Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, 2000 Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (041)−814990 ; FAX: (041)−810505
E−Mail: tarzia@uaufce.edu.ar

MATEMÁTICA

MÓDULO

"PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA. PROBLEMAS, TRABAJOS PRÁCTICOS Y CASOS" (*)

Domingo A. TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Julio 1998

(*) Se utilizará en el curso "Matemática" (coordinador: D.A. Tarzia) del Programa de Actualización Académica para Profesores de Profesorados (Disciplina Matemática), de la Secretaría de Programación y Evaluación Educativa del Ministerio de Educación de la Nación, a realizarse en las ciudades de Santiago del Estero (curso 043/96) y San Carlos de Bariloche (curso 059/96).

La teoría, ejercicios y problemas sobre Probabilidades y Estadística se desarrollarán siguiendo los libros [Me, Sp].

A continuación se detallan las actividades y problemas complementarios que se consideran de gran importancia en el estudio de la teoría de probabilidades, a saber:

- Actividad No. 13: "Probabilidad condicionada y tablas de contingencia", [CLGGLM, p. 121 – 129], pág. 3 – 11;

- Actividad No. 16: "Probabilidad geométrica", [CLGGLM, p. 137 – 145], pág. 12 – 20;

- Actividad No. 18: "Probabilidad dinámica", [CLGGLM, p. 149 – 151], pág. 21 – 23;

- La Matemática de las distribuciones de probabilidades más frecuentes (variables aleatorias discretas: binomial y Poisson; variables aleatorias continuas: normal y exponencial) (ver Módulo de Análisis Elemental, Parte 4);

- Se plantean problemas, trabajos prácticos y casos no clásicos sobre el tema [CLGGLM, Kr, Me, Mi, SpBo, Th], pag. 24 – 32.

- Un modelo de fidelidad de marca para marketing y sus consecuencias matemáticas [Ta], pág. 33 – 35.

- Las referencias básicas de la bibliografía utilizada, pág. 36.

Actividad Nº 13: Probabilidad condicionada y tablas de contingencia

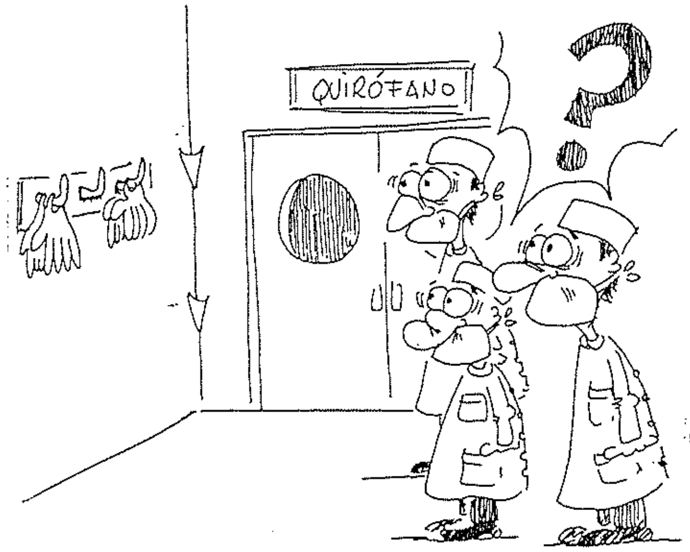
Material

No es necesario.

Tablas de contingencia

Comenzamos por dos problemas en los que se introduce un modo de presentar los datos de gran interés para el cálculo de probabilidades:

Problema 1. Diagnósticos



Una revista médica publica que para diagnosticar las lesiones de hígado existen dos procedimientos: "el histológico" y el "gráfico". El segundo procedimiento no es tan preciso como el primero, pero conlleva menor riesgo.

Para verificar la bondad del procedimiento gráfico se estudiaron con él 1.160 lesiones de hígado, comprobándose más tarde si el diagnóstico fue correcto o no.

Los datos obtenidos fueron distintos según que la lesión fuera maligna o benigna. He aquí la tabla:

TABLA 1	Diagnostico correcto	Diagnostico incorrecto	TOTALES
Lesiones malignas	418	38	456
Lesiones benignas	608	96	704
TOTALES	1.026	134	1.160

a) Interpreta el significado de cada uno de los números de la tabla.

b) Para juzgar la precisión del procedimiento es importante conocer la proporción de cada caso respecto al total de 1.160 lesiones. Expresa la tabla anterior en frecuencias relativas y en porcentajes; es decir, completa las dos tablas de la página siguiente:

TABLA 2	C	I	TOTAL
M	0´36		
B			
TOTAL			

TABLA 3	C	I	TOTAL
M	36		
B			
TOTAL			

¿Cómo son los sucesos C e I entre sí? ¿Y los M y B?

c) Se va a diagnosticar a un paciente por el procedimiento gráfico. ¿Qué probabilidades asignarás a los siguientes sucesos aleatorios

C y M; C y B; I y M; I y B; C, I?

d) ¿Qué probabilidad asignas al suceso "lesión maligna diagnosticada correctamente"? ¿Y al suceso "lesión benigna diagnosticada correctamente"? ¿Son independientes los sucesos C y M?

Para responder a estas preguntas recuerda que según vimos en la actividad número 10, si dos sucesos son independientes de verificaba que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2)$$

Mientras que si son dependientes se verifica que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2/S1)$$

de donde se tiene:

$$P(S2/S1) = P(S1 \text{ y } S2) / P(S1)$$

Problema 2. Accidentes de tráfico

Con objeto de que disminuya el número de accidentes de circulación es preciso tomar diversos tipos de medidas: campañas de información en prensa, radio y televisión; mejora de la seguridad pasiva de los vehículos; mejora del trazado y señalización de las vías (calles y carreteras); vigilancia por parte de los agentes de tráfico, etc.

Para ello es necesario disponer de información, disponer de datos. El Instituto Nacional de Estadística (INE), en su Anuario de 1975 publicó para el año 1973 los siguientes datos:

TABLA 4	En carretera	En zona urbana	TOTALES
Con victimas	34.092	32.295	66.387
Solo daños materiales	11.712	20.791	32.503
TOTALES	45.804	53.086	98.890

a) Completa la siguiente tabla de porcentajes, obtenida a partir de la anterior:

TABLA 5	A	no A	TOTALES
B	34		67
no B			33
TOTALES	46	54	100

b) Como sabes que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$$

calcula en este problema P(B/A) y P(B/no A) y decide si A y B son independientes. ¿Es P(B/A) = P(B)?.

Las tablas 1, 2, 3 del problema del diagnóstico, y las 4 y 5 del de los accidentes de tráfico reciben el nombre de **tablas de contingencia**, pues en ellas figuran todas las posibilidades, o contingencia, de los sucesos compuestos que son intersección de otros sucesos, esto es:

$A \text{ y } B = A \cap B;\ A \text{ y no } B = A \cap \overline{B};\ \text{no } A \text{ y } B = \overline{A} \cap B;\ \text{no } A \text{ y no } B = \overline{A} \cap \overline{B}$

El esquema de dichas tablas es el siguiente:

TABLA 6	A	$\overline{A}$	Totales
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
Totales	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

y pueden figurar en ellas, en lugar de probabilidades, frecuencias relativas o porcentajes.

Estas tablas además de darnos probabilidades de forma directa nos permiten el cálculo de probabilidades de sucesos condicionados; por ejemplo P(B/A) y P(B/no A).

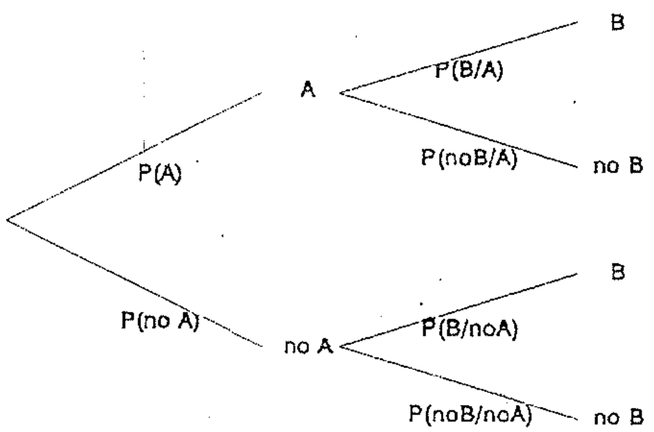
Existen tablas de contingencia más complicadas. Si consideramos que los accidentes pueden ser leves, graves o mortales; en carretera o en zona urbana, el diagrama de contingencia será:

TABLA 7	L	G	M	TOTALES
C				
U				
TOTALES				1

Lo fundamental de estas tablas es que los sucesos L, G y M sean incompatibles dos a dos y su unión sea el espacio muestral, y que los sucesos C y U también lo sean y compongan el espacio muestral.

Relación entre los diagramas de contingencia y los de árbol

La tabla 6 se puede poner en forma de diagrama de árbol de la forma siguiente:



Multiplicando las probabilidades de las distintas ramas que van hasta un punto dado, por ejemplo B, se obtiene la probabilidad de la intersección de los sucesos que se encuentran por el camino:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \text{ y no } B) = P(A) \cdot P(\text{no } B/A)$$

etc.

6

Los diagramas de contingencia y los de árbol están íntimamente relacionados: dado uno de ellos podemos construir el otro. Esto es muy importante, ya que unas veces los datos del problema permiten construir rápidamente uno de ellos y a partir de él podemos construir el otro diagrama, que nos dará la respuesta.

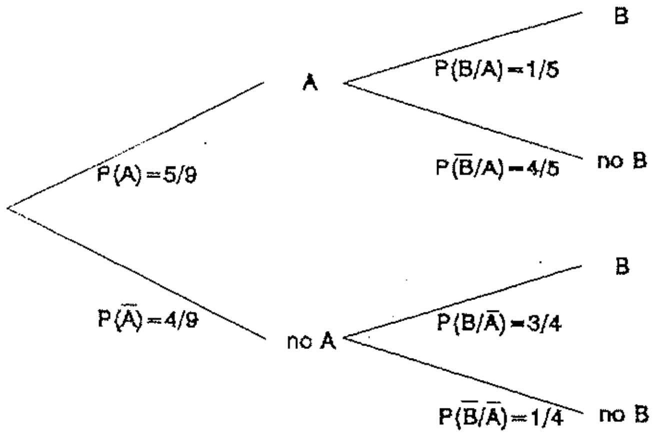
Teniendo en cuenta que:

$$P(B/A) = P(A \text{ y } B) \,/\, P(A) \qquad [1]$$

y dado el diagrama de contingencia:

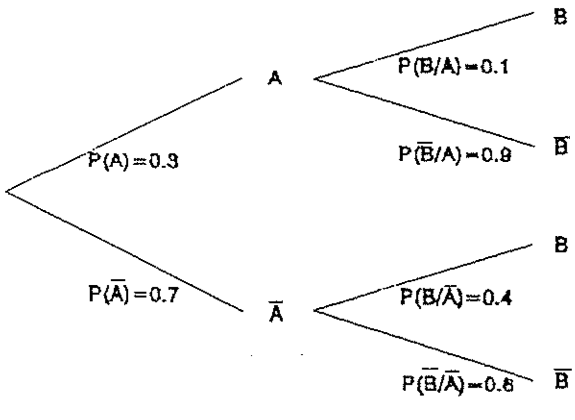
	A	no A	Totales
B	P(A y B)=1/9	P(no A y B)=3/9	P(B)=4/9
no B	P(A y no B)=4/9	P(no A y no B)=1/9	P(no B)=5/9
Totales	P(A)=5/9	P(no A)=4/9	1

puedes construir el de árbol:



Sin más que hacer en cada caso el cociente indicado en la expresión [1].

Recíprocamente, dado el diagrama de árbol, puedes construir el diagrama de contingencia:



Obtenemos, multiplicando los números de una misma rama, las probabilidades P(A y B), P(A y no B), P(no A y B), P(no A y no B), es decir, el diagrama de contingencia.

	A	$\overline{A}$	**Totales**
B	$P(A \cap B) =$ 0´03	$P(\overline{A} \cap B) =$ 0´28	$P(B) =$ 0´31
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) =$ 0´27	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$ 0´42	$P(\overline{B}) =$ 0´69
Totales	$P(A) =$ 0´30	$P(\overline{A}) =$ 0´70	1

Problemas a resolver

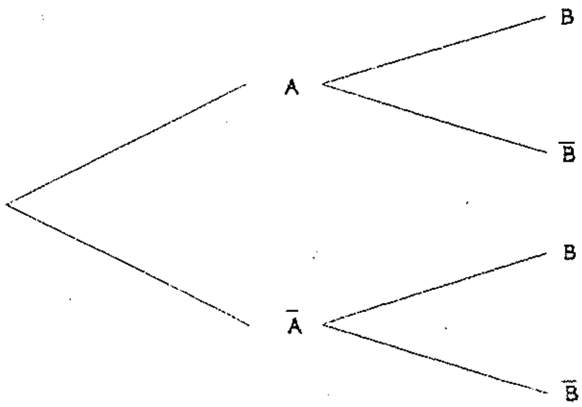
Ahora que ya conocemos los diagramas de contingencia y las relaciones con los diagramas de árbol te vamos a proponer varios problemas que resolverás aplicando lo que has aprendido en esta actividad.

1º

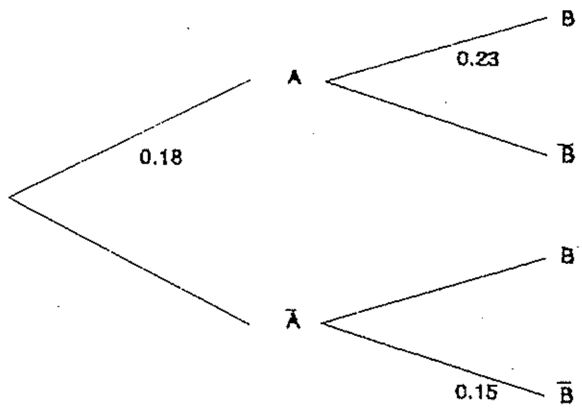
a) Dado el siguiente diagrama de contingencia

	A	**no A**	**Totales**
B	0,41	0,10	0,51
no B	0,30	0,19	0,49
Totales	0,71	0,29	1

construye el diagrama en árbol.



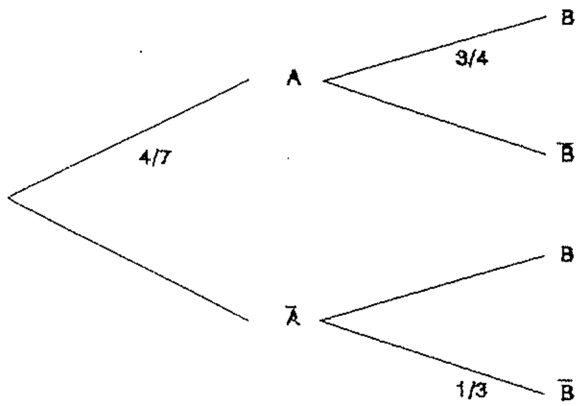
b) Dado el siguiente diagrama en árbol



construye el diagrama de contingencia:

	A	no A	Totales
B			
no B			
Totales			1

2º Completa el siguiente diagrama de probabilidades:



Construye con él una tabla de contingencia y a partir de ella un nuevo diagrama de árbol poniendo el suceso B en primer lugar.

3º Disponemos de dos cajas, M y N, la caja M contiene 7 bolas negras y 3 blancas, y la N 5 negras y 3 blancas. Se saca una bola al azar de una de las dos cajas, también al azar, y resulta ser blanca. Calcular la probabilidad de que proceda de la caja M.

4º Se han observado 50 enfermos de piel tratados con un nuevo antibiótico y otros 70 enfermos no tratados. Anotamos las curaciones al cabo de 2 semanas, los resultados han sido:

	Tratados	No. tratados
Curados	40	20
No Curados	10	50

Si se emplean estos datos para asignar probabilidades,

a) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado haya sido tratado?
b) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado no haya sido tratado?

5º Una determinada empresa se dedica a la fabricación de cubiertas para las ruedas de los automóviles. Por los controles de calidad que esta empresa lleva a cabo se puede concluir diciendo que el 5% de las cubiertas producidas son defectuosas. En el laboratorio de control de calidad hay instalado un dispositivo que detecta el 90% de las cubiertas defectuosas, pero también califica como defectuosas el 2% de las correctas. El empresario está interesado en conocer las siguientes probabilidades:

* Probabilidad de que sea correcta una cubierta calificada como defectuosa por el dispositivo.
* Probabilidad de que sea defectuosa una cubierta calificada por el dispositivo como correcta.

¿Puedes ayudarle tú?

Nota: Consideremos los sucesos:

A = "Ser correcta"
B = "Ser calificada como correcta"
no A = "Ser defectuosa"
no B = "Ser calificada defectuosa"

El problema pregunta: P(A/no B) y P(no A/B). Para resolver el problema puedes construir primero el diagrama de árbol, el diagrama de contingencia y finalmente responder a las probabilidades pedidas a través del diagrama de contingencia.

$$P(A/\text{no } B) = P(A \text{ y no } B) / P(\text{no } B)$$

$$P(\text{no } A/B) = P(B \text{ y no } A) / P(B)$$

6º En un municipio hay tres partidos políticos: Progresista, Liberal y Moderado. Se efectúa un referéndum para decidir si un cierto día se declara fiesta local. He aquí los resultados en %, en función del partido al que votó cada ciudadano en las últimas elecciones:

		ULTIMAS ELECCIONES			
		Pr	Lib	Mod	Abs
REFERÉNDUM	SI	15 %	25 %	12 %	8 %
	NO	25 %	5 %	8 %	2 %

a) ¿Qué porcentaje votó a cada partido en las últimas elecciones?

b) ¿Qué probabilidad hay de que una persona tomada al azar haya votado Sí en el referéndum, P(Sí)?

c) Calcular las siguientes probabilidades:

P(Pr/Sí) P(Sí/Pr) P(Lib/Sí) P(Sí/Lib)
P(Mod/Sí) P(Sí/Mod) P(Abs/Sí) P(Sí/Abs)

d) Los sucesos "votar moderado en la última votación" y "votar Sí en el referéndum" son dependientes o independientes?

Contenidos implícitos en esta actividad

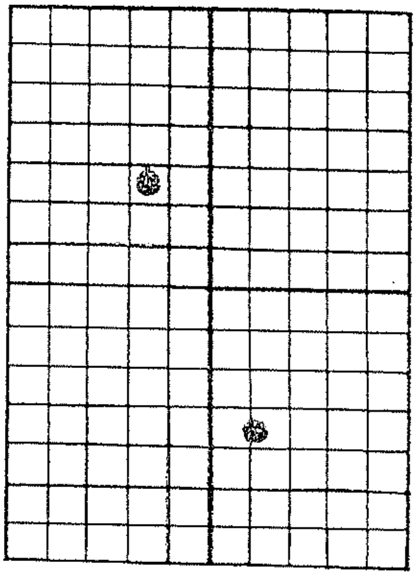
- Tablas de contingencia.
- Probabilidad condicionada.
- Relación entre los diagramas de contingencia y diagramas de árbol.

Actividad Nº 16: Probabilidad geométrica

Reglas del juego

Este juego consiste en experimentar al fenómeno aleatorio "lanzar una moneda de cien pesetas sobre una cuadrícula de 60 x 60 mm". Cada alumno realizará el experimento cien veces.

Materiales necesarios



Cada alumno necesita:
- Una moneda de 100 pesetas.
- Una cuadrícula de 60 x 60 mm, que obtendrás uniendo cuatro hojas DIN A4, como muestra la figura, y después haciendo el cuadriculado:
- Unos folios para ir anotando los resultados, conclusiones o conjeturas.

Desarrollo del juego

1º- ¿Puedes formular alguna conjetura sobre qué es lo que ocurrirá al lanzar una moneda de cien pesetas sobre una cuadrícula de 60 x 60 mm?.

2º- Sobre una cuadrícula lanzas la moneda cien veces y anotas el número de veces que la moneda toca alguna de las líneas de la cuadrícula.

Llamamos al suceso "la moneda toca alguna de las líneas de la cuadrícula", suceso S. Con los datos de la experiencia, rellena la siguiente tabla:

	$f(S)$	$f_r(S)$
SUCESO "S"		
100 Lanzamientos		

3º- Recogemos los datos obtenidos por todos los alumnos de la clase y los colocamos en la siguiente tabla:

	f(S) Frecuencias absolutas de los Alumnos	$f_r(S)$ Frecuencia relativa total
S		
100 X N lanzamientos		

$$f_r(S) = \frac{suma\ de\ las\ frecuencias\ absolutas}{100 \times N}\ ;\ N = número\ de\ Alumnos$$

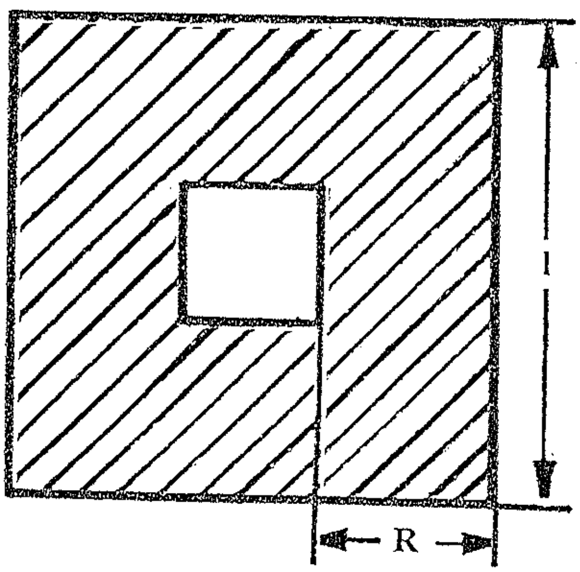
A la vista de los resultados obtenidos en la última tabla, ¿qué probabilidad asignarás al suceso S? Razónalo.

4º Recuerda la ley de Laplace, que utilizamos para el cálculo de probabilidades cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$P(S) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Con esta ley también calcularemos **probabilidades geométricas**, como vas a ver a continuación.

Si tomamos un cuadrado de la cuadrícula, la moneda pisará alguna línea de la cuadrícula si su centro cae dentro del área rayada:



l = 60 mm.
R = radio de la moneda.
ϕ = diámetro de la moneda = 24,5 mm.

Según la ley de Laplace la probabilidad de que al lanzar la moneda pise alguna línea de la cuadrícula será:

$$P(S) = \frac{\text{área de la zona rayada}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{l^2 - (l-2R)^2}{l^2} =$$

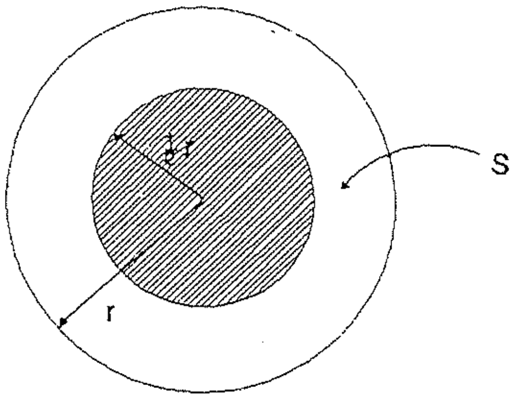
$$= \frac{l^2}{l^2} - \frac{(l-2R)^2}{l^2} = 1 - \left(\frac{l-2R}{l}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{\phi}{l}\right)^2$$

$$P(S) = 1 - \left(1 - \frac{24'5}{60}\right)^2 = 0'65$$

5º- Compara el resultado anterior con el que se obtuvo, de forma experimental, en el punto 3 y comenta la primera ley de los grandes números.

6º- Con el fin de que veas cómo se hacen los cálculos de probabilidades geométricas te resolveremos varios problemas.

Problema 1: En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Hallar la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.
Denotamos por S el conjunto de los puntos interiores al círculo de radio r y denotamos por A el conjunto de puntos interiores al círculo concéntrico de radio 1/2 de r. Así A está formado por aquellos puntos de D que están más cercanos a su centro que a su circunferencia.



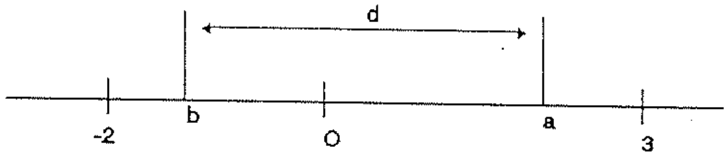
La probabilidad pedida vale:

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

Problema 2: Sobre una línea recta se seleccionan al azar los puntos a y b tales que

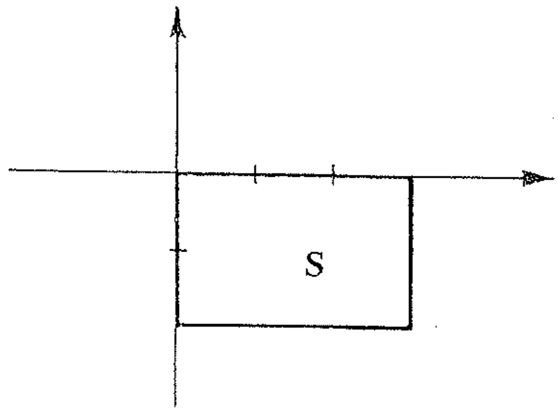
$$-2 \leq b \leq 0 \quad y \quad 0 \leq a \leq 3$$

como se muestra en la figura siguiente:



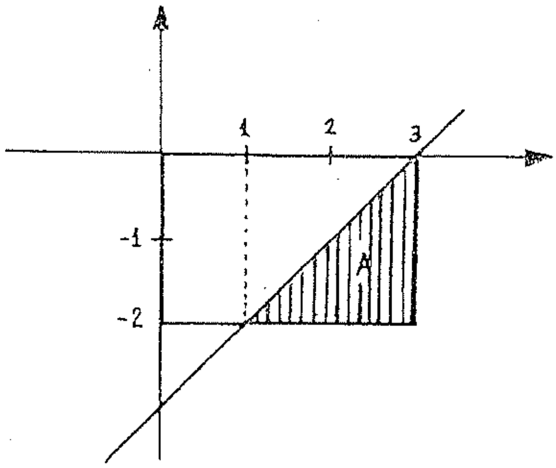
Hallar la probabilidad de que la distancia d entre a y b sea mayor que 3.

Los puntos (a,b) posibles son los que se muestran en el diagrama siguiente:



e incluidos en el rectángulo.

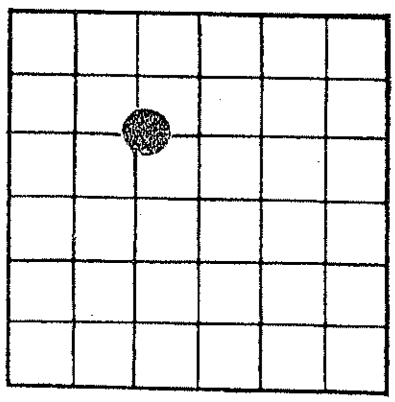
El conjunto de puntos favorables (a,b) serán aquellos para los cuales d = a - b $\geq$ 3 y son los puntos de S que caen por debajo de la línea x - y = 3 y forman por tanto la superficie sombreada.



En consecuencia:

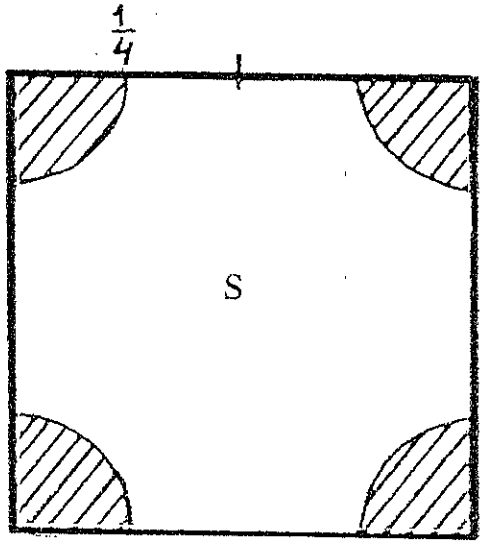
$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Problema 3: Se tiene una cuadrícula de 1 x 1 cm. Se lanza un disco sobre ella de 1/2 cm de diámetro al azar. Hallar la probabilidad de que el disco cubra un punto de intersección de la cuadrícula.



Tomamos un cuadrado de la cuadrícula y sea S el conjunto de los puntos interiores a este cuadrado.

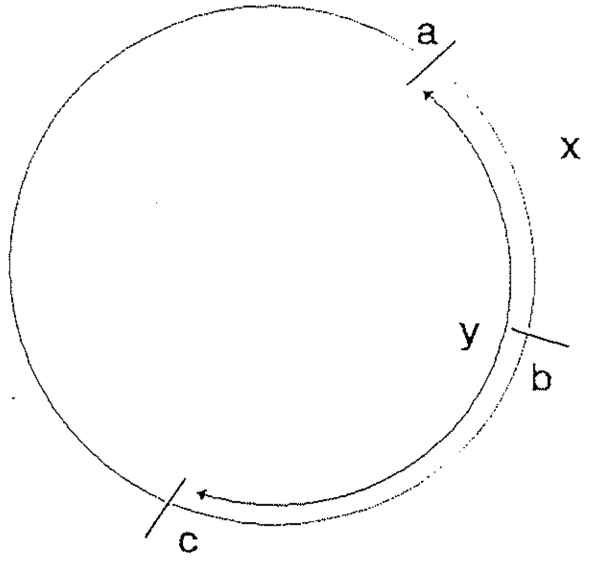
Denotamos por A el conjunto de puntos de S de distancia a las esquinas 1/4 cm. Así si el centro del disco cae en S cubrirá un punto de intersección de la cuadrícula sí y sólo sí su centro cae en un punto de A.



A= sombreada

Según esto:

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{1^2} = \frac{\pi}{16}$$



Problema 4: Tres puntos a, b, c de una circunferencia se escogen al azar. Hallar la probabilidad de que los puntos caigan sobre el mismo semicírculo.

Supongamos que la longitud de la circunferencia sea 2s. Denotamos por x la longitud del arco ab en el sentido del movimiento de las agujas del reloj y denotamos por y la longitud del arco ac en el mismo sentido. Se debe cumplir:

$$0 < x < 2s$$

$$0 < y < 2s$$

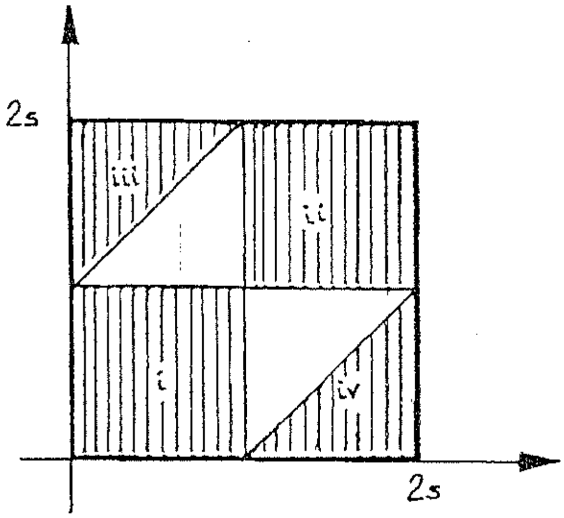
Sea S el conjunto de los puntos de R^2 para los cuales se cumplen las condiciones anteriores: Sea A el subconjunto de S para los cuales se cumplen las condiciones siguientes:

i) $x,y < s$

ii) $x,y > s$

iii) $x < s,\ y - x > s$

iv) $y < s,\ x - y > s$



Entonces A consta de aquellos puntos para los cuales se cumple que a, b, c caen sobre el semicírculo. Así

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{3s^2}{4s^2} = \frac{3}{4}$$

Problema 5: Dado un segmento cualquiera, hallar la probabilidad de obtener, por trisección, los tres lados de un triángulo.

Entendemos por trisección la elección de dos puntos al azar del interior del segmento. Es evidente que no supone restricción alguna identificar al segmento con el intervalo [0,1]. La elección de dos puntos en el segmento es entonces la elección de dos números tales que

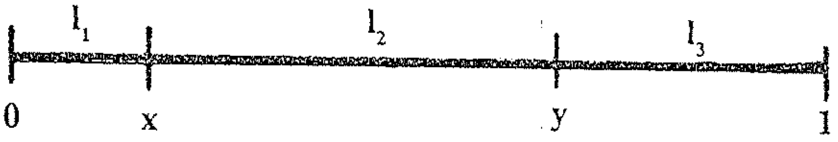
$$x \in (0,1)$$

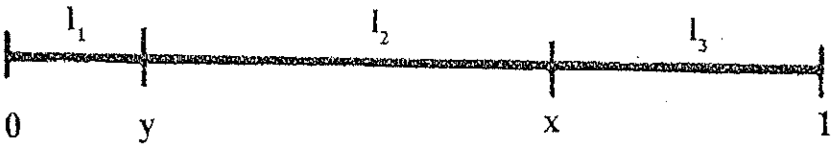
$$y \in (0,1)$$

$$x \neq y.$$

La condición necesaria y suficiente para que con tres segmentos

se pueda formar un triángulo es que la longitud de cada uno de los segmentos sea menor que la suma de los otros dos. Refiriendo estas condiciones a los números x e y obtenemos:

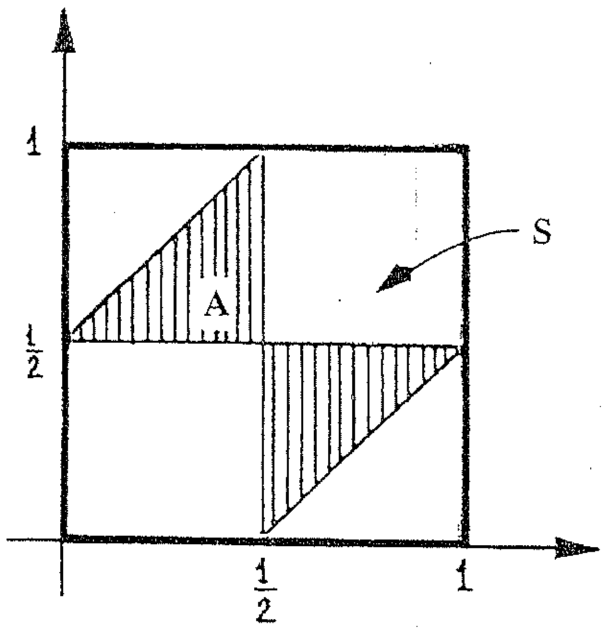




$$x<y;\ 0<x<\frac{1}{2};\ y-x<\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}<y<1$$

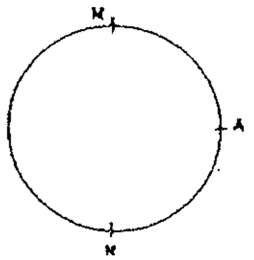
$$y<x;\ 0<y<\frac{1}{2};\ x-y<\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}<x<1$$

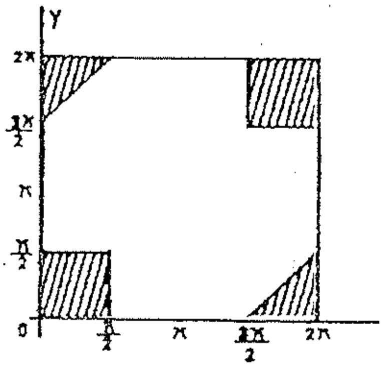
Interpretando geométricamente estas condiciones, identificando (x,y) con un punto del plano, resulta que los puntos que verifican la condición pertenecen a la parte rayada de la figura:



La probabilidad es por tanto:

$$P(A)=\frac{\acute{a}rea\ de\ A}{\acute{a}rea\ de\ S}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{1}=\frac{1}{4}$$





Problema 6: En una circunferencia se escogen al azar tres puntos A, B y C.

Calcular la probabilidad de que los tres estén situados en un mismo arco de 90º.

Supuesto elegido el punto A tomémoslo como origen de medida de longitudes de arco en una circunferencia que podemos suponer de radio 1.

El punto B se puede escoger de forma que la longitud x del arco AB esté comprendida en

$$[0, \frac{\pi}{2}] \bigcup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$$

Elegido el punto B, la medida del arco AC verificará:

a) *Si* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *entonces* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ *o bien* $x - \frac{\pi}{2} + 2\pi \leq 2\pi$

b) *Si* $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ *se verificará* $\frac{3\pi}{2} \leq y \leq 2\pi$ *o bien* $0 \leq y \leq x + \frac{\pi}{2} - 2\pi$

En consecuencia (x,y) ha de ser un punto de la parte rayada de la figura, cuyo área es

$$2\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{4}$$

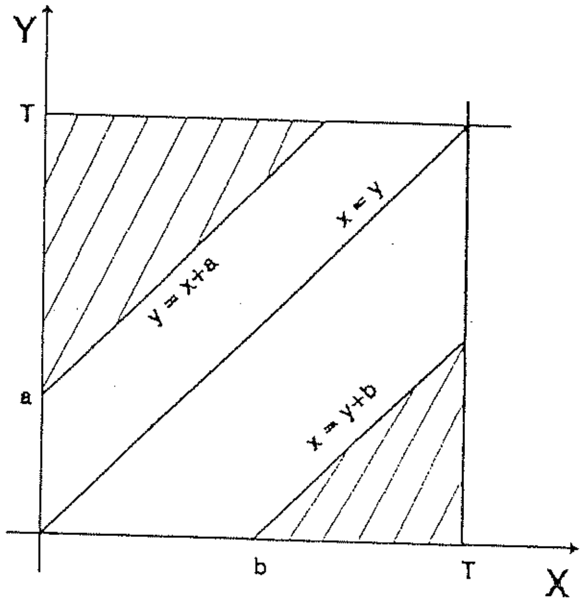
La probabilidad buscada es

$$\frac{\frac{3\pi^2}{4}}{4\pi^2} = \frac{3}{16}$$

Problema 7: Un tren llega a una estación en un instante al azar del intervalo (0,T), parando **a** minutos. A la misma estación acude un autobús al azar e independientemente en el mismo intervalo y parando **b** minutos, **a** y **b** < T.

1) Calcular la probabilidad de que el tren llegue antes que el autobús.
2) Determinar la probabilidad de que se encuentren.
3) Suponiendo que se encuentren en la estación, determinar la probabilidad de que el tren llegue antes que el autobús.

Interpretaremos el problema geométricamente.



Sean x el instante de llegada del tren e y el de llegada del autobús.

1) Es la probabilidad del suceso $x < y$:

$$P = \frac{\frac{1}{2}T^2}{T^2} = \frac{1}{2}$$

2) Es la probabilidad de la suma de los sucesos:

$$x < y < x + a$$
$$y < x < y + b;$$

luego

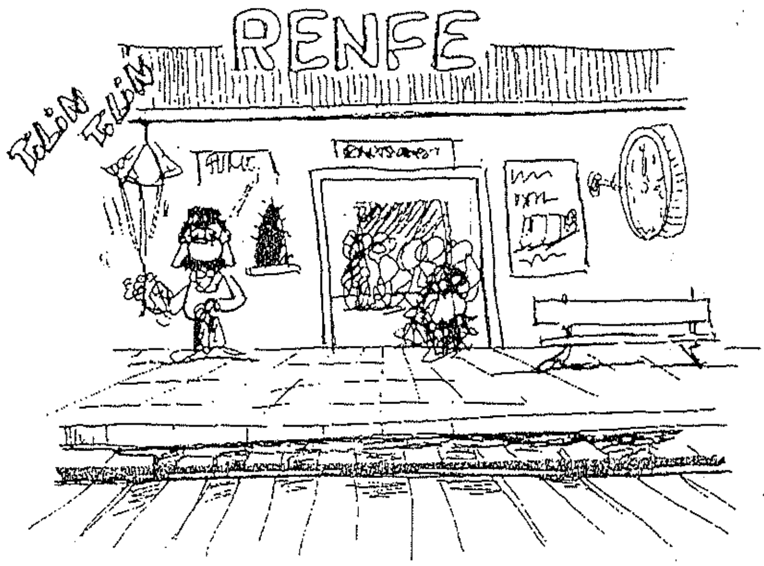
$$P = \frac{\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}(T-a)^2}{T^2} + \frac{\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}(T-b)^2}{T^2} = \frac{(a+b)\,T - \frac{1}{2}(a^2+b^2)}{T^2}$$

3) Es

$$P = \frac{\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}(T-a)^2}{(a+b)\,T - \frac{1}{2}(a^2+b^2)} = \frac{aT - \frac{1}{2}a^2}{(a+b)\,T - \frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

Contenidos implícitos de esta actividad

- Probabilidades geométricas.



Actividad Nº 18
Probabilidad dinámica

Reglas del juego

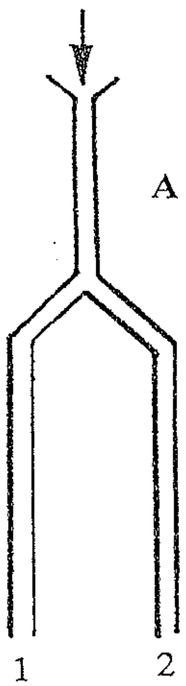
Utilizando fichas, simular situaciones de problemas de probabilidad.

Materiales necesarios

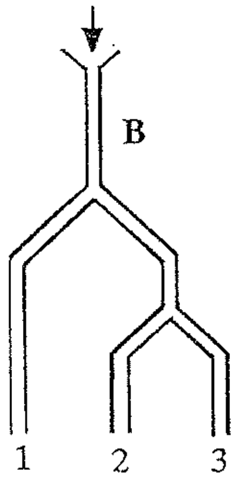
Un gran número de fichas.

Etapas del desarrollo del juego

Embudos



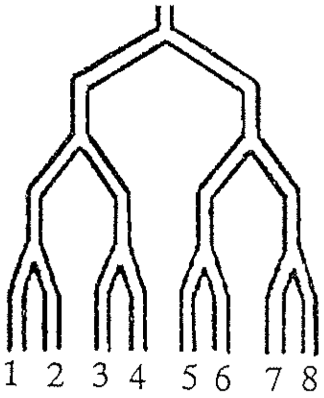
Si dejamos caer un gran número de bolitas, perdigones, fichas, etc, en los embudos A y B que aparecen dibujados observaremos que ocurre lo siguiente:



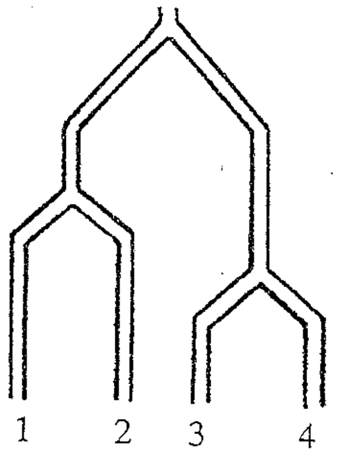
Las posibilidades que tiene un objeto de ir por un camino u otro es igual en cada bifurcación; como en cada bifurcación aparecen dos ramas, la probabilidad de que un objeto pase por cada una de ellas es 1/2 en cada cruce; expresado en porcentaje, el 50%.

Así, si lanzamos 100 objetos por el embudo A, esperamos que aproximadamente sean 50 los que salen por el canal 1 y otros 50 por el canal 2. Si los 100 lanzamientos los realizamos en el embudo B, esperamos que aproximadamente 50 caigan por el canal 1 y 25 por los canales 2 y 3.

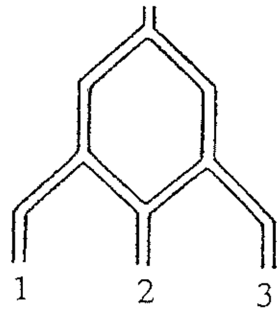
Supón que ahora dejamos caer un montón de perdigones en cada uno de los embudos C, D y F. En estos casos, ¿qué proporción de perdigones esperas que salga por cada canal?



Embudo C



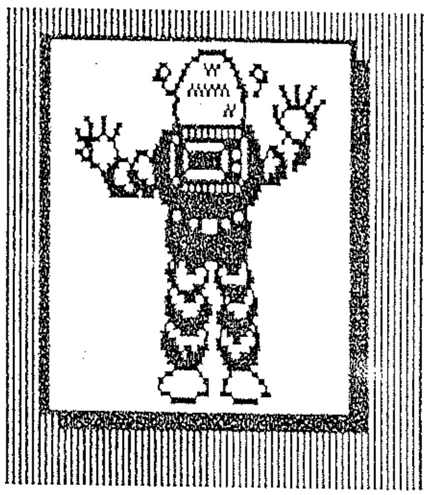
Embudo D



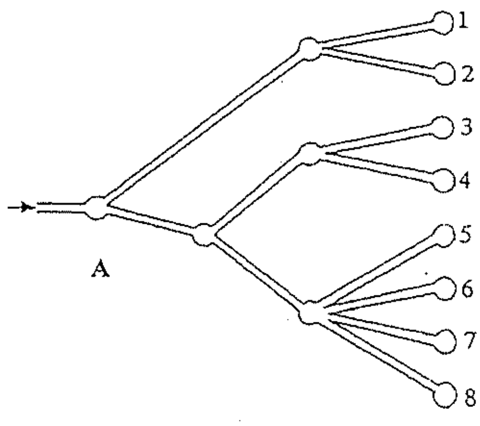
Embudo E

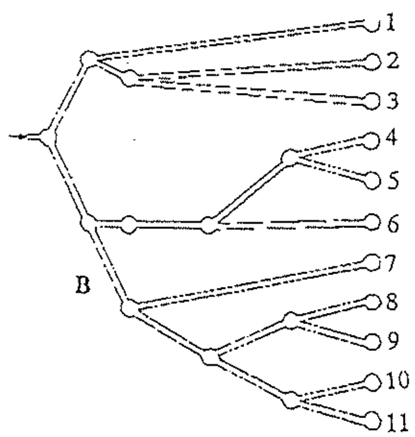
Laberintos

Se pone un robot en un laberinto y empieza a explorarlo. En cada bifurcación es igual de probable que el robot continúe por un camino que por otro (excepto que no puede retroceder por el mismo camino por el que ha llegado). Hay trampas al final de los caminos. ¿En cuál de las trampas es más probable que acabe el robot, o son todas igualmente probables?



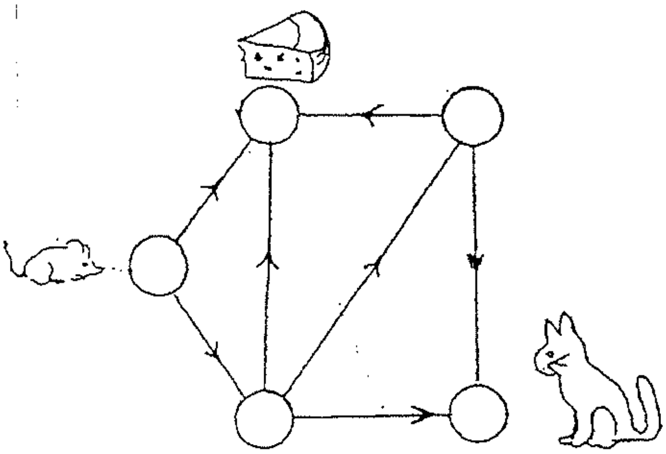
Imagina que repetimos la experiencia muchas veces ¿En qué proporción de ocasiones caerá en cada trampa? Resuelve, para cada uno de los laberintos dibujados.



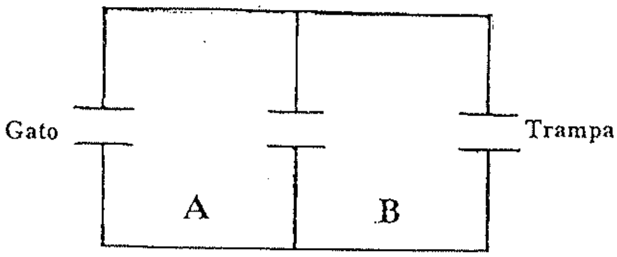


Ratones

A).- Se introducen doce ratones por la entrada del laberinto de la figura, que tiene dos salidas, una en la que hay un gato y otra en la que se encuentra un queso. Si el ratón llega a donde está el queso, se lo come y sale libre, pero si va a parar a la salida donde se encuentra el gato, es comido por éste.

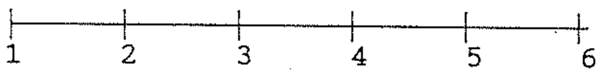


¿Cuántos ratones se salvarán? ¿Cuántos serán comidos por el gato? ¿Y si hay 24 ó 36 ratones? ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se coma el queso? ¿Cuál la de que sea comido por el gato?



B).- Un ratón se mueve entre dos habitaciones A y B. Si sale de A es atrapado por el gato, mientras que si sale de B cae en una trampa, como se ve en el diagrama. Inicialmente parte de la habitación A y su movimiento se realiza de la siguiente forma: de A a B con probabilidad 3/4, de B a A con probabilidad 7/8. Hallar la probabilidad de que: a) lo coja el gato, b) lo coja la trampa.

C).- Un ratón puede estar en 6 posiciones (como se indica en la figura) de forma que si está en la posición i, luego se mueve a las posiciones i+1 o i-1 con probabilidades 2/3 y 1/3 respectivamente, pero si llega a las posiciones 1 o 6 queda atrapado en sendas trampas. En este paseo aleatorio, si el ratón parte de la posición 3 determinar las probabilidades de ser atrapado en las trampas 1 y 6.



Estrategias

D).- Un jugador necesita cinco millones de pesetas para pagar una deuda, pero solo tiene un millón y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma mas rápida posible a su objetivo. Estudiar la estrategia a seguir por el jugador y calcular la probabilidad que tiene de conseguirlo.

PROBLEMAS CON PROBABILIDADES

1) Ir a dos fábricas. Un ingeniero trabaja en dos fábricas A y B. Los ómnibus que lo llevan a las fábricas parten del mismo lugar. A las horas exactas sale el que lo lleva a la fábrica A, y a las horas y cuarto el que lo lleva a la fábrica B. Si sale de su casa sin preocuparse de la hora y toma el primer ómnibus que llega, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a cada una de las fábricas?

2) Nueva sociedad. Un grupo financiero estudia el lanzamiento de una nueva sociedad con una inversión de $ 500.000. De acuerdo a sus expertos, tres casos solamente pueden ocurrir:

- La sociedad se desarrolla rápidamente obteniendo el 30 % del mercado. Se tiene una ganancia de $ 800.000 con una probabilidad del 10 %;
- La sociedad comienza normalmente obteniendo el 10 % del mercado. Se tiene una ganancia de $ 200.000 con una probabilidad del 70 %;
- La sociedad cierra después de una tentativa infructuosa. Los expertos estiman al 20 % la probabilidad de esta eventualidad.

¿ Cuál es la ganancia esperada ?

Observación. La ganancia esperada no corresponde a la ganancia de ninguna de las tres posibilidades. Ella indica solamente la ganancia media que se obtendría con la hipótesis irreal que se podría ejecutar la inversión un número grande de veces. Esta medida permite tomar en cuenta la ganancia de cada posibilidad futura teniendo en cuenta como peso la probabilidad de dicha realización. En otras palabras, la ganancia esperada es la media aritmética (esperanza) de las ganancias de cada posibilidad, ponderadas por su probabilidad respectiva.

3) Oscar y sus dos tías. Oscar tiene dos tías a quienes visita cada viernes por la noche. Cada una de ellas vive sobre la ruta de la línea de ómnibus B, una en dirección sur y la otra en dirección norte. Cada viernes, alrededor de las 7 de la tarde, Oscar camina hacia la parada y toma el primer ómnibus que pasa, en una dirección o en la opuesta. En ambas direcciones la frecuencia es de 10 minutos. Al cabo de algún tiempo, una de las tías llama a Oscar reclamando que sólo había ido una vez, mientra que ha visitado 9 veces a su hermana. ¿Cómo se explica esto?

4) Gracia de un condenado a muerte. En el lejano reino de Juegolandia, a los condenados a muerte se les concedía la gracia de que su vida dependiera de que sacaran una bola blanca de una bolsa que contenía 50 bolas blancas y 50 negras. Pero en cierta ocasión, un reo pidió la gracia de que se le dejara distribuir las bolas de otro modo antes de hacer el sorteo. Tras algunas discusiones, se le concedió la gracia y preparó dos bolsas: en una colocó una sola bola blanca; en otra bolsa colocó 49 blancas y 50 negras. ¿Cuál resultó de este modo la probabilidad de sacar blanca?

5) Azar en el círculo. En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Halle la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.

6) Azar de un disco en una cuadrícula. Se tiene una hoja cuadriculada con cuadrados de 1cm x 1cm. Se lanza sobre ella, al azar, un disco de 1/4 cm de radio. Halle la probabilidad de que el disco cubra un

punto de intersección de la cuadrícula.

7) Un jugador arriesgado. Un jugador necesita cinco millones para pagar una deuda, pero solo tiene un millón y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma más rápida posible a su objetivo. Estudie la estrategia a seguir por el jugador y calcule la probabilidad que tiene de conseguirlo.

8) Azar en una recta. Sobre una línea recta se seleccionan al azar los puntos a y b tales que:

$$-2 \leq b \leq 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq a \leq 3 \ .$$

Halle la probabilidad de que la distancia entre a y b sea mayor que 3.

Definición.– Dados dos números positivos a y b, se definen la media aritmética MA y la media geométrica MG de la siguiente manera :

$$MA = \frac{a+b}{2} \qquad ; \qquad MG = \sqrt{ab} \ .$$

9) (i) Demuestre que :

(a) $MG \leq MA$; (b) $MG = MA \Leftrightarrow a = b$; (c) $x\,(1-x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall\ x \in [0,1]$.

(ii) ¿Cuál es el rectángulo de área máxima que tiene por perímetro p?

(iii) La población de la Argentina está dada en la siguiente tabla:

año	población (en millones de habitantes)
1960	20
1970	23
1980	28
1990	33

(a) Calcule las medias aritmética y geométrica de la población de los años 1960 y 1980. Compare los valores hallados con los que nos brinda la tabla para el año 1970.

(b) Idem (a) para los años 1970 y 1990.

(c) Estime el número de habitantes que tendría la Argentina en el año 2000, utilizando solamente los datos de la tabla.

Observación.– Los resultados obtenidos con la MA y la MG no son muy diferentes. En general, para problemas referentes al crecimiento o decrecimiento de poblaciones la MG da resultados más aproximados a la realidad. Naturalmente que éstos son valores estimados, es decir, aproximados, pues pueden ocurrir fenómenos (catástrofes, gran inmigración o emigración) que los haga variar.

TRABAJOS PRACTICOS Y CASOS.

TRABAJO PRACTICO 1: Estrategias con urnas y bolas.

Una urna contiene α bolas blancas y β bolas negras; se sabe que $\alpha + \beta \geq 3$. Los jugadores A y B juegan un juego con la urna y las bolas. Se consideran dos estrategias:

(I) El jugador A toma al azar una bola de la urna. Si es blanca entonces él gana, en caso contrario pierde;

(II) El jugador A toma al azar una bola y la tira afuera de la urna sin mirarla. El jugador B toma entonces una bola negra. Luego, A toma otra bola de la urna. Si esta segunda bola es blanca entonces A gana. En caso contrario, pierde.

(i) Calcule la probabilidad de ganar que tiene el jugador A en las estrategias I y II.

(ii) ¿ Cuál de las dos estrategias es preferible para el primer jugador A?

TRABAJO PRACTICO 2: El tren y el ómnibus. Un tren llega a una estación en un instante del intervalo (0,T) al azar, parando α minutos. A la misma estación acude un ómnibus al azar, independientemente del tren, en el mismo intervalo de tiempo (0, T) parando β minutos (con $\alpha < \mathrm{T}$ y $\beta < \mathrm{T}$).

(i) Calcule la probabilidad de que el tren llegue antes que el ómnibus;

(ii) Determine la probabilidad de que se encuentren;

(iii) Suponiendo que se encuentren en la estación, determine la probabilidad de que el tren llegue antes que el ómnibus;

(iv) Analice los resultados anteriores dando diferentes valores a α y a β.

TRABAJO PRACTICO 3: El duelo triangular. Tres políticos A, B y C deciden resolver sus diferencias mediante un duelo a pistola bajo las siguientes reglas. Luego de sortear quien dispara en primer, segundo y tercer lugar, los tres se ubican en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero. Se conviene que cada uno disparará un tiro por turno, continuando en el orden sorteado hasta que dos de ellos queden fuera de combate. Cada uno puede disparar en la dirección que desee. Además, conocen que las precisiones de tiro de A, B y C son de 100%, 80% y 50% respectivamente.

Suponiendo que cada uno adopta la estrategia más favorable y que nadie muere a causa de una bala perdida que no había sido disparada contra él,

(i) ¿Quién tiene más chances de sobrevivir?

(ii) ¿Cuáles son las probabilidades de cada uno? Demuestre que se tiene que:

$$\mathrm{P_A} = \frac{3}{10} \;; \qquad \mathrm{P_B} = \frac{8}{45} \;; \qquad \mathrm{P_C} = \frac{47}{90} \,.$$

(iii) Suponiendo que C no dispara al aire, calcule las probabilidades de cada uno de sobrevivir.

(iv) Si la precisión de C es del x% ¿Cuál es el mínimo valor de x que garantice la victoria a C?

Observación: dado que A y B son los mejores tiradores, ambos tratarán de eliminarsese el uno contra el otro, luego, la mejor estrategia para C es disparar al aire hasta uno A ó B caiga. De este modo, C tiene el primer disparo contra el sobreviviente con una chance del 50 % de vencer.

TRABAJO PRACTICO 4. La compañía X está tratando de decidir sobre la compra de una máquina nueva, la cual se utilizará exclusivamente en la fabricación de cierto producto. Actualmente existen dos máquinas que pueden ser satisfactorias para el fin perseguido.

Si se compra la máquina A, se invertirán \$ 10.000 y se ahorrará \$ 1 por unidad, en relación con el proceso de producción que se utiliza en la actualidad. Si se compra la máquina B, se invertirán \$60.000 y se ahorrarán \$3 por unidad producida. Ambas máquinas tienen una vida útil de 5 años. Las condiciones futuras del mercado son algo inciertas y se han resumido en las siguientes estimaciones sobre la probabilidad correspondiente a un volumen total de ventas dado, para los próximos 5 años:

Ventas Totales (en unidades)		*Probabilidad*
10000	....	0,10
20000	....	0,30
30000	....	0,40
40000	....	0,20

Sin tomar en cuenta el problema de la actualización financiera de los ingresos futuros, ¿cuál es la máquina que debería comprar la empresa X? ¿Cuáles son los ahorros esperados correspondientes a cada una de esas acciones alternativas?

CASO 1: Producción óptima de productos por semana. Se supone que la demanda D, por semana, de cierto producto es una variable aleatoria con determinada distribución de probabilidades, $P(D = n) = p(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Supóngase que el costo para el proveedor es \$ C_1 por artículo, mientras que él lo vende a \$ C_2. Cualquier artículo que no se venda al término de la semana, debe almacenarse con un costo de \$ C_3 por artículo. Si el fabricante decide producir N artículos al comienzo de la semana, entonces:

(i) ¿Cuál es su utilidad esperada por semana?

(ii) ¿Para qué valor de N es máxima la ganancia esperada? Para realizar este estudio se analizará el siguiente caso: Se supone además que para la demanda aleatoria D es apropiada la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(D = n) = \frac{1}{5}, \; n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(a) Entonces calcule, en este caso, la expresión de la utilidad esperada por semana.

(b) Calcule el N óptimo para el caso concreto de $C_1 = 3$, $C_2 = 9$, $C_3 = 1$.

(c) Pruebe, en general, que el valor N óptimo se obtiene en el caso en que $N < 5$ y que los parámetros C_1, C_2 y C_3 satisfagan la siguiente desigualdad:

$$C_2 < 10\, C_1 + 9\, C_3 .$$

Más aún, en dicho caso el N óptimo se obtiene como la parte entera o la parte entera más uno del valor real x_o dado por la expresión:

$$x_o = \frac{1}{2} + \frac{5\,(C_2 - C_1)}{C_2 + C_3}.$$

CASO 2: Postres preparados. Un fabricante de postres planifica el lanzamiento de un nuevo tipo de plan. Le ofrecen dos posibilidades:

- venderlo a un precio elevado para hacer un producto de prestigio;
- venderlo a un precio accesible (barato) para realizar una venta masiva y obtener una importante ganancia por cantidad.

Su competidor principal tiene también un proyecto de este tipo, pero al presente no se conoce todavía cuál será su decisión. Tres posibilidades del futuro pueden ser consideradas, y sus consecuencias están descriptas en el cuadro 1 siguiente:

Unidad: $ 10.000	precio bajo ($)	precio elevado ($)	probabilidad del evento
No competencia (NC)	20	− 2	0,50
Competencia con buena reacción del mercado (CBR)	5	25	0,20
Competencia con débil reacción del mercado (CDR)	− 10	10	0,30

(i) Represente el árbol de decisión correspondiente al problema del fabricante;

(ii) ¿ Cuál es la mejor decisión a tomar, y cuánto es su esperanza de ganancia (o ganancia esperada)?;

(iii) ¿Qué permite conocer con certeza, cuál de las tres posibilidades del futuro ocurrirá? En otras palabras, cuál es el monto a pagar por la encuesta que nos permita pasar de información imperfecta (dada por el cuadro anterior) a información perfecta.

(iv) Un asesor externo, de quién se conoce la seguridad de sus estudios, propone sus servicios para prever la reacción de la competencia y del mercado; las previsiones del experto están dadas en el siguiente cuadro 2:

RR: Reacción real

RP: Reacción prevista

RR \ RP	NC	CBR	CDR
NC	0,80	0,10	0,10
CBR	0,10	0,70	0,20
CDR	0,10	0,30	0,60

Observación. Cuando hay competencia y se tiene una débil reación del mercado (caso CDR), el experto prevé:

NC en el 10 % de los casos (probabilidad 0,10)

CBR en el 30 % de los casos (probabilidad 0,30)

CDR en el 60 % de los casos (probabilidad 0,60).

Si el análisis del experto cuesta $ 15.000 ¿ Conviene contratarlo?

CASO 3: Curso de idioma. Una empresa lanza un curso de idioma por CD (discos compactos). La demanda puede ser de 1000, 2000, 3000, 4000 ó 5000 unidades. La creación del curso costó \$ 100.000. El juego de CD cuesta \$ 200 y se vende a \$ 400. Como todos los CD a producir deben ser realizados en el mismo momento, la sociedad debe decidir el número de cursos a producir. Por razones de prestigio, los cursos que no se pudieron vender, no pueden venderse en liquidación; pero los CD se borran y se liquidan a \$ 100 el juego.

I) Formulación del problema. El problema puede ser representado por una matriz, en la cual cada fila corresponde a una decisión de la empresa, y cada columna corresponde a una posibilidad futura de demanda. De acuerdo a los datos anteriores coloque en la intersección de cada fila y cada columna el beneficio (o pérdida) correspondiente (en unidades de \$ 1.000 para facilitar las operaciones).

P \ D	1000	2000	3000	4000	5000
1000					
2000					
3000					
4000					
5000					

D: Demanda de CD ; P: Producción de CD

II) A continuación se estudiarán varios criterios que permitirán elegir la solución adecuada:

(a) El criterio maximin. Su interés principal, además de su simplicidad, reside en su óptica conservadora: se elige la estrategia para la cual la ganancia mínima es la más grande posible. Este criterio tiene por objetivo principal dar una garantía: "se va a ganar al menos tanto", o "se va a perder a lo sumo tanto".

Sea $g(p_i, d_j)$ la ganancia obtenida para un nivel de producción de p_i unidades (i=1,...,5) y una demanda de d_j unidades (j = 1, ..., 5). Entonces

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j)$$

será la ganancia más pequeña posible para la producción p_i dada (i = 1, ..., 5).

La estrategia maximin es la que maximiza estos mínimos, es decir halla el nivel de producción p_i de manera tal que se tenga

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Min}}\ g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio maximin, es decir ¿Cuál es el nivel de producción p_i (i = 1, ..., 5) a elegir y la ganancia a obtener?

(b) El criterio maximax. Este criterio es, por el contrario, extremadamente optimista. Se elige la estrategia que aporta la mayor ganancia, en el mejor de los casos posibles. La estrategia p_i a elegir es la dada por

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \underset{j}{\mathrm{Max}}\ g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Max}}\ g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio maximax.

Observación: Este criterio es de un uso poco frecuente.

(c) Criterio de Laplace. Se utiliza cuando la probabilidad de cada posibilidad futura parece ser la misma (constante) o que se ignoran sus probalidades. Este criterio consiste en elegir la estrategia que maximiza la ganancia esperada, dando la misma probabilidad a cada evento futuro. La estrategia p_i (i=1, ..., 5) a elegir es la dada por

$$G(p_i) = \underset{k}{\mathrm{Max}}\ G(p_k)$$

donde $G(p_i)$ es la ganancia esperada de la estrategia p_i (con n posibilidades futuras con probabilidad 1/n cada una; en nuestro caso se tiene que n = 5), es decir:

$$G(p_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\, g(p_i, d_j)\ .$$

Calcule la estrategia del criterio de Laplace.

(d) Criterio del minimax (conocido también como del lamento o costo de oportunidad mínimo, es decir que sea mínimo lo que se deja de ganar).

Se supone que se conoce a priori la demanda. Se busca hallar la estrategia que permita obtener la mejor ganancia para esta demanda. En la columna correspondiente a esta demanda se reemplaza cada ganancia por la diferencia entre dicha ganancia y la ganancia correspondiente a la producción optimal para la demanda. Se obtiene de esta manera una tabla identificando, para la demanda dada, el lamento o lo que se deja de ganar, correspondiente a una producción no óptima para esta demanda. Esta modificación de la tabla se realiza para cada valor posible de la demanda. Se elige la estrategia que minimiza el lamento máximo.

Calcule la estrategia del criterio minimax.

Observación: Ningún criterio es en sí mismo, mejor que otro. Todo depende de la situación en la que se encuentre la empresa. El sólo criterio que se puede, más o menos, eliminar es el maximax.

III) Arboles de decisión.

La empresa que lo edita tiene 6 posibilidades de acción:

- no lanzar el producto (nunca debe olvidarse esta posibilidad nula);
- producir 1.000 juegos de CD;
- producir 2.000 juegos de CD;

- producir 3.000 juegos de CD;
- producir 4.000 juegos de CD;
- producir 5.000 juegos de CD.

Se distinguirán 5 estados posibles de demanda: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 juegos de CD.

Se supone que se ha realizado un estudio del mercado a fin de predecir mejor la demanda. La encuesta ha producido los resultados siguientes:

Demanda	Probabilidad
1.000	0,10
2.000	0,30
3.000	0,40
4.000	0,15
5.000	0,05

(i) Represente el problema bajo la forma de un árbol de decisión y distinga las 26 situaciones finales posibles.

(ii) Calcule, para cada decisión de producción, la ganancia esperada:

Producción	Ganancia Esperada
1.000	
2.000	
3.000	
4.000	
5.000	

(iii) Reduzca el árbol reemplazando las ramas relativas a las diversas posibilidades de demanda por la ganancia esperada que le corresponde. Por lo tanto, el problema fue llevado a una elección entre las 6 acciones posibles, cada una de las cuales tiene una ganancia esperada, con lo cual se puede eligir la alternativa cuya ganancia esperada sea la más elevada. ¿Cuál es dicha alternativa?

(iv) Valor de la información.

En general, es muy interesante poder determinar cuánto más se podría obtener de ganancia teniendo una mejor información sobre el futuro; de allí la necesidad de información adicional.

Se supone que se puede hacer una cierta publicidad del curso de idioma y que se lo puede vender por subscripción, con lo cual se podrá producir conociendo la demanda por anticipado. Por lo tanto, ¿ cuánto se podría invertir en publicidad y en organización para que esta estrategia sea rentable?

Se supone, para simplificar, que esto no modifica la demanda, pero permite solamente predecirla. Bajo subscripción, se producirá exactamente la demanda.

Calcule la ganancia esperada si se produce de acuerdo a la demanda obtenida (es el cálculo de la ganancia esperada con información perfecta).

Observación. Por ende, considerando sólo la tabla de probabilidades para cada demanda se pudo calcular anteriormente la ganancia esperada máxima (dada por \$ 350.000 para una producción de 3.000 CD). Por otro lado, con información perfecta, se pudo obtener una ganancia esperada de \$ 450.000. Por lo tanto, la información extra para conocer la demanda exacta vale \$ 100.000, es decir, es el monto máximo que se podrá pagar para el conjunto de gastos relativos a la venta por subscripción.

Revista Siglo XXI, 3 Nº4 (1994), 23-25.

Un modelo simple de fidelidad de marca y sus consecuencias

por
Domingo Alberto Tarzia
Investigador Principal del CONICET
Director Depto. Matemática
U.A. - F.Ç.E.

"La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza..."

Los analistas de mercado se interesan en la preferencia de un cliente hacia una determinada marca, y en el efecto que tiene esa fidelidad o lealtad en la participación de cada marca en el mercado de un determinado producto.

En este trabajo se presenta un modelo simple de lealtad a la marca que corresponde a un producto dado P para el cual existen sólo dos marcas «M_1» y «M_2». Se realizan las siguientes suposiciones (una probabilidad del 85% se expresará matemáticamente a través del número real 0,85%):

(S1) Un cliente que compra la marca «M_1» en un período determinado t tiene una probabilidad a (con $0<a<1$) de comprar nuevamente «M_1» y una probabilidad 1 - a de comprar la marca «M_2» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente t+1;

(S2) Un cliente que compra la marca «M_2» en un período determinado t tiene una probabilidad b (con $0<b<1$) de comprar nuevamente «M_2» y una probabilidad 1 - b de comprar la marca «M_1» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente t+1;

(S3) Las probabilidades dadas anteriormente en (S1) y en (S2) no varían de período en período;

(S4) El comportamiento del comprador de una marca depende sólo de la compra inmediata anterior y es estadísticamente independiente de las otras compras anteriores;

(S5) En un determinado momento t (condición inicial del presente estudio) la marca «M_1» tiene una porción α (con $0 \leq \alpha \leq 1$) del mercado del producto P (en el sentido de las probabilidades) y por ende la marca «M_2» tiene la porción restante $1-\alpha$ del mercado del producto P.

Observación 1: De las hipótesis (S1) y (S2) se desprende que los clientes de la marca «M_2» son más leales que los de la marca «M_1» si y sólo si el porcentaje de los que compran la marca «M_2» en el período t y vuelven a comprar la marca «M_2» en el siguiente período t + 1 es mayor que el porcentaje de los que compran la marca «M_1» en el período t y vuelven a comprar la marca «M_1» en el siguiente período t + 1, lo cual se expresa matemáticamente por la siguiente desigualdad: $b > a$.

Esta propiedad es también válida recíprocamente, es decir, que los clientes de la marca «M_1» son más leales que los de la marca «M_2» si y sólo si $a > b$.

Las dos hipótesis (S1) y (S2) se pueden resumir en la siguiente tabla:

Marca comprada en el período t	Marca comprada en el período t + 1	
	Marca «M_1»	Marca «M_2»
Marca «M_1»	a	1 - a
Marca «M_2»	1 - b	b

Luego de presentar el modelo y sus hipótesis, será de mucho interés que se puedan responder las siguientes preguntas:

(1) ¿Qué porcentaje del mercado del producto P tendrán la marca «M_1» y la marca «M_2» en los períodos de tiempo t + 1, t + 2, t + 3, etc.?

(2) ¿El mercado del producto P tiende a

estabilizarse asintóticamente (es decir, cuándo se deja evolucionar el sistema)?

(3) Si la respuesta a (2) es afirmativa, ¿cómo será la convergencia: lenta o rápida?

(4) ¿Las respuestas a las preguntas anteriores (1) a (3) dependerán (y de qué forma) o serán independientes de la posición inicial del mercado del producto P?

Observación 2: Si el mercado del producto P se estabiliza en la posición de equilibrio se tendrá que el número de clientes que dejan la marca «M1» por la marca «M2» quedará balanceado con aquellos que cambian de la marca «M2» hacia la marca «M1».

Observación 3: La respuesta a las preguntas anteriores es de suma importancia para las empresas que producen las dos marcas «M_1» y «M_2» del producto P, a pesar de que en el modelo se supone que las empresas no reaccionan ante cambios del mercado (lo cual obviamente, no es cierto en la realidad). Pero, el presente modelo le brindará a las empresas la necesidad de hacer algo ante un cambio de lealtad a su marca, pues si no reaccionan (no realizan nada en el tiempo) sabrán lo que les sucederá, es decir el porcentaje del mercado que perderán!.

Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema: Si x_n representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M_1» al instante $t_n = t+n$ (por lo tanto, $y_n=1-x_n$ representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M_2» al instante t_n) entonces se tienen los siguientes resultados:

R_1) Se tiene la siguiente relación que da la variación de x_n+1 (porcentaje del mercado que tiene la marca «M_1» al instante t_n+1) en función de x_n:

(1) $\quad x_{n+1}=1-b+(a+b-1)\,x_n \;,\; \forall\, n \geq 1,$

con la condición inicial $x_1 = a$;

R2) El porcentaje x_{n+1} de la marca «M_1» del mercado del producto P al instante t_{n+1} viene dado en función de los coeficientes α, a y b de la siguiente manera:

(2)
$$x_{n+1}=(1-b)\,\frac{1-(a+b-1)^n}{2-(a+b)}+(a+b-1)^n\,\alpha \;;$$

R3) El porcentaje x_n de la marca «M_1» del mercado del producto P al instante t_n converge al número $x \in (0,1)$ cuando $n\to+\infty$, el cual no depende del coeficiente α y viene dado en función de los coeficientes a y b de la siguiente manera:

(3)
$$x=\lim_{n\to+\infty} x_n=\frac{1-b}{2-a-b}=\frac{1}{1+\frac{1-a}{1-b}}\,.$$

Demostración: La prueba de estos resultados matemáticos (que no se explicitarán aquí) surgen de la utilización de la teoría de árboles de probabilidades, serie geométrica y su suma, principio de inducción matemática, y, sucesión y su límite.

Observación 4: La relación (2) da la expresión de la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ en función de los parámetros a, b y α. Si se tiene el caso particular a+b-1=0 (b=1-a), entonces se deduce que:

(4)
$$x_{n+1}=\frac{1-b}{2-(a+b)}=a \;,\quad \forall\, n\geq 1,$$

que no depende del coeficiente α y del número de períodos n. Este hecho es lógico pues al ser a+b=1 el mercado está dividido en dos porciones que no varían: una porción del mercado con porcentaje «a» que compra la marca «M_1» y la otra porción del mercado con porcentaje «1-a» que compra la marca «M_2».

Observación 5: Si se tiene el caso límite en que a=b=1 (es decir, los clientes de ambas marcas son leales al 100%) entonces se deduce que:

(5)
$$x_{n+1}=x_n \;,\; y_{n+1}=y_n \;,\; \forall\, n\geq 1,$$

que indica que el mercado no varía y permanece constante en la condición inicial, es decir $x_n = \alpha$, $y_n=1-\alpha, \forall\, n \geq 1$.

Observación 6: Si se tiene el caso particular a=b (ambas marcas tienen la misma fidelidad) entonces se deduce que x=0.50, es decir que las dos marcas «M_1» y «M_2» compartirán el mercado en partes iguales (el 50% para cada una de las dos marcas).

Observación 7: Si se supone que la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ tiene límite x, entonces éste puede calcularse de una manera más simple a través de la relación (1) pues al pasar al límite cuando $n\to+\infty$ se tiene que

(6)
$$x=1-b+(a+b-1)\,x$$

de donde surge (3), pero tiene el inconveniente de no poder dar una expresión de x_n en función de n y de los otros parámetros del sistema: a, b y α.

Consecuencias del modelo:

1) El mercado siempre se estabiliza y la convergencia es, en general, rápida (será tanto más rápida como más pequeño sea el número $|a+b-1|$);

2) El resultado final, al estabilizarse el mercado, no depende del coeficiente α que indica cómo estaba compuesto inicialmente el mercado del producto P con las dos marcas «M_1» y «M_2»;

3) Si a > b (la fidelidad de la marca «M_1» es mayor que la de «M_2») entonces el mercado evolucionará al límite x, dado por la fórmula (3), siendo x > 0.50;

4) Si a=b=1 (ambas marcas tienen el 100% de fidelidad) entonces el mercado no evoluciona y permanece siempre constante con $x_n=\alpha$, $y_n=1-\alpha, \forall\, n\geq 1$;

5) Si a=b (ambas marcas tiene igual fidelidad) entonces el mercado evolucionará al límte x=0.50 que indica que cada marca tendrá el 50% del mercado.

6) Si a+b=1 (b=1-a) entonces el mercado sólo evoluciona en el primer período al pasar de $x_1=\alpha$ a $x_2=a$ y luego

permanece siempre constante con $x_{n+1}=a$, $y_{n+1}= 1-a=b, \forall\ n\geq 1$;

Observación 8: De las consecuencias 2 y 3 anteriores se deduce que la marca que tenga mayor fidelidad obtendrá más del 50% del mercado independientemente de lo que poseía inicialmente.

Ejemplo: Para tener un ejemplo de cómo varía el porcentaje x_n de la marca «M_1» del mercado del producto P (y por ende, el porcentaje $y_n=1-x_n$ de la marca «M_2» del mercado del producto P) se considerará el siguiente caso:

α = 0,50 (el mercado está dividido en partes iguales entre las dos marcas)
a = 0,80 (un 80% de los clientes de la marca «M_1» vuelven a comprar «M_1»)
b = 0,50 (un 50% de los clientes de la marca «M_2» vuelven a comprar «M_2»).

Entonces, aplicando la fórmula (2), para distintos períodos de tiempo, se deduce que:

$x_1=0{,}50$, $x_2=0{,}65$,
$x_3=0{,}695$, $x_4=0{,}7085$,
$x_5=0{,}7126$, $x_6=0{,}7138$,.......
$x=\frac{5}{7} \simeq 0{,}7143$

(la marca «M_1» poseerá el 71,43% del mercado), con lo cual a partir del tercer período (n=3) el mercado se encuentra cerca del valor de estabilización con un error menor al 1%, al ser $x-x_4 \simeq 0{,}0058$.

Al final del trabajo, se presenta una tabla con numerosos casos y en cada uno de ellos se explicitan: $\alpha=x_1$, a, b, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 y $x= \lim_{n\to+\infty} x_n$

El ejemplo anterior se presenta como el primer caso.

Conclusión final:

La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza (si no se efectúa ningún cambio o ninguna reacción por parte de las empresas que producen las marcas «M_1» y «M_2»). Un estudio análogo para n marcas daría conclusiones más realistas, pero que no cambian la filosofía de lo realizado.

Observaciones y consejos finales:

1) El liderazgo en un mercado puede durar poco si ingresa al mercado un nuevo competidor con mayor fidelidad de marca;

2) Debemos preguntarnos: ¿Cuál es la rotación de nuestra cartera de clientes?

3) Tal vez debamos preocuparnos menos por aumentar nuestra participación en el mercado y más por aumentar la fidelidad de nuestros clientes actuales. S. XXI

x1= alpha	a	b	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x=lim xn
0.5	0.8	0.5	0.65	0.695	0.7085	0.71255	0.713765	0.71413	0.714239	0.714286
0.5	0.2	0.5	0.35	0.395	0.3815	0.38555	0.384335	0.3847	0.38459	0.384615
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.2	0.8	0.5	0.56	0.668	0.7004	0.71012	0.713036	0.713911	0.714173	0.714286
0.1	0.8	0.5	0.53	0.659	0.6977	0.70931	0.712793	0.713838	0.714151	0.714286
0.5	0.5	0.8	0.35	0.305	0.2915	0.28745	0.286235	0.285871	0.285761	0.285714
0.5	0.1	0.9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.5	0.3	0.38	0.348	0.3608	0.35568	0.357728	0.356909	0.357143
0.4	0.9	0.9	0.42	0.436	0.4488	0.45904	0.467232	0.473786	0.479028	0.5
0.3	0.9	0.9	0.34	0.372	0.3976	0.41808	0.434464	0.447571	0.458057	0.5
0.2	0.9	0.9	0.26	0.308	0.3464	0.37712	0.401696	0.421357	0.437085	0.5
0.01	0.9	0.9	0.108	0.1864	0.24912	0.299296	0.339437	0.371549	0.39724	0.5

BIBLIOGRAFÍA

- [CLGGLM] M.C. DE LA CRUZ LOPEZ – C. GONZALEZ GARCIA – J. LLORENTE MEDRANO, "Actividades sobre el azar y la probabilidad", Narcea – MEC, Madrid (1993).
- [Kr] S.G. KRANTZ, "Techniques of problem solving", American Math. Soc., Providence (1997).
- [Me] P.L. MEYER, 'Probabilidad y aplicaciones estadísticas", Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (1992).
- [Mi] R. MIATELLO, "Actividades investigativas en la enseñanza", Revista de Educación Matemática, 12 (1997), 19 – 33.
- [Sp] M.R. SPIEGEL, "Estadística", McGraw Hill, Madrid (1992).
- [SpBo] W.A. SPURR – C.H. BONINI, "Toma de decisiones en administración mediante métodos estadísticos", Editorial Limusa, Mexico (1980).
- [Ta] D.A. TARZIA, "Un simple modelo de fidelidad de marca y sus consecuencias", Revista Siglo XXI, 3 No. 4 (1994), 23 – 25.
- [Th] H. THIRIEZ, "Initiation au calcul économique", Dunod, Paris (1987).