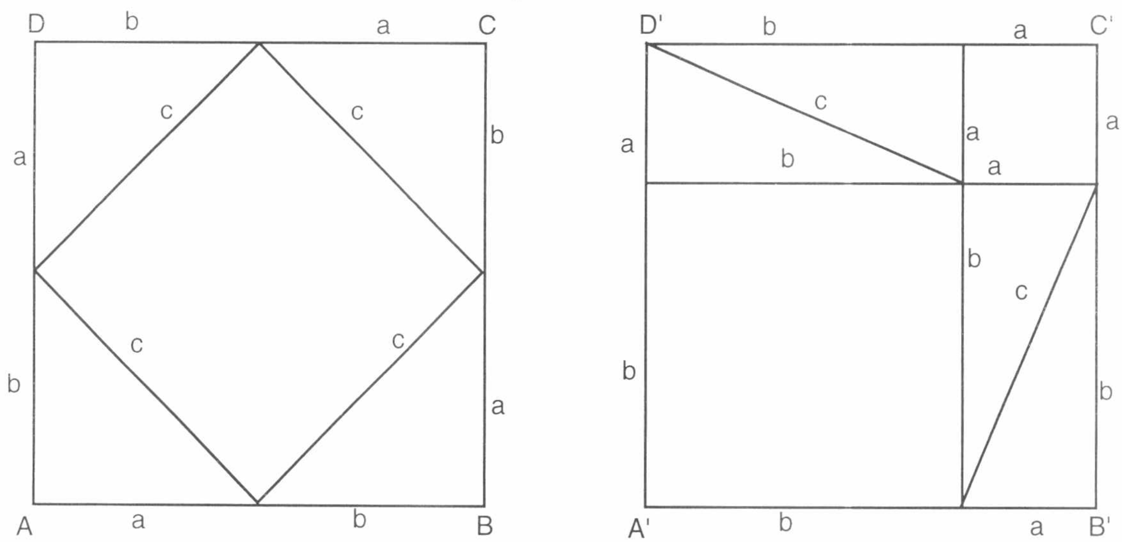
Definición 7. Un triángulo se dice **rectángulo** cuando uno de sus ángulos interiores es recto (90°). Se llama **hipotenusa** de un triángulo rectángulo al lado opuesto del ángulo recto. A los otros dos lados se les llama **catetos.**

Teorema de Pitágoras. El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir:

$$c^2 = a^2 + b^2 . \tag{7}$$

Demostración. Se consideran los siguientes dos cuadrados con iguales áreas, ver Figura 4.12.

Figura 4.12.



como : $c^2 + 4\,\frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$ = área ABCD = área A'B'C'D' =

$$= b^2 + a^2 + 4\,\frac{ab}{2} = b^2 + a^2 + 2ab$$

se deduce (7).

Corolario 1 del Teorema de Pitágoras. La altura h y el área A de un triángulo equilátero de lado L están dados respectivamente por:

(8) $$h = \sqrt{3}\,\frac{L}{2}$$ (9) $$A = \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$$

Demostración. Se consideran el triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$ de lado L y altura h. El triángulo $\overset{\triangle}{CDB}$ es rectángulo siendo la hipotenusa L y sus dos catetos h y L/2. Aplicando el Teorema de Pitágoras puede calcular la altura en función del lado L como, ver Figura 4.13.

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{L}{2}\sqrt{3}.$$

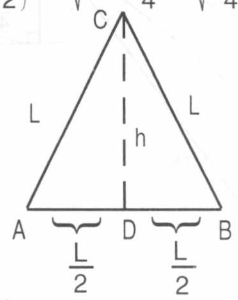


Figura 4.13.

Por lo tanto, el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ viene dada por la siguiente expresión:

$$A = \text{área } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{Lh}{2} = \frac{L}{2}\,\frac{L}{2}\sqrt{3} = \frac{L^2}{4}\sqrt{3}\ .$$

Corolario 2 del Teorema de Pitágoras. La diagonal d de un cuadrado de lado L está dada por:

(10) $$d = L\sqrt{2}$$

Demostración. Se consideran el cuadrado ABCD de lado L y su diagonal d. El triángulo $\overset{\triangle}{DAB}$ es rectángulo siendo la hipotenusa d y sus catetos L. Aplicando el Teorema de Pitágoras se puede calcular d en función de L de la siguiente manera, ver Figura 4.14

$$d = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

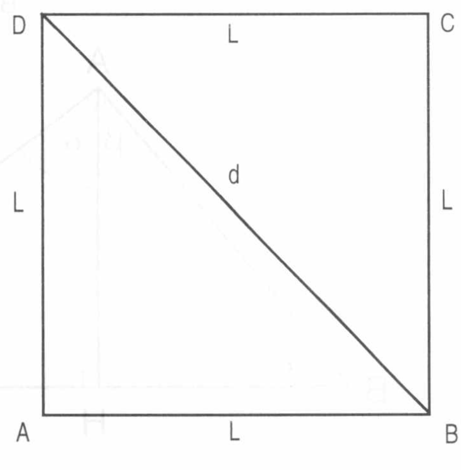


Figura 4.14

Se tiene la siguiente **representación gráfica de los números** $\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras a sucesivos triángulos rectángulos en los cuales uno de sus catetos es 1. Se comienza con el rectángulo de catetos 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$, ver Figura 4.15

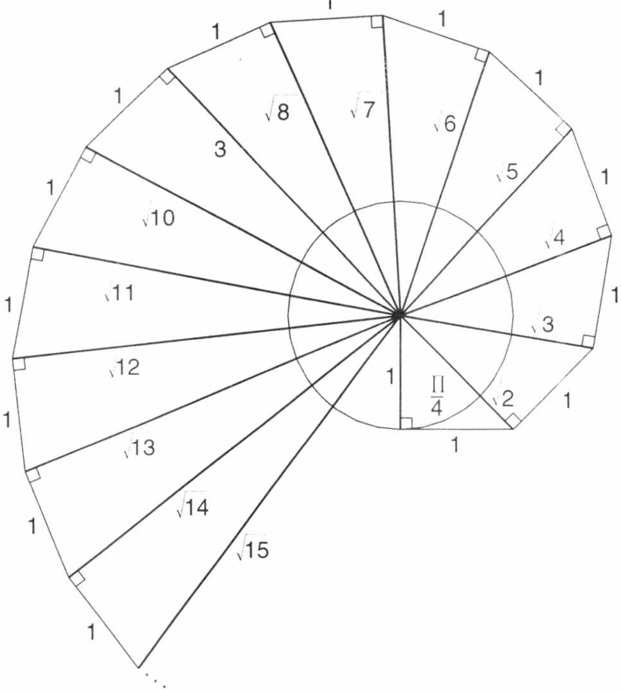


Figura 4.15.

❑ Relaciones métricas en un triángulo rectángulo

Se verán relaciones entre los tres lados de un triángulo rectángulo, en particular, el Teorema de Pitágoras, a través de una metodología diferente a la utilizada anteriormente, es decir, a través de la semejanza de triángulos. Por otra parte, la primera propiedad se volverá a demostrar más abajo, con la utilización de trigonometría.

Proposición 18. Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la misma.

Demostración. Sea el punto H el pie de la perpendicular sobre BC que pasa por el punto A, ver Figura 4.16. De la semejanza entre los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ABH}$ se deduce $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$, es decir:

(11) $\overline{AB}^2 = \overline{BC}\,\overline{BH}$.

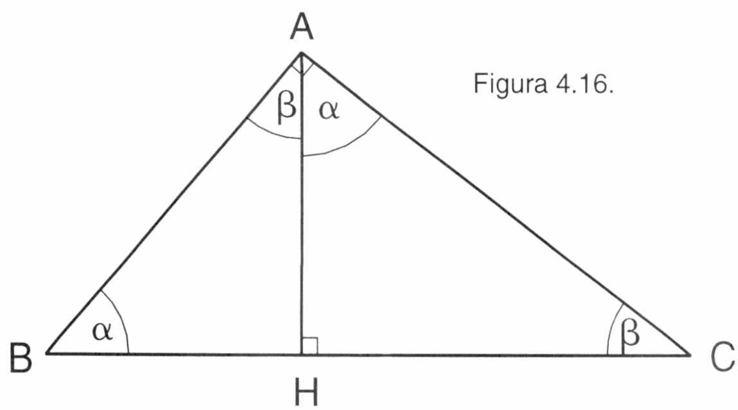


Figura 4.16.

En forma análoga, se tiene:

(12) $\overline{AC}^2 = \overline{BC}\,\overline{HC}$

Corolario 19. Teorema de Pitágoras: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Demostración. Sumando las relaciones anteriores, (11) y (12), se deduce:

(13) $$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}\;\overline{BH} + \overline{BC}\;\overline{HC} = \overline{BC}\,(\,\overline{BH} + \overline{HC}\,) = \overline{BC}^2$$

Corolario 20. La altura sobre la hipotenusa es medio proporcional entre los dos segmentos en que la divide.

Demostración. Surge de la semejanza de los triángulos ABH y AHC.

4.4 RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO CUALQUIERA

Se verán relaciones métricas en un triángulo cualquiera como ser el Teorema del Coseno y las fórmulas de Herón y de Stewart.

Teorema del Coseno. 1) El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

2) El cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros más el duplo del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

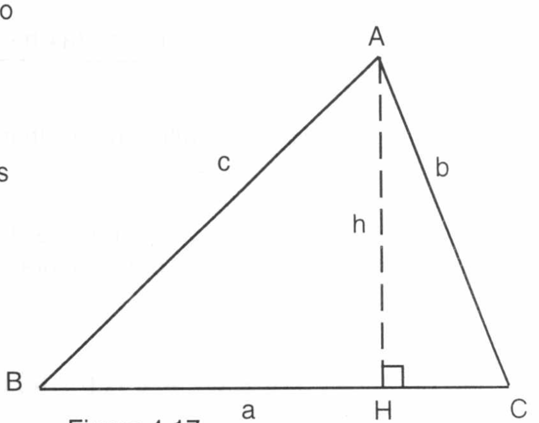


Figura 4.17.

Demostración. 1) Por el Teorema de Pitágoras se tiene, ver Figura 4.17.

$$c^2 = h^2 + (a - \overline{HC}\,)^2 = (\,b^2 - \overline{HC}^2\,) + (a^2 + \overline{HC}^2 - 2a\,\overline{HC}\,)$$

(14) $$= a^2 + b^2 - 2a\overline{HC}\,.$$

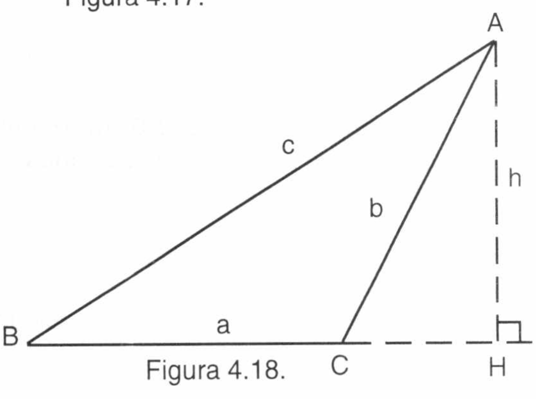


Figura 4.18.

2) Por el Teorema de Pitágoras se tiene, ver Figura 4.18.

$$c^2 = h^2 + (\,a + \overline{HC}\,)^2 = (b^2 - \overline{HC}^2\,) + (\quad a^2 + \overline{HC}^2 + 2a\,\overline{HC}\,)$$

(15) $$= a^2 + b^2 + 2a\,\overline{HC}$$

Teorema 21. Cálculo de una altura en un triángulo, conociendo sus lados; se tiene:

(16) $$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(\,p\,-\,a\,)\,(p\,-\,b)\,(p\,-\,c)}\,,$$

donde h_a es la altura el triángulo ABC respecto del lado a, y p en el semiperímetro del triángulo de lados a, b y c.

Demostración. Se considerará el caso en que el ángulo C es agudo, ver Figura 4.17. Teniendo en cuenta que de (14) se obtiene:

$$\overline{CH} = -\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

la aplicación del Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ACH}$, h_a=h es la altura del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ respecto del lado a y las relaciones, p es el semiperímetro del triángulo de lados a, b y c:

$$(17)\quad \left|\begin{array}{ll} p = \dfrac{a+b+c}{2}, & p - a = \dfrac{b+c-a}{2}, \\ p - b = \dfrac{a+c-b}{2}, & p - c = \dfrac{a+b-c}{2}, \end{array}\right.$$

se deduce:

$$(18)\quad \begin{aligned} h_a^2 &= b^2 - \overline{CH}^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \\ &= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\,(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2} = \frac{[(a+b)^2 - c^2\,]\,[c^2 - (a-b)^2\,]}{4a^2} \\ &= \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,(c+b-a)}{4a^2} = \frac{4p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{a^2} \end{aligned}$$

es decir (16) que expresa la altura h_a, del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ respecto del lado a, en función de sus tres lados a, b y c.

Corolario 22. El área del triángulo es la mitad del área del paralelógramo que lo contiene, es decir, la mitad del producto de su base por su altura. Por lo tanto, un triángulo cualquiera tiene por área:

$$(19)\quad A = \frac{1}{2}\, a h_a = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}, \qquad \textbf{(Fórmula de Herón)}$$

que expresa el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ en función de sus tres lados a, b y c .

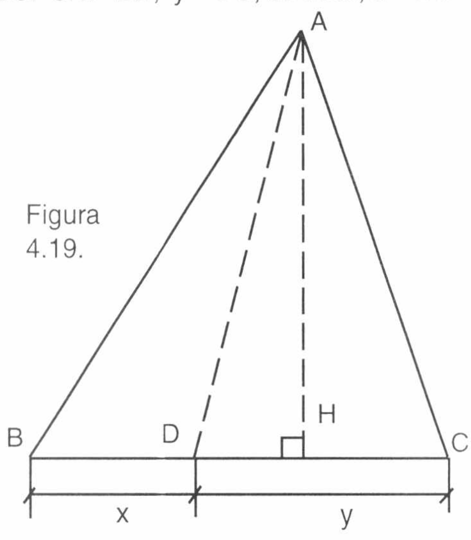
Teorema 23. Fórmula de Stewart. Permite calcular la distancia de un vértice A a un punto cualquiera D del lado opuesto BC, llamadas **cevianas**, en un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. Si x= $\overline{BD}$, y = $\overline{DC}$; es decir, a = $\overline{BC}$ = x+y, entonces se tiene, ver Figura 4.19.

$$(20)\quad a\,\overline{AD}^2 = b^2x + c^2y - axy$$

Demostración. Si se tienen en cuenta las relaciones

$$(21)\quad \begin{aligned} &\text{(i) } c^2 = x^2 + \overline{AD}^2 + 2x\,\overline{DH}, \\ &\text{(ii) } b^2 = y^2 + \overline{AD}^2 - 2y\,\overline{DH}, \end{aligned}$$

Figura 4.19.



se multiplica la (21i) por x, y la (21ii) por y, se suman ambas igualdades y se obtiene:

$$(22)\quad b^2\,x + c^2\,y = \overline{AD}^2\,(x+y) + xy\,(x+y)$$

y por ende la fórmula (20) .

Corolario 24. Se puede aplicar la fórmula anterior al cálculo de:

1) las **medianas** en función de los lados :

Al ser D el punto medio del segmento BC se tiene $x = y = \frac{a}{2}$, y por lo tanto se deduce (m_a es la mediana que une A con el punto medio de BC)

(23) $$a m_a^2 = a\,\overline{AD}^2 = b^2\frac{a}{2} + c^2\frac{a}{2} - a\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

es decir:

(24) $$m_a = \frac{\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

2) Las longitudes de las **bisectrices interiores de un ángulo hasta el lado opuesto** en función de los lados:

Aplicando el Teorema de Thales, las longitudes x,y son proporcionales a los lados c, b; teniendo en cuenta las propiedades de las proporciones se deduce:

(25) $$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{b+c}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que x+ y = a, se obtiene que:

(26) (i) $x = \dfrac{ac}{b+c}$ (ii) $y = \dfrac{ab}{b+c}$

de donde surge (V_a es la longitud de la bisectriz del ángulo A hasta el lado opuesto)

(27) $$V_a^2 . a = \frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} - \frac{a^3bc}{(b+c)^2}$$

y por ende se obtiene la expresión :

(28) $$V_a = \frac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}}{(b+c)} = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{(b+c)} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{(b+c)}$$

4.5. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se considera un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de lados a,b,c y ángulos α, β , $\gamma = 90°$, ver Figura 4.20,

hipotenusa: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha + \beta = 90°$

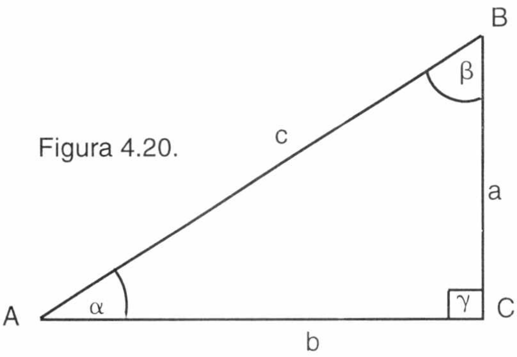


Figura 4.20.

Se pueden formar 6 razones con los tres lados a,b,c a saber :

(30) $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$

Es interesante analizar lo que ocurre con estas razones cuando varían los lados o los ángulos del triángulo rectángulo.

Proposición 26. Las seis razones entre pares de lados en un triángulo rectángulo se mantienen constantes mientras un ángulo agudo es constante, y varían al variar el ángulo. Es decir, **estas razones dependen del ángulo y no de los lados.**

Demostración. Se analizará lo que sucede con la razón $\frac{a}{c}$, los otros cinco casos se estudian de una manera análoga.

a) En función de los lados: se consideran los siguientes triángulos rectángulos semejantes al variar los lados, es decir, ver Figura 4.21.

(31) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AB_1C_1} \sim \overset{\triangle}{AB_2C_2} \sim \overset{\triangle}{AB_3C_3}$

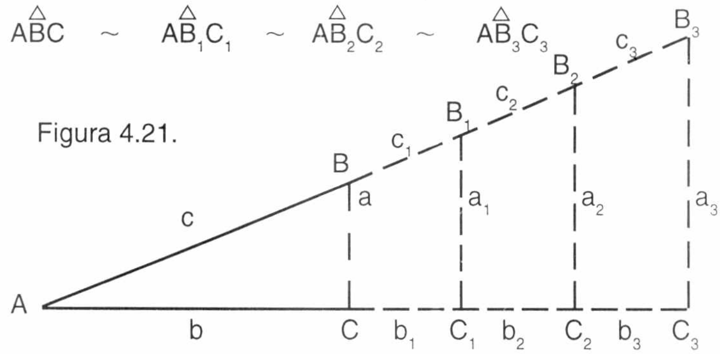


Figura 4.21.

con lo cual se tiene que:

(32) $\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3}$

Por lo tanto, la razón $\frac{a}{c}$ no depende de la longitud de los lados.

b) En función de los ángulos: se consideran los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{AB_1C_1}$, $\overset{\triangle}{AB_2C_2}$ que tienen igual hipotenusa c y distintos ángulos α, α_1 y α_2, respectivamente, ver Figura 4.22.

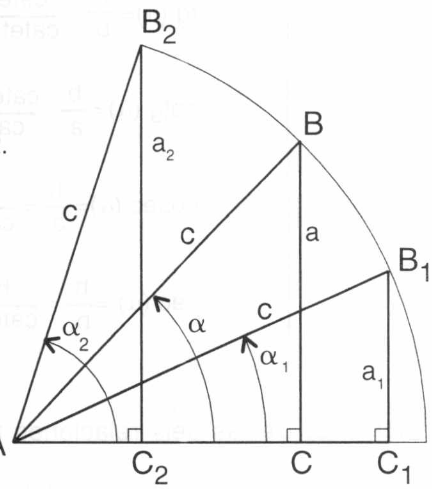


Figura 4.22.

Se tiene que:

(33)
$$\begin{cases} \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \\ a_1 < a < a_2 \end{cases}$$

Por lo tanto, se deduce

(34)
$$\frac{a_1}{c} < \frac{a}{c} < \frac{a_2}{c}$$

que dice que la razón $\frac{a}{c}$ crece al crecer el ángulo α , con lo cual depende del ángulo.

Cada una de las seis razones consideradas anteriormente es un número que recibe un nombre especial, de ahora en más se denotará con h a la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Definición 8. Se definen las siguientes relaciones trigonométricas, ver Figura 4.23, en un triángulo rectángulo de catetos a y b con:

hipotenusa : $h=\sqrt{a^2+b^2}$

$\beta = 90° - \alpha$

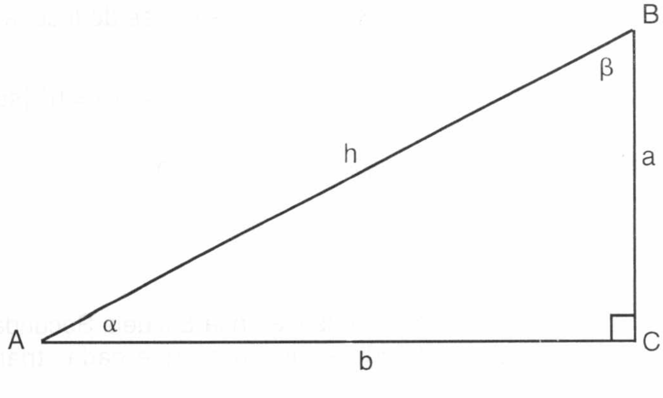


Figura 4.23.

(35)

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{h} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$; se lee **seno de** α ;

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{h} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$; se lee **coseno de** α ;

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$; se lee **tangente de** α ;

$$\text{cotg}(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$; se lee cotangente de α ;

$$\text{cosec}(\alpha) = \frac{h}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$$; se lee cosecante de α ;

$$\sec(\alpha) = \frac{h}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$; se lee secante de α ;

Observación 2. De las seis relaciones trigonométricas definidas anteriormente las tres más importantes son:

(36) $$\text{sen}(\alpha)\ , \qquad \cos(\alpha)\ , \qquad \text{tg}(\alpha)$$

Además, la tercera puede obtenerse de las otras dos, pues:

(37) $$\text{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Observación 3. El estudio de las respectivas relaciones trigonométricas y en particular su representación gráfica se realizarán en el Capítulo 7, previamente en el Capítulo 5 se efectuará el estudio abstracto de la noción de función matemática. En el presente capítulo la trigonometría es utilizada al solo efecto de la resolución de triángulos.

Teorema 27. Relación trigonométrica pitagórica. Sea α un ángulo agudo. Se tiene la siguiente relación entre el sen (α) y el $\cos(\alpha)$, dada por:

(RTP) $$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1\ , \qquad \forall\ \alpha$$

Demostración. Teniendo en cuenta la relación entre la hipotenusa h y los lados a, b, Teorema de Pitágoras, y las definiciones del sen (α) y cos (α), se deduce, a=h sen (α), b = h cos (α):

$$h^2 = a^2 + b^2 = h^2\,\text{sen}^2(\alpha) + h^2\cos^2(\alpha) = h^2\left(\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right),$$

es decir, la relación (RTP) simplificando por $h^2 \neq 0$

4.6 EL RADIÁN

La trigonometría plana, como se enseña en la Escuela Secundaria tiene el objetivo principal de **resolver los triángulos planos.** Debido al hecho de que cada triángulo está constituido de 6 elementos, 3 lados y 3 ángulos, **resolver** un triángulo significa determinar los elementos incógnitos del triángulo cuando se conocen algunos elementos o ciertas relaciones entre algunos de ellos.

Como los lados y los ángulos pertenecen a dos tipos diferentes de magnitudes, la trigonometría introduce las **relaciones trigonométricas;** por ejemplo: seno, coseno y tangente, para poder operar sobre ellos.

Desde la antigüedad los ángulos se miden en **grados.** El ángulo recto se divide en 90 partes iguales (una de estas partes se refiere a un **grado**). El ángulo recto se divide en 90 grados, cada grado se divide en 60 minutos, cada minuto se divide en 60 segundos'; para los ángulos más pequeños se usa hablar de **décimas, centésimas,** etc, de segundo.

En Matemática es indispensable la medida de los ángulos en **radianes,** será un número real y no un grado, para que los lados y ángulos de un triángulo puedan ser ambos medidos a través de números reales, lo cual será fundamental para la resolución de triángulos y el estudio de gráficas de funciones que se realizará en el Capítulo 7.

Definición 9. Se llama **circunferencia trigonométrica** a la circunferencia de radio unitario.

Definición 10. Un **radián** es el ángulo al que le corresponde un arco unitario sobre la circunferencia trigonométrica, una vez rectificado. Si la circunferencia fuese de radio r ($r > 0$), entonces al ángulo de un radián le corresponde un arco que, una vez rectificado, es igual al radio (ver Figura 4.24)

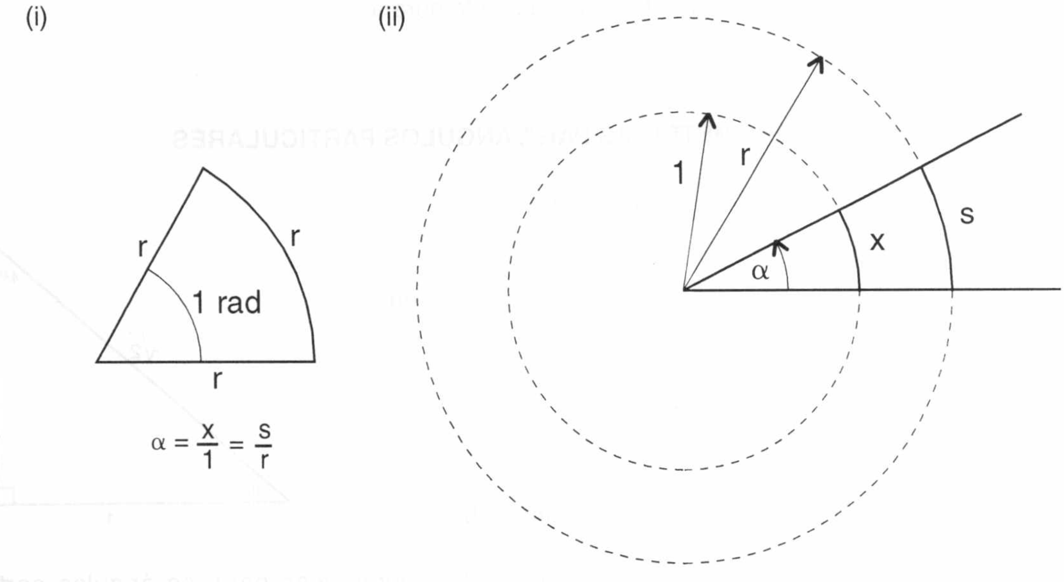


Figura 4.24.

Teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia trigonométrica es 2π ($\pi = 3{,}14159...$) resulta entonces que $360° = 2\pi$ radianes y de allí se deduce que, si

(38) | x: medida del ángulo en radianes,
g: medida del ángulo en grados,

entonces se tiene la relación:

$$x = 2\,\pi\,\frac{g}{360} = \frac{\pi}{180}\,g \tag{39}$$

de donde se obtienen para ángulos característicos las siguientes relaciones:

x	g
0	0°
$\pi / 4$	45°
$\pi / 2$	90°

x	g
π	180°
$3\pi /2$	270°
$2\,\pi$	360°

Ejemplos:

$1° \cong 0{,}01745$ radianes , 1 radián $\cong 57{,}2958° = 57º17'45''$

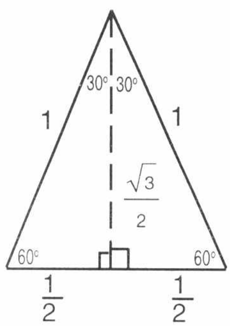
Definición 11. Teniendo en cuenta que un ángulo es la parte del plano que se barre al hacer girar una semirrecta sobre su origen, se dice que el ángulo es:

1) positivo cuando la semirrecta gira en sentido antihorario,
2) negativo cuando la semirrecta gira en sentido horario.

4.7 RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS PARTICULARES

De las siguientes dos figuras (ver Figura 4.25. i, ii):

(i)



(ii)

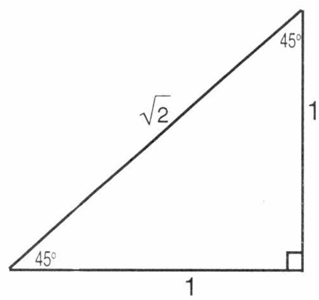


Figura 4.25.

se pueden deducir los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos particulares de $30° = \pi\ /6$ radianes, $60° = \pi\ /3$ radianes y $45° = \pi / 4$ radianes, a saber:

$$\text{(40)}\quad \left|\begin{array}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1/\cancel{2}}{\sqrt{3}/\cancel{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}/\cancel{2}}{1/\cancel{2}} = \sqrt{3} \\[2ex] \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}/2}}{\cancel{\sqrt{2}/2}} = 1 \end{array}\right.$$

Cuando el ángulo es 0°, se tienen:

(41) $\quad \operatorname{sen}(0) = 0 \quad , \quad \cos(0) = 1 \quad , \quad \operatorname{tg}(0) = \dfrac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)} = 0 \quad ,$

y cuando el ángulo es recto:

(42) $\quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad , \quad \nexists \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

4.8 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Proposición 28. Si el ángulo α es agudo $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ entonces se tienen las siguientes propiedades:

1) $\quad 0 < \operatorname{sen}(\alpha) < 1 \quad , \quad 0 < \cos(\alpha) < 1 \quad , \quad \operatorname{tg}(\alpha) > 0 \quad ;$

2) $\quad \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad , \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad , \quad 1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} \quad ;$

3) el sen (α) y la tg (α) crecen al crecer el ángulo α de 0 a $\frac{\pi}{2}$; el cos (α) decrece al crecer el ángulo α de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Demostración. 2) Las dos primeras igualdades ya fueron establecidas en (RTP) y (37), respectivamente. Por otra parte se tiene:

(43) $$1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(a)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

Las propiedades 1) y 3) se deducen de la Figura 4.26.

(44)
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{1} = a$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{1} = b$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{d}{1} = d \text{ pues } \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AB'C'}$$

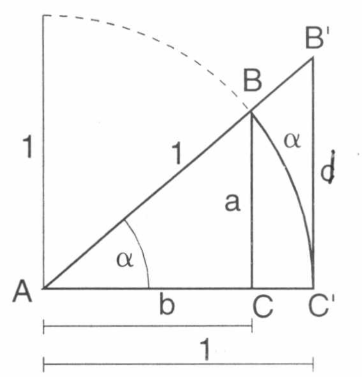


Figura 4.26

Además se tienen las siguientes desigualdades:

(45) $$\operatorname{sen}(\alpha) = a < \alpha < d = \operatorname{tg}(\alpha) \quad , \forall \quad \alpha$$

Las definiciones anteriores se extienden, se prolongan, inmediatamente al caso de ángulos $0 \leq \alpha < 2\pi$. Teniendo en cuenta la circunferencia trigonométrica, el plano a través de un sistema de ejes cartesianos ortogonales, y las convenciones clásicas sobre los signos, según sea el cuadrante considerado, se pueden definir las funciones trigonométricas de la siguiente manera (ver Figura 4.27):

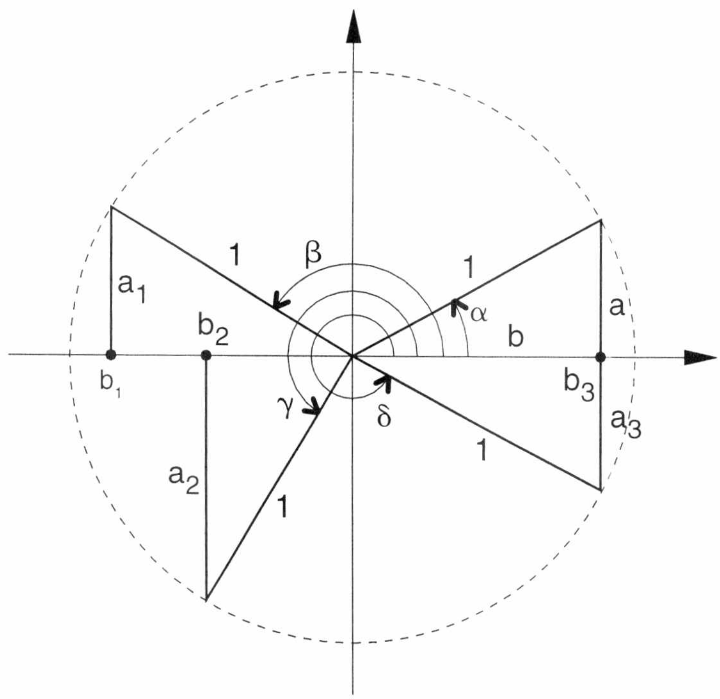


Figura 4.27.

$$\text{sen}(\alpha) = a > 0 \text{ , sen}(\beta) = a_1 > 0 \text{ , sen}(\gamma) = a_2 < 0 \text{ , sen}(\delta) = a_3 < 0 \text{ ;}$$

(46) $$\cos(\alpha) = b > 0 \text{ , } \cos(\beta) = b_1 < 0 \text{ , } \cos(\gamma) = b_2 < 0 \text{ , } \cos(\delta) = b_3 > 0 \text{ ;}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} > 0 \text{ , tg}(\beta) = \frac{a_1}{b_1} < 0 \text{ , tg}(\gamma) = \frac{a_2}{b_2} > 0 \text{ , tg}(\delta) = \frac{a_3}{b_3} < 0 \text{ .}$$

Por otro lado , como $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, entonces $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ no existe .

Más aún, se pueden considerar ángulos $\alpha \geq 2\pi$. Pero, es obvio, que en los sucesivos giros de la semirrecta alrededor del punto origen de coordenadas, ésta coincidirá con la semirrecta a la cual le corresponde a un ángulo $0 \leq \beta < 2\pi$, de manera que $\beta + 2n\pi = \alpha$, con un adecuado $n \in \mathbb{N}$ (n= número de vueltas). Por lo tanto, las funciones trigonométricas tendrán los mismos valores en los ángulos α y β . De manera análoga, se pueden tomar ángulos $\alpha < 0$.

Observación 4. Es altamente recomendable para el cálculo de las relaciones trigonométricas de ángulos que no pertenezcan al primer cuadrante, realizar una **reducción al primer cuadrante.**

Se pueden obtener los siguientes resultados (algunos serán de gran utilidad en el desarrollo del curso, como por ejemplo, lo relativo a la suma y resta de ángulos):

Teorema 29. Se tienen las siguientes propiedades:

1) Relaciones trigonométricas de ángulos opuestos.

(47)

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha), \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha),$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

2) Relaciones trigonométricas de ángulos complementarios.

(48)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}$$

3) Relaciones trigonométricas de ángulos suplementarios.

(49)

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha), \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

4) Relaciones trigonométricas de ángulos que difieren en 90°:

50)

$$\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha), \qquad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{-\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{-1}{\operatorname{tg}(\alpha)}$$

5) Relaciones trigonométricas de suma y resta de ángulos.

(51)

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

(52)

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$$

6) Relaciones trigonométricas del ángulo doble

(53)
$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \quad , \qquad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

7) Relaciones trigonométricas del ángulo mitad

(54)
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

donde se debe elegir el signo + ó - según sea el cuadrante en que se encuentre el ángulo α .

8) Relaciones trigonométricas en función del ángulo mitad.

(55)
$$\operatorname{sen}(\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

$$\cos(\alpha) = \cos^2(\alpha/2) - \operatorname{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

Observación 5. Si se nota con $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ entonces se tienen las **fórmulas paramétricas** que expresan las 3 funciones trigonométricas fundamentales por medio del parámetro t, de la siguiente manera:

(56)
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$$

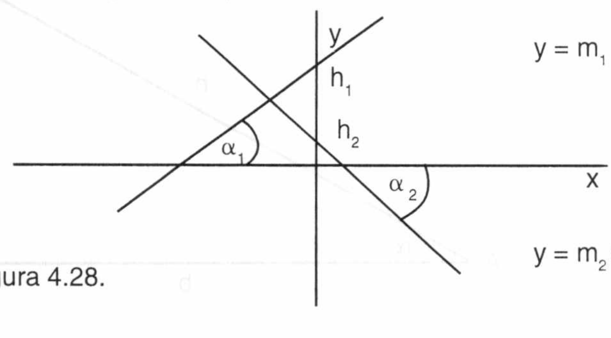
Estas fórmulas serán de gran utilidad para el cálculo de **primitivas, integral indefinida,** de funciones reales en las que aparezcan funciones trigonométricas.

En la siguiente Tabla se representan los valores de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de ángulos especiales.

Angulo α en Grados	Angulo α en Radianes	sen (α)	cos (α)	tg (α)
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150°	$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180°	π	0	1	0
210°	$7\pi/6$	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225°	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240°	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$
270°	$3\pi/2$	-1	0	—
300°	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330°	$11\pi/6$	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
360°	2π	0	1	0
-30°	$-\pi/6$	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
-45°	$-\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
-60°	$-\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$
-90°	$-\pi/2$	-1	0	—

Por otra parte, utilizando el Teorema de Thales se deduce:

Observación 6. La pendiente m de una recta en el plano, de ecuación $y = mx + h$, puede pensarse como la tangente trigonométrica del ángulo α que forma la mencionada recta con el semieje positivo de las x, es decir $m = tg\ (\alpha)$ (ver Figura 4.28.)



$y = m_1 x + h_1$ ($m_1 = tg\ (\alpha_1) > 0$)

$y = m_2 x + h_2$ ($m_2 = tg\ (\alpha_2) < 0$)

Figura 4.28.

4.9 RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si se conoce el valor de una de las relaciones trigonométricas, seno, coseno, tangente, se desea encontrar el ángulo correspondiente.

Ejemplo. Si sen $(\alpha) = \frac{1}{2}$ entonces $\alpha = 30°$ ($= \frac{\pi}{6}$ radianes).

Definición 12.1) La relación inversa del seno es el **arc sen**; arc sen(x) se lee "el arco cuyo seno es x". Se tiene:

(57) $\quad \text{sen}(\alpha) = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \text{arc sen}(x), \quad \forall -1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

2) La relación inversa del coseno es el **arc cos;** arc cos(x) se lee "el arco cuyo coseno es x". Se tiene:

(58) $\quad \cos(\alpha) = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \text{arc cos}(x), \quad \forall -1 \leq x \leq 1, \ 0 \leq \alpha \leq \pi .$

3) La relación inversa de la tangente es el arc tg; arc tg(x) se lee "el arco cuya tangente es x". Se tiene:

(59) $\quad \text{tg}(\alpha) = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \text{arc tg}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Observación 7. Las relaciones, funciones, trigonométricas inversas tienen gran importancia en la resolución de triángulos rectángulos. Más detalles matemáticos se verán en el Capítulo 7.

4.10 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Los problemas de resolución de triángulos rectángulos consisten en calcular los lados y los ángulos de un triángulo conociendo algunos lados o ángulos como datos. También se puede calcular el área del triángulo. En la resolución de triángulos rectángulos, un ángulo es recto, según sean los datos, se pueden presentar cuatro casos, a saber:

1) La hipotenusa y un ángulo agudo ;
2) La hipotenusa y un cateto ;
3) Un cateto y un ángulo agudo ;
4) Los dos catetos.

Se considera el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ con catetos a y b, hipotenusa h, ángulos agudos α y β , un ángulo recto γ y área A (ver Figura 4.29.).

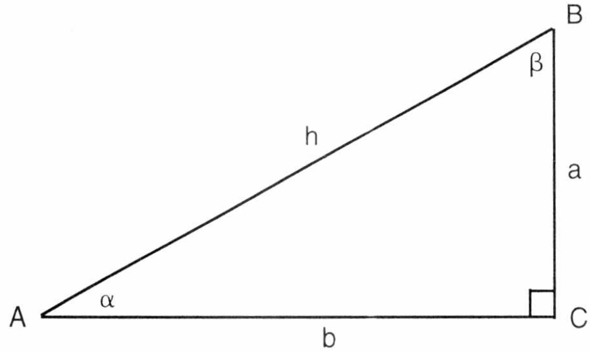


Figura 4.29.

Relaciones a utilizar :

1) $\alpha + \beta = 90^\circ$;

2) $h^2 = a^2 + b^2$;

3) $A = \frac{ab}{2}$

Teorema 30. En la resolución de triángulos rectángulos se presentan varios casos, a saber:

Caso 1. Datos h, α , Incógnitas β, a , b, A.

Solución. 1) $\beta = 90^\circ - \alpha$

2) $\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{h} \Rightarrow a = h\,\text{sen}(\alpha)$;

3) $\cos(\alpha) = \frac{b}{h} \Rightarrow b = h\cos(\alpha)$;

4) $A = \frac{ab}{2} = \frac{h^2}{2}\text{sen}(\alpha)\,\cos(\alpha)$.

Caso 2. Datos h, a , Incógnitas α, β, b, A .

Solución. 1) $h^2 = a^2 + b^2 \qquad b = \sqrt{h^2 - a^2}$;

2) $\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{h} \Rightarrow \alpha = \text{arc sen}\left(\frac{a}{h}\right)$

3) $\cos(\beta) = \frac{a}{h} \Rightarrow \beta = \text{arc cos}\left(\frac{a}{h}\right)$

4) $A = \frac{ab}{2} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{h^2 - a^2}$

Caso 3. Datos: a, α , Incógnitas β, b, h, A .

Solución. 1) $\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)}$

2) $\text{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\text{tg}(\alpha)}$

3) $\beta = 90^\circ - \alpha$;

4) $A = \frac{ab}{2} = \frac{a}{2}\;\frac{a}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{a^2}{2\,\text{tg}(\alpha)}$

Caso 3 bis. Datos: | a , β | Incógnitas | α ; b, h ; A |

Solución. 1) $\alpha = 90^\circ - \beta$;

2) $\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a \operatorname{tg}(\beta)$

3) $\cos(\beta) = \dfrac{a}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{a}{\cos(\beta)}$

4) $A = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{a}{2}\, a \operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{a^2}{2} \operatorname{tg}(\beta)$

Caso 4. Datos: | a , b | Incógnitas | α, β ; h ; A . |

Solución. 1) $h^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{a^2 + b^2}$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{a}{b}\right)$;

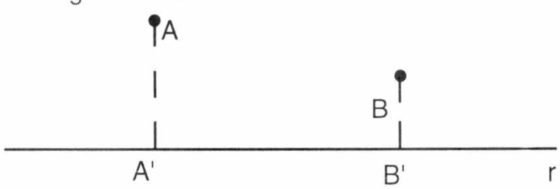
3) $\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$;

4) $A = \dfrac{ab}{2}$

4.11 RELACIONES QUE SE VERIFICAN EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CUANDO SE TRAZA LA ALTURA CORRESPONDIENTE A LA HIPOTENUSA

Definición 13. 1) Se llama **proyección de un punto sobre una recta** al pie de la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta, ver Figura 4.30.

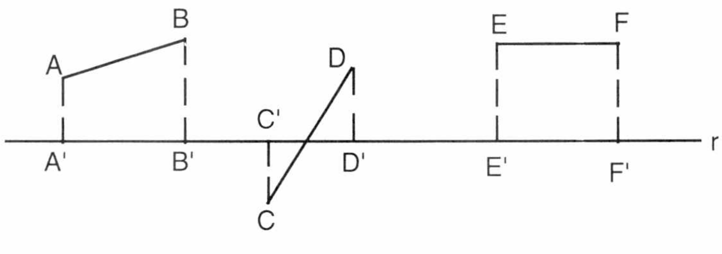
Figura 4.30.



A' y B' son los puntos proyecciones de los puntos A y B sobre la recta r, respectivamente.

2) Se llama **proyección de un segmento sobre una recta** al segmento determinado por las proyecciones de los extremos del segmento dado, ver Figura 4.31.

Figura 4.31.



A'B', C'D' y E'F' son los segmentos proyecciones de los segmentos AB, CD y EF sobre la recta r, respectivamente.

Proposición 31. Si un segmento AB forma con la recta r un ángulo α entonces la medida del segmento proyección A'B' está dada por la siguiente expresión, ver Figura 4.32.:

(60) $$\overline{A'B'} = \overline{AB}\ \cos(\alpha)$$

Demostración.

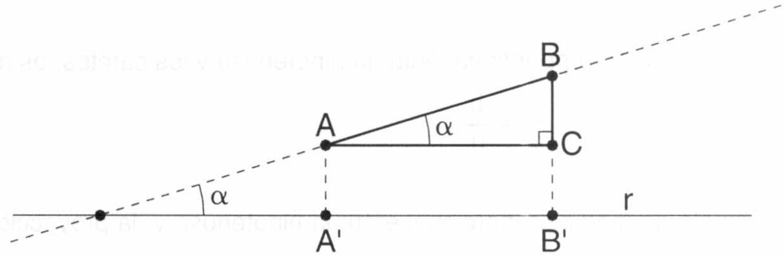


Figura 4.32.

Sea A'B' el segmento proyección del segmento AB sobre la recta r. Se considera el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ con catetos a = $\overline{BC}$ y b = $\overline{A'B'}$, ángulo agudo α e hipotenusa h=$\overline{AB}$. Por lo tanto $\overline{A'B'}$=b=h cos (α) = $\overline{AB}$ cos(α).

Si en un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se traza la altura correspondiente a la hipotenusa se tiene la siguiente Figura 4.33.:

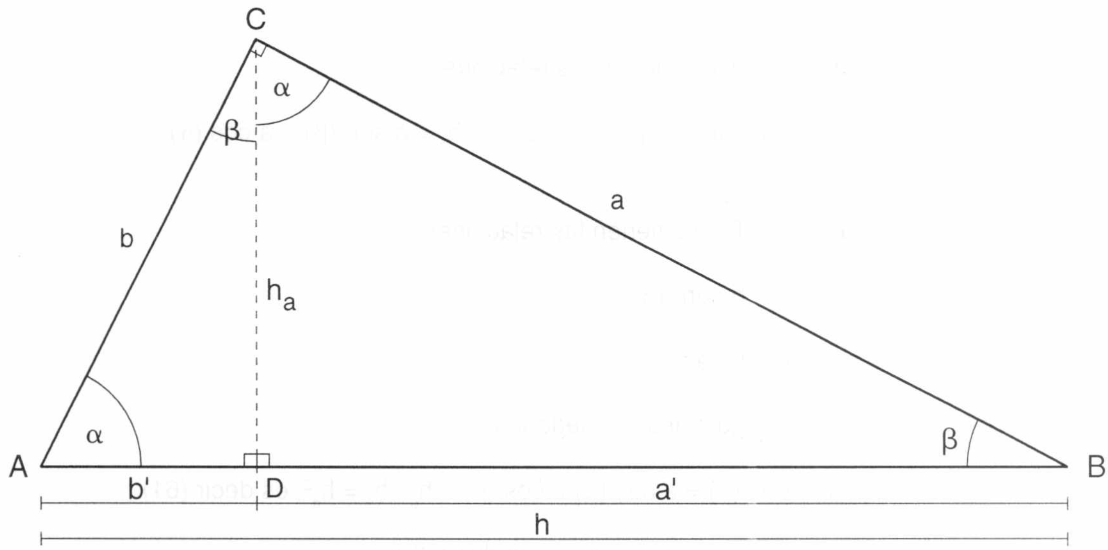


Figura 4.33.

donde: $\alpha + \beta = 90^{\circ}$ (cos (α) = sen (β) , cos (β) = sen (α))
h : hipotenusa , h_a : altura

AD: proyección del segmento AC sobre la recta AB
DB: proyección del segmento CB sobre la recta AB
d: proyección del punto C sobre la recta AB
$b' = \overline{AD}$, $a' = \overline{DB}$, $h = a' + b'$.

Teorema 32. Se tienen las siguientes relaciones:

1) La altura es medio proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa, es decir:

$$\frac{a'}{h_a} = \frac{h_a}{b'} \qquad (61)$$

2) La altura es cuarto proporcional entre la hipotenusa y los catetos, es decir:

$$\frac{h}{a} = \frac{b}{h_a} \qquad (62)$$

3) Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa, es decir:

$$\text{(i)}\ \frac{h}{a} = \frac{a}{a'} \quad , \quad \text{(ii)}\ \frac{h}{b} = \frac{b}{b'} \qquad (63)$$

Demostración. En primer lugar se pueden deducir las siguientes propiedades generales basadas en la proyección de un segmento sobre una recta.

En el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ADC}$ se tienen las relaciones:

$$b' = b\cos(\alpha) \quad , \quad h_a = b\,\mathrm{sen}(\alpha) = b\cos(\beta) \qquad (64)$$

En el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{BDC}$ se tienen las relaciones:

$$a' = a\cos(\beta) \quad , \quad h_a = a\,\mathrm{sen}(\beta) = a\cos(\alpha) \qquad (65)$$

En el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se tienen las relaciones:

$$\left|\begin{array}{l} b = h\cos(\alpha) = h\,\mathrm{sen}(\beta) \\ a = h\cos(\beta) = h\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{array}\right. \qquad (66)$$

Entonces, se obtienen las siguientes propiedades:

1) $a'\,b' = a\cos(\beta)\,b\cos(\alpha) = a\cos(\alpha)\,b\cos(\beta) = h_a \cdot h_a = h_a^2$, es decir (61) ;

2) $h\,h_a = h\,a\cos(\alpha) = h\cos(\alpha)\cdot a = b\cdot a$, es decir (62) ;

3) i) $h\,a' = h\,a\cos(\beta) = h\cos(\beta)\cdot a = a\cdot a = a^2$, es decir (63i) ;
ii) $h\,b' = h\,b\cos(\alpha) = h\cos(\alpha)\cdot b = b\cdot b = b^2$, es decir (63ii) ;

Corolario 33. Se puede resolver el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ conociendo las proyecciones de los dos catetos sobre la hipotenusa.

Caso 5. Datos		Incógnitas	
	a' ,		α, β
	b'		a, b, h, h_a
			A

Solución. 1) $h = a' + b'$

(2) $h_a^2 = a'\,b' \quad \Rightarrow \quad h_a = \sqrt{a'b'}$;

(3) $b^2 = h_a^2 + (b')^2 = a'\,b' + (b')^2 = b'\,(a' + b') \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{b'(a'+b')}$;

(4) $a^2 = h_a^2 + (a')^2 = a'\,b' + (a')^2 = a'\,(a' + b') \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a'(a'+b')}$;

(5) $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{h_a}{b'} = \dfrac{\sqrt{a'b'}}{a'} = \sqrt{\dfrac{a'}{b'}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{a'}{b'}}\right)$;

o también:

$$\cos(\alpha) = \frac{b'}{b} = \frac{b'}{\sqrt{b'(a'+b')}} = \sqrt{\frac{b'}{a'+b'}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt{\frac{b'}{a'+b'}}\right) ;$$

(6) $\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{h_a}{a'} = \dfrac{\sqrt{a'b'}}{a'} = \sqrt{\dfrac{b'}{a'}} \Rightarrow \beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{b'}{a'}}\right)$

o también:

$$\cos(\beta) = \frac{a'}{a} = \frac{a'}{\sqrt{a'(a'+b')}} = \sqrt{\frac{a'}{a'+b'}} \Rightarrow \beta = \operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt{\frac{a'}{a'+b'}}\right);$$

(7) $A = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a'(a'+b')}.\sqrt{b'(a'+b')} = \dfrac{a'+b'}{2}\sqrt{a'b'}$

Corolario 34. Se puede resolver el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ conociendo la altura relativa a la hipotenusa y un ángulo agudo.

Caso 6. Datos h_a, α ; Incógnitas β; a, b, h, a', b'; A

Solución: (1) $\beta = 90° - \alpha$;

(2) $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{h_a}{b'} \quad \Rightarrow \quad b' = \dfrac{h_a}{\operatorname{tg}(\alpha)}$

(3) $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{a'}{h_a} \quad \Rightarrow \quad a' = h_a \operatorname{tg}(\alpha)$;

(4) $h = a' + b' = h_a \operatorname{tg}(\alpha) + \dfrac{h_a}{\operatorname{tg}(\alpha)} = h_a \left(\operatorname{tg}(\alpha) + \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}\right) =$

$$= h_a \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right) = h_a \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{h_a}{\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)}$$

(5) $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{h_a}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{h_a}{\operatorname{sen}(\alpha)}$;

Trabajo Práctico

1) Verifique que de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deducen las siguientes igualdades:

(i) $ad = bc$; (ii) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; (iii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;

(iv) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; (v) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; (vi) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

(vii) $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$; (viii) $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$; (ix) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

Ayuda: en algunos casos conviene llamar $\lambda = \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

2) Divida un segmento dado AB en n partes iguales, por ejemplo n=3, 4 y 5

3) Un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ tiene por lados $\overline{AB}$ = 8 cm, $\overline{AC}$ = 5 cm y $\overline{BC}$ = 4 cm. Calcule la longitud de los segmentos determinados en AC por la bisectriz del ángulo B.

4) Una recta paralela a un lado de un triángulo determina, en otro lado del mismo, segmentos de 25 y de 17 cm. ¿Qué segmentos determina en el tercer lado que es de 60 cm ?

5) Dos lados de un triángulo tienen, respectivamente, 108 m y 126 m; desde el vértice común se toma una longitud de 80 m sobre el primero. ¿Qué longitud será preciso tomar en el segundo para que la recta trazada por los dos puntos así obtenidos sea paralela al tercer lado?

6) Calcule los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CE}$, y $\overline{EB}$, siendo $\overline{AB}$=12 cm, $\overline{AC}$ = 6 cm, $\overline{BC}$= 8 cm y $\overline{DE}$ = 8 cm (ver Figura 1)

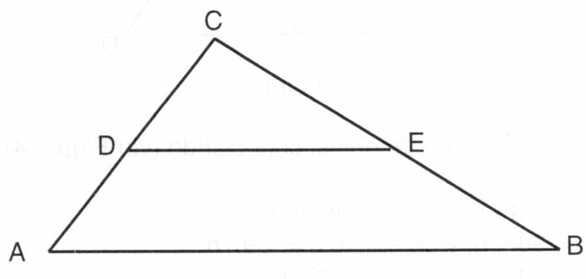


Figura 1.

7) Calcule el perímetro del paralelógramo ADEF, siendo $\overline{AB}$=10 cm, $\overline{BC}$=16 cm, $\overline{AC}$=14 cm y $\overline{BE}$= 4 cm (ver Figura 2).

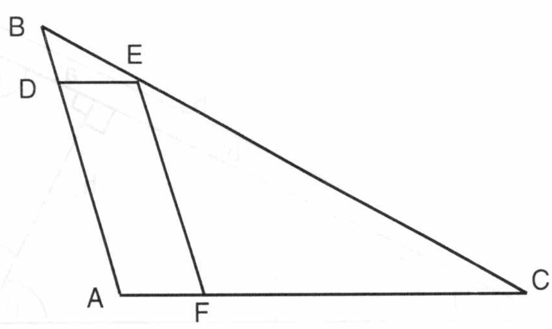


Figura 2.

8) Un triángulo tiene por lados 9 m, 12 m y 15 m. ¿Cuáles son los lados de otro triángulo semejante de 72 m de perímetro?

9) Calcule la altura y el área de un triángulo equilátero de lado 3 m.

10) Calcule el lado de un cuadrado que tiene por diagonal 4 m.

11) Calcule la diagonal de un rectángulo que tiene por base 3 m y por altura 4 m.

12) En un triángulo rectángulo, un cateto es el doble del otro.

(i) ¿Cuál es la relación entre los 3 lados?
(ii) ¿Cuál es la relación entre los cuadrados de los 3 lados?
(iii) ¿Cuánto valen los dos catetos y sus cuadrados si la hipotenusa mide 9 m?

13) (i) Encuentre la medida en radiantes para los ángulos de 50°, 60°, 150°, - 30°, 55° y -48°

(ii) Encuentre la medida en grados para los ángulos de $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, 1, 2, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$ radianes.

14) Calcule el lado $\overline{BC}$ del triángulo isósceles $\overset{\triangle}{BCD}$ cuya base es de 148 m y el ángulo opuesto a esa base es de 50° (ver Figura 3).

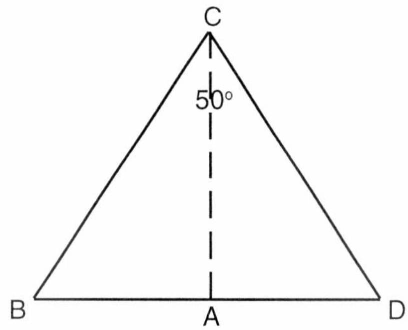


Figura 3.

15) Resuelva los siguientes triángulos rectángulos, conociendo (ver Figura 4):

(i) La hipotenusa h = 2.040 m y un ángulo agudo α = 49°;
(ii) La hipotenusa h = 985 m y un cateto a = 697 m;
(iii) Los dos catetos a = 1.020 m y b =1.635 m;
(iv) Un cateto a = 390 m y un ángulo opuesto α = 54°;
(v) Un ángulo agudo β = 38° y la altura h_a = 72 m relativa a la hipotenusa;
(vi) Las dos proyecciones b' = 64 m y a' = 81, que la altura determina en la hipotenusa.

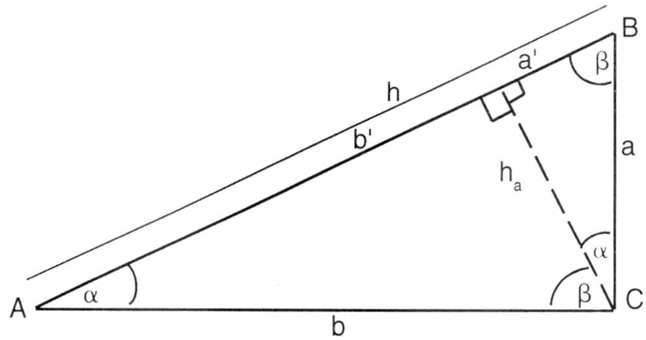


Figura 4.

16) Halle el ángulo que forman entre sí las diagonales de un rectángulo de lados 1,60 m y 0,95 m.

17) ¿Cuál es la altura h de un triángulo isósceles $\overset{\triangle}{ABC}$ cuya base AB mide 12 cm y el ángulo $\delta = 30°$? (ver Figura 5)

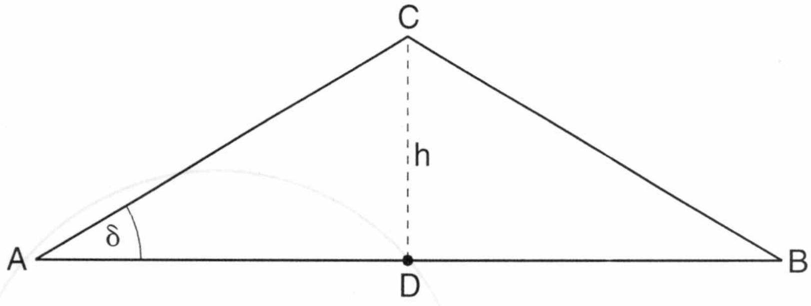


Figura 5.

18) Halle las longitudes x, z y los ángulos α, β en la siguiente figura (ver Figura 6):

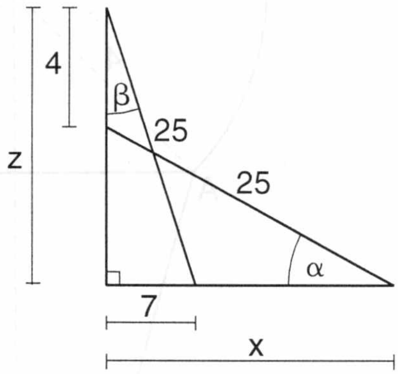


Figura 6.

19) Determine el valor de x en la siguiente figura (ver Figura 7):

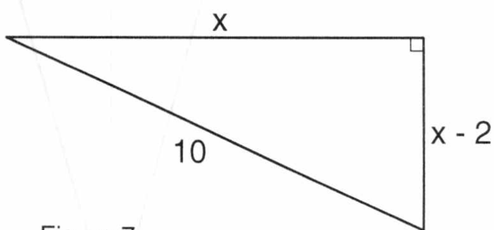


Figura 7.

20) En la figura de abajo, el cuadrado CDEF tiene un área 4. ¿Cuál es el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABF}$? (Ver Figura 8.)

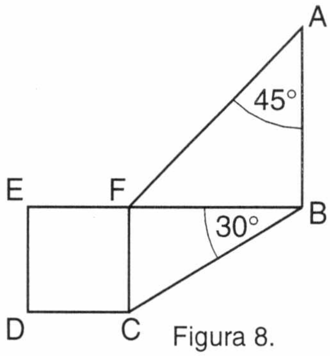
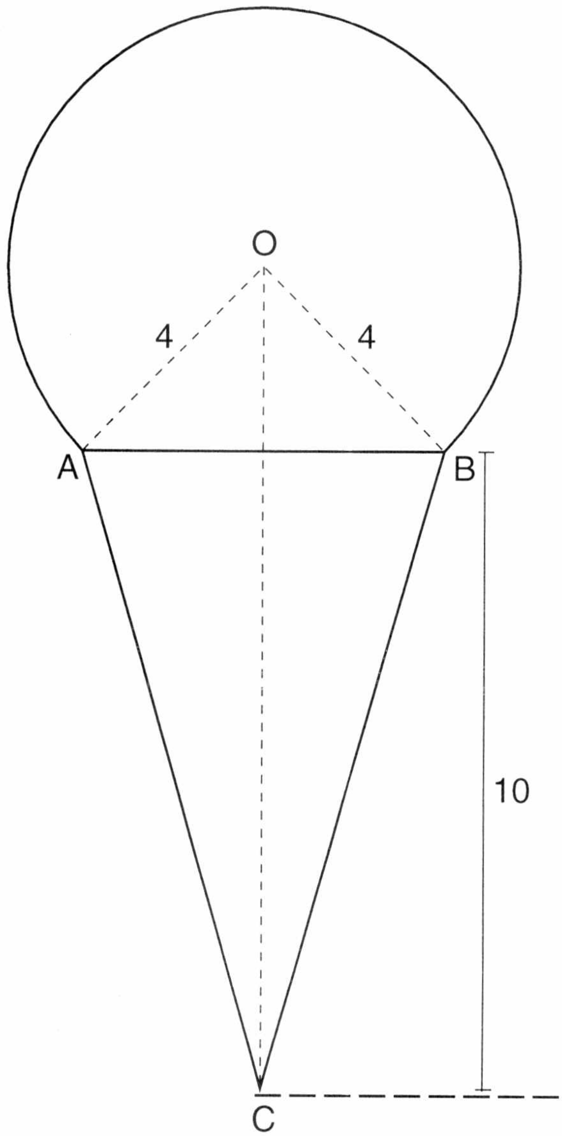


Figura 8.

21) La siguiente figura está obtenida colocando las tres cuartas partes de una circunferencia de radio 4 cm y centro en el punto O sobre un triángulo isósceles de altura 10 cm. ¿Cuál es el perímetro exterior en cm, de la figura dada? (ver Figura 9.)

Figura 9.



Problemas Complementarios

1) Un triángulo equilátero se dividió en triángulos iguales como muestra la figura. Uno de esos triángulos volvió a dividirse en triángulos equiláteros iguales. Por último uno de los triángulos pequeños se dividió en triángulos iguales y se pintó uno de cada tamaño. ¿Qué parte del triángulo grande representa lo pintado? (ver Figura 10).

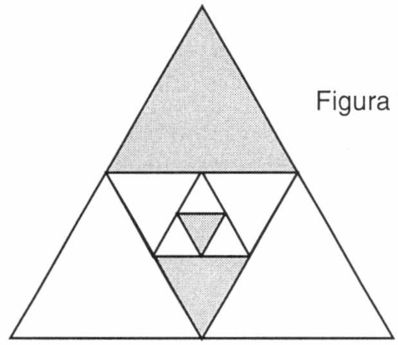


Figura 10.

2) (i) Los puntos A, B, C, y D son los centros de las circunferencias indicados en la figura. Los cuatro puntos están alineados y $\overline{AD}$ = 35 cm. ¿Cuál es el área de la zona sombreada, y su porcentaje respecto al área del círculo mayor? (ver Figura 11)

(ii) Calcule el área pedida en función del parámetro $\overline{AD} = a$

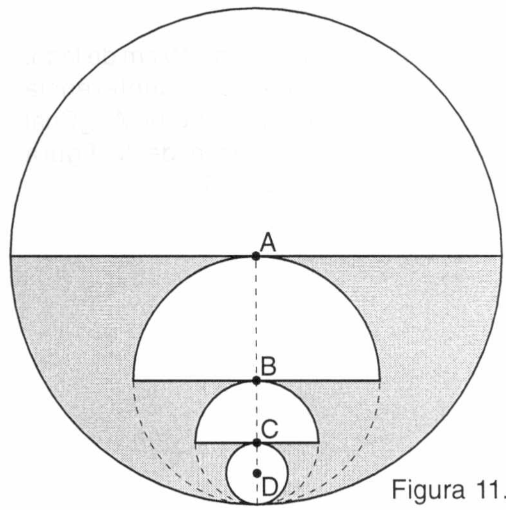


Figura 11.

3) Indique el valor de la expresión $\alpha + \beta - \gamma$ de acuerdo al siguiente dibujo (ver Figura 12)

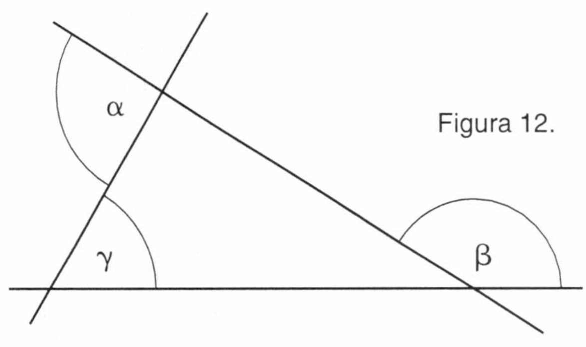


Figura 12.

4) En la figura, PS es un segmento que contiene el centro O de la circunferencia de radio r, PQ tiene longitud r. Si el $\measuredangle$ROS mide 60°; ¿cuál es la medida del $\measuredangle$OPQ? (ver Figura 13)

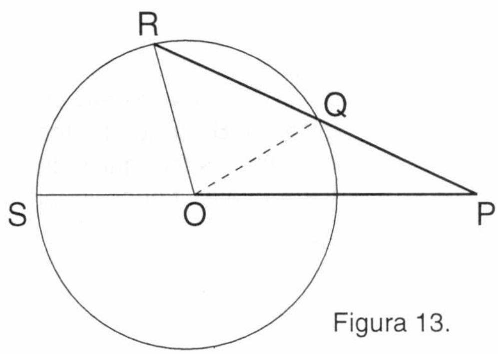


Figura 13.

5) En la figura, $\overline{PR} = \overline{QR}$; $\sphericalangle$ PRQ = 40°; $\sphericalangle$ PTU = 25°. Halle la medida del $\sphericalangle$ RST. (ver Figura 14)

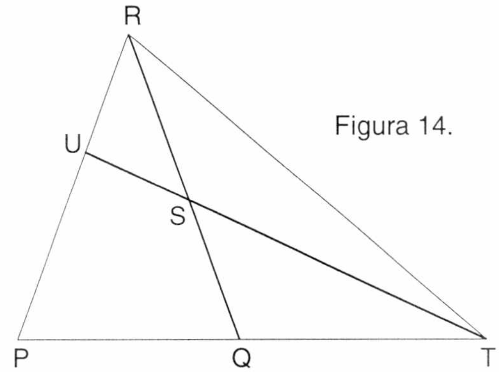


Figura 14.

6) ABCD es un cuadrado de 40 cm de lado. AC y BD son arcos de circunferencia centrados, uno en D y el otro en A. ¿Cuál es el perímetro y el área de la figura sombreada? (ver Figura 15)

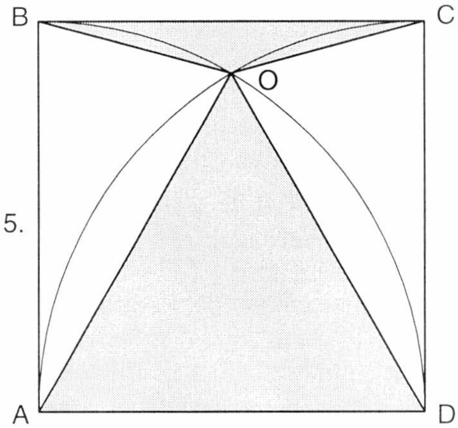


Figura 15.

7) ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. Se trazan dos arcos de circunferencia centrados uno en A y el otro en B, de radio $\overline{AB}$. ¿Cuál es el área de la parte sombreada? (ver Figura 16)

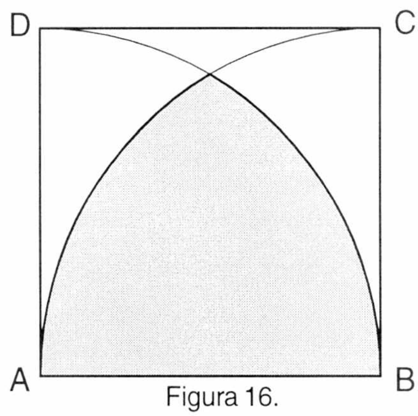


Figura 16.

8) En el cuadrado ABCD se dividió AC en cuatro partes iguales y OB en dos partes iguales. Considere todos los triángulos de la figura y determine cuáles tienen igual área. (ver Figura 17)

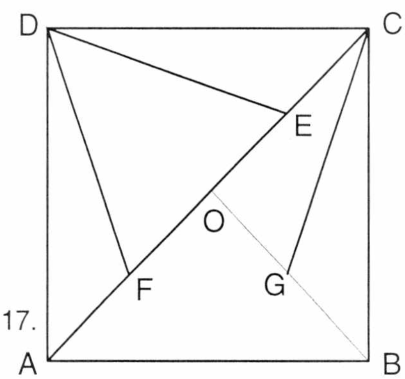


Figura 17.

9) Dibuje un triángulo rectángulo. En cada uno de sus lados trace un semicírculo cuyo centro sea el punto medio del lado y cuyo radio sea la mitad del lado correspondiente del triángulo: indique, justificando la respuesta, si es cierto o falso que:

La suma de las áreas de los semicírculos sobre los catetos es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

10) **Definición.** Sean a y b números reales positivos. Entonces:

$m = \frac{a+b}{2}$: **media aritmética** de a y b ; $g = \sqrt{ab}$: **media geométrica** de a y b ;

$h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$: **media armónica** de a y b; $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$: **media cuadrática** de a y b

Sean a y b dos números reales positivos. Sea una circunferencia de centro O y de diámetro $\overline{AB}$ = a+b. Sea C un punto de la recta determinada por los puntos A, O y B de manera que $\overline{AC}$ = a y $\overline{CB}$ = b.

(i) Demuestre que (ver Figura 18)

$$m = \overline{OM}, \qquad g = \overline{CM},$$

$$h = \overline{MH}, \qquad q = \overline{CN}$$

(ii) Justifique geométricamente las desigualdades

$$h \leq g \leq m \leq q$$

¿En qué casos se tiene una igualdad?

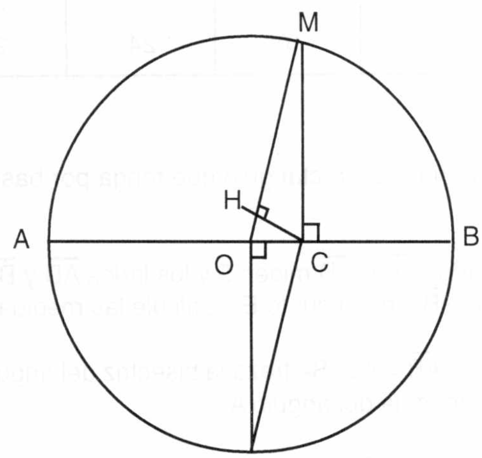


Figura 18.

11) Demostrar que si un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ con hipotenusa c y con catetos a y b, verifica la relación $c = \sqrt{2\,a\,b}$, entonces $\overset{\triangle}{ABC}$ es isósceles. ¿La proposición recíproca es verdadera?

Definición. Se llama **terna pitagórica** a una terna de números enteros positivos X, Y, Z que cumplen con la condición:

$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

Observación. Las ternas pitagóricas pueden ser los lados de triángulos rectángulos, siendo X e Y los dos catetos y Z la hipotenusa.

12) (i) Verifique que existen infinitas ternas pitagóricas dadas por:

$$X = 2\,u\,v\,, \quad Y = u^2 - v^2$$

con u y v números naturales cualesquierra con u>v, con Z a determinar.

(ii) Para tener varias ternas pitagóricas, complete la siguiente tabla y compruebe que X, Y, y Z son los lados de un triángulo rectángulo.

u	v	X	Y	Z
2	1	4	3	5
3	1	...	...	...
3	2	...	...	...
4	1	...	...	...
4	2	...	...	...
4	3	...	...	...
5	1	10	24	26

13) Dado un cuadrado, construya un triángulo rectángulo que tenga por base un lado del cuadrado y su área sea igual al área del cuadrado.

14) En el paralelógramo ABCD, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 5 y los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ miden 6. Se traza la bisectriz del ángulo A que corta al lado $\overline{BC}$ en el punto E. Calcule las medidas $\overline{BE}$ y $\overline{EC}$.

15) Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$. Se traza la bisectriz del ángulo B que corta al lado AC en D. Sabiendo que $\overline{BC} = \overline{BD}$, calcule la medida del ángulo A.

16) Sea ABC un triángulo con $\sphericalangle A = 50°$. Se prolonga el lado BC en ambas direcciones y sobre las prolongaciones se indican los puntos P y Q de manera tal que $\overline{PB} = \overline{BA}$; $\overline{CQ} = \overline{CA}$ y $\overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CQ} = \overline{PQ}$. Calcule la medida del ángulo PAQ

17) Sean ABC un triángulo que tiene $\sphericalangle A = 36°$ y $\sphericalangle B = 21°$. Sobre el lado AB se marcan los puntos D y E de modo que $\overline{AD} = \overline{DC}$ y $\overline{EB} = \overline{EC}$. Halle la medida del $\sphericalangle$ DCE.

18) Un triángulo tiene por lados 9 m, 12 m y 15 m. ¿Cuáles son los lados de otro triángulo semejante de 72 m de perímetro?

19) Una columna de 30 m de altura se quebró de tal manera que la parte más alta toca el suelo a 16 m de la base. ¿A qué altura se ha roto?

20) Dos columnas de 30 m y 40 m de altura están distanciadas 50 m. Un pájaro que va a tomar agua a una fuente que se encuentra en el suelo entre las dos columnas, recorre la misma distancia desde la cima de cualesquiera de ellas. ¿A qué distancia de las columnas se encuentra la fuente?

21) En un círculo de 25 cm de diámetro se inscribe un rectángulo cuyos lados difieren en 17 cm, ¿cuánto miden sus lados?

22) A y B son dos puntos de la circunferencia de centro O. B y O son dos puntos de la circunferencia de centro A. Demuestre que AOB es un triángulo equilátero.

23) Se considera un triángulo ABC inscrito en un círculo de centro O. Hacia el exterior de ABC, se construye un triángulo isósceles ABD, tal que $\overline{DA} = \overline{DB}$. Demuestre que OD es perpendicular a AB.

24) El lado de un triángulo equilátero T es $\frac{3}{7}$ del lado de un cuadrado C. Encuentre una fracción que indique qué parte del perímetro de C es el perímetro de T.

25) Sean a,b,c, d > 0. Demuestre la siguiente proposición

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

utilizando el concepto de área construyendo dos rectángulos de base 1 y de altura $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, respectivamente.

26) ¿Cuál es la proporción entre el área de un cuadrado inscrito en un círculo y el área de un cuadrado inscrito en uno de sus semicírculos?

27) (i) Dado un círculo de radio r > 0 calcule el lado del cuadrado inscripto y el lado del cuadrado circunscrito en dicho círculo. Calcule el porcentaje de área que ocupa la región más pequeña respecto de la más grande.

(ii) Dado un cuadrado de lado L calcule el radio del círculo inscrito y del círculo circunscrito en dicho cuadrado. Calcule el porcentaje de área que ocupa la región más pequeña con respecto de la más grande.

(iii) Calcule el área de la región comprendida entre cada cuadrado y el círculo en (i), y entre cada círculo y el cuadrado en (ii).

28) ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. Se trazan dos arcos de circunferencia centrados uno en A y el otro en B, de radio AB. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

29) Si a la medida de dos lados paralelos de un cuadrado se le aumenta el 25% y a la medida de los otros dos lados se le quita el 40%. ¿Qué ocurrirá con su área?

30) ABCD es un trapecio de bases AB y CD, y los lados $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CD} = 10$, $\overline{AD} = 4$. Las rectas AD y BC se cortan en el punto E. Demuestre que el triángulo DCE es isósceles.

31) Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sean los puntos P y Q pertenecientes a BC y AB, respectivamente, de manera que se tenga $\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$. Halle el valor de $\sphericalangle B$.

32) Una hormiga sale del hormiguero en busca de comida. Camina primero 50 cm hacia el este, luego 50 cm hacia el sudoeste, allí decide caminar 50 cm en dirección oeste y finalmente 50 cm en dirección sudeste. Por fin decide regresar con la comida al hormiguero. ¿En qué dirección tiene que caminar para ir derecho al hormiguero? ¿Es cierto que tiene que recorrer más de 50 cm, pero menos de 1 m?

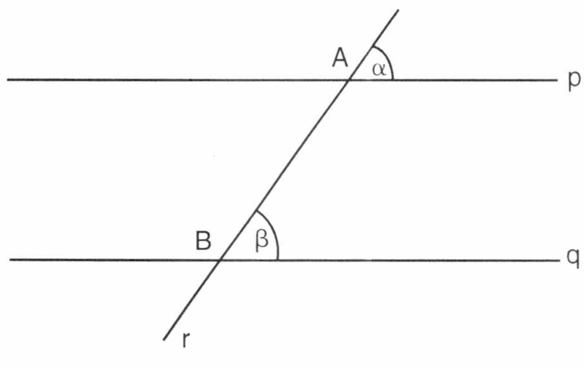
33) Sea ABC un triángulo rectángulo en A; si $\sphericalangle C = 30^\circ$ y $\overline{AB} = 10$ demuestre que $\overline{BC} = 20$.

34) ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 12:35 hrs.?

35) El tamaño de los televisores se mide en pulgadas e indica la medida de la diagonal de la pantalla que tiene forma rectangular. Las dimensiones de la pantalla están en relación 3 a 4. Calcule en cm las dimensiones de los televisores de 26 y 20 pulgadas (1 pulgada = 2,54 cm)

36) Demuestre que si las rectas p, q y r son tales que
$\alpha = \beta$ entonces $p \parallel q$.(Utilice el método por contradicción)
(ver Figura 19)

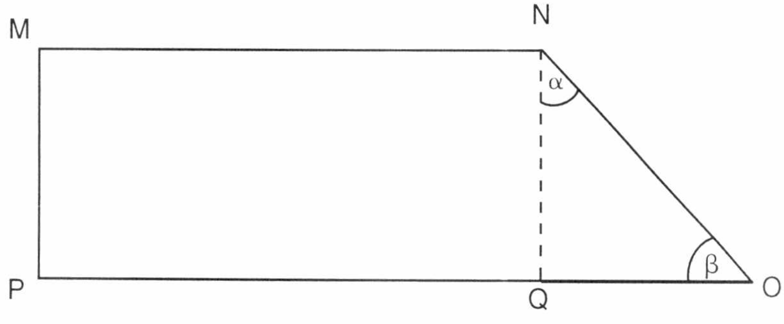
Figura 19.



37) Calcule el perímetro del trapecio MNOP sabiendo que:

$\alpha = \beta$; $\overline{NO} = 10\sqrt{2}$m ; $\overline{PQ} = 20$m ; $\overline{MP} = \frac{1}{2}\ \overline{PQ}$ (ver Figura 20)

Figura 20.



38) Calcule el área de la superficie sombreada de un cuadrado de lado L, en el que las curvas son arcos de circunferencia trazados desde los vértices opuestos y cuyo radio es el lado del cuadrado. Calcule el porcentaje de dicha área respecto del área del cuadrado (ver Figura 21)

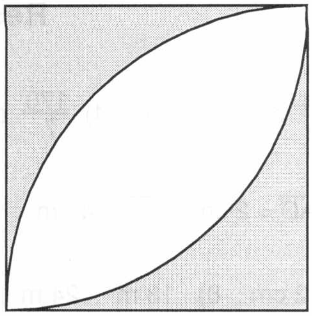


Figura 21.

39) ABCD es un cuadrado de 4 cm de lado. E y F son puntos medios de los lados, BE es un arco de circunferencia de radio igual a la longitud de $\overline{BE}$. ¿Cuál es el área de la figura sombreada? (ver Figura 22)

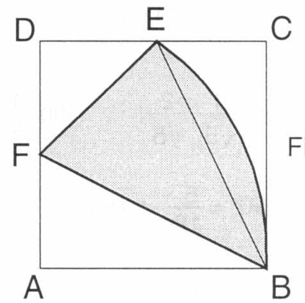


Figura 22.

40) Halle el radio de la circunferencia sabiendo que: $\overline{CB}$ = 4cm, $\overline{AB}$ = 8cm (ver figura 23)

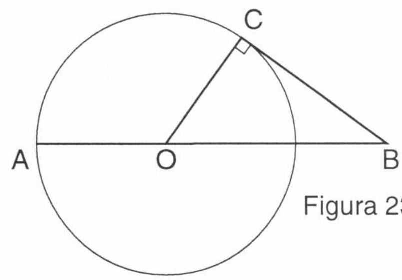


Figura 23.

41) En el cuadrado ABCD se dividió AC en cuatro partes iguales y OB en dos partes iguales. Considere todos los triángulos de la figura y determine cuáles tienen igual área (ver Figura 24)

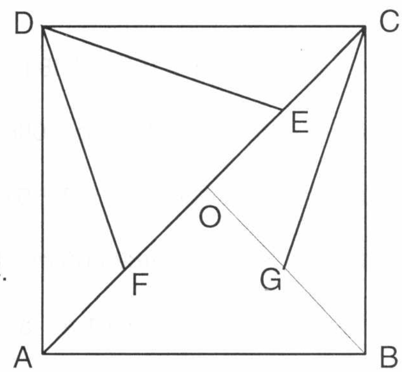


Figura 24.

42) Determine las medidas de los catetos de un triánglo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es 1.

43) Una diagonal de un rectángulo mide 10. Calcule el área del mismo, sabiendo que las medidas de dos de sus lados son números pares consecutivos.

44) Calcule las medidas de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números naturales consecutivos.

45) Calcule la medida de los lados y el área de un rectángulo de perímetro 28 , sabiendo que la longitud de una diagonal es 10.

Respuestas Trabajo Práctico

3) $\frac{10}{3}$ cm y $\frac{5}{3}$ cm ; 4) $\frac{170}{7}$ cm y $\frac{250}{7}$ cm ; 5) $\frac{280}{3}$ m ;

6) $\overline{AD} = 2$ cm , $\overline{DC} = 4$ cm , $\overline{CE} = \frac{16}{3}$ cm , $\overline{EB} = \frac{8}{3}$

7) 22 cm ; 8) 18 m , 24 m , 30 m ; 9) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$m , $\frac{9}{4}\sqrt{3}$m^2 ;

10) $2\sqrt{2}$m ; 11) 5m ;

12) (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}$; (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}$; (iii) $\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{18\sqrt{5}}{5}; \frac{81}{5}, \frac{324}{5}$

13) (i) $50° = \frac{5}{18}\pi$ rad , $60° = \frac{\pi}{3}$ rad , $150° = \frac{5\pi}{6}$ rad ,

$-30° = -\frac{\pi}{6}$ rad , $55 = \frac{11}{36}\pi$ rad , $-48° = -\frac{4\pi}{15}$ rad .

(ii) $-\frac{\pi}{6}$rad = $-30°$, $\frac{\pi}{3}$ rad = $60°$, 1 rad = $57°\ 17'45''$

2 rad = $114°\ 35'$, $\frac{5}{4}\pi$ rad = $225°$, $\frac{2}{3}\pi$ rad = $120°$

14) 175,084 m

15) (i) $\beta = 41°$, a = 1539, 608 m , b = 1338,36 m ;

(ii) $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$, b = 696 m ;

(iii) $\beta = 58°\ 02'30''$, $\alpha = 31°\ 57'\ 30''$, h = 1927 m ;

(iv) $\beta = 36°$, h = 482,066 m , b = 283,351 m ;

(v) $\alpha = 52°$, h = 148,41 m, a = 116,95 m , b = 91,37 m ;

(vi) $\alpha = 48°$, $\beta = 42°$, h = 145 m , a = 108,37 m , b = 96,33 m

16) 61° 23' 58" ; 17) 3,464 m ;

18) x = 15 , z = 24 , tg (α) = $\frac{4}{3}$ ($\alpha = 53{,}13°$ ó 0,93 radianes) ,

tg (β) = $\frac{7}{24}$($\beta = 16{,}26°$ ó 0,28 radianes) ;

19) x=8 ; 20) 6 ; 21) ($6\pi + 12\sqrt{3}$) cm

Respuestas Problemas Complementarios

1) $\frac{21}{64}$

2) (i) 525π , es el 32,81% del área del círculo mayor ; (ii) $\frac{43\pi a^2}{98}$

3) $\alpha + \beta - \gamma = 180°$

4) 20^0

5) 135^0

6) Perímetro total = $80\,(2 + \sqrt{2-\sqrt{3}})$ cm ;

Área total = 800 cm^2

7) $A = 25\,(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\,)\ cm^2$

8) Los triángulos que tienen áreas iguales son los siguientes: ADC y ABC; AFD y EDC; GOC Y GBC; ABO, BOC y DFE.

32) Hacia el norte; debe recorrer $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m

42) Ambos catetos miden $\frac{\sqrt{2}}{2}$

43) 48

44) 3, 4 y 5

45) Base = 6 y altura = 8 ó base = 8 y altura = 6, en ambos casos área = 48