MASTER EN CIENCIAS EMPRESARIALES

PROBABILIDADES, ESTADÍSTICA Y TOMA DE DECISIONES (Parte II)

Domingo A. TARZIA

Rosario (Argentina),
Marzo 2003

Facultad de Ciencias Empresariales
UNIVERSIDAD AUSTRAL

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA.
TEL.: (0341) 481-4990 Int. 137 ; FAX: (0341) 481-0505
E-Mail: Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

MAESTRÍA EN CIENCIAS EMPRESARIALES

CURSO

PROBABILIDADES, ESTADÍSTICA

Y TOMA DE DECISIONES

PARTE II

"TEORÍA DE LA DECISIÓN: ÁRBOLES, ESTRATEGIAS Y CRITERIOS DE DECISIÓN"

Domingo Alberto TARZIA

Rosario (ARGENTINA)

Marzo 2003

RESUMEN.

Se presentan las definiciones y propiedades básicas de la teoría de probabilidades a los efectos de introducir el pensamiento estadístico-matemático a través de las tablas de contingencia, diagramas de árboles abiertos y cerrados (infinitos) y criterios para la toma de decisiones en problemas no determinísticos.

NOTA.

El presente texto ha servido de apoyo para desarrollar actividades en el tema "Teoría de la decisión: árboles, estrategias y criterios de decisión" como parte del curso "Probabilidades, Estadística y Toma de Decisiones" de la Maestría en Ciencias Empresariales dictado en la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral (sede Rosario).

En el presente módulo se presentan:

- un resumen de las definiciones y propiedades básicas en la teoría de la probabilidad [Li, Me, Ne, Sp, SpBo];
- actividades sobre probabilidad condicionada y tablas de contingencia (diagramas de árbol) y probabilidad dinámica [DGL];
- problemas, criterios determinísticos y no determinísticos para la toma de decisiones [DaMc, DGL, EGSMW, Gi, Gr, Kr, MaSo, Mi, Ta, Th];
- un modelo de fidelidad de marca para marketing y sus consecuencias matemáticas [Ta1];
- teoría de la decisión [DFS, LMP, MaOl, Ne, Rh, Th];
- las referencias básicas de la bibliografía utilizada.

INDICE

I. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Ejemplos de experimentos no determinísticos

Se tratará de entender lo que se considera un **experimento "aleatorio" o "no determínistico"**. (Más precisamente se darán ejemplos de fenómenos para los cuales los modelos no determínisticos son apropiados. Esta es una distinción que el lector deberá mantener presente. Así se refieren frecuentemente a experimentos no determínisticos o aleatorios, cuando de hecho se está hablando de un modelo no determínistico para un experimento). No se pretende dar una definición precisa de diccionario para este concepto. En su lugar, se darán numerosos ejemplos que la ilustran.

E_1: Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.
E_2: Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.
E_3: Se lanza una moneda cuatro veces y se observa la sucesión de caras y sellos obtenidos.
E_4: Se fabrica una lámpara eléctrica. Luego se prueba su duración conectándola en un portalámparas y se cuenta el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.
E_5: Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.
E_6: Se lanza un proyectil. Después de un tiempo determinado t, se anotan las tres componentes de la velocidad v_x, v_y, v_z.
E_7: Un termógrafo marca la temperatura continuamente en un período de 24 horas. En un sitio y en una fecha señalados, "leer" dicho termógrafo.

¿Qué tienen en común los experimentos anteriores? Los siguientes aspectos son importantes para la descripción de un ***experimento aleatorio***.

(a) Es posible repetir cada experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente la condiciones.
(b) Aunque en general no se puede indicar cuál será un resultado *particular*, se puede describir el conjunto de *todos* los resultados *posibles* del experimento.
(c) A medida que el experimento se repite los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, como el experimento se repite un *gran* número de veces, aparece un patrón definido o regularidad. Esta regularidad hace posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual se analiza el experimento.

El espacio muestral

Definición. Con cada experimento ϵ del tipo que se ha considerado, se define el ***espacio muestral*** como el conjunto de *todos* los resultados posibles de ϵ. Usualmente se designa este conjunto como S. (En nuestro contexto, S representa el conjunto universal descripto anteriormente).

Se considerará cada uno de los experimentos anteriores y se describirá el espacio muestral de cada uno. El espacio muestral S_i se referirá al experimento E_i.

- $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- S_3 = {todas las sucesiones posibles de la forma a_1, a_2, a_3, a_4 donde a_i = C ó S según si aparece cara o ceca en el i-ésimo lanzamiento}.
- $S_4 = \{t \mid t \geq 0\}$.
- $S_5 = \{10, 11, 12, ...\}$.
- $S_6 = \{(v_x, v_y, v_z) / v_x, v_y, v_z$ son números reales$\}$.
- S_7 = Este espacio muestral es el más importante de los que aquí se considera. Prácticamente se debe suponer que la temperatura en cierta localidad específica nunca puede subir o bajar con relación a ciertos valores, digamos M y m. Fuera de esta restricción, se debe admitir la posibilidad de que aparezca cualquier gráfica con determinadas carácterísticas. Es posible que ésta no tenga saltos (esto es, representará una función continua). Además, la gráfica tendrá ciertas características de suavidad que pueden resumirse en forma matemática al decir que la gráfica representa una función diferenciable. Así, finalmente se puede enunciar que el espacio muestral es

$\{f \mid f$ es una función diferenciable, que satisface $m \leq f(t) \leq M$, para todo tiempo $t\}$.

Será importante analizar de nuevo el ***número*** de resultados en un espacio muestral. Surgen tres posibilidades: el espacio muestral puede ser finito, infinito numerable, o infinito no numerable. Refiriéndose a los ejemplos anteriores, notemos que S_1, S_2 y S_3 son finitos, S_5 es infinito numerable y S_4 , S_6 y S_7 son infinitos no numerables.

Eventos. Un evento A (respecto a un espacio muestral particular S asociado con un experimento ϵ) es un conjunto de resultados posibles. En la terminología de conjuntos, ***un evento es un subconjunto del espacio muestral S***. En vista de lo expuesto previamente, esto significa que S es también un evento y también lo es el conjunto vacío $\emptyset$. Cualquier resultado individual también puede considerarse como un evento.

Los siguientes son ejemplos de eventos. Otra vez se referirá a los experimentos antes anotados: A_i se referirá a un evento asociado con el experimento E_i :

- A_1: Un número par ocurre; esto es, $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
- A_2: {2}; es decir, ocurren dos caras.
- A_3: {CCCC, CCCS, CCSC, CSCC, SCCC}; es decir, salen más caras (C) que cecas (S).
- A_4: $\{t \mid t < 3\}$; es decir, la lámpara se quema en menos de tres horas.

Cuando el espacio muestral S es finito o infinito numerable, *todo* subconjunto se puede considerar como un evento. Sin embargo, si S es infinito no numerable, aparece una dificultad teórica. Resulta que no cualquier subconjunto concebible se puede considerar como un evento. Por razones que escapan al nivel de esta presentación, ciertos subconjuntos "no admisibles" deben ser excluidos. Por fortuna, tales conjuntos no admisibles en realidad no aparecen en las aplicaciones y, por tanto, no interesarán aquí. En lo que sigue se supondrá tácitamente que cada vez

que se mencione un evento será de la clase que está permitido considerar. Se pueden usar ahora los diversos métodos para combinar conjuntos (es decir, eventos) y obtener los nuevos conjuntos (es decir, eventos) que se presentó con anterioridad:
(a) Si A y B son eventos, $A \cup B$ es el evento que ocurre si y sólo si A ó B (o ambos) ocurren;
(b) Si A y B son eventos, $A \cap B$ es el evento que ocurre si y sólo si A y B ocurren;
(c) Si A es un evento, A^c es el evento que ocurre si y sólo si A *no* ocurre;
(d) Si $A_1, ..., A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre;
(e) Si $A_1, ..., A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\cap_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos A_i ocurren simultáneamente.
(f) Si $A_1, ..., A_n, ...$ es cualquier colección finita (numerable) de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre.
(g) Si $A_1, ..., A_n, ...$ es cualquier colección infinita (numerable) de eventos, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos A_i ocurren simultáneamente.
(h) Supóngase que S representa el espacio muestral asociado con un experimento ϵ y realizamos ϵ dos veces. Entonces S x S se puede utilizar para representar todos los resultados de esas dos repeticiones. Es decir, $(s_1, s_2) \in S \times S$ significa que s_1 resultó cuando se realizó ϵ la primera vez y s_2 cuando se realizó ϵ la segunda vez.
(i) Evidentemente, el ejemplo h se puede generalizar. Se considera n repeticiones de un experimento ϵ cuyo espacio muestral es S. Entonces

$$S \times S \times ... \times S = \{(s_1, s_2, ..., s_n) \mid s_i \in S, i = 1, ..., n\}$$

representa el conjunto de todos los resultados posibles cuando ϵ se realiza n veces. En cierto sentido, S x S x ... x S es un espacio muestral en sí mismo, o sea el espacio muestral asociado con n repeticiones de ϵ.

Eventos mutuamente excluyentes.
Definición. Se dice que dos eventos, A y B son ***mutuamente excluyentes*** si no pueden ocurrir juntos. Se expresa esto escribiendo $A \cap B = \emptyset$; es decir, la intersección de A y B es el conjunto vacío.

Frecuencia Relativa. Se supone que se repite n veces el experimento ϵ, y sean A y B dos eventos asociados con ϵ. Sean n_A y n_B el número respectivo de veces que el evento A y el evento B ocurrieron en las n repeticiones.
Definición. Se llama ***frecuencia relativa* del evento A** en las n repeticiones de ϵ al número dado por $f_A = n_A/n$.

La frecuencia relativa f_A tiene las siguientes propiedades importantes, que son verificables fácilmente:
1) $0 \leq f_A \leq 1$.
2) $f_A = 1$ si y sólo si A ocurre cada vez en las n repeticiones.
3) $f_A = 0$ si y sólo si A no ocurre en las n repeticiones.

4) Si A y B son dos eventos que se excluyen mutuamente y si $f_{A\cup B}$ es la frecuencia relativa sociada al evento $A \cup B$, entonces $f_{A\cup B} = f_A + f_B$.
5) f_A, basada en las n repeticiones del experimento y considerada para una función de n, "converge" en cierto sentido probabilístico a P(A) (probabilidad del evento A) cuando $n \to +\infty$.

Probabilidad de un evento.
Definición. Sea ϵ un experimento y S un espacio muestral asociado con ϵ. Con cada evento A se asocia un número real, designado con P(A) y llamado *probabilidad de* A, el cual satisface las siguientes propiedades:
1) $0 \leq P(A) \leq 1$.
2) $P(S) = 1$.
3) Si A y B son dos eventos que se excluyen mutuamente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4) Si $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ son eventos que se excluyen mutuamente dos a dos, entonces

$$P(\cup_{i=1}^{\infty}) = P(A_1) + P(A_2) + \ ...\ + P(A_n) + \ ...\ = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$$

Teorema. (i) Si $\emptyset$ es el conjunto vacío, entonces $P(\emptyset) = 0$.
(ii) Si A^c es el evento complementario de A, entonces $P(A) = 1 - P(A^c)$
(iii) Si A y B son eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(iv) Si A, B, y C son tres eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(v) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

II. PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Probabilidad condicional. Sean A y B dos eventos asociados con un experimento ϵ. Se indica con P(B/A) la ***probabilidad condicional del evento B, dado que A ha ocurrido***. Cada vez que se calcula P(B/A), esencialmente se está calculando P(B) respecto al espacio muestral reducido A, en vez de espacio muestral original S. Cuando se calcula P(B) se pregunta qué tan probable es que se esté en B, sabiendo que se debe estar en S, y cuando se evalua P(B/A) se pregunta qué tan probable es que se esté en B, sabiendo que se debe estar en A (es decir, el espacio muestral se ha reducido de S a A.).

Definición. Se define

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

siempre que sea $P(A) > 0$.

Definición. Se dice que los eventos B_1, B_2, ..., B_k representan una partición del espacio muestral S si:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$; b) $\cup_{i=1}^{k} B_i = S$; c) $P(B_i) > 0$, $\forall$ i=1, ..., k.

En otras palabras, cuando se efectúa el exprimento ϵ, ocurre uno y sólo uno de los eventos B_i. Sea A algún evento respecto a S y sea B_1, B_2, ..., B_k una partición de S, con lo cual se puede escribir:

$$A = \cup_{i=1}^{k} (A \cap B_i) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup .... \cup (A \cap B_k)$$

y por ende, se tiene:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$$

Sin embargo, cada término $P(A \cap B_i)$ se puede expresar como $P(A/B_i)\, P(B_i)$ y, por lo tanto, se obtiene el llamado ***Teorema de la probabilidad total***:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)\, P(B_i) = P(A/B_1)\, P(B_1) + P(A/B_2)\, P(B_2) + ... + P(A/B_k)\, P(B_k).$$

Observación. Este resultado representa una relación muy útil, ya que cuando se busca P(A) frecuentemente puede ser difícil calcularlo de manera directa. Sin embargo, con la información adicional de que B_i ha ocurrido, se puede calcular $P(A/B_i)$ y por ende se puede entonces usar la fórmula anterior.

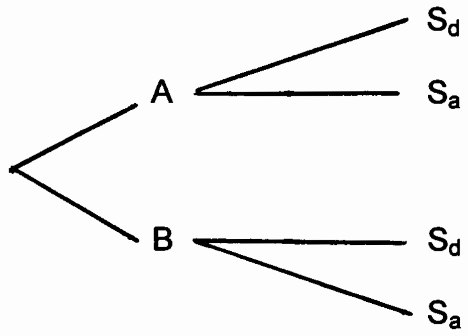
Por otro lado, cuando se necesite calcular $P(B_i/A)$ se podrá calcular esta probabilidad como una conscuencia de lo anterior. Sean B_1, ..., B_k una partición del espacio muestral S y A un evento asociado con S. Aplicando la definición de probabilidad condicional, se puede escribir:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\, P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)\, P(B_i)} \quad , \ i = 1, ..., k .$$

Este resultado se conoce como ***Teorema de Bayes***. También se le llama fórmula para la probabilidad de las "causas". Puesto que las B_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos B_i ocurre. (Esto es, uno de los eventos B_i debe ocurrir y solamente uno). Por lo tanto, la fórmula anterior da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una "causa"), dado que el evento A ha ocurrido. Para aplicar este teorema se debe conocer los valores de las $P(B_i)$, con $i = 1$, ..., k. Muy a menudo esos valores no son conocidos y esto limita la aplicabilidad del resultado.

La siguiente ilustración del Teorema de Bayes dará la oportunidad de introducir la idea de ***diagrama de árbol***, método muy útil para analizar ciertos problemas. Supóngase que varias cajas de caramelos son de dos tipos A y B. El tipo A contiene 70% de caramelos dulces y 30% de caramelos ácidos, mientras que en el tipo B dichos porcentajes están invertidos. Más aún, supóngase que el 60% de todas las cajas de caramelos son del tipo A, mientras que el resto son del tipo B.

Ahora se está ante el siguiente problema de decisión. Usted recibe una caja de dulces de tipo desconocido. Se le permite sacar una muestra de caramelo (una situación ciertamente no real, pero que permite presentar las ideas importantes sin mucha complicación y con esta información debe decir si cree que se le ha sido ofrecido una caja del tipo A o del tipo B). El siguiente " diagrama de árbol" (llamado así por las diversas trayectorias o ramas que aparecen) ayudará a analizar el problema (S_d y S_a indican la elección de un caramelo dulce o ácido respectivamente).



Se pueden realizar algunos cálculos simples:

$P(A)= 0{,}60$;	$P(B)= 0{,}40$;
$P(S_d/A)= 0{,}70$;	$P(S_a/A)= 0{,}30$;
$P(S_d/B)= 0{,}30$;	$P(S_a/B)= 0{,}70$.

Lo que en realidad se desea conocer son las siguientes probabilidades

$P(A/S_d)$, $\quad P(A/S_a)$, $\quad P(B/S_d)$ y $\quad P(B/S_a)$.

Esto es, suponiendo que realmente se escogió un caramelo dulce, ¿qué decisión se estaría más inclinado a hacer?

Para ello se deben comparar $P(A/S_d)$ y $P(B/S_d)$. Utilizando la fórmula de Bayes se tiene:

$$P(A/S_d) = \frac{P(S_d/A)\,P(A)}{P(S_d/A)\,P(A) + P(S_d/B)\,P(B)} = (0{,}7)(0{,}6) \,/\, [(0{,}7)(0{,}6) + (0{,}3)(0{,}4)] = 7/9.$$

Un cálculo similar da $P(B/S_d) = 2/9$. De este modo, con base en la evidencia que se tiene (es decir, la obtención de un caramelo dulce) es 3,50 veces más probable que se trate de una caja del tipo A que del tipo B. Por lo tanto, se decidiría, posiblemente, que el caramelo se obtuvo de una caja tipo A. (Por supuesto, se podría estar equivocado. Lo interesante del análisis anterior es que se elige la alternativa que parece más probable con base en los pocos datos que se tiene).

En términos del diagrama de árbol, lo que realmente se necesitaba (y se hizo) en los cálculos precedentes fue un análisis "hacia atrás". Esto es, dado lo que se observa, en este caso S_d, ¿qué tan probable era escoger el tipo A?

Eventos independientes. Dos eventos A y B que no pueden ocurrir de manera simultánea verifican que $A \cap B = \emptyset$. Tales eventos se designaron como mutuamente excluyentes. Si A y B son mutuamente excluyentes entonces P(A/B) = 0, porque la ocurrencia de B impide la ocurrencia de A. Por otra parte, para el caso particular $A \subseteq B$ se tendrá que P(B/A)=1.

En algunos de los casos anteriores, sabiendo que B ocurrió, se tiene una información precisa sobre la probabilidad de la ocurrencia de A. Sin embargo, hay muchos casos en los cuales se sabe que si un evento B ocurre, no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de otro evento A.

Definición. Se dice que A y B son dos ***eventos independientes*** si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,.$$

Observación. Esta definición es esencialmente equivalente a la que antes se sugirió, es decir, que A y B son independientes si

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{y} \quad P(A/B) = P(A).$$

Esta última forma es un poco más intuitiva, porque afirma precisamente lo que se ha estado tratando de decir antes: A y B son independientes si el conocimiento de la ocurrencia de A no influye de modo alguno en la probabilidad de ocurrencia de B.

Definición. Se dice que los tres eventos, A, B y C, son mutuamente independientes si y sólo si todas las condiciones siguientes se satisfacen:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,, \qquad P(A \cap C) = P(A)\,P(C)\,,$$
$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)\,, \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)\,.$$

Finalmente se generaliza esta noción a n eventos a través de la siguiente definición.

Definición. Los n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son **mutuamente independientes** si y sólo si se tiene

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots\ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2}) \ldots\ldots P(A_{i_k})\,,\ \forall\, k=1, 2, 3, \ldots, n\,.$$

III. PROCESOS DE DECISIÓN Y ORDEN DE LA INCERTIDUMBRE EN LOS NEGOCIOS

El recurso de la intuición (hemisferio cerebral derecho) no está radicalmente opuesto al del razonamiento lógico (hemisferio cerebral izquierdo). Más aún, la intuición, para ser eficaz, tiene que nutrirse de los datos reales y concretos que aporta el razonamiento lógico [Ta1].

Proceso de decisión. Es un proceso en el que es preciso seleccionar una decisión entre varias alternativas para lo cual se dispone de una tabla formada por:
1) las **diferentes decisiones permitidas** (por ejemplo: diferentes niveles de producción);
2) una **serie de circunstancias externas** llamadas **estados de la naturaleza** (por ejemplo: diferentes niveles de demanda);
3) una **ganancia o pérdida asociada con cada posible decisión y posible estado de la naturaleza**.

En todo problema de decisión se deben identificar y evaluar todas las alternativas de decisión del problema. Luego, **se llega a una decisión seleccionando la alternativa que se juzgue sea la "mejor" entre todas las opciones disponibles**.

El modelo de decisión debe contener 3 elementos:

1) **alternativas de decisión**, de los cuales se hace una selección;
2) **restricciones** para excluir alternativas infactibles o inadmisibles;
3) **criterios de decisión** para evaluar, y por consiguiente, para clasificar las alternativas factibles o admisibles.

Por ejemplo, en la Investigación de Operaciones se utilizan [DaMc, Gi, MaSo, Ta]:

1) **variables de decisión** en lugar de alternativas de decisión;
2) se busca el valor de las variables de decisión **optimizando** (niminizando el costo o maximizando las ganancias) una **función objetivo**, procedimiento que es equivalente a la clasificación de las alternativas de decisión. El proceso de optimización está confinado normalmente a los valores factibles de las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones del modelo.

La **toma de decisión en condiciones de certeza** estudia la determinación del mejor curso de acción (el óptimo) de un problema de decisión con la restricción de recursos limitados.

Ejemplos
1) Una empresa invierte $C a dos tasas de interés anual del a% y b% (a<b). Se desea una renta anual que no sea inferior a la del ta+(1-t)b % anual (donde t es un parámetro real con 0<t<1). ¿Cuál es la mínima cantidad de dinero que se debe invertir al b% ?
(ii) Analice el caso particular: C = 30.000 ; a = 5 ; b = 6,75 con renta anual no inferior al 6,5 % .

2) Una lata de 16 unidades (onzas) de alimento para perros debe contener, al menos, las siguientes cantidades de:

proteínas: 3 unidades ;
hidratos de carbono: 5 unidades
grasas: 4 unidades.

Se necesita mezclar distintas proporciones de 4 tipos de alimentos a fin de producir una lata de comida para perro, con el mínimo costo, que satisfaga dichos requerimientos. La siguiente tabla muestra el contenido y precio de 16 unidades de cada una de las diferentes mezclas de alimentos:

Alimento	Proteínas (unid.)	Hidratos carbono (unid.)	Grasas (unid.)	Precio ($)
1	3	7	5	4
2	5	4	6	6
3	2	2	6	3
4	3	8	2	2

Llamando con $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ la proporción de alimento i para cada lata de comida para perro, el problema de optimización de la mezcla de alimentos viene dado por:

$$\text{Mín}\left(4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4\right)$$

bajo las siguientes restricciones:

$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 3$ (unidades de proteínas)
$7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \geq 5$ (unidades de hidratos de carbono)
$5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 2x_4 \geq 4$ (unidades de grasas)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (la suma de las proporciones es la unidad)
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ (proporciones no negativas)

Nota. Se tiene un problema de programación lineal que puede resolverse, por ejemplo, a través de la herramienta Solver del software Excel.

Cuando lo que ocurre o va a ocurrir se conoce con certeza (probabilidad del 100%) se dice que es un **proceso determinístico**. En muchas situaciones, dicha certeza no se presenta, en general, en la práctica con lo cual se consideran que son **procesos no determinísticos (aleatorios o estocásticos)**. En este caso, se puede dar la siguiente clasificación:

1) Riesgo: Se conocen todas las alternativas que se pueden presentar y las correspondientes probabilidades de ocurrencia.
2) Incertidumbre: Se conocen las diferentes alternativas que se pueden presentar pero no se pueden medir las probabilidades de ocurrencia de manera objetiva. La mezcla entre la objetividad y la subjetividad de las mediciones de dichas probabilidades darán el grado de incertidumbre del proceso.

3) Ignorancia parcial: Cuando en forma subjetiva se determinan las diferentes alternativas y las correspondientes probabilidades de ocurrencia.

Árboles de decisión. Una forma clara y sencilla de estructurar un proceso de toma de decisiones es por medio de un árbol de decisión que está formado por:

1) **Nodos de acción**: se denotarán con un cuadrado □ y representarán aquellos lugares del proceso de toma de decisiones en los que se debe tomar una decisión (por ejemplo; niveles de producción);
2) **Nodos de probabilidad**: se denotarán por medio de un círculo ○ e indicarán aquellas partes del proceso de toma de decisiones en las que ocurre algún estado de la naturaleza (por ejemplo: posibles niveles de demanda);
3) **Ramas**: se utilizan para denotar las decisiones o estados de la naturaleza. También pueden anotarse probabilidades sobre las ramas para denotar la probabilidad de que ocurra un estado determinado de la naturaleza.

Por último, se colocan los **pagos** al final de las ramas terminales del estado de la naturaleza para mostrar el resultado que se obtendría al tomar una decisión particular y que después ocurra un estado específico de la naturaleza.

IV. TABLAS DE CONTINGENCIA Y DIAGRAMA DE ARBOL

A continuación se plantean y se analizan diversas actividades sobre:

- **Probabilidad condicionada y tablas de contingencia** ([DGL], actividad 13, pág. 121-129);
- **Probabilidad dinámica** ([DGL], actividad 18, pág. 149-151);

con el objetivo de realizar diagramas de árboles en problemas no determinísticos (análogo al método de bifurcación en problemas de lógica-matemática [Ta2]) y poder tomar adecuadamente una decisión. Se resalta la resolución de problemas que poseen diagramas de árboles abiertos y cerrados (con una o varias ramas infinitas).

Actividad Nº 13: Probabilidad condicionada y tablas de contingencia

Material

No es necesario.

Tablas de contingencia

Comenzamos por dos problemas en los que se introduce un modo de presentar los datos de gran interés para el cálculo de probabilidades:

Problema 1. Diagnósticos

Una revista médica publica que para diagnosticar las lesiones de hígado existen dos procedimientos: "el histológico" y el "gráfico". El segundo procedimiento no es tan preciso como el primero, pero conlleva menor riesgo.

Para verificar la bondad del procedimiento gráfico se estudiaron con él 1.160 lesiones de hígado, comprobándose más tarde si el diagnóstico fue correcto o no.

Los datos obtenidos fueron distintos según que la lesión fuera maligna o benigna. He aquí la tabla:

TABLA 1	Diagnostico correcto	Diagnostico incorrecto	TOTALES
Lesiones malignas	418	38	456
Lesiones benignas	608	96	704
TOTALES	1.026	134	1.160

a) Interpreta el significado de cada uno de los números de la tabla.

15

b) Para juzgar la precisión del procedimiento es importante conocer la proporción de cada caso respecto al total de 1.160 lesiones. Expresa la tabla anterior en frecuencias relativas y en porcentajes; es decir, completa las dos tablas de la página siguiente:

TABLA 2	C	I	TOTAL
M	0'36		
B			
TOTAL			

TABLA 3	C	I	TOTAL
M	36		
B			
TOTAL			

¿Cómo son los sucesos C e I entre sí? ¿Y los M y B?

c) Se va a diagnosticar a un paciente por el procedimiento gráfico. ¿Qué probabilidades asignarás a los siguientes sucesos aleatorios

C y M; C y B; I y M; I y B; C, I?

d) ¿Qué probabilidad asignas al suceso "lesión maligna diagnosticada correctamente"?
¿Y al suceso "lesión benigna diagnosticada correctamente"?
¿Son independientes los sucesos C y M?

Para responder a estas preguntas recuerda que según vimos en la actividad número 10, si dos sucesos son independientes de verificaba que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2)$$

Mientras que si son dependientes se verifica que:

$$P(S1 \text{ y } S2) = P(S1) \cdot P(S2/S1)$$

de donde se tiene:

$$P(S2/S1) = P(S1 \text{ y } S2) \;/\; P(S1)$$

Problema 2. Accidentes de tráfico

Con objeto de que disminuya el número de accidentes de circulación es preciso tomar diversos tipos de medidas: campañas de información en prensa, radio y televisión; mejora de la seguridad pasiva de los vehículos; mejora del trazado y señalización de las vías (calles y carreteras); vigilancia por parte de los agentes de tráfico, etc.

Para ello es necesario disponer de información, disponer de datos. El Instituto Nacional de Estadística (INE), en su Anuario de 1975 publicó para el año 1973 los siguientes datos:

16

TABLA 4	En carretera	En zona urbana	TOTALES
Con victimas	34.092	32.295	66.387
Solo daños materiales	11.712	20.791	32.503
TOTALES	45.804	53.086	98.890

a) Completa la siguiente tabla de porcentajes, obtenida a partir de la anterior:

TABLA 5	A	no A	TOTALES
B	34		67
no B			33
TOTALES	46	54	100

b) Como sabes que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$$

calcula en este problema P(B/A) y P(B/no A) y decide si A y B son independientes. ¿Es P(B/A) = P(B)?.

Las tablas 1, 2, 3 del problema del diagnóstico, y las 4 y 5 del de los accidentes de tráfico reciben el nombre de **tablas de contingencia**, pues en ellas figuran todas las posibilidades, o contingencia, de los sucesos compuestos que son intersección de otros sucesos, esto es:

$$A \text{ y } B = A \cap B; \; A \text{ y no } B = A \cap \overline{B}; \; \text{no } A \text{ y } B = \overline{A} \cap B; \; \text{no } A \text{ y no } B = \overline{A} \cap \overline{B}$$

El esquema de dichas tablas es el siguiente:

TABLA 6	A	$\overline{A}$	**Totales**
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
Totales	$P(A)$	$P(\overline{A})$	**1**

y pueden figurar en ellas, en lugar de probabilidades, frecuencias relativas o porcentajes.

17

Estas tablas además de darnos probabilidades de forma directa nos permiten el cálculo de probabilidades de sucesos condicionados; por ejemplo P(B/A) y P(B/no A).

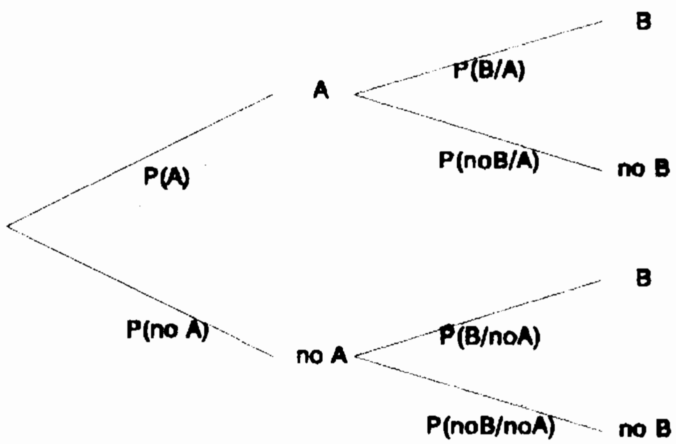
Existen tablas de contingencia más complicadas. Si consideramos que los accidentes pueden ser leves, graves o mortales; en carretera o en zona urbana, el diagrama de contingencia será:

TABLA 7	L	G	M	TOTALES
C				
U				
TOTALES				1

Lo fundamental de estas tablas es que los sucesos L, G y M sean incompatibles dos a dos y su unión sea el espacio muestral, y que los sucesos C y U también lo sean y compongan el espacio muestral.

Relación entre los diagramas de contingencia y los de árbol

La tabla 6 se puede poner en forma de diagrama de árbol de la forma siguiente:



Multiplicando las probabilidades de las distintas ramas que van hasta un punto dado, por ejemplo B, se obtiene la probabilidad de la intersección de los sucesos que se encuentran por el camino:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \text{ y no } B) = P(A) \cdot P(\text{no } B/A)$$

etc.

18

Los diagramas de contingencia y los de árbol están íntimamente relacionados: dado uno de ellos podemos construir el otro. Esto es muy importante, ya que unas veces los datos del problema permiten construir rápidamente uno de ellos y a partir de él podemos construir el otro diagrama, que nos dará la respuesta.

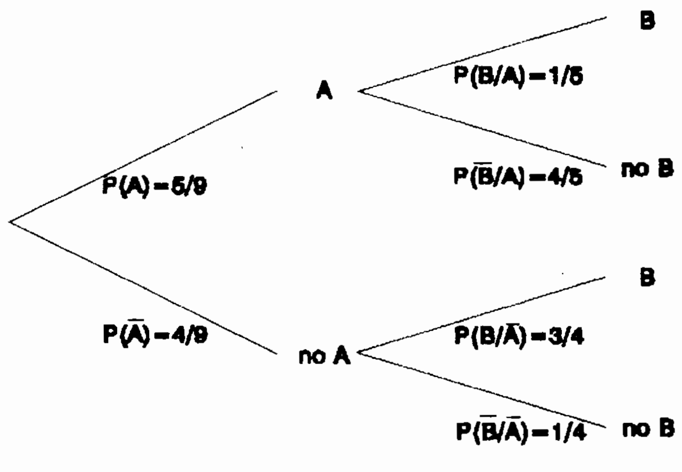
Teniendo en cuenta que:

$$P(B/A) = P(A \text{ y } B) \,/\, P(A) \qquad [1]$$

y dado el diagrama de contingencia:

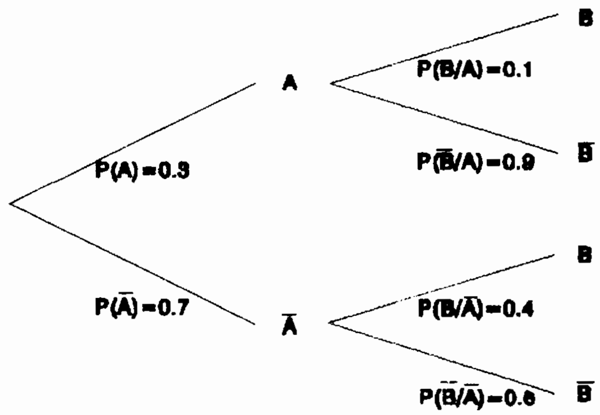
	A	no A	Totales
B	P(A y B)=1/9	P(no A y B)=3/9	P(B)=4/9
no B	P(A y no B)=4/9	P(no A y no B)=1/9	P(no B)=5/9
Totales	P(A)=5/9	P(no A)=4/9	1

puedes construir el de árbol:



Sin más que hacer en cada caso el cociente indicado en la expresión [1].

Recíprocamente, dado el diagrama de árbol, puedes construir el diagrama de contingencia:



19

Obtenemos, multiplicando los números de una misma rama, las probabilidades P(A y B), P(A y no B), P(no A y B), P(no A y no B), es decir, el diagrama de contingencia.

	A	$\bar{A}$	**Totales**
B	$P(A \cap B) =$ 0´03	$P(\bar{A} \cap B) =$ 0´28	$P(B) =$ 0´31
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) =$ 0´27	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ 0´42	$P(\bar{B}) =$ 0´69
Totales	$P(A) =$ 0´30	$P(\bar{A}) =$ 0´70	**1**

Problemas a resolver

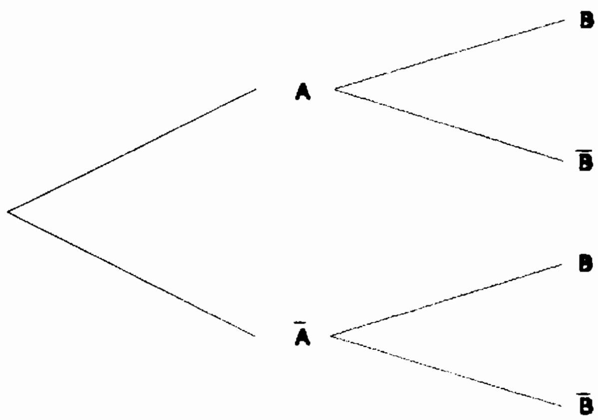
Ahora que ya conocemos los diagramas de contingencia y las relaciones con los diagramas de árbol te vamos a proponer varios problemas que resolverás aplicando lo que has aprendido en esta actividad.

1º

a) Dado el siguiente diagrama de contingencia

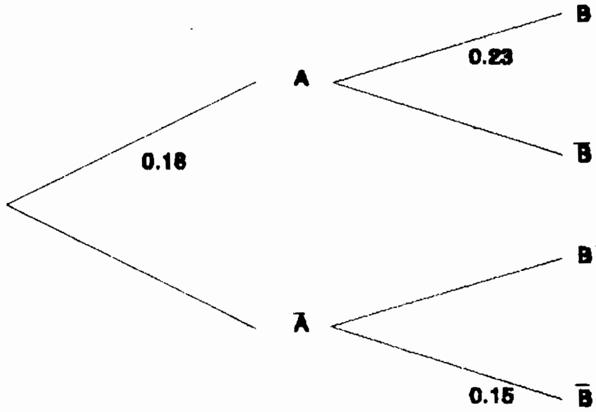
	A	**no A**	**Totales**
B	0,41	0,10	0,51
no B	0,30	0,19	0,49
Totales	0,71	0,29	1

construye el diagrama en árbol.



20

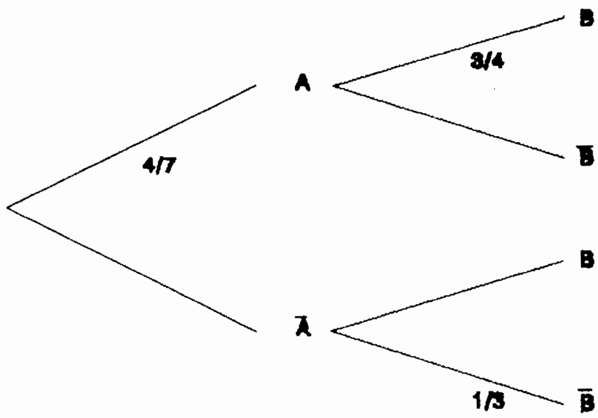
b) Dado el siguiente diagrama en árbol



construye el diagrama de contingencia:

	A	no A	Totales
B			
no B			
Totales			1

2º Completa el siguiente diagrama de probabilidades:



Construye con él una tabla de contingencia y a partir de ella un nuevo diagrama de árbol poniendo el suceso B en primer lugar.

3º Disponemos de dos cajas, M y N, la caja M contiene 7 bolas negras y 3 blancas, y la N 5 negras y 3 blancas. Se saca una bola al azar de una de las dos cajas, también al azar, y resulta ser blanca. Calcular la probabilidad de que proceda de la caja M.

21

4º Se han observado 50 enfermos de piel tratados con un nuevo antibiótico y otros 70 enfermos no tratados. Anotamos las curaciones al cabo de 2 semanas, los resultados han sido:

	Tratados	No tratados
Curados	40	20
No Curados	10	50

Si se emplean estos datos para asignar probabilidades,

a) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado haya sido tratado?
b) ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado no haya sido tratado?

5º Una determinada empresa se dedica a la fabricación de cubiertas para las ruedas de los automóviles. Por los controles de calidad que esta empresa lleva a cabo se puede concluir diciendo que el 5% de las cubiertas producidas son defectuosas. En el laboratorio de control de calidad hay instalado un dispositivo que detecta el 90% de las cubiertas defectuosas, pero también califica como defectuosas el 2% de las correctas. El empresario está interesado en conocer las siguientes probabilidades:

* Probabilidad de que sea correcta una cubierta calificada como defectuosa por el dispositivo.
* Probabilidad de que sea defectuosa una cubierta calificada por el dispositivo como correcta.

¿Puedes ayudarle tú?

Nota: Consideremos los sucesos:

A = "Ser correcta"
B = "Ser calificada como correcta"
no A = "Ser defectuosa"
no B = "Ser calificada defectuosa"

El problema pregunta: P(A/no B) y P(no A/B). Para resolver el problema puedes construir primero el diagrama de árbol, el diagrama de contingencia y finalmente responder a las probabilidades pedidas a través del diagrama de contingencia.

$$P(A/\text{no } B) = P(A \text{ y no } B) / P(\text{no } B)$$

$$P(\text{no } A/B) = P(B \text{ y no } A) / P(B)$$

22

6º En un municipio hay tres partidos políticos: Progresista, Liberal y Moderado. Se efectúa un referéndum para decidir si un cierto día se declara fiesta local. He aquí los resultados en %, en función del partido al que votó cada ciudadano en las últimas elecciones:

		ULTIMAS ELECCIONES			
		Pr	Lib	Mod	Abs
REFERÉNDUM	SI	15 %	25 %	12 %	8 %
	NO	25 %	5 %	8 %	2 %

a) ¿Qué porcentaje votó a cada partido en las últimas elecciones?

b) ¿Qué probabilidad hay de que una persona tomada al azar haya votado Sí en el referéndum, P(Sí)?

c) Calcular las siguientes probabilidades:

P(Pr/Sí) P(Sí/Pr) P(Lib/Sí) P(Sí/Lib)
P(Mod/Sí) P(Sí/Mod) P(Abs/Sí) P(Sí/Abs)

d) Los sucesos "votar moderado en la última votación" y "votar Sí en el referéndum" son dependientes o independientes?

Contenidos implícitos en esta actividad

- Tablas de contingencia.
- Probabilidad condicionada.
- Relación entre los diagramas de contingencia y diagramas de árbol.

23

Actividad Nº 18
Probabilidad dinámica

Reglas del juego

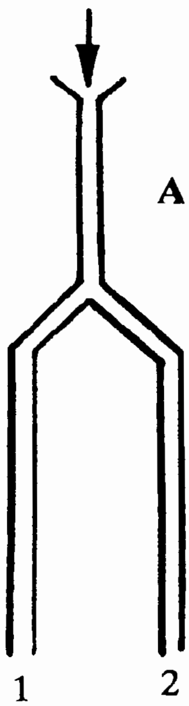
Utilizando fichas, simular situaciones de problemas de probabilidad.

Materiales necesarios

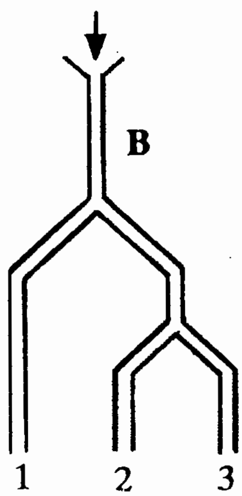
Un gran número de fichas.

Etapas del desarrollo del juego

Embudos



Si dejamos caer un gran número de bolitas, perdigones, fichas, etc, en los embudos A y B que aparecen dibujados observaremos que ocurre lo siguiente:

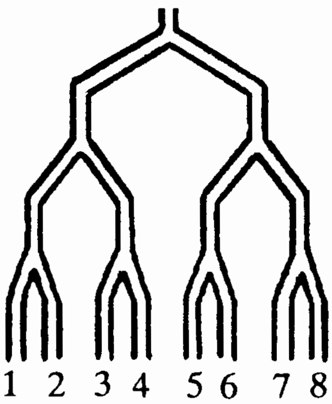


Las posibilidades que tiene un objeto de ir por un camino u otro es igual en cada bifurcación; como en cada bifurcación aparecen dos ramas, la probabilidad de que un objeto pase por cada una de ellas es 1/2 en cada cruce; expresado en porcentaje, el 50%.

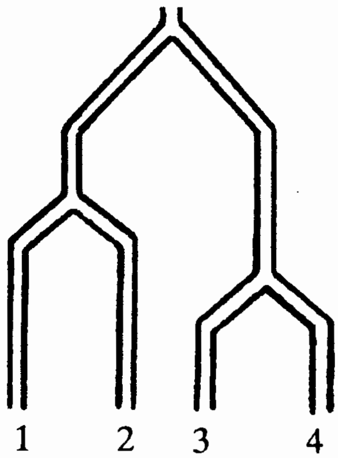
Así, si lanzamos 100 objetos por el embudo A, esperamos que aproximadamente sean 50 los que salen por el canal 1 y otros 50 por el canal 2. Si los 100 lanzamientos los realizamos en el embudo B, esperamos que aproximadamente 50 caigan por el canal 1 y 25 por los canales 2 y 3.

Supón que ahora dejamos caer un montón de perdigones en cada uno de los embudos C, D y F. En estos casos, ¿qué proporción de perdigones esperas que salga por cada canal?

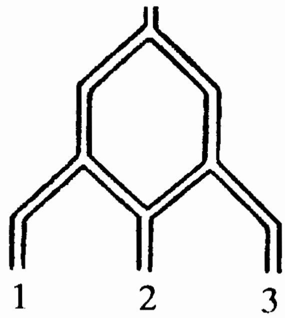
24



Embudo C

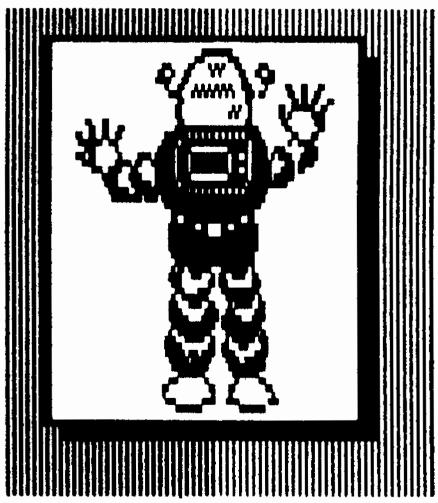


Embudo D



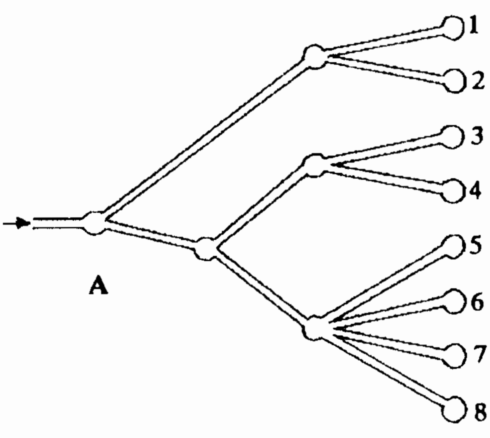
Embudo E

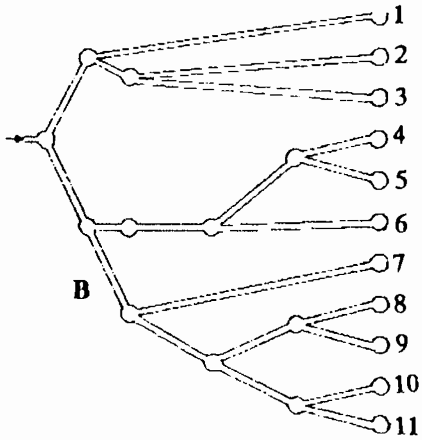
Laberintos



Se pone un robot en un laberinto y empieza a explorarlo. En cada bifurcación es igual de probable que el robot continúe por un camino que por otro (excepto que no puede retroceder por el mismo camino por el que ha llegado). Hay trampas al final de los caminos. ¿En cuál de las trampas es más probable que acabe el robot, o son todas igualmente probables?

Imagina que repetimos la experiencia muchas veces ¿En qué proporción de ocasiones caerá en cada trampa? Resuelve, para cada uno de los laberintos dibujados.

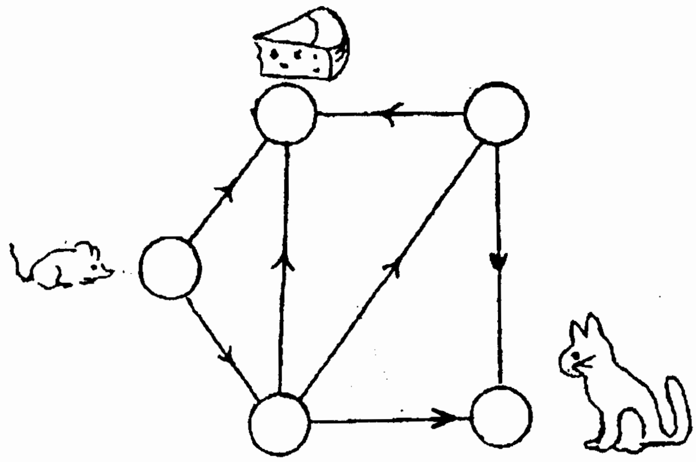




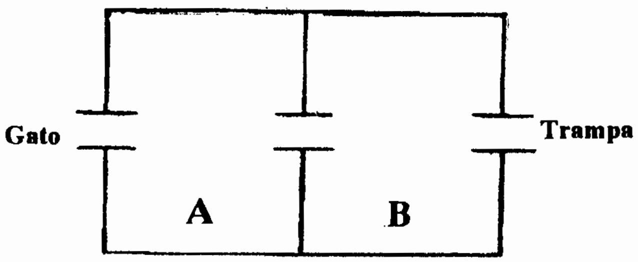
25

Ratones

A).- Se introducen doce ratones por la entrada del laberinto de la figura, que tiene dos salidas, una en la que hay un gato y otra en la que se encuentra un queso. Si el ratón llega a donde está el queso, se lo come y sale libre, pero si va a parar a la salida donde se encuentra el gato, es comido por éste.



¿Cuántos ratones se salvarán? ¿Cuántos serán comidos por el gato? ¿Y si hay 24 ó 36 ratones? ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón se coma el queso? ¿Cuál la de que sea comido por el gato?



B).- Un ratón se mueve entre dos habitaciones A y B. Si sale de A es atrapado por el gato, mientras que si sale de B cae en una trampa, como se ve en el diagrama. Inicialmente parte de la habitación A y su movimiento se realiza de la siguiente forma: de A a B con probabilidad 3/4, de B a A con probabilidad 7/8. Hallar la probabilidad de que: a) lo coja el gato, b) lo coja la trampa.

C).- Un ratón puede estar en 6 posiciones (como se indica en la figura) de forma que si está en la posición i, luego se mueve a las posiciones i+1 o i-1 con probabilidades 2/3 y 1/3 respectivamente, pero si llega a las posiciones 1 o 6 queda atrapado en sendas trampas. En este paseo aleatorio, si el ratón parte de la posición 3 determinar las probabilidades de ser atrapado en las trampas 1 y 6.

Estrategias

D).- Un jugador necesita cinco millones de pesetas para pagar una deuda, pero solo tiene un millón y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma mas rápida posible a su objetivo. Estudiar la estrategia a seguir por el jugador y calcular la probabilidad que tiene de conseguirlo.

26

V. PROBLEMAS CON PROBABILIDADES

1) **Nueva sociedad**. Un grupo financiero estudia el lanzamiento de una nueva sociedad con una inversión de $ 500.000. De acuerdo a sus expertos, tres casos solamente pueden ocurrir:

- La sociedad se desarrolla rápidamente obteniendo el 30 % del mercado. Se tiene una ganancia de $ 800.000 con una probabilidad del 10 % ;
- La sociedad comienza normalmente obteniendo el 10 % del mercado. Se tiene una ganancia de $ 200.000 con una probabilidad del 70 % ;
- La sociedad cierra después de una tentativa infructuosa. Los expertos estiman al 20 % la probabilidad de esta eventualidad.

¿ Cuál es la ganancia esperada ?

Observación. La **ganancia esperada** no corresponde a la ganancia de ninguna de las tres posibilidades. Ella indica solamente la ganancia media que se obtendría con la hipótesis irreal que se podría ejecutar la inversión un número grande de veces. Esta medida permite tomar en cuenta la ganancia de cada posibilidad futura teniendo en cuenta como peso la probabilidad de dicha realización. En otras palabras, la ganancia esperada es la media aritmética (esperanza) de las ganancias de cada posibilidad, ponderadas por su probabilidad respectiva.

2) **Compra de una máquina nueva**. La compañía X está tratando de decidir sobre la compra de una máquina nueva, la cual se utilizará exclusivamente en la fabricación de cierto producto. Actualmente existen dos máquinas que pueden ser satisfactorias para el fin perseguido.

Si se compra la máquina A, se invertirán $ 10.000 y se ahorrará $ 1 por unidad, en relación con el proceso de producción que se utiliza en la actualidad. Si se compra la máquina B, se invertirán $60.000 y se ahorrarán $3 por unidad producida. Ambas máquinas tienen una vida útil de 5 años. Las condiciones futuras del mercado son algo inciertas y se han resumido en las siguientes estimaciones sobre la probabilidad correspondiente a un volumen total de ventas dado, para los próximos 5 años:

Ventas Totales (en unidades)	Probabilidad
10.000	0,10
20.000	0,30
30.000	0,40
40.000	0,20

Sin tomar en cuenta el problema de la actualización financiera de los ingresos futuros, ¿ cuál es la máquina que debería comprar la empresa X? ¿Cuáles son los ahorros esperados correspondientes a cada una de esas acciones alternativas?

3) **Gracia de un condenado a muerte**. En el lejano reino de Juegolandia, a los condenados a muerte se les concedía la gracia de que su vida dependiera de que sacaran una bola blanca de una bolsa que contenía 50 bolas blancas y 50 bolas

negras. Pero en cierta ocasión, un reo pidió la gracia de que se le dejara distribuir las bolas de otro modo antes de hacer el sorteo. Tras algunas discusiones, se le concedió la gracia y preparó dos bolsas: en una colocó una sola bola blanca; en otra bolsa colocó 49 blancas y 50 negras. ¿Cuál resultó de este modo la probabilidad de sacar blanca?

4) **Estrategias con urnas y bolas**. Una urna contiene α bolas blancas y β bolas negras; se sabe que $\alpha + \beta \geq 3$. Los jugadores A y B juegan un juego con la urna y las bolas. Se consideran dos estrategias:

(I) El jugador A toma al azar una bola de la urna. Si es blanca entonces él gana, en caso contrario pierde;
(II) El jugador A toma al azar una bola y la tira afuera de la urna sin mirarla. El jugador B toma entonces una bola negra y la tira afuera. Luego, A toma otra bola de la urna. Si esta bola es blanca entonces A gana; en caso contrario, A pierde.

(i) Calcule la probabilidad de ganar que tiene el jugador A en las estrategias I y II.
(ii) ¿ Cuál de las dos estrategias es preferible para el primer jugador A?

5) **Un jugador arriesgado**. Un jugador necesita cinco millones para pagar una deuda, pero sólo posee p millones ($1 \leq p < 5$) y su Banco no está dispuesto a prestarle; decide intentar conseguir la cantidad total jugando a cara o cruz con una estrategia audaz: en cada jugada se apuesta una cantidad de dinero tal que si gana llegue de la forma más rápida posible a su objetivo. Estudie la estrategia a seguir por el jugador y calcule la probabilidad que tiene de conseguirlo para los siguientes casos:

(i) $p = 1$; (ii) $p = 2$; (iii) $p = 3$; (iv) $p = 4$.

6) **El duelo triangular**. Tres políticos A, B y C deciden resolver sus diferencias mediante un duelo a pistola bajo las siguientes reglas. Luego de sortear quien dispara en primer, segundo y tercer lugar, los tres se ubican en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero. Se conviene que cada uno disparará un tiro por turno, continuando en el orden sorteado hasta que dos de ellos queden fuera de combate. Cada uno puede disparar en la dirección que desee. Además, conocen que las precisiones de tiro de A, B y C son de 100%, 80% y 50% respectivamente.

Suponiendo que cada uno adopta la estrategia más favorable y que nadie muere a causa de una bala perdida que no había sido disparada contra él,
(i) ¿Quién tiene más chances de sobrevivir?
(ii) ¿Cuáles son las probabilidades de cada uno? Demuestre que se tiene que:

$$P_A = \tfrac{3}{10}\ ; \qquad P_B = \tfrac{8}{45}\ ; \qquad P_C = \tfrac{47}{90}\ .$$

(iii) Suponiendo que C no dispara al aire, calcule las probabilidades de cada uno de sobrevivir.
(iv) Si la precisión de C es del x% ¿Cuál es el mínimo valor de x que garantice la victoria a C ?

Observación. Dado que A y B son los mejores tiradores, ambos tratarán de eliminarsese el uno contra el otro, luego, la mejor estrategia para C es disparar al aire hasta uno A ó B caiga. De este modo, C tiene el primer disparo contra el sobreviviente con una chance del 50 % de vencer.

7) **Producción óptima de productos por semana**. Se supone que la demanda D, por semana, de cierto producto es una variable aleatoria con determinada distribución de probabilidades, $P(D = n) = p(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Supóngase que el costo para el proveedor es \$ C_1 por artículo, mientras que él lo vende a \$ C_2. Cualquier artículo que no se venda al término de la semana, debe almacenarse con un costo de \$ C_3 por artículo. Si el fabricante decide producir N artículos al comienzo de la semana, entonces:
(i) ¿ Cuál es su utilidad esperada por semana?
(ii) ¿ Para qué valor de N es máxima la ganancia esperada? Para realizar este estudio se analizará el siguiente caso: Se supone además que para la demanda aleatoria D es apropiada la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(D = n) = \tfrac{1}{5}\ , \ n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(a) Entonces calcule, en este caso, la expresión de la utilidad esperada por semana.
(b) Calcule el N óptimo para el caso concreto de $C_1 = 3$, $C_2 = 9$, $C_3 = 1$.
(c) Pruebe, en general, que el valor N óptimo se obtiene en el caso en que $N < 5$ y que los parámetros C_1 , C_2 y C_3 satisfagan la siguiente desigualdad:

$$C_2 \ < \ 10\, C_1 \ + \ 9\, C_3\ .$$

Más aún, en dicho caso el N óptimo se obtiene como la parte entera o la parte entera más uno del valor real x_o dado por la expresión:

$$x_o \ = \tfrac{1}{2} \ + \ \tfrac{5\,(C_2 - C_1)}{C_2 + C_3}\ .$$

8) **Curso de idioma**. Una empresa lanza un curso de idioma por CD (discos compactos). La demanda puede ser de 1000, 2000, 3000, 4000 ó 5000 unidades. La creación del curso costó \$ 100.000. El juego de CD cuesta \$ 200 y se vende a \$ 400. Como todos los CD a producir deben ser realizados en el mismo momento, la sociedad debe decidir el número de cursos a producir. Por razones de prestigio, los cursos que no se pudieron vender, no pueden venderse en liquidación; pero los CD se borran y se liquidan a \$ 100 el juego.

I) **Formulación del problema**. El problema puede ser representado por una matriz, en la cual cada fila corresponde a una decisión de la empresa, y cada columna corresponde a una posibilidad futura de demanda. De acuerdo a los datos anteriores coloque en la intersección de cada fila y cada columna el beneficio (o pérdida) correspondiente (en unidades de \$ 1.000 para facilitar las operaciones).

P \ D	1000	2000	3000	4000	5000
1000					
2000					
3000					
4000					
5000					

D: Demanda de CD ; P: Producción de CD

Sea $g(p_i, d_j)$ la ganancia obtenida para un nivel de producción de p_i unidades ($i=1,...,5$) y una demanda de d_j unidades ($j = 1, ..., 5$).

II) A continuación se estudiarán varios criterios que permitirán elegir la solución adecuada:

(a) **El criterio maximin, pesimista o de Wald**. Su interés principal, además de su simplicidad, reside en su óptica conservadora: **se elige la estrategia para la cual la ganancia mínima es la más grande posible**. Este criterio tiene por objetivo principal dar una garantía: "se va a ganar al menos tanto", o "se va a perder a lo sumo tanto". Entonces:

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\, g(p_i, d_j)$$

será la ganancia más pequeña posible para la producción p_i dada ($i = 1, ..., 5$).

La estrategia maximin es la que maximiza estos mínimos, es decir halla el nivel de producción p_i (para algún $i = 1, ..., 5$) de manera tal que se tenga

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\, \underset{j}{\mathrm{Min}}\, g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Min}}\, g(p_i, d_j)\,.$$

Calcule la estrategia del criterio maximin, es decir ¿cuál es el nivel de producción p_i ($i = 1, ..., 5$) a elegir y la ganancia a obtener?

(b) **El criterio maximax o optimista**. Este criterio es, por el contrario, extremadamente optimista. Se **elige la estrategia que aporta la mayor ganancia, en el mejor de los casos posibles**. La estrategia p_i (para algún $i = 1, ..., 5$) a elegir es la dada por

$$\underset{i}{\mathrm{Max}}\, \underset{j}{\mathrm{Max}}\, g(p_i, d_j) = \underset{j}{\mathrm{Max}}\, g(p_i, d_j)\,.$$

Calcule la estrategia del criterio maximax.

Observación. Este criterio es de un uso poco frecuente.

(c) **Criterio de Laplace o de equiprobabilidad**. Se utiliza cuando la probabilidad de cada posibilidad futura parece ser la misma (constante) o que se ignoran sus probalidades. Se **elige la estrategia que maximiza la ganancia esperada, dando la misma probabilidad a cada evento futuro**. La estrategia p_i (para algún i=1, ..., 5) a elegir es la dada por

$$G(p_i) = \underset{k}{\text{Max}}\, G(p_k)$$

donde $G(p_i)$ es la ganancia esperada de la estrategia p_i (con n posibilidades futuras con probabilidad 1/n cada una; en nuestro caso se tiene que n = 5), es decir:

$$G(p_i) = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{n}\, g(p_i, d_j)\,.$$

Calcule la estrategia del criterio de Laplace.

(d) **Criterio del minimax o de Savage** (conocido también como **criterio del lamento o costo de oportunidad mínimo**, es decir que sea mínimo lo que se deja de ganar). Se supone que la demanda se conoce a priori. Se intenta hallar la estrategia que permita obtener la mejor ganancia para esta demanda. En la columna correspondiente a esta demanda se reemplaza cada ganancia por la diferencia entre dicha ganancia y la ganancia correspondiente a la producción optimal para la demanda. Se obtiene de esta manera una **tabla de los lamentos** identificando, para la demanda dada, el lamento o lo que se deja de ganar, correspondiente a una producción no óptima para esta demanda. Esta modificación de la tabla se realiza para cada valor posible de la demanda. **Se elige la estrategia que minimiza el lamento máximo.**

Calcule la estrategia del criterio minimax.

Observación. Ningún criterio es en sí mismo, mejor que otro. Todo depende de la situación en la que se encuentre la empresa. El sólo criterio que se puede, más o menos, eliminar es el maximax.

III) **Árboles de decisión probabilísticos**. La empresa que lo edita tiene 6 posibilidades de acción:

- no lanzar el producto (nunca debe olvidarse esta posibilidad nula);
- producir 1.000 juegos de CD;
- producir 2.000 juegos de CD;
- producir 3.000 juegos de CD;
- producir 4.000 juegos de CD;
- producir 5.000 juegos de CD.

Se distinguirán 5 estados posibles de demanda: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 juegos de CD.

Se supone que se ha realizado un estudio del mercado a fin de predecir mejor la demanda. La encuesta ha producido los resultados siguientes:

Demanda	Probabilidad
1.000	0,10
2.000	0,30
3.000	0,40
4.000	0,15
5.000	0,05

(i) Represente el problema bajo la forma de un árbol de decisión y distinga las 26 situaciones finales posibles.
(ii) Calcule, para cada decisión de producción, la ganancia esperada:

Producción	Ganancia Esperada
1.000	
2.000	
3.000	
4.000	
5.000	

(iii) Reduzca el árbol reemplazando las ramas relativas a las diversas posibilidades de demanda por la ganancia esperada que le corresponde. Por lo tanto, el problema fue llevado a una elección entre las 6 acciones posibles, cada una de las cuales tiene una ganancia esperada, con lo cual se puede eligir la alternativa cuya ganancia esperada sea la más elevada. ¿Cuál es dicha alternativa?

(iv) **Valor de la información**. En general, es muy interesante poder determinar cuánto más se podría obtener de ganancia teniendo una mejor información sobre el futuro; de allí la necesidad de información adicional.

Se supone que se puede hacer una cierta publicidad del curso de idioma y que se lo puede vender por subscripción, con lo cual se podrá producir conociendo la demanda por anticipado. Por lo tanto, ¿cuánto se podría invertir en publicidad y en organización para que esta estrategia sea rentable? Se supone, para simplificar, que esto no modifica la demanda, pero permite solamente predecirla. Bajo subscripción, se producirá exactamente la demanda.

Calcule la ganancia esperada si se produce de acuerdo a la demanda obtenida (es el cálculo de la ganancia esperada con información perfecta).

Observación. Por ende, considerando sólo la tabla de probabilidades para cada demanda se pudo calcular anteriormente la ganancia esperada máxima (dada por $ 350.000 para una producción de 3.000 CD). Por otro lado, con información perfecta, se pudo obtener una ganancia esperada de $ 450.000. Por lo tanto, la información extra para conocer la demanda exacta vale $ 100.000, es decir, es el monto máximo que se podrá pagar para el conjunto de gastos relativos a la venta por subscripción.
Nota. Otro criterio utilizado es el **criterio de Hurwicz** que combina los criterios pesimista y optimista. Se decide qué tan optimista o qué tan pesimista se desea ser, de la siguiente manera:
(i) se elige un **coeficiente o índice de optimismo** α entre 0 y 1 de manera que

α =1 el criterio es totalmente optimista;
α = 0 el criterio es totalmente pesimista.

El valor de α puede ser seleccionado dependiendo de si el decidor tiende hacia el optimismo o hacia el pesimismo. En ausencia de una sensación fuerte de una circunstancia u otra, un valor de α = 1/2 parece ser una selección razonable.
(ii) se calcula, para cada alternativa i, la **ganancia pesada**:

Ganancia pesada = α Ganancia máxima + (1- α) Ganancia mínima

es decir:

$$\alpha \max_j g(p_i, d_j) + (1-\alpha) \min_j g(p_i, d_j)$$

(iii) se selecciona la alternativa o nivel de producción i (i = 1, ..., 5) que tenga la **mayor ganancia pesada**, es decir:

$$\max_i \left[\alpha \max_j g(p_i, d_j) + (1-\alpha) \min_j g(p_i, d_j) \right].$$

VI. UN MODELO SIMPLE DE FIDELIDAD DE MARCA Y SUS CONSECUENCIAS

A continuación se presenta un **modelo** simple de **fidelidad o lealtad de los clientes hacia una determinada marca** para un dado producto para el cual existen sólo dos marcas en competencia. Se obtienen resultados de interés en marketing y se dan algunos consejos que deben tenerse en cuenta por las empresas que comercializan dichas marcas a los efectos de no perder participación en el mercado. Se sigue el análisis efectuado en [SpBo, Ta1].

Un modelo simple de fidelidad de marca y sus consecuencias

por
Domingo Alberto Tarzia
Investigador Principal del CONICET
Director Depto. Matemática
U.A. - F.Ç.E.

"La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza..."

Los analistas de mercado se interesan en la preferencia de un cliente hacia una determinada marca, y en el efecto que tiene esa fidelidad o lealtad en la participación de cada marca en el mercado de un determinado producto.

En este trabajo se presenta un modelo simple de lealtad a la marca que corresponde a un productó dado P para el cual existen sólo dos marcas «M_1» y «M_2». Se realizan las siguientes suposiciones (una probabilidad del 85% se expresará matemáticamente a través del número real 0,85%):

(S1) Un cliente que compra la marca «M_1» en un período determinado t tiene una probabilidad a (con $0<a<1$) de comprar nuevamente «M_1» y una probabilidad $1 - a$ de comprar la marca «M_2» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente $t+1$;

(S2) Un cliente que compra la marca «M_2» en un período determinado t tiene una probabilidad b (con $0<b<1$) de comprar nuevamente «M_2» y una probabilidad $1 - b$ de comprar la marca «M_1» (es decir, de cambiar de marca) en el período siguiente $t+1$;

(S3) Las probabilidades dadas anteriormente en (S1) y en (S2) no varían de período en período;

(S4) El comportamiento del comprador de una marca depende sólo de la compra inmediata anterior y es estadísticamente independiente de las otras compras anteriores;

(S5) En un determinado momento t (condición inicial del presente estudio) la marca «M_1» tiene una porción α (con $0 \leq \alpha \leq 1$) del mercado del producto P (en el sentido de las probabilidades) y por ende la marca «M_2» tiene la porción restante $1 - \alpha$ del mercado del producto P.

Observación 1: De las hipótesis (S1) y (S2) se desprende que los clientes de la marca «M_2» son más leales que los de la marca «M_1» si y sólo si el porcentaje de los que compran la marca «M_2» en el período t y vuelven a comprar la marca «M_2» en el siguiente período $t + 1$ es mayor que el porcentaje de los que compran la marca «M_1» en el período t y vuelven a comprar la marca «M_1» en el siguiente período $t + 1$, lo cual se expresa matemáticamente por la siguiente desigualdad: $b > a$.

Esta propiedad es también válida recíprocamente, es decir, que los clientes de la marca «M_1» son más leales que los de la marca «M_2» si y sólo si $a > b$.

Las dos hipótesis (S1) y (S2) se pueden resumir en la siguiente tabla:

Marca comprada en el período t	Marca comprada en el período t + 1	
	Marca «M_1»	Marca «M_2»
Marca «M_1»	a	1 - a
Marca «M_2»	1 - b	b

Luego de presentar el modelo y sus hipótesis, será de mucho interés que se puedan responder las siguientes preguntas:

(1) ¿Qué porcentaje del mercado del producto P tendrán la marca «M_1» y la marca «M_2» en los períodos de tiempo $t + 1$, $t + 2$, $t + 3$, etc.?

(2) ¿El mercado del producto P tiende a

estabilizarse asintóticamente (es decir, cuándo se deja evolucionar el sistema)?

(3) Si la respuesta a (2) es afirmativa, ¿cómo será la convergencia: lenta o rápida?

(4) ¿Las respuestas a las preguntas anteriores (1) a (3) dependerán (y de qué forma) o serán independientes de la posición inicial del mercado del producto P?

Observación 2: Si el mercado del producto P se estabiliza en la posición de equilibrio se tendrá que el número de clientes que dejan la marca «M1» por la marca «M2» quedará balanceado con aquellos que cambian de la marca «M2» hacia la marca «M1».

Observación 3: La respuesta a las preguntas anteriores es de suma importancia para las empresas que producen las dos marcas «M_1» y «M_2» del producto P, a pesar de que en el modelo se supone que las empresas no reaccionan ante cambios del mercado (lo cual obviamente, no es cierto en la realidad). Pero, el presente modelo le brindará a las empresas la necesidad de hacer algo ante un cambio de lealtad a su marca, pues si no reaccionan (no realizan nada en el tiempo) sabrán lo que les sucederá, es decir el porcentaje del mercado que perderán!.

Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema: Si x_n representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M_1» al instante $t_n = t+n$ (por lo tanto, $y_n = 1-x_n$ representa el porcentaje del mercado que tiene la marca «M_2» al instante t_n) entonces se tienen los siguientes resultados:

R_1) Se tiene la siguiente relación que da la variación de x_n+1 (porcentaje del mercado que tiene la marca «M_1» al instante t_n+1) en función de x_n:

(1) $\quad x_{n+1} = 1 - b + (a + b - 1)\, x_n, \ \forall n \geq 1,$

con la condición inicial $x_1 = a$;

R2) El porcentaje x_{n+1} de la marca «M_1» del mercado del producto P al instante t_{n+1} viene dado en función de los coeficientes α, a y b de la siguiente manera:

(2)

$$x_{n+1} = (1-b)\,\frac{1-(a+b-1)^n}{2-(a+b)} + (a+b-1)^n \alpha \ ;$$

R3) El porcentaje x_n de la marca «M_1» del mercado del producto P al instante t_n converge al número $x \in (0,1)$ cuando $n \to +\infty$, el cual no depende del coeficiente α y viene dado en función de los coeficientes a y b de la siguiente manera:

(3)

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{1-b}{2-a-b} = \frac{1}{1+\frac{1-a}{1-b}} .$$

Demostración: La prueba de estos resultados matemáticos (que no se explicitarán aquí) surgen de la utilización de la teoría de árboles de probabilidades, serie geométrica y su suma, principio de inducción matemática, y, sucesión y su límite.

Observación 4: La relación (2) da la expresión de la sucesión $(x_n)_{n \in N}$ en función de los parámetros a, b y α. Si se tiene el caso particular $a+b-1=0$ ($b=1-a$), entonces se deduce que:

(4)

$$x_{n+1} = \frac{1-b}{2-(a+b)} = a \ , \quad \forall n \geq 1 \ ,$$

que no depende del coeficiente α y del número de períodos n. Este hecho es lógico pues al ser a+b=1 el mercado está dividido en dos porciones que no varían: una porción del mercado con porcentaje «a» que compra la marca «M_1» y la otra porción del mercado con porcentaje «1-a» que compra la marca «M_2».

Observación 5: Si se tiene el caso límite en que a=b=1 (es decir, los clientes de ambas marcas son leales al 100%) entonces se deduce que:

(5)

$$x_{n+1} = x_n \ , \ y_{n+1} = y_n \ , \forall n \geq 1 \ ,$$

que indica que el mercado no varía y permanece constante en la condición inicial, es decir $x_n = \alpha$, $y_n = 1-\alpha, \forall n \geq 1$.

Observación 6: Si se tiene el caso particular a=b (ambas marcas tienen la misma fidelidad) entonces se deduce que x=0.50, es decir que las dos marcas «M_1» y «M_2» compartirán el mercado en partes iguales (el 50% para cada una de las dos marcas).

Observación 7: Si se supone que la sucesión $(x_n)_{n \in N}$ tiene límite x, entonces éste puede calcularse de una manera más simple a través de la relación (1) pues al pasar al límite cuando $n \to +\infty$ se tiene que

(6)

$$x = 1 - b + (a + b - 1)\, x$$

de donde surge (3), pero tiene el inconveniente de no poder dar una expresión de x_n en función de n y de los otros parámetros del sistema: a, b y α.

Consecuencias del modelo:

1) El mercado siempre se estabiliza y la convergencia es, en general, rápida (será tanto más rápida como más pequeño sea el número $|a+b-1|$);
2) El resultado final, al estabilizarse el mercado, no depende del coeficiente α que indica cómo estaba compuesto inicialmente el mercado del producto P con las dos marcas «M_1» y «M_2»;
3) Si a > b (la fidelidad de la marca «M_1» es mayor que la de «M_2») entonces el mercado evolucionará al límite x, dado por la fórmula (3), siendo x > 0.50;
4) Si a=b=1 (ambas marcas tienen el 100% de fidelidad) entonces el mercado no evoluciona y permanece siempre constante con $x_n=\alpha$, $y_n=1-\alpha, \forall n \geq 1$;
5) Si a=b (ambas marcas tiene igual fidelidad) entonces el mercado evolucionará al límte x=0.50 que indica que cada marca tendrá el 50% del mercado.
6) Si a+b=1 (b=1-a) entonces el mercado sólo evoluciona en el primer período al pasar de $x_1=\alpha$ a $x_2=a$ y luego

permanece siempre constante con $x_{n+1}=a$, $y_{n+1}= 1-a=b, \forall\ n\geq 1$;

Observación 8: De las consecuencias 2 y 3 anteriores se deduce que la marca que tenga mayor fidelidad obtendrá más del 50% del mercado independientemente de lo que poseía inicialmente.

Ejemplo: Para tener un ejemplo de cómo varía el porcentaje x_n de la marca «M_1» del mercado del producto P (y por ende, el porcentaje $y_n=1-x_n$ de la marca «M_2» del mercado del producto P) se considerará el siguiente caso:

α = 0,50 (el mercado está dividido en partes iguales entre las dos marcas)
a = 0,80 (un 80% de los clientes de la marca «M_1» vuelven a comprar «M_1»)
b = 0,50 (un 50% de los clientes de la marca «M_2» vuelven a comprar «M_2»).

Entonces, aplicando la fórmula (2), para distintos períodos de tiempo, se deduce que:

$x_1=0{,}50$, $x_2=0{,}65$,
$x_3=0{,}695$, $x_4=0{,}7085$,
$x_5=0{,}7126$, $x_6=0{,}7138$,.......
$x=\frac{5}{7} \simeq 0{,}7143$

(la marca «M_1» poseerá el 71,43% del mercado), con lo cual a partir del tercer período (n=3) el mercado se encuentra cerca del valor de estabilización con un error menor al 1%, al ser $x-x_4 \simeq 0{,}0058$.

Al final del trabajo, se presenta una tabla con numerosos casos y en cada uno de ellos se explicitan: $\alpha=x_1$, a, b, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 y $x= \lim_{n\to+\infty} x_n$

El ejemplo anterior se presenta como el primer caso.

Conclusión final:

La importancia del presente modelo radica en el hecho de conocer cómo varía el mercado período a período y como se estabiliza (si no se efectúa ningún cambio o ninguna reacción por parte de las empresas que producen las marcas «M_1» y «M_2»). Un estudio análogo para n marcas daría conclusiones más realistas, pero que no cambian la filosofía de lo realizado.

Observaciones y consejos finales:

1) El liderazgo en un mercado puede durar poco si ingresa al mercado un nuevo competidor con mayor fidelidad de marca;

2) Debemos preguntarnos: ¿Cuál es la rotación de nuestra cartera de clientes?

3) Tal vez debamos preocuparnos menos por aumentar nuestra participación en el mercado y más por aumentar la fidelidad de nuestros clientes actuales. S. XXI

x1= alpha	a	b	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x=lim xn
0.5	0.8	0.5	0.65	0.695	0.7085	0.71255	0.713765	0.71413	0.714239	0.714286
0.5	0.2	0.5	0.35	0.395	0.3815	0.38555	0.384335	0.3847	0.38459	0.384615
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.2	0.8	0.5	0.56	0.668	0.7004	0.71012	0.713036	0.713911	0.714173	0.714286
0.1	0.8	0.5	0.53	0.659	0.6977	0.70931	0.712793	0.713838	0.714151	0.714286
0.5	0.5	0.8	0.35	0.305	0.2915	0.28745	0.286235	0.285871	0.285761	0.285714
0.5	0.1	0.9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.5	0.3	0.38	0.348	0.3608	0.35568	0.357728	0.356909	0.357143
0.4	0.9	0.9	0.42	0.436	0.4488	0.45904	0.467232	0.473786	0.479028	0.5
0.3	0.9	0.9	0.34	0.372	0.3976	0.41808	0.434464	0.447571	0.458057	0.5
0.2	0.9	0.9	0.26	0.308	0.3464	0.37712	0.401696	0.421357	0.437085	0.5
0.01	0.9	0.9	0.108	0.1864	0.24912	0.299296	0.339437	0.371549	0.39724	0.5

VII. TEORÍA DE LA DECISIÓN

A continuación, se presenta la teoría de la decisión siguiendo [Ne, Cap. 19, pág. 673-713] donde se estudian los siguientes temas:

- Cómo tomar decisiones bajo incertidumbre (estados de la naturaleza y acciones);
- Soluciones que no involucran especificación de probabilidades (criterios: maximin y de la pérdida minimax);
- Valor monetario esperado;
- Sensibilidad;
- Utilización de la información muestral: análisis bayesiano;
- El valor de la información muestral:
    - Valor esperado de la información perfecta;
    - Valor esperado de la información muestral;
    - Valor de la información muestral desde el punto de vista de los árboles de decisión;
- Introducción del riesgo: análisis de utilidad
    - Función de utilidad;
    - El criterio de la utilidad esperada.

Capítulo 19

TEORÍA DE LA DECISIÓN

19.1 CÓMO TOMAR DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

El tema de este capítulo podría caracterizarse como la esencia de los problemas de gestión en cualquier organización comercial. De hecho, la aplicabilidad de estos temas va más allá; alcanza muchos aspectos de la vida cotidiana. Nos ocuparemos, en este capítulo, de la situación en la que un individuo, un grupo o una compañía pueden tomar diferentes vías de acción alternativas. La decisión de qué camino seguir, debe hacerse en un mundo en el que hay incertidumbre sobre cómo será el comportamiento en el futuro de algunos factores; son estos factores los que determinarán las consecuencias de la acción que se haya decidido llevar a cabo.

Todos estamos obligados a operar en un entorno del cual ignoramos el comportamiento en el futuro. Por ejemplo, estás considerando la posibilidad de ir a un partido de fútbol, pero dudas porque hay alguna posibilidad de que llueva. Si *supieras* que no va a llover, irías al partido; si estuvieras *seguro* de que va a llover a cántaros durante horas no irías. Pero eres incapaz de predecir el clima con total seguridad, tu decisión debe tomarse contemplando un futuro incierto. Otro ejemplo, en algún momento durante el último año de carrera deberás decidir qué hacer cuando te gradúes. Es probable que recibas diferentes ofertas de trabajo. Hacer un curso para postgraduados es otra posibilidad. Habrás recibido, seguramente, mucha información sobre las alternativas. Sabrás qué salarios iniciales te ofrecen, también tendrás información sobre a qué tipo de negocios se dedican las empresas que te ofrecen empleo, y cómo te adaptarías a los trabajos que te ofrecen.

Sin embargo, no se puede tener una imagen nítida de cómo será tu vida dentro de un año o dos si aceptas una oferta en particular. Esta decisión, tan importante, debe tomarse enfrentándose a un futuro incierto.

En el mundo de los negocios, este tipo de situaciones surgen a menudo; a continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran este hecho:

1. En una recesión, una compañía debe decidir si despedir a algunos empleados. Si la recesión en la actividad dura poco tiempo, puede ser preferible retener a todos los empleados, ya que podrían ser difíciles de reemplazar cuando la demanda mejore. Sin embargo, si la recesión va a ser larga, retener a estos empleados puede resultar muy costoso. Por desgracia, el arte de la predicción económica no permite predecir con certeza la dureza de una recesión ni el tiempo que pueda durar.

2. Un inversor puede opinar que los tipos de interés están actualmente en un pico. En este caso, los bonos a largo plazo serían una inversión muy atractiva. Sin embargo, no es posible conocer con certeza la dirección que tomarán en el futuro los tipos de interés, si resulta que van a seguir subiendo, invertir el dinero en bonos a largo plazo puede no ser óptimo.

3. En muchas ocasiones, los contratistas deben hacer ofertas para conseguir determinado contrato. La decisión que debe tomarse es qué oferta debe hacerse. Hay dos fuentes de incertidumbre en este caso. En primer lugar, el contratista no sabe lo baja que debe ser su oferta para conseguir el contrato. En segundo lugar, no es probable que sepa con seguridad cuánto le va a costar cumplir el contrato. De nuevo, a pesar de esta incertidumbre, debe tomarse alguna decisión.

4. El coste de realizar una perforación para determinar la presencia de petróleo es enorme; aunque se disponga de mucha información geológica, las compañías petroleras no saben, hasta que se excava el pozo, si existen suficientes cantidades de petróleo para hacer que la operación resulte rentable. La decisión de si debe excavarse o no, y dónde debe hacerse, debe tomarse en un entorno de incertidumbre.

En este capítulo, nuestro objetivo es estudiar métodos para atacar problemas de toma de decisiones como los recién introducidos. Para hacer el análisis más concreto, consideraremos el problema de un fabricante que está planeando la introducción en el mercado de una nueva golosina. El fabricante tiene disponibles cuatro procesos de producción alternativos, que llamaremos A, B, C y D, y que están ordenados según el grado de dificultad de adaptar las instalaciones existentes al nuevo proceso. La decisión sobre qué camino debe seguirse, debe tomarse en un momento en que se desconoce la eventual demanda de este producto. Por conveniencia, caracterizaremos esta demanda potencial como "baja", "media" o "alta". También supondremos que el fabricante es capaz de calcular, para cada proceso de producción, el beneficio obtenido durante el tiempo de vida de la inversión para los tres niveles de demanda. La Tabla 19.1 muestra los posibles beneficios (en dólares) para cada combinación de proceso de producción y nivel de demanda.

Este problema es útil para ilustrar los conceptos básicos de nuestro análisis. La persona que debe tomar la decisión se encuentra con un número finito, K, de posibles **acciones**, que representaremos por $a_1, a_2, \ldots, a_K$. En nuestro ejemplo, estas acciones corresponden a la adopción de cada uno de los cuatro posibles procesos de producción. En el momento en que debe seleccionarse una determinada acción, la persona que decide no sabe con seguridad el comportamiento futuro de un factor que determinará las consecuencias de la acción tomada. Supondremos que las posibilidades de este factor pueden caracterizarse por un número finito, H, de **estados de la naturaleza**. Estos estados serán $s_1, s_2, \ldots, s_H$.

TABLA 19.1 Beneficios esperados del fabricante de golosinas para diferentes combinaciones de procesos de producción y niveles de demanda

PROCESO DE PRODUCCIÓN	NIVEL DE DEMANDA		
	BAJO	MEDIO	ALTO
A	70.000	120.000	200.000
B	80.000	120.000	180.000
C	100.000	125.000	160.000
D	100.000	120.000	150.000

En el ejemplo de la nueva golosina, hay tres estados de la naturaleza, que se corresponden con los tres posibles niveles de demanda para el producto. Finalmente, supondremos que la persona que toma la decisión es capaz de especificar la recompensa monetaria, o los **pagos**, para cada combinación de acción y estado de la naturaleza. Representaremos por M_{ij} el pago por la acción a_i en el supuesto de que ocurra el estado de la naturaleza s_j. Como se hizo en la Tabla 19.1, estos pagos pueden disponerse en una **tabla de pagos**, cuya forma general se muestra en la Tabla 19.2.

Esquema de un problema de decisión

(i) La persona que debe tomar la decisión dispone de K líneas de acción alternativas:

$$a_1, a_2, \ldots, a_K$$

(ii) Hay H posibles estados de la naturaleza:

$$s_1, s_2, \ldots, s_H$$

(iii) Para cada posible combinación de acción y estado de la naturaleza, existe un **pago** monetario asociado, M_{ij}, que corresponde a la acción a_i y al estado de la naturaleza s_j.

El problema de decisión, como lo hemos esquematizado, es esencialmente **discreto**. Es decir, hemos postulado un número finito de acciones alternativas y un número finito de estados de la naturaleza. Sin embargo, muchos problemas prácticos son **continuos**. Es posible que el estado de la naturaleza, por ejemplo, se mida de forma más apropiada en un continuo que eligiendo un número de posibilidades discreto. En nuestro ejemplo de las golosinas, podría ser posible anticipar un rango de posibles niveles de demanda, en lugar de simplemente especificar tres niveles. También, en algunos problemas, las posibles líneas de acción podrían representarse de forma más adecuada en un continuo. Éste sería el caso, por ejemplo, de la oferta que un contratista debe hacer para conseguir un contrato. En el resto de este capítulo, nos concentraremos en el caso discreto. Los *principios* utilizados en el análisis de los casos discretos son los mismos. Sin embargo, los detalles de este análisis están basados en el cálculo y no serán considerados en adelante.

Cuando la persona que debe tomar la decisión se enfrenta a diferentes líneas de acción, la elección apropiada depende en gran medida de los objetivos. Es posible describir diversas formas de proceder utilizadas para solucionar problemas de decisión en los negocios. Sin embargo, debe recordarse que cada problema individual tiene sus propias características específicas y que los objetivos de las personas que deben decidir varían considerablemente y, además, pueden ser bastante complejos.

TABLA 19.2 Forma general de una tabla de pagos para un problema de decisión con K posibles líneas de acción y H estados de la naturaleza: M_{ij} es el pago que corresponde a la acción a_i y el estado de la naturaleza s_j

ACCIONES	ESTADOS DE LA NATURALEZA			
	s_1	s_2	$\cdots$	s_H
a_1	M_{11}	M_{12}	$\cdots$	M_{1H}
a_2	M_{21}	M_{22}	$\cdots$	M_{2H}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
a_K	M_{K1}	M_{K2}	$\cdots$	M_{KH}

40

Una situación de este tipo aparece cuando se estudia la posición de un director intermedio en una gran empresa. En la práctica, los objetivos de este director pueden ser diferentes de los objetivos de la empresa. Al tomar decisiones, el director debería ser consciente de su posición así como del bienestar de toda la compañía.

A pesar de la naturaleza individual de los problemas de decisión, podemos especificar una regla general. Puede ser posible eliminar algunas acciones bajo cualquier circunstancia. Refiriéndonos a la Tabla 19.1, consideremos el proceso de producción D. El pago obtenido por este proceso es exactamente el mismo que el del proceso C, si hay un nivel de demanda bajo, y es más pequeño que el del proceso C si la demanda es alta o media. Por tanto, no tiene sentido elegir la opción D, ya que hay otra opción a través de la cual se consiguen pagos que no pueden ser peores y podrían ser mejores. Dado que la acción C es al menos tan rentable, y posiblemente más, como la acción D, diremos que la acción C **domina** a la acción D. Si una acción es dominada por otra alternativa, se dice que es **inadmisible**. Este tipo de acciones pueden ser eliminadas de los estudios posteriores, ya que no sería óptimo adoptarlas.

Definiciones:

Si el pago por la acción a_j es al menos tan grande como el de a_i, sea cual sea el estado de la naturaleza, y el pago a_j es más alto que a_i para, al menos, un estado de la naturaleza, entonces, se dice que la acción a_j domina a la acción a_i.

Cualquier acción que esté dominada de esta forma, se dice que es **inadmisible**. Las acciones inadmisibles se eliminarán de la lista de posibilidades antes de continuar con el posterior análisis del problema de decisión.

Cualquier acción que no esté dominada por otra acción, y que, por tanto, no sea inadmisible, diremos que es **admisible**.

En nuestro análisis del problema de decisión del fabricante de golosinas, hemos visto que la acción D es inadmisible. De acuerdo con esto, esta posibilidad debe eliminarse en futuros análisis del problema, sólo consideraremos la posibilidad de adoptar los procesos A, B o C.

19.2 SOLUCIONES QUE NO INVOLUCRAN ESPECIFICACIÓN DE PROBABILIDADES

Antes de decidir qué proceso de producción utilizar, nuestro fabricante de golosinas se preguntará: "¿Cuál es la probabilidad de que se den en la realidad cada uno de los niveles de demanda?". En gran parte de este capítulo, discutiremos soluciones a este problema de decisión que requerirá la especificación de probabilidades de ocurrencia de cada uno de los estados de la naturaleza. Sin embargo, en esta sección, consideraremos brevemente dos criterios de selección que no se basan en dichas probabilidades, y que en realidad no tiene ningún contenido probabilístico. Más bien, estos enfoques (y otros del mismo tipo) dependen únicamente de la estructura de la tabla de pagos.

Los dos procedimientos considerados en esta sección se llaman **criterio *maximin*** y **criterio de la pérdida *minimax***. Discutiremos cada uno de ellos en relación con la tabla de pagos del ejemplo del fabricante de golosinas, eliminando la estrategia inadmisible de seleccionar el proceso D. El fabricante debe, por tanto, seleccionar entre las tres acciones posibles, enfrentándose a tres posibles estados de la naturaleza.

(i) CRITERIO *MAXIMIN*

En este caso, consideramos el peor resultado posible para cada acción, considerando los posibles estados de la naturaleza. Este *resultado peor* es simplemente el pago más pequeño que podría obtenerse. Para el problema de las golosinas, el pago más pequeño ocurre siempre, no importa cual sea el proceso de producción elegido, cuando la demanda es baja. El **criterio *maximin*** selecciona aquella acción para la que el mínimo pago es el mayor –es decir, *maximizamos* el *mínimo* pago. Claramente, como se muestra en la Tabla 19.3, el máximo valor de estos pagos mínimos es de 100.000 dólares, que se consiguen adoptando el proceso de producción C. Por tanto, el criterio *maximin* selecciona esta acción.

EJEMPLO 19.1 Un inversor debe elegir entre invertir 1.000.000 de pesetas a un año a una tasa de interés asegurada del 12% o invertir la misma cantidad de dinero durante el mismo período en una cartera de valores. Si se elige la opción del interés fijo, se asegura un pago de 120.000 pesetas. Si se elige la opción de la cartera de valores, la rentabilidad dependerá del comportamiento del mercado durante el próximo año. Se espera un beneficio de 250.000 pesetas, si el mercado está boyante; por el contrario si el mercado está estable, se espera un beneficio de 50.000 pesetas; por último, si el mercado pasa por una depresión, se espera una pérdida de 100.000 pesetas. Construir la tabla de pagos para este inversor y hallar la acción elegida por el criterio *maximin.*

La siguiente tabla muestra los pagos, un pago negativo indica una pérdida. El pago mínimo para la inversión de interés fijo es de 120.000 pesetas, ya que esto es lo que se obtendrá pase lo que pase en el mercado de acciones. El pago mínimo para la cartera de acciones es de –100.000 pesetas, y ocurre cuando el mercado pasa por una depresión. Por tanto, el mayor mínimo pago se obtiene de invertir el dinero a interés fijo, que es por tanto la acción elegida por el criterio *maximin*.

INVERSIÓN	ESTADO DEL MERCADO			MÍNIMO PAGO	
	BOYANTE	ESTABLE	DEPRIMIDO		
Interés fijo	120.000	120.000	120.000	120.000	← Maximin
Cartera de valores	250.000	50.000	–100.000	–100.000	

La forma general de la regla de decisión basada en el criterio *maximin* queda clara con este ejemplo; una explicación general puede encontrarse en el siguiente recuadro.

TABLA 19.3 Elección del proceso de producción C por el criterio *maximin*

PROCESO DE PRODUCCIÓN	NIVEL DE DEMANDA			MÍNIMO PAGO	
	BAJO	MEDIO	ALTO		
A	70.000	120.000	200.000	70.000	
B	80.000	120.000	180.000	80.000	
C	100.000	125.000	160.000	100.000	← *Maximin*

Regla de decisión basada en el criterio *maximin*

Supongamos que la persona que debe decidir, debe hacerlo entre K acciones admisibles, $a_1, a_2, ..., a_K$, dados H posibles estados de la naturaleza. Sea M_{ij} el pago correspondiente a la i-ésima acción y el j-ésimo estado de la naturaleza.

Para cada acción, buscamos el mínimo pago posible. Para la acción a_1, por ejemplo, esto es el mínimo entre $M_{11}, M_{12}, ..., M_{1H}$. Representamos este mínimo por M_1^*, donde

$$M_1^* = \text{Min}\,(M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1H})$$

De forma más general, el mínimo pago posible para la acción a_i, viene dado por

$$M_i^* = \text{Min}\,(M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{iH})$$

El **criterio *maximin*,** entonces, selecciona la acción a_i que corresponde al mayor M_i^*.

La característica positiva del criterio *maximin* para tomar una decisión es que produce el máximo pago posible que se puede *garantizar*. Si se utiliza el proceso de producción C, el fabricante de golosinas se asegura un pago de, al menos, 100.000 dólares, sea cual sea el nivel de demanda. Análogamente, para el inversor del ejemplo 19.1, la elección de invertir a interés fijo, proporciona un beneficio *asegurado* de 120.000 pesetas. En ninguno de los dos ejemplos se puede *garantizar* esta cantidad eligiendo cualquiera de las acciones alternativas.

Sin embargo, es precisamente esta garantía la que produce reservas con respecto al criterio *maximin*, la razón es que, en muchas ocasiones, debe pagarse un precio por dicha garantía. El precio, en este caso, es la pérdida de oportunidades de obtener pagos mucho mayores eligiendo otras acciones, aunque la situación peor posible sea *muy improbable*. Por ejemplo, para el fabricante de golosinas, podría estar casi seguro de que va a haber una demanda alta, en cuyo caso el proceso de producción C sería una mala elección, ya que proporciona el pago más bajo a este nivel de demanda.

El criterio *maximin* puede verse como una estrategia muy conservadora para elegir entre acciones alternativas. Esta estrategia puede, en ciertas circunstancias, ser apropiada, pero sólo una persona pesimista en extremo la utilizaría siempre. Por esta razón, se llama a veces *criterio del pesimismo*.

(ii) CRITERIO DE LA PÉRDIDA *MINIMAX*

Si va a utilizarse el criterio de la pérdida *minimax* para elegir una línea de acción, debe imaginarse que se está en una situación en la que ya se ha elegido una línea de acción, ya ha ocurrido un estado de la naturaleza, y se puede mirar hacia atrás, a la decisión tomada, y determinar si fue buena o mala, en el sentido de que, visto lo que ha ocurrido, habría sido preferible tomar otra línea de acción. Consideremos, una vez más, al fabricante de golosinas. Supongamos que el nivel de demanda para el nuevo producto resulta ser baja. En este caso, la mejor línea de acción habría sido elegir el proceso de producción C, con el cual habría obtenido un pago de 100.000 dólares. Si hubiera tomado esta línea de acción, el fabricante habría tenido una **pérdida** 0. Si hubiera elegido el proceso A, el beneficio resultante habría sido sólo de 70.000 dólares. La pérdida del fabricante, en este caso, es la diferencia entre el mejor pago que podría haberse obtenido (100.000 dólares) y la obtenida de la elección de una acción que resultó ser inferior. Por tanto, la pérdida sería de 30.000 dólares. Análogamente, suponiendo que la demanda ha sido baja, haber elegido el proceso B habría conllevado una pérdida de

$$100.000 \text{ dólares} - 80.000 \text{ dólares} = 20.000 \text{ dólares}$$

De la misma forma podríamos calcular las pérdidas en los casos de nivel de demanda moderado y alto. En cada caso, la pérdida es 0 para la acción que resultara ser la mejor (el proceso C para demanda media y el proceso A para demanda alta).

De esta manera, podemos construir una **tabla de pérdidas**, con una entrada para cada combinación de acción y estado de la naturaleza. La Tabla 19.4 muestra las pérdidas (en dólares) para el problema de decisión del fabricante de golosinas.

A continuación, nos preguntamos, para cada posible línea de acción, cuál es la máxima pérdida que podríamos obtener. Se puede ver en la Tabla 19.4, que estos máximos son 30.000, 20.000 y 40.000 dólares, para los procesos A, B y C, respectivamente. El **criterio de la pérdida *minimax*** selecciona la acción para la que la pérdida máxima es la menor posible. Como se muestra en la Tabla 19.5, utilizar este criterio sugeriría la elección del proceso de producción B.

TABLA 19.4 Tabla de pérdidas para el fabricante de golosinas

PROCESO DE PRODUCCIÓN	NIVEL DE DEMANDA		
	BAJO	MEDIO	ALTO
A	30.000	5.000	0
B	20.000	5.000	20.000
C	0	0	40.000

TABLA 19.5 Elección del proceso de producción B según el criterio *minimax*

PROCESO DE PRODUCCIÓN	NIVEL DE DEMANDA			PERDIDA MÁXIMA	
	BAJO	MEDIO	ALTO		
A	30.000	5.000	0	30.000	
B	20.000	5.000	20.000	20.000	← Pérdida *Minimax*
C	0	0	40.000	40.000	

EJEMPLO 19.2 Consideremos otra vez el problema de decisión del inversor del Ejemplo 19.1. ¿Qué acción debería tomarse según el criterio *minimax*?

Los cálculos se muestran en la tabla siguiente. De nuevo, la pérdida obtenida por haber elegido la línea de acción que resultó ser la mejor, dadas las circunstancias, es 0. Vemos, entonces, que la inversión a interés fijo es la elección según el criterio *minimax*.

INVERSIÓN	ESTADO DEL MERCADO			MÁXIMA PÉRDIDA	
	BOYANTE	ESTABLE	DEPRIMIDO		
Interés fijo	130.000	0	0	130.000	← Pérdida *Minimax*
Cartera de valores	0	70.000	220.000	220.000	

La regla de decisión general basada en el criterio de la pérdida *minimax* se explica en el siguiente cuadro.

Regla de decisión basada en el criterio de la pérdida *minimax*

Supongamos que la tabla de pagos se representa en una matriz rectangular, donde las filas corresponden a acciones y las columnas a estados de la naturaleza. Si cada pago de la tabla se resta del mayor pago correspondiente a *su columna*, la matriz resultante se llama **tabla de pérdidas.**

Dada la tabla de pérdidas, la acción sugerida por el criterio de la **pérdida *minimax*** se encuentra como sigue:

(i) Para cada fila (acción) hallar la pérdida máxima.

(ii) Elegir la acción que corresponda al *mínimo* de estas pérdidas *máximas*.

El criterio de la pérdida *minimax* en un problema de decisión, refleja la mínima pérdida posible que se puede *garantizar*. Tiene, sin embargo, dos desventajas serias:

1. La lógica que hay detrás del criterio, no proporciona un esquema de análisis apropiado para un amplio rango de problemas de decisión en los negocios. Es cierto que es importante no tener que derramar lágrimas por las oportunidades perdidas. Sin embargo, en un mundo racional, deberían tomarse las decisiones sobre bases más sólidas.

2. Como ocurre con el criterio *maximin*, el criterio de la pérdida *minimax* no permite introducir en el proceso de decisión la opinión personal del decisor sobre la probabilidad de que ocurran cada uno de los estados de la naturaleza. Teniendo en cuenta que en la práctica los problemas de decisión que surgen ocurren en un entorno con el que el decisor debe estar moderadamente familiarizado, esto representa un desperdicio de la experiencia.

EJERCICIOS

1. Un inversor está considerando tres alternativas –un certificado de depósito, un fondo de inversión de bajo riesgo y un fondo de inversión de alto riesgo– para invertir 2.000.000 de pesetas. Considera tres posibles estados de la naturaleza:

   s_1: mercado de acciones fuerte

   s_2: mercado de acciones moderado

   s_3: mercado de acciones débil

   La tabla de pagos (en miles de pesetas) es la siguiente:

ACCIONES	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	s_1	s_2	s_3
Certificado de depósito	120	120	120
Fondo de inversión de bajo riesgo	430	120	–60
Fondo de inversión de alto riesgo	600	800	–150

   a) ¿Es inadmisible alguna de las acciones?

   b) ¿Cuál es la mejor elección según el criterio *maximin*?

   c) ¿Cuál es la mejor elección según el criterio de la pérdida *minimax*?

2. Un fabricante de desodorante quiere expandir su negocio e introducir un nuevo producto. Dispone de cuatro procesos de producción alternativos. La siguiente tabla muestra los beneficios esperados, en miles de pesetas, para estos procesos y para cada posible nivel de demanda del producto.

PROCESOS DE PRODUCCIÓN	NIVEL DE DEMANDA		
	BAJO	MEDIO	ALTO
A	10.000	35.000	90.000
B	15.000	40.000	70.000
C	25.000	40.000	60.000
D	25.000	40.000	55.000

   a) ¿Es inadmisible alguna de las acciones?

   b) ¿Cuál es la mejor elección según el criterio *maximin*?

   c) ¿Cuál es la mejor elección según el criterio de la pérdida *minimax*?

3. Otro criterio para seleccionar una decisión es el criterio *maximax*, también conocido por *criterio del optimismo*. Este criterio elige la acción con el mayor pago posible.

   a) ¿Qué acción elegiría el fabricante de golosinas, con los pagos de la Tabla 19.1, según este criterio?

   b) ¿Qué acción elegiría el inversor del Ejemplo 19.1, según este criterio?

4. El fabricante de golosinas tiene tres acciones admisibles –los procesos A, B y C. Cuando se consideran conjuntamente, se elige el proceso B por el criterio de la pérdida *minimax*. Supongamos que añadimos un cuarto proceso alternativo, el proceso de producción E. Los pagos estimados de esta acción son: 60.000 dólares si la demanda es baja, 115.000 dólares si la demanda es media y 220.000 dólares si la demanda es alta. Mostrar que, cuando se consideran de forma conjunta los procesos A, B, C y E, el proceso A es el elegido según el criterio de la pérdida *minimax*. Por tanto, añadir el nuevo proceso E no lleva a la elección de ese proceso, sin embargo, sí lleva a la elección de un proceso diferente. Comentar el aspecto intuitivo del criterio de la pérdida *minimax* a la vista de este ejemplo.
5. Considerar un problema de decisión con dos acciones posibles y dos estados de la naturaleza.
   a) Encontrar un ejemplo de una tabla de pagos en la que ambas acciones sean admisibles, y los dos criterios, el criterio *maximin* y el de la pérdida *minimax*, lleven a elegir la misma acción.
   b) Encontrar un ejemplo de una tabla de pagos en la que los dos criterios, el criterio *maximin* y el de la pérdida *minimax*, lleven a elegir distintas acciones.
6. Considerar un problema de decisión con dos acciones posibles y dos estados de la naturaleza. Describir cómo debe ser la forma de la tabla de pagos para que se elija la misma acción según el criterio *maximin* y el de la pérdida *minimax*.
7. Una tienda de zapatos tiene la oportunidad de poner un nuevo local en un centro comercial muy conocido y con mucho éxito. Alternativamente, a un coste más bajo, puede poner el nuevo local en un nuevo centro comercial que acaba de construirse. Si el nuevo centro tiene un gran éxito, se esperan unos beneficios anuales de 13 millones, si el éxito es moderado, se esperan unos beneficios anuales de 6 millones de pesetas. Si por el contrario el nuevo centro comercial resulta ser un fracaso, se esperan unas pérdidas de un millón de pesetas. Los beneficios esperados en el centro comercial ya establecido dependen, también, del grado de éxito del nuevo centro, ya que son competidores directos. Si el nuevo centro resulta ser un fracaso, los beneficios obtenidos en la tienda instalada en el centro comercial conocido serán de 9 millones de pesetas. Sin embargo, si el nuevo centro tiene un éxito moderado se esperan unos beneficios de 7 millones de pesetas, y se esperan beneficios de 3 millones de pesetas si tiene un gran éxito.
   a) Construir la tabla de pagos para este problema de decisión.
   b) ¿Qué acción se elige según el criterio *maximin*?
   c) ¿Qué acción se elige según el criterio de la pérdida *minimax*?

19.3 VALOR MONETARIO ESPERADO

Hemos sugerido, anteriormente, que un ingrediente fundamental en el análisis de muchos problemas de decisión es, necesariamente, la apreciación que haga el decisor de cada una de las probabilidades de ocurrir que tienen los respectivos estados de la naturaleza. Los criterios estudiados en la Sección 19.2 no permiten la introducción de este tipo de información en el proceso de decisión. Sin embargo, en casi todos los casos, el director tiene cierta experiencia en el entorno en el que trabaja y querrá explotar esta experiencia a la hora de tomar la decisión. El fabricante de golosinas tendrá, presumiblemente, alguna idea sobre el mercado de su producto y, por tanto, tendrá una apreciación sobre la probabilidad de que la demanda sea baja, media o alta. En esta sección, supondremos que puede asociarse una *probabilidad* de ocurrencia a cada estado de la naturaleza, y veremos cómo pueden utilizarse estas probabilidades para tomar una decisión.

Supongamos que el fabricante de golosinas sabe que, en otras ocasiones, cuando se ha introducido un nuevo producto, el 10% ha tenido una demanda baja, el 50% ha tenido una demanda media y el 40% ha tenido una demanda alta. Si no existe ninguna información más, parece razonable postular que, para este nuevo producto, se dan las siguientes probabilidades para cada estado de la naturaleza:

Probabilidad de demanda baja = 0,1

Probabilidad de demanda media = 0,5

Probabilidad de demanda alta = 0,4

Como debe ocurrir alguno de estos estados de la naturaleza, y, además, sólo puede ocurrir uno cada vez, las probabilidades necesariamente deben sumar 1, es decir, los estados de la naturaleza son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

Al resolver el problema de decisión, se utilizarán estas probabilidades de ocurrencia de cada estado de la naturaleza, además de la tabla de pagos correspondiente a cada combinación de acción y estado de la naturaleza. Es, por tanto, conveniente añadir estas probabilidades a la tabla de pagos, como puede verse en la Tabla 19.6.

En general, cuando hay H posibles estados de la naturaleza, debe asociarse una probabilidad a cada uno de ellos. Llamaremos a estas probabilidades $p_1, p_2, ..., p_H$, de forma que p_j corresponde al estado de la naturaleza s_j. De nuevo, estas probabilidades deben sumar 1, luego

$$\sum_{j=1}^{H} p_j = 1$$

El esquema general del problema de decisión se muestra en la Tabla 19.7.

Al elegir una acción, el decisor tendrá la información de las probabilidades de recibir un determinado pago para cada elección posible y, por tanto, podrá calcular el **pago esperado** que se obtiene de elegir cada una de las opciones. Si el fabricante de golosinas elige el proceso A, obtendrá un pago de 70.000 dólares con probabilidad 0,1, de 120.000 dólares con probabilidad 0,5 y de 200.000 dólares con probabilidad 0,4. El pago esperado de esta acción es, por tanto, la suma de los posibles pagos, ponderados por su probabilidad de ocurrir. Este pago esperado se conoce como **valor monetario esperado** de la acción A. Para el fabricante de golosinas, los pagos esperados para las tres acciones admisibles son:

PROCESO A: (0,1) (70.000) + (0,5)(120.000) + (0,4)(200.000) = 147.000 dólares
PROCESO B: (0,1) (80.000) + (0,5)(120.000) + (0,4)(180.000) = 140.000 dólares
PROCESO C: (0,1)(100.000) + (0,5)(125.000) + (0,4)(160.000) = 136.000 dólares

TABLA 19.6 Pagos y probabilidades de los estados de la naturaleza para el problema del fabricante de golosinas

PROCESO DE PRODUCCIÓN	NIVEL DE DEMANDA		
	BAJA ($p = 0,1$)	MEDIA ($p = 0,5$)	ALTA ($p = 0,4$)
A	70.000	120.000	200.000
B	80.000	120.000	180.000
C	100.000	125.000	160.000

TABLA 19.7 Pagos, M_{ij}, y probabilidades de los estados de la naturaleza, P_j, para un problema de decisión con K acciones admisibles y H estados de la naturaleza

ACCIONES	ESTADOS DE LA NATURALEZA			
	s_1 (p_1)	s_2 (p_2)	$\cdots$	s_H (p_H)
a_1	M_{11}	M_{12}	$\cdots$	M_{1H}
a_2	M_{21}	M_{22}	$\cdots$	M_{2H}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_K	M_{K1}	M_{K2}	$\cdots$	M_{KH}

La fórmula general del valor monetario esperado se incluye en el siguiente recuadro.

Valor monetario esperado

Supongamos que un decisor dispone de K acciones admisibles y se enfrenta a H posibles estados de la naturaleza. Sea M_{ij} el pago correspondiente a la i-ésima acción y el j-ésimo estado de la naturaleza, y p_j la probabilidad de ocurrencia del j-ésimo estado de la naturaleza, con

$$\sum_{j=1}^{H} p_j = 1$$

El **valor monetario esperado**, VME(a_i), de la acción a_i es

$$\mathrm{VME}(a_i) = p_1M_{i1} + p_2M_{i2} + \cdots + p_HM_{iH} = \sum_{j=1}^{H} p_jM_{ij}$$

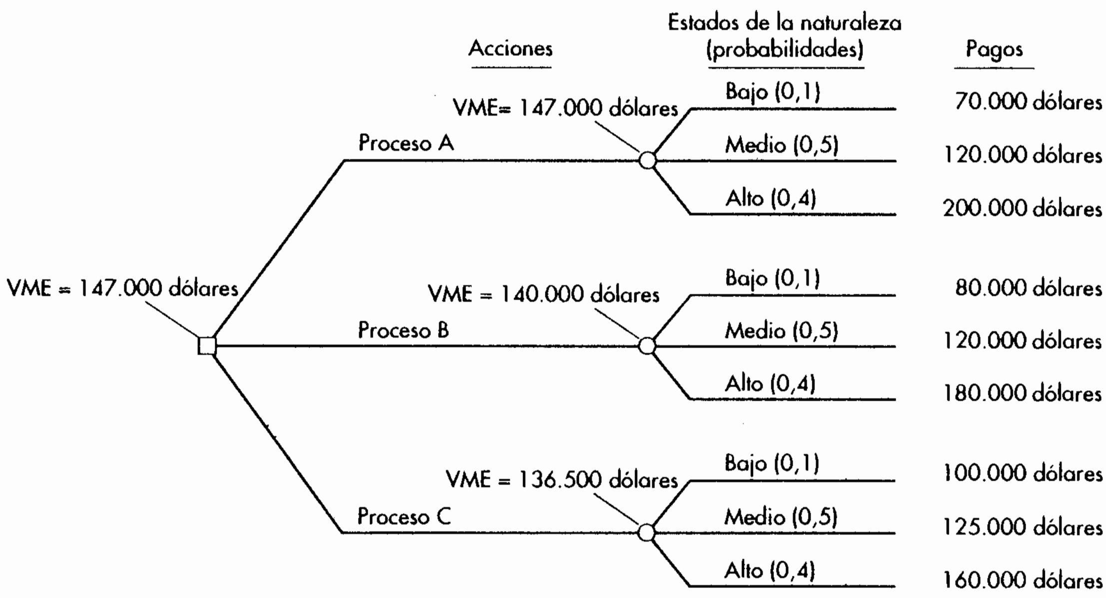
Los valores monetarios esperados asociados a cada vía posible de acción proporcionan al decisor un criterio de selección que será muy interesante en gran número de aplicaciones prácticas. Según este criterio, se adoptaría la acción asociada al máximo valor monetario esperado. Por tanto, siguiendo esta regla, el fabricante de golosinas elegiría el proceso A. Es interesante notar que ni el criterio *maximin* ni el criterio de la pérdida *minimax* llevaron a elegir esta opción. Sin embargo, ahora hemos añadido la información de que es mucho más probable una demanda alta que una demanda baja. Esto hace de la acción A una opción bastante atractiva.

Criterio del valor monetario esperado

Dado un problema de decisión, el **criterio del valor monetario esperado** dice que la acción que debe seguirse es aquélla con el máximo valor monetario esperado.

El análisis de decisión mediante el criterio del valor monetario esperado puede representarse de forma muy conveniente en un diagrama conocido como **árbol de decisión**. Un diagrama de

FIGURA 19.1 Árbol de decisión para el problema del fabricante de golosinas

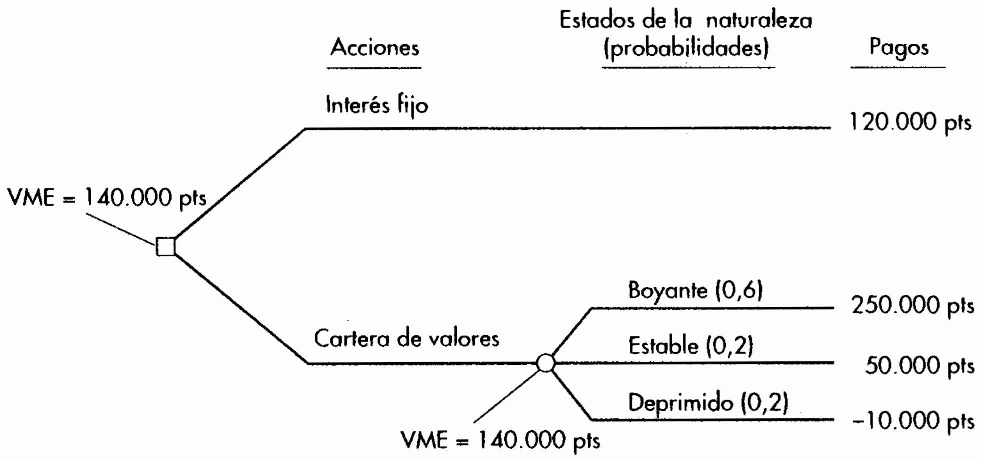


este tipo se muestra en la Figura 19.1. Comenzando por el lado izquierdo, salen tres ramas que representan las tres posibles acciones. Los vértices marcados con un cuadrado son aquellos en los que debe tomarse una decisión. A continuación, llegamos a los vértices marcados con círculos, de los cuales salen ramas que representan los posibles estados de la naturaleza; cada una de ellas tiene asociada su correspondiente probabilidad. Finalmente, en los extremos de estas ramas, se insertan los pagos correspondientes a cada combinación de acción y estado de la naturaleza. Los cálculos se realizan de derecha a izquierda, comenzando con estos pagos. Para cada vértice circular, se halla la suma de los pagos ponderados por sus probabilidades. Esto proporciona el VME de cada acción. Finalmente, el máximo de estos pagos se representa en el vértice marcado con un cuadrado. Vemos que este resultado es el que se obtiene de elegir el proceso A, por tanto, éste será el proceso elegido según el criterio del valor monetario esperado. La elección de esta acción conlleva un valor monetario esperado, o beneficio esperado, de 147.000 dólares para el fabricante de golosinas.

EJEMPLO 19.3 Consideremos, una vez más, el problema del inversor de los Ejemplos 19.1 y 19.2 que debe decidir entre invertir a interés fijo o en una cartera de valores. Supongamos que este inversor es muy optimista acerca del futuro de la bolsa y cree que la probabilidad de que el mercado esté boyante es de 0,6, mientras que cada uno de los otros dos estados del mercado tiene probabilidad 0,2. Los pagos y las probabilidades de los estados de la naturaleza son los que aparecen en la tabla siguiente. ¿Qué inversión debería elegirse de acuerdo con el criterio del valor monetario esperado?

INVERSIÓN	ESTADO DEL MERCADO		
	BOYANTE (p = 0,6)	ESTABLE (p = 0,2)	DEPRIMIDO (p = 0,2)
Interés fijo	120.000	120.000	120.000
Cartera de valores	250.000	50.000	−100.000

FIGURA 19.2 Árbol de decisión para el problema del inversor del Ejemplo 19.3



Teniendo en cuenta que el pago de la inversión a interés fijo es siempre de 120.000 pesetas, pase lo que pase en el mercado de valores, el valor monetario esperado de esta inversión será de 120.000 pesetas. Para la cartera de valores, tenemos

$$\text{VME} = (0{,}6)(250.000) + (0{,}2)(50.000) + (0{,}2)(-100.000) = 140.000 \text{ pesetas}$$

Ya que este valor monetario esperado es mayor que el obtenido con el interés fijo, el inversor elegiría, según este criterio, invertir en una cartera de valores.

El árbol de decisión asociado a este problema se muestra en la Figura 19.2. Nótese que para la acción correspondiente al interés fijo no se representan las ramas de los diferentes estados de la naturaleza, ya que todas ellas conducen al mismo pago. Este pago es, por tanto, el valor monetario esperado.

EJEMPLO 19.4 Este ejemplo muestra una situación en la que deben tomarse una *sucesión* de decisiones. Los árboles de decisión son particularmente útiles en estos casos.

Una empresa farmacéutica tiene los derechos de un nuevo medicamento para aliviar la artritis. Tiene dos opciones; puede vender la patente por 50.000 dólares o comenzar con las pruebas para comprobar la eficacia del nuevo medicamento. Los costes de llevar a cabo estas pruebas son de 10.000 dólares. Si el medicamento resulta no ser efectivo, no se venderá y el coste será una pérdida. En el pasado, otras pruebas como ésta han probado la eficacia del medicamento el 60% de las veces y su ineficacia el 40% de las veces. Una vez que la prueba haya mostrado la efectividad del medicamento, la empresa tiene, otra vez, dos opciones. Puede vender la patente y los resultados de la prueba por 120.000 dólares, o puede comercializar el medicamento directamente. Si el medicamento llega al mercado, se estima que los beneficios sobre las ventas (sin contar el coste de la prueba) serán de 180.000 dólares si la campaña de ventas es buena o de 90.000 dólares si la campaña es moderada. Se estima que estos dos niveles de penetración en el mercado son igualmente probables. ¿Cuál sería la forma de proceder de la empresa farmacéutica según el criterio del valor monetario esperado?

Es mejor atacar este problema utilizando un árbol de decisión. El árbol completo se muestra en la Figura 19.3. Las ramas se construyen comenzando en el lado izquierdo, en el primer punto de decisión. La empresa debe decidir si vender la patente, en cuyo caso no hay nada más que hacer, o conservarla y hacer las pruebas de eficacia. Hay dos posibles estados de la naturaleza –el medicamento es efectivo (con probabilidad 0,6) o no (con probabilidad 0,4). En este último caso se acaba la historia. Sin embargo, si el medicamento resulta efectivo, debe tomarse una nueva decisión –comercializar el medicamento o vender la patente y los resultados de las pruebas. Si se adopta la primera opción, el resultado final quedará determinado por el nivel de éxito de la campaña de ventas, que podría ser buena o moderada (cada una con probabilidad 0,5).

A continuación, se introducen, en la parte derecha del diagrama, los pagos correspondientes a cada combinación de acciones y estados de la naturaleza. Comenzaremos por la parte inferior. Si la primera decisión de la empresa es vender la patente, recibe 50.000 dólares. Si conserva la patente y el medicamento resulta no ser efectivo, obtiene una pérdida de 10.000 dólares, el coste de las pruebas. Esto aparece como un pago negativo. Si, por el contrario, el medicamento resulta ser efectivo y se vende la patente con los resultados de las pruebas, la empresa recibe 120.000 dólares, de los cuales hay que restar los costes de las pruebas, dejando un beneficio de 110.000 dólares. Por último, si el medicamento se comercializa, los pagos resultantes de una buena campaña y una campaña moderada son, respectivamente, 180.000 dólares y 90.000 dólares. Restándole el coste de las pruebas, resultan 170.000 dólares y 80.000 dólares.

Habiendo llegado a este punto, podemos resolver el problema de decisión yendo hacia atrás de derecha a izquierda a través del árbol de decisión. Esto es necesario, ya que la acción apropiada en la primera decisión no puede determinarse hasta haber hallado el valor monetario esperado de cada una de las mejores opciones disponibles en la segunda decisión.

Por tanto, comenzamos suponiendo que se conservó la patente inicialmente y que la prueba dio como resultado que el medicamento es efectivo. Si se venden ahora la patente y los resultados de la prueba, resulta un beneficio de 110.000 dólares. El valor monetario esperado de comercializar el medicamento es

$$(0{,}5)(170.000) + (0{,}5)(80.000) = 125.000 \text{ dólares}$$

Teniendo en cuenta que es mayor que 110.000 dólares, la elección, según el criterio del valor monetario esperado, es comercializar el medicamento. Por tanto, ésta es la cantidad que aparece en el vértice cuadrado correspondiente a la segunda decisión, y se tratará como el pago que obtendría el fabricante si decide conservar la patente y las pruebas determinan que el medicamento es efectivo.

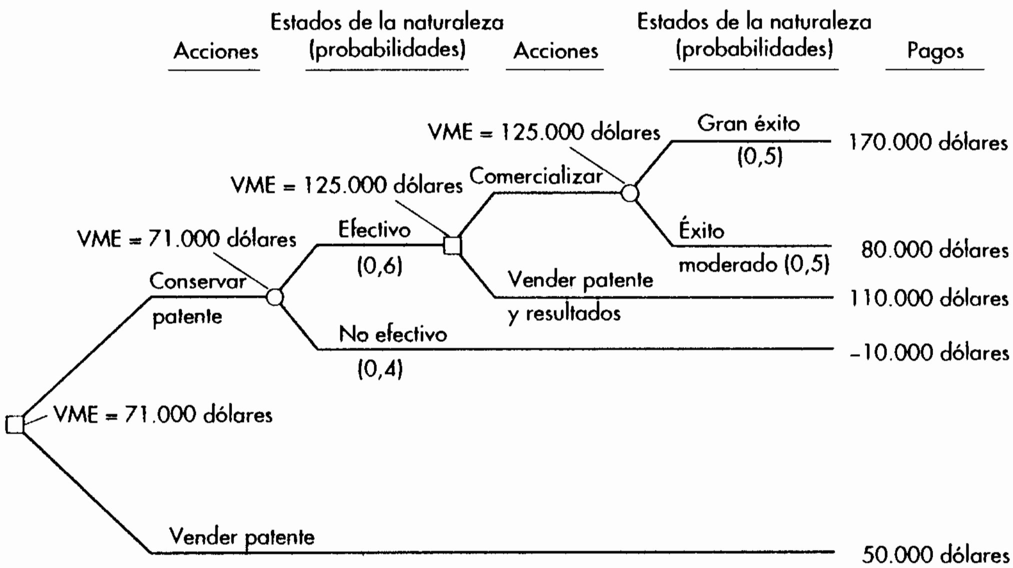
Por consiguiente, para la decisión inicial, la tabla de pagos junto con las probabilidades de cada estado de la naturaleza es la que se refleja en la tabla. El valor monetario esperado de vender la patente es de 50.000 dólares asegurados, mientras que el valor monetario esperado de conservar la patente es

$$(0{,}6)(125.000) + (0{,}4)(-10.000) = 71.000 \text{ dólares}$$

Luego, por el criterio del valor monetario esperado, la patente debería conservarse.

ACCIONES	ESTADOS DE LA NATURALEZA	
	EFECTIVO ($p = 0{,}6$)	NO EFECTIVO ($p=0{,}4$)
Conservar la patente	125.000	−10.000
Vender la patente	50.000	50.000

FIGURA 19.3 Árbol de decisión de la empresa farmacéutica del Ejemplo 19.4



Por tanto, hemos llegado a la conclusión de que si el objetivo es la maximización del valor monetario esperado (es decir, del beneficio esperado), el fabricante debería conservar la patente y, si tras hacer las pruebas el medicamento resulta efectivo, comercializar él mismo el producto.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En el ejemplo del fabricante de golosinas, hallamos que, según el criterio del valor monetario esperado, debería utilizarse el proceso de producción A. Esta decisión se tomó a la vista de los pagos estimados para cada combinación de acción y estado de la naturaleza y de las probabilidades estimadas de cada estado de la naturaleza. Sin embargo, a menudo, el decisor no tendrá la seguridad de que estas estimaciones sean correctas. Por esta razón, es útil preguntarse para qué rango de especificaciones del problema de decisión una acción particular es óptima según el criterio del valor monetario esperado. El análisis de sensibilidad busca respuestas a esta pregunta. El caso más sencillo es el caso en que se permite cambiar una única especificación del problema mientras que las demás permanecen fijas.

Para ilustrar este concepto, supongamos que el fabricante de golosinas está convencido de que la probabilidad de que haya una demanda alta es 0,4, pero está menos seguro de las especificaciones de los otros dos estados de la naturaleza. Sea p la probabilidad de que la demanda sea baja, es decir, $(0{,}6\text{-}p)$ será la probabilidad de que la demanda sea media. Nos preguntamos, a continuación, bajo qué rango de valores de p la elección del proceso A sigue siendo óptima según el criterio del valor monetario esperado. Utilizando los pagos de la Tabla 19.6, los valores monetarios esperados de cada acción son

$$\text{VME(A)} = (p)\ (70.000) + (0{,}6-p)(120.000) + (0{,}4)(200.000) = 152.000 - 50.000p$$
$$\text{VME(B)} = (p)\ (80.000) + (0{,}6-p)(120.000) + (0{,}4)(180.000) = 144.000 - 40.000p$$
$$\text{VME(C)} = (p)(100.000) + (0{,}6-p)(125.000) + (0{,}4)(160.000) = 139.000 - 25.000p$$

El proceso A seguirá siendo óptimo mientras su VME asociado sea mayor que los de los otros dos procesos. Por tanto, para que A sea mejor que B debe ser

$$152.000 - 50.000p \geq 144.000 - 40.000p$$

o

$$8.000 \geq 10.000p$$

por tanto,

$$p \leq 0{,}8$$

Esto es siempre cierto, ya que según nuestras hipótesis, la probabilidad de demanda baja no puede superar en ningún caso 0,6. Análogamente, para que el proceso A sea mejor que el C, debe cumplirse

$$152.000 - 50.000p \geq 139.000 - 25.000p$$

o

$$13.000 \geq 25.000p$$

por tanto,

$$p \leq 0{,}52$$

Por consiguiente, la conclusión es que, con los pagos especificados en la Tabla 19.6 y siendo la probabilidad de demanda alta igual a 0,4, el proceso de producción A es la mejor elección según el criterio del valor monetario esperado, si la probabilidad de demanda baja es menor o igual que 0,52.

Supongamos, ahora, que el fabricante de golosinas no está seguro de que el pago, si elige el proceso A y la demanda resulta ser alta, sea de 200.000 dólares. Estudiaremos bajo qué rango de posibles pagos el proceso A sigue siendo la elección óptima cuando todas las demás especificaciones permanecen como en la Tabla 19.6. Si llamamos M al pago del proceso A bajo demanda alta, el valor monetario esperado para este proceso es

$$\text{VME(A)} = (0{,}1)(70.000) + (0{,}5)(120.000) + 0{,}4M = 67.000 + 0{,}4M$$

Los valores monetarios esperados correspondientes a los procesos B y C son, como antes, 140.000 dólares y 136.500 dólares, respectivamente. Por tanto, el proceso de producción A seguirá siendo óptimo según el criterio del valor monetario esperado si se cumple que

$$67.000 + 0{,}4M \geq 140.000$$

o

$$0{,}4M \geq 73.000$$

por tanto,

$$M \geq 182.500 \text{ dólares}$$

Hemos probado, entonces, que si todas las demás especificaciones permanecen como en la Tabla 19.6, el proceso de producción A será la mejor elección, según el criterio del valor monetario esperado, si el pago correspondiente al proceso A bajo demanda alta es, al menos, de 182.500 dólares.

19.4 UTILIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN MUESTRAL: ANÁLISIS BAYESIANO

Las decisiones que deben tomarse en los negocios pueden involucrar grandes cantidades de dinero, y el coste de tomar una decisión que no sea la óptima puede ser enorme. Siendo así, merece la pena que el decisor haga el esfuerzo necesario para obtener toda la información que pueda antes de tomar la decisión. En particular, debería informarse en profundidad sobre las probabilidades de ocurrencia de cada estado de la naturaleza que influya en el problema.

Esta característica de los problema de decisión no ha aparecido hasta ahora. El fabricante de golosinas estableció las probabilidades de demanda baja, media y alta para el nuevo producto en 0,1, 0,5 y 0,4, respectivamente. Sin embargo, esta especificación sólo refleja las proporciones que se obtuvieron en el pasado con otros productos. En la práctica, lo que el fabricante haría es llevar a cabo un estudio de mercado para conocer las perspectivas del nuevo producto. Una vez concluido este estudio, estas **probabilidades *a priori*** pueden modificarse, obteniendo nuevas probabilidades, que llamaremos **probabilidades *a posteriori***, para cada nivel de demanda. La información (en este caso el estudio de mercado) que nos lleva a hacer esta modificación se llama **información muestral**.

De hecho, ya vimos en la Sección 3.8, cuál era el mecanismo para pasar de probabilidades *a priori* a probabilidades *a posteriori*. Nos referimos al **teorema de Bayes**, que, por conveniencia, repetimos en el siguiente recuadro [1], adaptado al esquema de los problemas de decisión.

Teorema de Bayes

Sean $s_1, s_2, \ldots, s_H$, H sucesos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, que corresponden a H estados de la naturaleza de un problema de decisión. Sea A otro suceso diferente. Representaremos por $P(s_i|A)$ la probabilidad de que ocurra s_i, dado que ha ocurrido A, y por $P(A|s_i)$ la probabilidad de A dado s_i.

La probabilidad condicional de s_i, dado A, puede expresarse como

$$P(s_i \mid A) = \frac{P(A \mid s_i)P(s_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid s_i)P(s_i)}{P(A \mid s_1)P(s_1) + P(A \mid s_2)P(s_2) + \cdots + P(A \mid s_H)P(s_H)}$$

En la terminología de esta sección, $P(s_i)$, es la **probabilidad *a priori*** de s_i y se transforma en la **probabilidad *a posteriori*** $P(s_i|A)$, utilizando la **información muestral** de que ha ocurrido el suceso A.

[1] Antes de seguir adelante, el lector podría estar interesado en revisar la Sección 3.8.

Supongamos ahora que el fabricante de golosinas contrata a una empresa de estudios de mercado para que haga una previsión del nivel de demanda para su producto [2]. La empresa cataloga la demanda como "mala", "moderada" o "buena", en base a sus estudios. Los archivos de esta empresa de investigación de mercados son una prueba de la calidad de sus predicciones en este campo. La Tabla 19.8 muestra, para cada nivel de demanda real, la proporción de veces que la empresa predijo que la demanda iba a ser mala, moderada y buena. Por ejemplo, el 10% de las veces que la demanda fue alta, la empresa había previsto que sería "mala". Por tanto, con notación probabilística, llamando s_1, s_2 y s_3 a demanda baja, media y alta, respectivamente, tenemos

$$P(\text{Mala} \mid s_1) = 0{,}6 \qquad P(\text{Mala} \mid s_2) = 0{,}3 \qquad P(\text{Mala} \mid s_3) = 0{,}1$$

y así sucesivamente.

TABLA 19.8 Proporción de cada una de las previsiones proporcionadas por la empresa de estudios de mercado según los diferentes niveles de demanda

PREDICCIÓN	NIVEL DE DEMANDA		
	BAJA (s_1)	MEDIA(s_2)	ALTA(s_3)
Mala	0,6	0,3	0,1
Moderada	0,2	0,4	0,2
Buena	0,2	0,3	0,7

Supongamos que se consulta a la empresa de estudios de mercado y ésta cataloga la demanda para el nuevo producto como "mala". Con esta nueva información, las probabilidades *a priori*

$$P(s_1) = 0{,}1 \qquad P(s_2) = 0{,}5 \qquad P(s_3) = 0{,}4$$

para los tres niveles de demanda pueden modificarse utilizando el teorema de Bayes. Para un nivel de demanda bajo, la probabilidad *a posteriori* es

$$P(s_1 \mid \text{Mala}) = \frac{P(\text{Mala} \mid s_1)P(s_1)}{P(\text{Mala} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Mala} \mid s_2)P(s_2) + P(\text{Mala} \mid s_3)P(s_3)}$$

$$= \frac{(0{,}6)(0{,}1)}{(0{,}6)(0{,}1) + (0{,}3)(0{,}5) + (0{,}1)(0{,}4)} = \frac{0{,}06}{0{,}25} = 0{,}24$$

Análogamente, para los otros dos niveles de demanda, las probabilidades *a posteriori* son

$$P(s_2 \mid \text{Mala}) = \frac{(0{,}3)(0{,}5)}{0{,}25} = 0{,}60 \qquad P(s_3 \mid \text{Mala}) = \frac{(0{,}1)(0{,}4)}{0{,}25} = 0{,}16$$

Las probabilidades *a posteriori* pueden utilizarse para calcular los valores monetarios esperados. En la Tabla 19.9 se muestran los pagos y las probabilidades *a posteriori* para los tres niveles de demanda. Esta es simplemente una modificación de la Tabla 19.6, donde se han reemplazado las probabilidades *a priori* por probabilidades *a posteriori*.

Los valores monetarios esperados para los tres procesos de producción pueden calcularse exactamente como antes. En nuestro caso son

[2] Tendrá, evidentemente, que pagar por este servicio. En la Sección 19.5, comentaremos hasta qué punto merecen la pena los beneficios comparados con los costes.

PROCESO A = (0,24) (70.000) + (0,60)(120.000) + (0,16)(200.000) = 120.800 dólares
PROCESO B = (0,24) (80.000) + (0,60)(120.000) + (0,16)(180.000) = 120.000 dólares
PROCESO C = (0,24)(100.000) + (0,60)(125.000) + (0,16)(160.000) = 124.600 dólares

Vemos que, si la previsión de la demanda es que va a ser "mala", debería elegirse el proceso C, según el criterio del valor monetario esperado. La empresa de estudios ha dado a la opción de demanda baja mucha más probabilidad y a la de demanda alta bastante menos que en la estimación del fabricante. Este cambio en las perspectivas del mercado ha sido suficiente para inducir un cambio en las preferencias del fabricante, que ha pasado de elegir el proceso A (basándose en probabilidades *a priori*) a elegir el proceso C.

TABLA 19.9 Pagos y probabilidades *a posteriori* de los estados de la naturaleza, dado que la previsión a sido "mala", para el problema del fabricante de golosinas

PROCESO DE PRODUCCIÓN	NIVEL DE DEMANDA		
	BAJA (p = 0,24)*	MEDIA (p = 0,60)*	ALTA (p = 0,16)*
A	70.000	120.000	200.000
B	80.000	120.000	180.000
C	100.000	125.000	160.000

* Probabilidad *a posteriori*.

Siguiendo la misma línea de razonamiento, se pueden determinar las decisiones que se tomarían si las previsiones para la demanda del mercado fueran "moderada" o "buena". De nuevo, pueden obtenerse las probabilidades *a posteriori* a través del Teorema de Bayes. Si la previsión es "moderada", resultan ser

$$P(s_1 \mid \text{Moderada}) = \frac{1}{15} \qquad P(s_2 \mid \text{Moderada}) = \frac{2}{3} \qquad P(s_3 \mid \text{Moderada}) = \frac{4}{15}$$

si la previsión es "buena", entonces,

$$P(s_1 \mid \text{Buena}) = \frac{2}{45} \qquad P(s_2 \mid \text{Buena}) = \frac{1}{3} \qquad P(s_3 \mid \text{Buena}) = \frac{28}{45}$$

Utilizando las probabilidades *a posteriori*, podemos determinar los valores monetarios esperados para cada proceso de producción dadas cada posible previsión. Estas cantidades están contenidas en la Tabla 19.10.

Como ya hemos visto, si la previsión es "mala", el proceso C es el mejor, según el criterio del valor monetario esperado. Para cualquier otra previsión, elegiremos el proceso de producción A, según este criterio.

Si recordamos el problema del fabricante de golosinas, cuando se utilizaban las probabilidades *a priori* para los niveles de demanda, la decisión óptima según el criterio del valor monetario esperado era utilizar el proceso de producción A. Puede ocurrir (si se obtiene una previsión "mala") que se tome una decisión diferente cuando se corrigen éstas usando la información muestral. Por tanto, resulta que consultar a la empresa de estudios podría merecer la pena. Por supuesto, si el resultado hubiera sido que en cualquier caso la elección óptima es el proceso A, la información muestral habría sido inútil.

EJEMPLO 19.5 En el Ejemplo 19.4, la empresa farmacéutica debe decidir, antes de someter al nuevo medicamento a las pruebas de efectividad, si vende la patente o la conserva. (Posteriormente, si decide conservar la patente y el medicamento resulta ser efectivo, debe tomar otra decisión, si vende la patente junto con los resultados de las pruebas o si comercializa el producto directamente.) Para la decisión inicial, los estados de la naturaleza son

s_1 : el medicamento es efectivo
s_2 : el medicamento no es efectivo

Las probabilidades *a priori*, basadas en experiencias anteriores, son

$$P(s_1) = 0{,}6 \qquad\qquad P(s_2) = 0{,}4$$

TABLA 19.10 Valores monetarios esperados para el fabricante de golosinas para las tres posibles previsiones de la empresa de estudios de mercado

PROCESO DE PRODUCCIÓN	PREVISIÓN DE DEMANDA		
	MALA	MODERADA	BUENA
A	120.800	138.000	167.556
B	120.000	133.333	155.556
C	124.600	132.667	145.667

La empresa farmacéutica tiene la opción de llevar a cabo, con un coste bajo, una pruebas preliminares antes de tomar la primera decisión. Estas pruebas no son infalibles. Para medicamentos que finalmente resultaron ser efectivos, el 60% de las veces las pruebas dieron un resultado positivo y el resto de las veces dieron un resultado negativo. Para medicamentos no efectivos, se obtuvieron resultados positivos un 30% de las veces, en el resto de los casos el resultado fue negativo. Dados los resultados de la prueba preliminar, ¿cómo debería actuar la empresa farmacéutica? Supongamos que todavía se puede vender la patente por 50.000 dólares, aunque la prueba preliminar haya sido negativa.

Primero, si se decide conservar la patente y las pruebas definitivas determinan que el medicamento es efectivo, entonces, si no disponemos de ninguna información muestral acerca de las condiciones del mercado, la decisión óptima, en este paso, es, como en el Ejemplo 19.4, comercializar el medicamento. La información proporcionada por las pruebas preliminares es irrelevante al tomar esta decisión. Sin embargo, es posible que influya en la decisión inicial de vender la patente o no. Por esta razón, debemos concentrarnos únicamente en esta decisión.

Las probabilidades condicionales de los resultados muestrales, dados los estados de la naturaleza, son

$$P(\text{Positivo} \mid s_1) = 0{,}6 \qquad\qquad P(\text{Negativo} \mid s_1) = 0{,}4$$
$$P(\text{Positivo} \mid s_2) = 0{,}3 \qquad\qquad P(\text{Negativo} \mid s_2) = 0{,}7$$

Si el resultado de las pruebas preliminares es positivo, la probabilidad *a posteriori* del estado s_1 (efectiva), dada esta información, es

$$P(s_1 \mid \text{Positivo}) = \frac{P(\text{Positivo} \mid s_1)P(s_1)}{P(\text{Positivo} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Positivo} \mid s_2)P(s_2)} = \frac{(0{,}6)(0{,}6)}{(0{,}6)(0{,}6) + (0{,}3)(0{,}4)} = 0{,}75$$

Además, como las dos probabilidades *a posteriori* deben sumar 1, tenemos

$$P(s_2 \mid \text{Positivo}) = 0{,}25$$

La siguiente tabla de pagos es la misma que la del Ejemplo 19.4, pero una vez añadidas estas probabilidades *a posteriori*.

ACCIONES	ESTADOS DE LA NATURALEZA	
	EFECTIVO (p = 0,75)*	NO EFECTIVO (p = 0,25)*
Conservar la patente	125.000	−10.000
Vender la patente	50.000	50.000

* Probabilidad *a posteriori*

El valor monetario esperado, si se vende la patente, es de 50.000 dólares, mientras que si se conserva la patente, el valor monetario esperado es

$$(0{,}75)(125.000) + (0{,}25)(-10.000) = 91.250 \text{ dólares}$$

Por tanto, si el resultado preliminar es positivo, la patente debería conservarse, según este criterio.

A continuación, consideraremos el caso en el que el resultado preliminar es negativo. La probabilidad *a posteriori* para el estado s_1 es, por el Teorema de Bayes,

$$P(s_1 \mid \text{Negativo}) = \frac{P(\text{Negativo} \mid s_1)P(s_1)}{P(\text{Negativo} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Negativo} \mid s_2)P(s_2)} = \frac{(0{,}4)(0{,}6)}{(0{,}4)(0{,}6) + (0{,}7)(0{,}4)} = 0{,}4615$$

Entonces, la probabilidad *a posteriori* del estado s_2 es

$$P(s_2 \mid \text{Negativo}) = 0{,}5385$$

Una vez más, si se vende la patente, el valor monetario esperado es de 50.000 dólares. Si, por el contrario, se conserva la patente, el valor monetario esperado de tomar esta decisión es

$$(0{,}4615)(125.000) + (0{,}5385)(-10.000) = 52.302{,}50 \text{ dólares}$$

Entonces, a pesar de que el resultado de las pruebas preliminares sea negativo, la decisión óptima es, según el criterio del valor monetario esperado, conservar la patente.

En este caso particular, sea cual sea la información muestral, la elección es la misma. La empresa debe conservar la patente aunque el resultado de las pruebas preliminares sea negativo. Teniendo en cuenta que la información muestral no puede afectar a la decisión, no hay, evidentemente, razón para intentar obtenerla. En realidad, como llevar a cabo las pruebas preliminares debe producir algún coste, no sería óptimo hacerlas. Por tanto, concluimos que, de acuerdo con el criterio del valor monetario esperado, la empresa farmacéutica debe conservar la patente y, si las pruebas definitivas determinan que el medicamento es efectivo, debe comercializarlo directamente. Las pruebas preliminares no deben llevarse a cabo.

19.5 EL VALOR DE LA INFORMACIÓN MUESTRAL

Hemos visto cómo puede incorporarse la información muestral en un problema de decisión. El valor potencial de esta información es, por supuesto, poder precisar mejor las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza que son relevantes para el problema. Esto, a su vez, puede proporcionar una base más sólida en la que apoyar las decisiones. En esta sección, veremos cómo puede asociarse un valor *monetario* a la información muestral. Esto es importante, ya que, normalmente, obtener la información muestral implicará un coste, y el decisor querrá saber si los beneficios esperados superan los costes.

En el Ejemplo 19.5, consideramos la situación en la que, fuera cual fuera el resultado muestral, la decisión óptima era la misma. En estos casos, la información muestral no tiene ningún valor, ya que se habría tomado la misma decisión sin ella. Esta es una regla general: si la información muestral no puede afectar la decisión, tiene valor 0.

Por esta razón, en el resto de esta sección, sólo consideraremos aquellas circunstancias en las que los resultados muestrales pueden afectar la elección final. El ejemplo del fabricante de golosinas que planea introducir un nuevo producto en el mercado es uno de estos casos. Este fabricante debe elegir entre tres procesos de producción diferentes y se enfrenta a tres posibles estados de la naturaleza, que representan diferentes niveles de demanda para el producto. En la Sección 19.3, vimos que, a falta de información muestral y utilizando únicamente las probabilidades *a priori,* la elección era el proceso A, con un valor monetario esperado de 147.000 dólares.

Ahora, en la práctica, el hecho de haber tomado información muestral no proporciona la seguridad sobre qué estado de la naturaleza ocurrirá, pero si proporciona una base más sólida para establecer las probabilidades de estos estados. Sin embargo, antes de comenzar a comentar el valor de la información muestral en este contexto general, es útil considerar el caso en que puede obtenerse **información perfecta,** es decir, el caso en que el decisor puede saber *con certeza* qué estado de la naturaleza ocurrirá. ¿Cuál es el valor, para el decisor, de disponer de esta información perfecta?

En el contexto del ejemplo del fabricante de golosinas, la información perfecta consiste en saber cuál de los tres posibles niveles de demanda se dará realmente. A falta de información muestral, y basándose únicamente en las probabilidades *a priori,* se elige el proceso A. Sin embargo, si observamos la Tabla 19.6, vemos que, si se supiera que el nivel de demanda va a ser bajo, la mejor elección será el proceso C. Como la diferencia entre los pagos del proceso C y del proceso A es de 30.000 dólares, el valor de la información de que la demanda va a ser baja es de 30.000 dólares. Análogamente, si se supiera con certeza que la demanda va a ser media, también se elegiría el proceso C. En este caso, el pago de la mejor elección posible es mayor que el de A en 5.000 dólares, que es, por tanto, el valor de la información de que la demanda va a ser media. Si se supiera que la demanda va a ser alta, se elegiría el proceso A. Por tanto, esta información particular no tiene ningún valor, ya que se tomaría la misma decisión en caso de no disponer de ella. Vemos, por consiguiente, que el valor de la información perfecta depende de cuál sea la información. Utilizando las probabilidades *a priori* de los diferentes estados de la naturaleza, podemos hallar el **valor esperado de la información perfecta.**

Para el ejemplo del fabricante de golosinas, las probabilidades *a priori* son 0,1 para demanda baja, 0,5 para demanda media y 0,4 para demanda alta. Por tanto, se concluye que, para el fabricante de golosinas, el valor de la información perfecta es de 30.000 dólares con probabilidad 0,1, 5.000 dólares con probabilidad 0,5 y 0 dólares con probabilidad 0,4. Por tanto, el valor esperado de la información perfecta es

$$(0{,}1)(30.000) + (0{,}5)(5.000) + (0{,}4)(0) = 5.500 \text{ dólares}$$

Esta cantidad representa, entonces, el valor esperado, para el fabricante de golosinas, de saber qué demanda tendrá su producto.

Vemos a continuación, en el recuadro, el procedimiento general para calcular el valor de la información perfecta.

Valor esperado de la información perfecta

Supongamos que un decisor debe elegir entre K posibles acciones y enfrentarse a H estados de la naturaleza $s_1, s_2, ..., s_H$. La **información perfecta** corresponde a saber con certeza qué estado de la naturaleza ocurrirá. El valor esperado de la información perfecta se obtiene como se explica a continuación:

(i) Determinar qué acción se elegiría considerando únicamente las probabilidades *a priori* $P(s_1), P(s_2), ..., P(s_H)$.

(ii) Para cada posible estado de la naturaleza, s_i, hallar la diferencia, W_i, entre el pago de la mejor elección posible, si se supiera que va a ocurrir este estado de la naturaleza, y el pago de la acción elegida teniendo en cuenta sólo las probabilidades *a priori*. Éste es el valor de la información perfecta, cuando se sabe que va a ocurrir el estado s_i.

(iii) El valor esperado de la información perfecta es, por tanto,

$$P(s_1)W_1 + P(s_2)W_2 + \cdots + P(s_H)W_H$$

Ahora, a pesar de que, en general, no se dispondrá de información perfecta, los cálculos del valor esperado de la información perfecta pueden ser útiles. Teniendo en cuenta que, evidentemente, no hay información muestral mejor que la perfecta, el valor esperado será siempre menor o igual que el valor esperado de la información perfecta. Por tanto, la información perfecta proporciona una *cota superior* para el valor esperado de cualquier información muestral. Por ejemplo, si se le ofrece información al fabricante de golosinas a un precio de 6.000 dólares, no es necesario que investigue nada sobre la calidad de esta información. Según el criterio del valor monetario esperado, no debería comprarla, por muy fiable que sea, ya que su valor esperado no puede ser mayor que 5.500 dólares.

Pasamos, ahora, al problema más general de establecer el valor de la información muestral que no es necesariamente perfecta. De nuevo, consideraremos el problema de decisión del fabricante de golosinas, que tiene la opción de conseguir un informe de una empresa de estudios de mercado sobre las previsiones de demanda para su producto. Estas previsiones serán "mala", "moderada" o "buena". Ya vimos en la Sección 19.4 que en las dos últimas de las tres opciones, se elegiría de todas formas el proceso A. Por tanto, si se obtiene una previsión de demanda "moderada" o "buena", se conserva la decisión inicial, y no se ganaría nada de consultar a la empresa de estudios.

Si las previsiones son de demanda "mala", sin embargo, vemos en la Tabla 19.10 que la elección óptima es el proceso C. Esta elección óptima proporcionaría un valor monetario esperado de 124.600 dólares, mientras que el proceso A, que sería el que se habría utilizado si no se tuviera esta información, proporciona un valor monetario esperado de 120.800 dólares. La diferencia entre estas dos cantidades es de 3.800 dólares, y representa la ganancia obtenida de la información muestral *si la previsión es de demanda "mala"*.

Por tanto, las ganancias obtenidas de la información muestral son 0 dólares para las previsiones "buena" y "moderada", y 3.800 dólares de la previsión "mala".

Debemos averiguar, ahora, cómo es de probable que se den cada una de estas previsiones. En nuestro ejemplo, debemos averiguar cuál es la probabilidad de una previsión de demanda "mala". En general, si A representa la información muestral y $s_1, s_2, ..., s_H$ los H posibles estados de la naturaleza, entonces,

$$P(A) = P(A \mid s_1)P(s_1) + P(A \mid s_2)P(s_2) + \cdots + P(A \mid s_H)P(s_H)$$

En el ejemplo del fabricante de golosinas, si s_1, s_2, s_3 representan los niveles de demanda alto, medio y bajo, respectivamente, hemos visto que

$$P(s_1) = 0{,}1 \qquad P(s_2) = 0{,}5 \qquad P(s_3) = 0{,}4$$

y

$$P(\text{Mala} \mid s_1) = 0{,}6 \qquad P(\text{Mala} \mid s_2) = 0{,}3 \qquad P(\text{Mala} \mid s_3) = 0{,}1$$

Por tanto, la probabilidad de una previsión de demanda "mala" es

$$P(\text{Mala}) = P(\text{Mala} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Mala} \mid s_2)P(s_2) + P(\text{Mala} \mid s_3)P(s_3)$$
$$= (0{,}6)(0{,}1) + (0{,}3)(0{,}5) + (0{,}1)(0{,}4) = 0{,}25$$

De la misma forma, utilizando las probabilidades condicionales de la Tabla 19.8, obtenemos las siguientes probabilidades para las otras dos previsiones:

$$P(\text{Moderada}) = 0{,}30 \qquad\qquad P(\text{Buena}) = 0{,}45$$

Vemos que el valor de la información muestral es de 3.800 dólares con probabilidad 0,25, 0 dólares con probabilidad 0,30 y 0 dólares con probabilidad 0,45. Por tanto, el **valor esperado de la información muestral** es

$$(0{,}25)(3.800) + (0{,}30)(0) + (0{,}45)(0) = 950 \text{ dólares}$$

Esta cantidad, entonces, representa el valor esperado de la información muestral para el decisor. En términos del criterio del valor monetario esperado merecería la pena adquirir esta información si su coste es menor que su valor esperado. Definimos el **valor neto esperado de la información muestral** como la diferencia entre su valor y su coste.

Supongamos que la empresa de estudios de mercado cobre una cantidad des 750 dólares por la información. El valor neto esperado de la información muestral es 950 – 750 = 200 dólares. Entonces, el pago esperado del fabricante será 200 dólares más alto si se adquiere la información muestral. Esta cantidad representa el beneficio esperado de tener esta información, teniendo en cuenta su coste. En este caso, la estrategia óptima del fabricante es comprar el informe de la empresa de estudios de mercado y utilizar el proceso de producción A si la previsión es de demanda "moderada" o "buena", y el proceso C si la previsión es "mala". El valor monetario esperado de esta estrategia es de 147.200 dólares –los 147.000 dólares que resultan de no utilizar información muestral, más el valor neto esperado de la información muestral.

El esquema general para calcular el valor de la información muestral se resume en el siguiente recuadro.

Valor esperado de la información muestral

Supongamos que un decisor debe elegir entre K posibles acciones y debe enfrentarse a H estados de la naturaleza $s_1, s_2, ..., s_H$. El decisor puede conseguir información muestral. Supongamos que hay M posibles resultados muestrales $A_1, A_2, ..., A_M$.

El valor esperado de la información muestral se obtiene como se explica a continuación:

(i) Determinar qué acción se elegiría considerando únicamente las probabilidades *a priori*.

(ii) Determinar las probabilidades de obtener cada uno de los resultados muestrales:

$$P(A_i) = P(A_i \mid s_1)P(s_1) + P(A_i \mid s_2)P(s_2) + \cdots + P(A_i \mid s_H)P(s_H)$$

(iii) Para cada posible resultado muestral, A_i, hallar la diferencia, V_i, entre el valor monetario esperado de la mejor elección posible y el de la acción elegida, teniendo en cuenta sólo las probabilidades *a priori*. Éste es el valor de la información muestral cuando se ha observado A_i.

(iv) El valor esperado de la información muestral es, por tanto,

$$P(A_1)V_1 + P(A_2)V_2 + \cdots + P(A_M)V_M$$

El valor neto esperado del información muestral es la diferencia entre su valor esperado y su coste.

Según el criterio del valor monetario esperado, el decisor debe adquirir la información muestral si su valor neto esperado es positivo. En otro caso, no debería adquirir la información muestral.

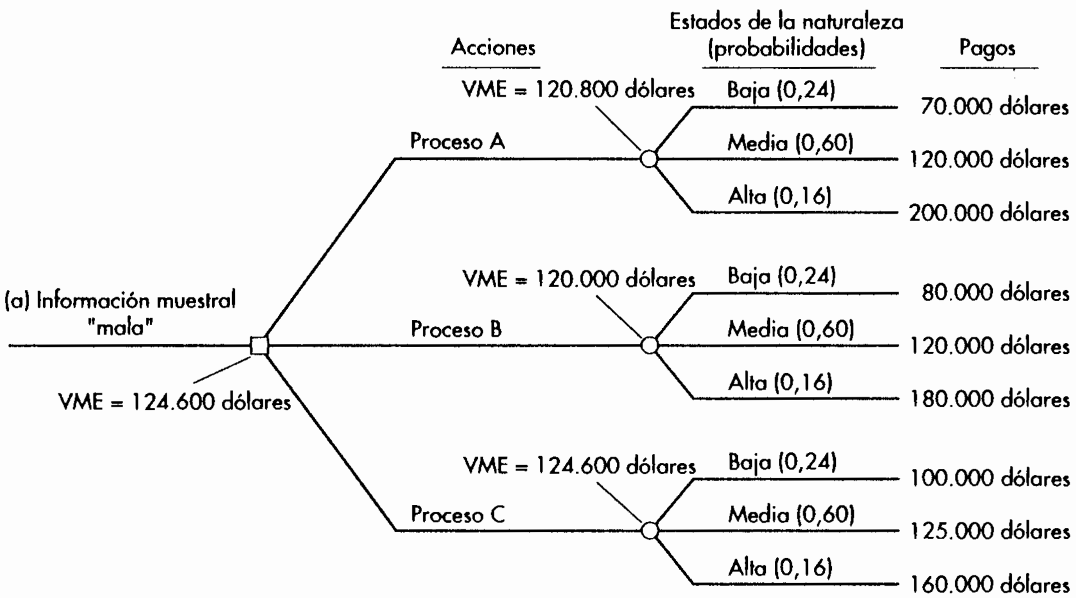
VALOR DE LA INFORMACIÓN MUESTRAL DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS ÁRBOLES DE DECISIÓN

El valor esperado de la información muestral puede calcularse de una manera alternativa (pero equivalente). Ésta es un poco más complicada desde el punto de vista aritmético, pero, en cambio, proporciona un método conveniente de representar el problema en términos de una sucesión de decisiones a través de un árbol de decisión. La primera decisión que debe tomarse es si obtener o no información muestral. A continuación hay que decidir qué línea de acción tomar.

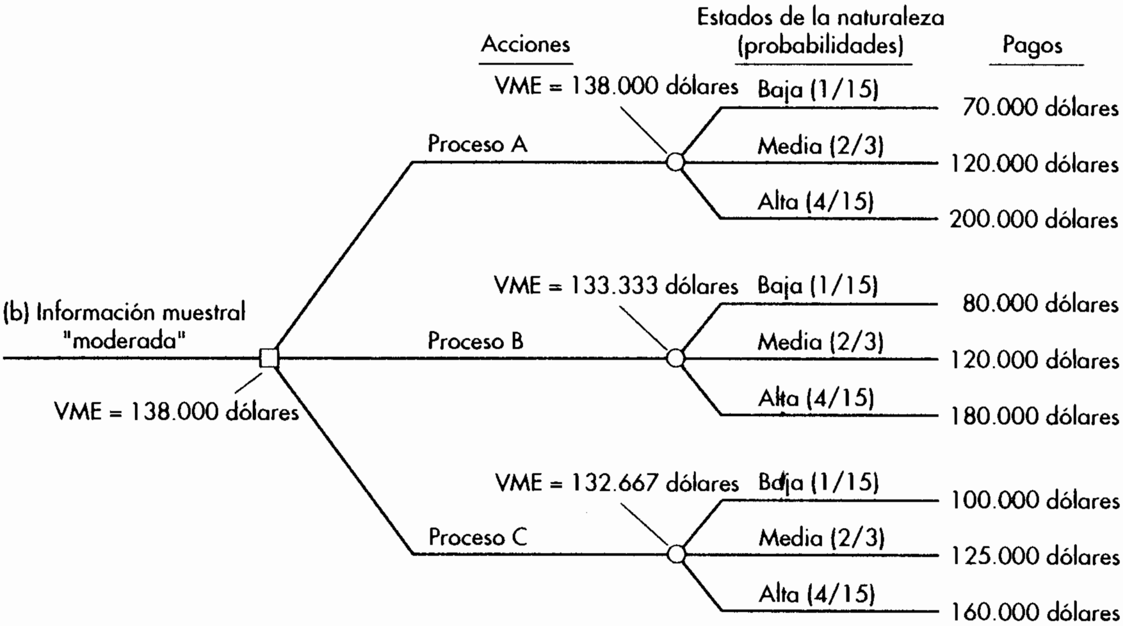
Como ilustración, consideremos una vez más el problema del fabricante de golosinas. La Figura 19.4 muestra los árboles de decisión que resultan de las tres posibles previsiones del estudio de mercado. Estos árboles tienen la misma estructura general que el de la Figura 19.1. La diferencia esencial es que las probabilidades asociadas a cada estado de la naturaleza son las *probabilidades a posteriori* apropiadas, dada la correspondiente información muestral. Estas probabilidades *a posteriori* se hallaron en la Sección 19.4. Los pagos se ponderan ahora por las probabilidades *a posteriori*, originando los correspondientes valores monetarios esperados de cada acción, dado cada posible resultado muestral. Éstos son los valores monetarios esperados de la Tabla 19.10. Finalmente, en la parte izquierda de la Figura 19.4, aparece el máximo valor monetario esperado posible para cada resultado muestral.

Esta información se transfiere a la parte derecha de la Figura 19.5, en la que se analiza la decisión de si debe adquirirse el informe del estudio de mercado. Si no se compra esta información, vemos, en la parte inferior de la figura, un valor monetario esperado de 147.000 dólares. Este resultado se obtiene de considerar únicamente las probabilidades *a priori*, y puede encontrarse en la Figura 19.1

FIGURA 19.4 Árboles de decisión para el fabricante de golosinas, dado que las previsiones han sido (a) "mala", (b) "moderada" y (c) "buena"

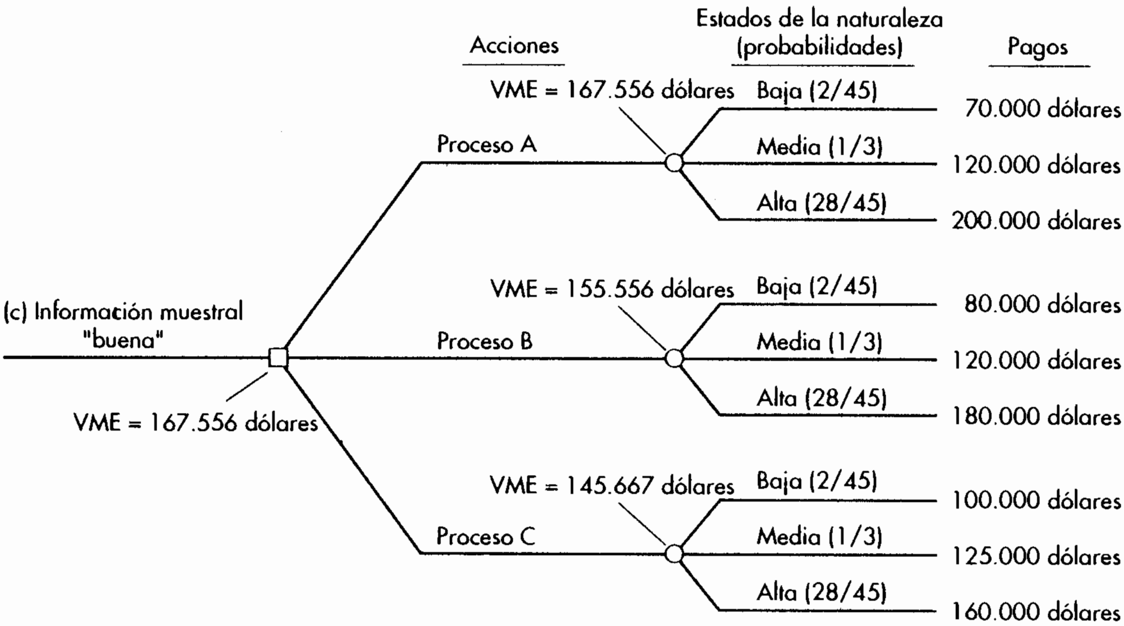


(a)



Estados de la naturaleza (probabilidades)
Acciones
Pagos
(b) Información muestral "moderada"
VME = 138.000 dólares
Proceso A
VME = 138.000 dólares
Baja (1/15)
70.000 dólares
Media (2/3)
120.000 dólares
Alta (4/15)
200.000 dólares
Proceso B
VME = 133.333 dólares
Baja (1/15)
80.000 dólares
Media (2/3)
120.000 dólares
Alta (4/15)
180.000 dólares
Proceso C
VME = 132.667 dólares
Baja (1/15)
100.000 dólares
Media (2/3)
125.000 dólares
Alta (4/15)
160.000 dólares

(b)

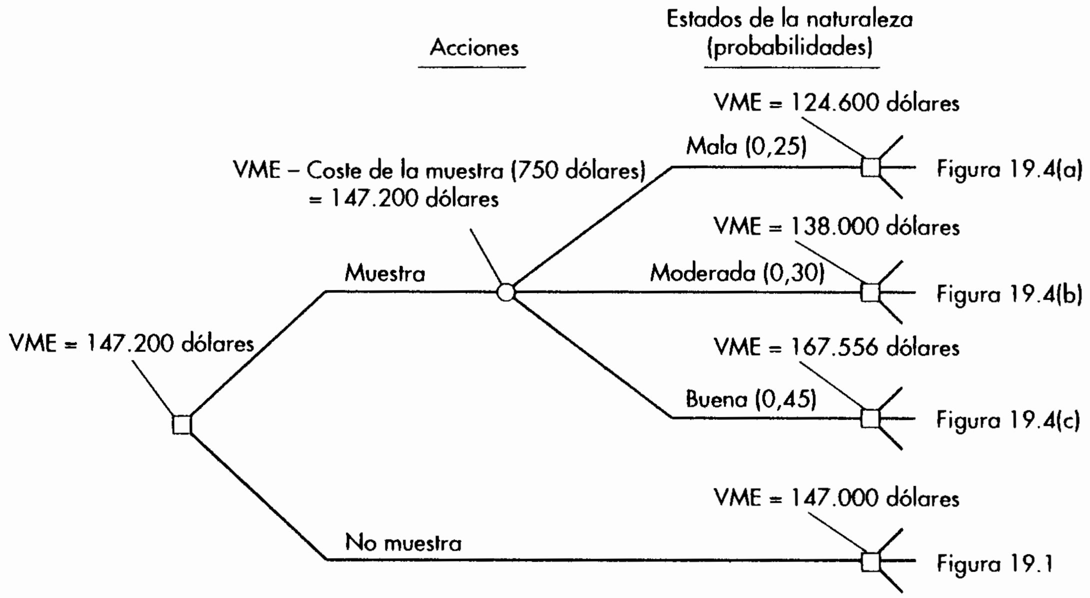


Estados de la naturaleza (probabilidades)
Acciones
Pagos
(c) Información muestral "buena"
VME = 167.556 dólares
Proceso A
VME = 167.556 dólares
Baja (2/45)
70.000 dólares
Media (1/3)
120.000 dólares
Alta (28/45)
200.000 dólares
Proceso B
VME = 155.556 dólares
Baja (2/45)
80.000 dólares
Media (1/3)
120.000 dólares
Alta (28/45)
180.000 dólares
Proceso C
VME = 145.667 dólares
Baja (2/45)
100.000 dólares
Media (1/3)
125.000 dólares
Alta (28/45)
160.000 dólares

(c)

62

FIGURA 19.5 Decisión, por parte del fabricante de golosinas, de adquirir o no los servicios de la empresa de estudios de mercado



Observando, ahora, la parte superior de la Figura 19.5, el valor monetario esperado resultante depende del resultado muestral. Las probabilidades son 0,25 para "mala", 0,30 para "moderada" y 0,45 para "buena", como ya hemos visto anteriormente. Entonces, como se esperan 124.600 dólares con probabilidad 0,25, 138.000 dólares con probabilidad 0,30 y 167.556 dólares con probabilidad 0,45, el pago esperado si se adquiere la información muestral es

$$(0{,}25)(124.600) + (0{,}30)(138.000) + (0{,}45)(167.556) = 147.950 \text{ dólares}$$

Sin embargo, como es necesario restarle a esta cantidad el coste de la información muestral, 750 dólares, el resultado final es de 147.200 dólares. Teniendo en cuenta que esta cantidad es mayor que la obtenida si no se adquiere la información muestral, la mejor estrategia es, según el criterio del valor monetario esperado, contratar los servicios de la empresa de estudios de mercado. La decisión óptima tiene, como se muestra en la Figura 19.5, un valor monetario esperado de 147.200 dólares.

EJERCICIOS

8. Un estudiante tiene ya varias ofertas de trabajo. Debe decidir en este momento si acudir a una entrevista para un nuevo posible puesto de trabajo. Considera el tiempo y el esfuerzo de hacerlo como un coste de 15.000 pesetas, en el que incurrirá acepte o no esta nueva oferta de trabajo. Si la nueva empresa le ofrece un puesto mejor que el de las otras, esto puede verse como un beneficio de 150.000 pesetas (de las que deben restarse las 15.000 pesetas del coste). Si no es así se habría desperdiciado el tiempo y el esfuerzo.

a) Construir la tabla de pagos para el problema del estudiante.

b) Supongamos que el estudiante cree que la probabilidad de que la nueva oferta sea mejor que las otras es 0,05. Según el criterio del valor monetario esperado, ¿debería acudir a esta entrevista?

9. Un directivo debe elegir entre dos posibles acciones, a_1 y a_2. Existen dos posibles estados de la naturaleza, s_1 y s_2. Los pagos se muestran en la tabla siguiente. Si el directivo piensa que los dos estados de la naturaleza tienen la misma probabilidad de ocurrir, ¿qué acción debería elegirse según el criterio del valor monetario esperado?

ACCIONES	ESTADOS DE LA NATURALEZA	
	s_1	s_2
a_1	72.000	51.000
a_2	78.000	47.000

10. El inversor del Ejercicio 1 cree que la probabilidad de que el mercado de acciones esté fuerte es 0,2, la probabilidad de que el mercado de acciones esté moderado es 0,5 y la probabilidad de que el mercado de acciones esté débil es 0,3.

a) ¿Qué acción debería elegirse según el criterio del valor monetario esperado?

b) Dibujar el árbol de decisión para el problema del inversor.

11. Volviendo al Ejercicio 2. El fabricante de desodorante sabe que, en el pasado, el 30% de los nuevos productos de este tipo ha tenido una demanda alta, el 40% una demanda media y el 30% una demanda baja.

a) Según el criterio del valor monetario esperado, ¿qué proceso de producción debería adoptarse?

b) Dibujar el árbol de decisión para el problema del fabricante.

12. Considerar un problema con dos acciones admisibles y dos estados de la naturaleza, ambos con la misma probabilidad.

a) Determinar si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa.

(i) La acción elegida por el criterio del valor monetario esperado siempre será la misma que la elegida por el criterio *maximin*.

(ii) La acción elegida por el criterio del valor monetario esperado siempre será la misma que la elegida por el criterio de la pérdida *minimax*.

(iii) La acción elegida por el criterio del valor monetario esperado siempre será la que tenga el máximo pago medio.

b) ¿Sería la misma tu respuesta a la pregunta (iii) si los estados de la naturaleza no tuvieran la misma probabilidad de ocurrir?

13. Un problema de decisión tiene K acciones posibles y H estados de la naturaleza. Suponiendo que una de estas acciones es inadmisible, demostrar que no puede elegirse según el criterio del valor monetario esperado.

14. El dueño de la tienda de zapatos del Ejercicio 7 cree que la probabilidad de que el nuevo centro comercial tenga un gran éxito es 0,4, la probabilidad de que tenga un éxito moderado es 0,4, y 0,2 la probabilidad de que sea un fracaso.

a) Según el criterio del valor monetario esperado, ¿dónde debería abrirse el nuevo local?

b) Dibujar el árbol de decisión.

15. Volviendo al problema de decisión del inversor de los Ejercicios 1 y 10. Este inversor considera que es razonable pensar que la probabilidad de que el mercado esté fuerte es 0,2. Sin embargo, no está tan seguro de las probabilidades de los otros dos estados de la naturaleza. ¿Bajo qué rango de probabilidades de que el mercado de acciones esté débil se tomaría la misma decisión que en el Ejercicio 10, según el criterio del valor monetario esperado?

16. Volviendo al problema de decisión del fabricante de desodorante de los Ejercicios 2 y 11.

a) El fabricante opina que es razonable que la probabilidad de demanda baja sea 0,3, pero está menos convencido de las probabilidades de los otros dos estados de la naturaleza. ¿Bajo qué rango de probabilidades de que la demanda sea media se tomaría la misma decisión que en el Ejercicio 11, según el criterio del valor monetario esperado?

b) Tomar las especificaciones del problema como en los Ejercicios 2 y 11. ¿Bajo qué rango de posibles beneficios en el caso de demanda alta para el proceso A se tomaría la misma decisión que en el Ejercicio 11?

17. Volviendo al problema del dueño de la tienda de zapatos de los Ejercicios 7 y 14.

a) El dueño de la tienda opina que es razonable que la probabilidad de que el nuevo centro comercial fracase sea 0,2, pero está menos convencido de las probabilidades de los otros dos estados de la naturaleza. ¿Bajo qué rango de probabilidades de que el nuevo centro comercial sea una gran éxito se tomaría la misma decisión que en el Ejercicio 14, según el criterio del valor monetario esperado?

b) Suponiendo que el resto de las especificaciones son como en los Ejercicios 7 y 14. ¿Bajo qué rango de beneficios para la decisión de abrir el local en el nuevo centro comercial, en el caso de que éste sea un gran éxito, se tomaría la misma decisión que en el Ejercicio 14?

18. Un fabricante recibe contratos regulares para grandes pedidos de piezas por parte de la empresa automovilística. El proceso de producción de este fabricante es tal que, cuando opera correctamente, el 10% de las piezas resultante son defectuosas. Sin embargo, el proceso tiene tendencia a caer en una disfunción. Este hecho puede comprobarse antes de comenzar el ciclo de producción. Cuando el proceso funciona con este problema, el porcentaje de piezas defectuosas es del 30%. El fabricante proporciona piezas bajo un contrato que le proporcionaría un beneficio de 2.000.000 de pesetas si sólo el 10% de las piezas es defectuoso, y un beneficio de 1.200.000 pesetas si el porcentaje de defectuosos es del 30%. El coste de comprobar la disfunción es de 100.000 pesetas. Si resulta que necesita reparación, entonces, hay que añadir un coste de otras 200.000 pesetas. En el caso que se produzcan estas eventualidades, los costes deben restarse de los beneficios del contrato. Se ha comprobado, en el pasado, que el proceso funciona correctamente el 80% de las veces. El fabricante debe decidir si comprueba el funcionamiento del proceso o no.

a) Según el criterio del valor monetario esperado, ¿cuál es la decisión óptima?
b) Dibujar el árbol de decisión.
c) Supongamos que no se sabe la proporción de veces que el proceso funciona correctamente. ¿Bajo qué rango de valores para esta proporción sería óptima la elección de la parte (a), de acuerdo con el criterio del valor monetario esperado?

19. Un contratista debe decidir si hacer una oferta para acceder a determinado contrato. Costará 1.600.000 pesetas preparar la oferta. Se incurrirá en este coste se acepte la oferta o no. El contratista pretende hacer una oferta para la que el beneficio obtenido sea de 11.000.000 de pesetas (menos el coste de preparar la oferta). El contratista sabe que el 20% de las ofertas preparadas de esta forma han tenido éxito.

a) Construir la tabla de pagos.
b) ¿Debe prepararse y presentarse una oferta, según el criterio del valor monetario esperado?
c) ¿Bajo qué rango de probabilidades de que la oferta tenga éxito debería prepararse y presentarse una oferta, de acuerdo con el criterio del valor monetario esperado?

20. La tarde del jueves, el jefe de una pequeña cadena de alquiler de coches observa que tiene seis coches disponibles para alquilar al día siguiente. Sin embargo, puede pedir que le envíen más coches de la central, con un coste de 2.000 pesetas cada uno. Cada coche que se alquila produce un beneficio esperado de 4.000 pesetas. (El coste de pedirlo a la central debe restarse de este beneficio.) Cada cliente potencial que debe rechazarse por no disponer de un coche en ese momento se considera una pérdida de 1.000 pesetas. Estudiando sus archivos, observa que otros viernes el número de coches alquilados ha estado entre seis y diez; los porcentajes se muestran en la siguiente tabla. El jefe de la cadena debe decidir cuántos coches pedir a la central, si es que debe pedir alguno.

NÚMERO DE PEDIDOS	6	7	8	9	10
PORCENTAJE	10	30	30	20	10

a) Construir la tabla de pagos.
b) Utilizando el criterio del valor monetario esperado, ¿cuántos coches deben pedirse?

21. Un contratista ha decidido presentar una oferta para un proyecto. Las ofertas deben hacerse en múltiplos de dos millones de pesetas. Se estima que la probabilidad de que una oferta de 24 millones se asegure el contrato es 0,2, la probabilidad de que una oferta de 22 millones se asegure el contrato es 0,6, la probabilidad de que una oferta de 20 millones se asegure el contrato es 0,8. También opina que una oferta de menos de 20 millones obtendrá el contrato con seguridad, y que una oferta de más de 24 millones será rechazada con seguridad. Si el contratista consigue hacerse con el proyecto, deberá resolver un problema de decisión con dos posibles alternativas. Puede contratar consultores externos, que garantizan una solución satisfactoria por ocho millones de pesetas. La otra posibilidad es invertir tres millones de sus propios recursos para resolver el problema internamente; si fracasa, debe contratar a los consultores. Se estima que la probabilidad de resolver el problema internamente es 0,6. Una vez resuelto el problema, el coste de llevar a cabo el proyecto es de 14 millones de pesetas.

a) Potencialmente, este contratista debe tomar dos decisiones, ¿cuáles son?
b) Dibujar el árbol de decisión.
c) ¿Cuál es la línea de acción óptima, según el criterio del valor monetario esperado?

22. Un editor pretende firmar un contrato para un libro de texto de contabilidad con alguno de los tres autores con los que ha trabajado; Gómez, García o Pérez. Si resulta que el texto tiene mucho éxito, los beneficios (excluyendo gastos extraordinarios de publicidad) serían de 25 millones de pesetas; si el éxito es moderado, los beneficios serán de ocho millones de pesetas. En el caso de que el texto sea un fracaso se perderán ocho millones de pesetas. Las probabilidades de la tabla siguiente son conjeturas sobre los estados de la naturaleza para cada uno de los tres libros.

	GRAN ÉXITO	ÉXITO MODERADO	FRACASO
Gómez	0,2	0,6	0,2
García	0,1	0,8	0,1
Pérez	0,3	0,2	0,5

El editor tiene la opción, además, de montar una gran campaña de publicidad, con un coste de tres millones de pesetas, una vez publicado el texto. Se estima que si se lleva a cabo la campaña, las probabilidades de los estados de la naturaleza serían:

	GRAN ÉXITO	ÉXITO MODERADO	FRACASO
Gómez	0,4	0,4	0,2
García	0,3	0,6	0,1
Pérez	0,5	0,2	0,3

a) Dibujar el árbol de decisión del editor.
b) De acuerdo con el criterio del valor monetario esperado, ¿qué autor debería elegirse? ¿Debería llevarse a cabo la campaña de publicidad?
c) Siguiendo los cálculos de la parte (b), el editor ha firmado un contrato con el autor seleccionado. En ese momento, se descubre un error en las cuentas del departamento de marketing y se calcula que el coste real de la campaña publicitaria es de cuatro millones de pesetas. De acuerdo con el criterio del valor monetario esperado, ¿debería el editor ofrecer una suma al autor a cambio de rescindir el contrato? Si es así, ¿cuál es la máxima cantidad que podría ofrecerle?

23. Considerar un problema de decisión con dos acciones, a_1 y a_2, y dos estados de la naturaleza, s_1 y s_2. Sea M_{ij} el pago correspondiente a la acción a_i y el estado de la naturaleza s_j. Supongamos que la probabilidad de que ocurra el estado de la naturaleza s_1 es p, de forma que la probabilidad de s_2 es $(1\text{-}p)$.

a) Demostrar que se elige la acción a_1, según el criterio del valor monetario esperado, si

$$p(M_{11} - M_{21}) > (1 - p)(M_{22} - M_{12})$$

b) Entonces, probar que si a_1 es admisible, existe una probabilidad p, para la cual se elegiría esta acción. Sin embargo, si a_1 no es admisible, no puede ser elegida, sea cual sea el valor de p.

24. Un consultor está considerando la posibilidad de preparar propuestas para uno o dos contratos. Tiene la alternativa de no preparar propuestas para ninguno, pero las restricciones de tiempo le impiden preparar propuestas para ambos. Los costes de preparación de propuestas preliminares son de 50.000 pesetas para el contrato A y 75.000 para el contrato B. Cuando se han presentado las ofertas preliminares, se recibe una respuesta del cliente potencial. Estas respuestas pueden agruparse en tres categorías "positiva", "ambigua" o "negativa". Las probabilidades para cada uno de los contratos se muestran a continuación, en la tabla. Si la respuesta a la propuesta preliminar es negativa, no se conseguirá el contrato. Si la respuesta no es negativa, el consultor puede presentar una oferta final más detallada, cuyo coste sería de 100.000 pesetas para el contrato A y 150.000 pesetas para el contrato B. Para el contrato A, existe una probabilidad 0,9 de que esta propuesta sea aceptada, si la respuesta inicial fue positiva y 0,4 si la respuesta fue ambigua. Para el contrato B, estas probabilidades son 0,8 y 0,2, respectivamente. Si se consigue el contrato A, el beneficio para el consultor (del que deberán descontarse los gastos de preparación) será de 500.000 pesetas. Para el contrato B, será de 600.000 pesetas. El consultor tiene la intención de tomar sus decisiones según el criterio del valor monetario esperado.

	POSITIVA	AMBIGUA	NEGATIVA
Contrato A	0,6	0,2	0,2
Contrato B	0,8	0,1	0,1

a) Dibujar el árbol de decisión de este consultor.
b) ¿Debe el consultor presentar una oferta preliminar? Si es así, ¿para que contrato?
c) Si la respuesta a la parte (b) es "sí", ¿cómo debería proceder el consultor si la respuesta a su propuesta preliminar hubiera sido "ambigua"?
d) Este consultor ha contratado recientemente a un estadístico que sostiene que sería más beneficioso presentar solamente una propuesta final, sin tener que pasar por el proceso inicial de preparar una oferta preliminar. Los coste de preparar una propuesta de este tipo son de 125.000 pesetas para el contrato A y de 187.500 para el contrato B. Suponiendo que las probabilidades de aceptación final no cambian, ¿tiene razón el estadístico?

25. Un fabricante debe decidir si monta, con un coste de 10 millones de pesetas, una campaña de publicidad para un producto cuyas ventas han sido malas. Se estima que una campaña muy exitosa aumentaría los beneficios en 40 millones de pesetas (de los cuales hay que restar los gastos de publicidad), una campaña moderadamente exitosa aumentaría los beneficios en 10 millones de pesetas, pero si la campaña es una fracaso, los beneficios no aumentarán. La experiencia pasada demuestra que el 40% de este tipo de campañas han sido muy exitosas, el 30% han tenido un éxito moderado y el resto han fracasado. Este fabricante consulta con un especialista en medios para que juzgue la posible efectividad de la campaña. El currículum de este especialista muestra que su informe ha sido favorable el 80% de las veces que la campaña ha sido muy exitosa y el 40% de las veces que la campaña a sido moderadamente exitosa, el otro 10% la campaña fue un fracaso.

a) Hallar las probabilidades *a priori* de cada estado de la naturaleza.

b) Sin contar con un informe del especialista en medios, ¿debería montarse la campaña, según el criterio del valor monetario esperado?
c) Hallar las probabilidades *a posteriori* de cada estado de la naturaleza, dado que el informe del especialista ha sido favorable.
d) Dado que el especialista ha emitido un informe favorable, ¿debería montarse la campaña, según el criterio del valor monetario esperado?
e) Hallar las probabilidades *a posteriori* de cada estado de la naturaleza, dado que el informe del especialista ha sido desfavorable.
f) Dado que el especialista ha emitido un informe desfavorable, ¿debería montarse la campaña, según el criterio del valor monetario esperado?

26. Volviendo al Ejercicio 2, el fabricante de desodorante tiene cuatro procesos de producción para elegir, dependiendo de la opinión que tenga de cómo serán los niveles de demanda. Basándose en experiencias anteriores, las probabilidades *a priori* son 0,3 para demanda alta, 0,4 para demanda media y 0,3 para demanda baja. La tabla siguiente muestra proporciones de previsiones "mala", "moderada" y "buena" que hizo en el pasado la empresa de estudios de mercado para cada nivel de demanda.

PREVISIÓN	**NIVEL DE DEMANDA**		
	BAJO	MEDIO	ALTO
Mala	0,5	0,3	0,1
Moderada	0,3	0,4	0,2
Buena	0,2	0,3	0,7

a) Si no se consulta a la empresa de estudios de mercado, ¿qué acción habría que adoptar, según el criterio del VME?
b) Hallar las probabilidades *a posteriori* de los tres niveles de demanda, dada una previsión de demanda "mala".
c) ¿Qué acción debería adoptarse si la previsión ha sido que la demanda será "mala"?
d) Hallar las probabilidades *a posteriori* de los tres niveles de demanda, dada una previsión de demanda "moderada".
e) ¿Qué acción debería adoptarse si la previsión ha sido que la demanda será "moderada"?
f) Hallar las probabilidades *a posteriori* de los tres niveles de demanda, dada una previsión de demanda "buena".
(g) ¿Qué acción debería adoptarse si la previsión ha sido que la demanda será "buena"?

27. El dueño de la tienda de zapatos del Ejercicio 7, tiene tres posibles líneas de acción. Su decisión debe tomarse teniendo en cuenta su apreciación del futuro éxito del nuevo centro comercial. En el pasado, el 40% de estos centros han sido un gran éxito, el 40% han tenido un éxito moderado y el 20% han sido un fracaso. Un grupo consultor ofrece hacer un estudio para estimar la probabilidad que tiene este nuevo centro de tener éxito. Las previsiones pueden ser "buena", "media" y "mala", y la proporción de previsiones que la empresa ha hecho, dado el nivel real de la demanda, se muestran en la tabla:

PREVISIÓN	**NIVEL DE ÉXITO**		
	GRAN ÉXITO	ÉXITO MODERADO	FRACASO
Buena	0,6	0,3	0,2
Media	0,3	0,4	0,3
Mala	0,1	0,3	0,5

a) ¿Cuáles son las probabilidades *a priori* de cada uno de los estados de la naturaleza?
b) Si el dueño de la tienda no contrata al grupo consultor, ¿cuál es la acción óptima, según el criterio del VME?
c) ¿Cuales son las probabilidades *a posteriori* de cada uno de los estados de la naturaleza, si la previsión ha sido "buena"?
d) Según el criterio del VME, y dada una previsión "buena", ¿qué línea de acción debería tomarse?
e) ¿Cuáles son las probabilidades *a posteriori* de cada uno de los estados de la naturaleza, si la previsión ha sido "media"?
f) Según el criterio del VME, y dada una previsión "media", ¿qué línea de acción debería tomarse?
g) ¿Cuáles son las probabilidades *a posteriori* de cada uno de los estados de la naturaleza, si la previsión ha sido "mala"?
h) Según el criterio del VME, y dada una previsión "mala", ¿qué línea de acción debería tomarse?

28. Consideremos la empresa farmacéutica del Ejemplo 19.5, que debía decidir si vender la patente del medicamento antes de hacer las pruebas completas. En el ejemplo vimos que fuera cual fuera el resultado de unas pruebas preliminares, la decisión óptima era conservar la patente. Posteriormente, la empresa ha desarrollado unas nuevas pruebas preliminares que podrían llevarse a cabo con muy poco coste. Para los medicamentos que finalmente resultaron efectivos, esta nueva prueba dio un resultado positivo el 80% de las veces, mientras que se obtuvo un resultado positivo sólo el 10% de las veces para medicamentos que finalmente resultaron no efectivos.
a) Hallar las probabilidades *a posteriori* para los dos estados de la naturaleza, si las pruebas han dado un resultado positivo.
b) Según el criterio del VME, ¿debe venderse la patente si las nuevas pruebas resultan positivas?

c) Hallar las probabilidades *a posteriori* para los dos estados de la naturaleza, dado que las pruebas han dado un resultado negativo.
d) Según el criterio del VME, ¿debe venderse la patente si las nuevas pruebas resultan negativas?
e) ¿Afecta el resultado de estas nuevas pruebas a la elección óptima?
f) Explicar cuál es la característica de las pruebas preliminares que hace que su resultado influya o no en la elección óptima.

29. En el Ejercicio 18, un proveedor de piezas para la industria automovilística debía decidir si comprobar la disfunción del proceso antes de comenzar la producción. Los dos estados de la naturaleza eran

s_1: no necesita reparación (el 10% de las piezas son defectuosas)

s_2: necesita reparación (el 30% de las piezas son defectuosas)

Las probabilidades *a priori*, tomadas de los registros de este proceso de producción, son

$$P(s_1) = 0{,}8 \qquad \text{y} \qquad P(s_2) = 0{,}2$$

El fabricante puede, antes de comenzar la producción total, producir una pieza y comprobar si es defectuosa, basando la decisión de comprobar o no el proceso en esta información muestral.

a) Si la pieza comprobada es correcta, ¿cuáles son las probabilidades *a posteriori* de cada estado de la naturaleza?
b) Si la pieza comprobada es correcta, ¿debería comprobarse el proceso de producción, según el criterio del VME?
c) Si la pieza comprobada es defectuosa, ¿cuáles son las probabilidades *a posteriori* de cada estado de la naturaleza?
d) Si la pieza comprobada es defectuosa, ¿debería comprobarse el proceso de producción, según el criterio del VME?

30. Continuando con el Ejercicio 29, supongamos ahora que antes de tomar la decisión de comprobar el proceso, se procesan y miran *dos* unidades.

a) Si, en realidad, no se necesita reparación, ¿cuál es la probabilidad de que las dos piezas sean defectuosas, sólo una sea defectuosa y ninguna sea defectuosa?
b) Calcular las mismas probabilidades que en (a) pero suponiendo que el proceso necesita una reparación.
c) Calcular las probabilidades *a posteriori* de los estados de la naturaleza y determinar la acción óptima, según el criterio del valor monetario esperado, bajo cada una de las siguientes circunstancias:
   (i) Las dos piezas son correctas.
   (ii) Sólo una pieza es defectuosa.
   (iii) Las dos piezas son defectuosas.

31. La empresa OSRAM vende grandes lotes de bombillas a usuarios industriales. Cuando el proceso de producción funciona correctamente (que es el 90% del tiempo), sólo el 10% de las bombillas son defectuosas. Sin embargo, el proceso es susceptible de caer en una disfunción, llevando al proceso a una tasa de defectuosas del 20%. OSRAM cuenta el coste, en términos de pérdida de reputación, de vender a uno de estos usuarios un lote con un 20% de bombillas defectuosas como 5.000 dólares. Si se sospecha que el lote contiene esta proporción de bombillas defectuosas, existe la opción de venderla a una cadena de tiendas de descuento, aunque esto provoca unas pérdidas de 600 dólares en los beneficios, aunque finalmente el lote no contuviera esta proporción de defectuosas. Las decisiones se toman según el criterio del VME.

a) Se produce un lote. Sin disponer de más información, ¿debería enviarse a un usuario industrial o a una cadena de tiendas de descuento?
b) Supongamos que se comprueba una sola bombilla del lote. Determinar a quien debería venderse el lote en cada una de las siguientes circunstancias:
   (i) La bombilla es defectuosa
   (ii) La bombilla no es defectuosa
c) Supongamos que se comprueban dos bombillas del lote. Determinar a quién debería venderse el lote en cada una de las siguientes circunstancias:
   (i) Las dos bombillas son defectuosas
   (ii) Sólo una bombilla es defectuosa
   (iii) Ninguna bombilla es defectuosa
d) Sin hacer los cálculos, indicar cómo se atacaría el problema si se inspeccionaran 100 bombillas.

32. Volviendo al problema del inversor del Ejercicio 1.

a) Explicar qué significa "información perfecta" en el contexto de este problema.
b) Las probabilidades *a priori* son 0,2 para mercado de acciones fuerte, 0,5 para mercado de acciones moderado y 0,3 para mercado de acciones débil. ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta para el inversor?

33. Para el fabricante de desodorante del Ejercicio 2, las probabilidades *a priori* eran 0,3 para demanda alta, 0,4 para demanda media y 0,3 para demanda baja. Hallar el valor esperado de la información perfecta para este fabricante.

34. Para el dueño de la tienda de zapatos las probabilidades *a priori* para el éxito del nuevo centro comercial eran 0,4 para gran éxito, 0,4 para éxito moderado y 0,2 para fracaso. ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta para el dueño de la tienda?

35. El fabricante de piezas de automóviles del Ejercicio 18 debe decidir si comprobar el proceso antes de comenzar la producción. Dado que el proceso funciona correctamente el 80% del tiempo, ¿cuál es el valor de la información perfecta para este fabricante?

36. En la Sección 19.5, antes de mostrar cómo calcular el valor esperado de la información muestral, discutimos separadamente cómo determinar el valor esperado de la información perfecta. En realidad, esto no hubiera sido necesario, ya que la información perfecta es una clase especial de información muestral. Dado el procedimiento general para calcular el valor esperado de la información muestral, mostrar cómo particularizarlo a información perfecta.

37. Referirse al Ejercicio 25. El fabricante está considerando dos campañas publicitarias alternativas y antes de tomar la decisión consulta con un especialista en medios.
   a) ¿Cuál es el valor esperado de los consejos del especialista en medios para el fabricante?
   b) El especialista en medios cobra 5.000 dólares. ¿Cuál es el valor neto esperado del consejo del especialista?
   c) Este fabricante se enfrenta a un problema de decisión en dos etapas. Primero debe decidir si contratar al especialista. A continuación debe decidir si monta la campaña publicitaria o no. Dibujar el árbol de decisión completo, e indicar cómo debería proceder el fabricante.

38. Referirse al Ejercicio 26. Hallar los máximos honorarios que el fabricante de desodorante puede pagar a la empresa de estudios de mercado, según el criterio del valor monetario esperado.

39. Referirse al Ejercicio 27. Hallar el valor esperado para el vendedor de zapatos de una previsión sobre el éxito del nuevo centro comercial.

40. Referirse al Ejercicio 28. Antes de decidir si vender la patente de la nueva fórmula, la empresa farmacéutica lleva a cabo las pruebas preliminares. Hallar el valor esperado para la empresa de los resultados de estas pruebas.

41. Referirse al Ejercicio 29. El proveedor de piezas de automóviles puede comprobar una de las piezas antes de decidir si debería controlar el proceso de producción. ¿Cuál es el valor esperado de esta información muestral?

42. Consideremos otra vez a OSRAM, como en el Ejercicio 31. La empresa puede comprobar una o más bombillas antes de decidir si envía el lote a un usuario industrial o a una cadena de tiendas de descuento.
   a) ¿Cuál es el valor esperado para la empresa de comprobar una sola bombilla?
   b) ¿Cuál es el valor esperado para la empresa de comprobar dos bombillas?
   c) ¿Cuál es la diferencia entre los valores esperados de comprobar una o dos bombillas?
   d) Si la primera bombilla comprobada resulta ser defectuosa, ¿cuál es el valor esperado de comprobar una segunda bombilla?
   e) Si la primera bombilla comprobada resulta ser no defectuosa, ¿cuál es el valor esperado de comprobar una segunda bombilla?
   f) Relacionar la respuesta a la pregunta (c) con las preguntas (d) y (e).

19.6 INTRODUCCIÓN DEL RIESGO: ANÁLISIS DE UTILIDAD

El criterio del valor monetario esperado proporciona un entorno para tomar decisiones que tiene mucha aplicación en la práctica. Es decir, en muchas circunstancias, un individuo, o una empresa, pensará que la acción que proporcione el máximo valor monetario esperado es la mejor acción. Sin embargo, esto no es siempre así, como ilustran los siguientes ejemplos:

1. Muchos individuos compran seguros de vida a través de los que, por una cantidad relativamente modesta, los beneficiarios de la persona asegurada reciben una cierta cantidad en caso de su fallecimiento. Ahora, las compañías de seguros son capaces de calcular la probabilidad de fallecimiento de un individuo de determinada edad en un período de tiempo. De acuerdo con esto, sus precios se fijan de forma que la prima es siempre mayor que la cantidad esperada de dinero que deberían pagar en caso de fallecimiento. Este margen cubre los gastos de la compañía aseguradora y proporciona, en promedio, beneficios. Por tanto, para la persona asegurada, el pago esperado de la póliza de seguros es menor que su coste. Por tanto, si todo el mundo basara sus decisiones en el criterio del valor monetario esperado, no se comprarían seguros de vida. Sin embargo, mucha gente los compra, demostrando que prefieren sacrificar un poco de sus beneficios esperados a cambio de la seguridad de que sus beneficiarios tengan unos ingresos en caso de su fallecimiento.

69

2. Supongamos que un inversor compra acciones de una o más empresas, cuyas previsiones le parecen brillantes. En principio, es posible enunciar los diferentes estados de la naturaleza que pueden afectar al valor de los beneficios por invertir en cada una de esas empresas. De esta forma, podría calcularse el valor monetario esperado de invertir una cierta cantidad en cada una de las empresas. De acuerdo con el criterio del valor monetario esperado, el inversor debería poner todo su capital en aquella empresa para la que el valor monetario esperado sea mayor. En realidad, muchos inversores de bolsa no siguen esta estrategia. Más bien reparten el capital en una cartera de valores. Abandonar la opción "poner todos los huevos en la misma cesta" tiene unos beneficios esperados menores, pero protege ante la posibilidad de que, al final, el activo con más valor monetario esperado resulte un fracaso. Al elegir una cartera de valores, el inversor está mostrando una preferencia por sacrificar un poco de los beneficios a cambio de tener una probabilidad menor de una gran pérdida financiera.

En cada uno de los ejemplos anteriores, el decisor ha mostrado preferencia por otro criterio de decisión diferente del valor monetario esperado, y en ambas circunstancias la elección resulta razonable. Los dos ejemplos contienen un ingrediente común aparte de los beneficios esperados. En ambos casos, el decisor quiere tener en cuenta el **riesgo**. El comprador del seguro de vida está preparado para aceptar un beneficio esperado negativo como el precio que debe pagar por la posibilidad de un gran beneficio esperado en caso de fallecimiento. Al hacer esto, está expresando su *preferencia por el riesgo*[3]. En contraste, el inversor que reparte su capital en diferentes valores, aceptando un beneficio esperado menor a cambio de reducir las posibilidades de una gran pérdida, está expresando su *aversión al riesgo*.

Hemos visto que el criterio del valor monetario esperado es inapropiado para aquellos decisores que tienen preferencia o aversión al riesgo. Afortunadamente, no es muy difícil modificar este criterio para manejar estas situaciones en las que el riesgo juega un papel fundamental. Esencialmente, la idea es reemplazar los pagos por otras cantidades que reflejen no sólo el pago monetario, sino también la actitud del decisor frente al riesgo.

EL CONCEPTO DE UTILIDAD

En el Ejemplo 19.3, consideramos el problema de un inversor que debía elegir entre invertir su dinero a interés fijo o en una cartera de valores. La primera opción tenía un pago de 120.000 pesetas, mientras que la cartera de valores tenía un pago que podía ser de 250.000 ó 50.000 pesetas, dependiendo de que el mercado de valores estuviera boyante o estable, o una pérdida de 100.000 pesetas si el mercado pasaba por una depresión. Este inversor opinaba que las probabilidades respectivas de cada estado de la naturaleza eran 0,6, 0,2 y 0,2. En estas circunstancias, vimos que el valor monetario esperado de elegir la cartera de valores era de 140.000 pesetas, por tanto, superaba a la opción del interés fijo en 20.000 pesetas. En este punto, debemos plantearnos si esta diferencia de 20.000 pesetas compensa la posibilidad de perder 100.000 pesetas, en caso de que el mercado esté pasando por una depresión. Un inversor acaudalado, que pueda afrontar sin problemas esta pérdida, pensaría que sí. Sin embargo, en el caso de una persona relativamente modesta, para la que una pérdida de 100.000 pesetas podría ser desastrosa, pensaría diferente. Para este tipo de inversor, los pagos deben reemplazarse por otras cantidades que reflejen mejor la naturaleza desastrosa de la pérdida de 100.000 pesetas. Estas cantidades deben medir el valor, o **utilidad**, que tiene para el inversor una pérdida de 100.000 pesetas, comparado con una ganancia de 250.000 ó 50.000 pesetas.

El concepto de utilidad, que juega un papel fundamental en microeconomía, proporciona una base para solucionar los problemas de decisión cuando aparece el riesgo. Para utilizarlo, necesitaremos algunos supuestos bastante inofensivos y que normalmente resultan razonables. Supongamos que un individuo se enfrenta a varios pagos posibles, que pueden ser monetarios o no. Se supone que el individuo puede ordenar (posiblemente con empates) la utilidad, ó la satisfacción, que le proporcionaría

[3] Está, evidentemente, guardándose *frente* al riesgo de que su familia no esté financieramente preparada para su fallecimiento.

cada uno de esos pagos. Por tanto, si el pago A es mejor que el B y el B es mejor que el C, entonces, el A debe ser mejor que el C.

También tenemos que suponer que si A es mejor que B y B es mejor que C, entonces, puede existir un juego que ofrece A con probabilidad p y C con probabilidad $(1-p)$, tal que el decisor está indiferente entre elegir esta lotería o recibir B con seguridad. Dados estos supuestos, y otros que resultan inocuos y cuyos detalles no vamos a estudiar, es posible mostrar que el decisor racional elegirá aquella acción cuya utilidad esperada es mayor. Por tanto, podemos analizar el problema de decisión como hicimos en las Secciones 19.3–19.5, *pero con utilidades en lugar de pagos*. Es decir, construiremos tablas de utilidad en lugar de tablas de pagos y usaremos las probabilidades de los estados de la naturaleza para comparar utilidades esperadas.

Debemos comentar, ahora, cómo se determinan las utilidades asociadas a los diferentes pagos. Los posibles pagos para nuestro inversor son –100.000, 50.000, 120.000 y 250.000. Los pasos que hay que seguir para hallar las utilidades asociadas se resumen en el siguiente recuadro.

Como obtener una función de utilidad

Supongamos que un decisor puede recibir diferentes pagos. La transformación de pagos a **utilidades** se hace como se explica a continuación:

(i) Las unidades en las que se mide la utilidad son arbitrarias. Por tanto, podemos fijar la escala según nos convenga. Sea L el menor pago y H el mayor pago posibles. Asignaremos utilidad 0 al pago L y utilidad 100 al pago H.

(ii) Sea I un pago cualquiera entre L y H. Se trata de determinar la probabilidad p tal que el decisor se muestre indiferente entre estas alternativas

(a) Recibir el pago I con certeza.

(b) Recibir el pago H con probabilidad p y el pago L con probabilidad $(1-p)$.

(iii) La utilidad, para este decisor, del pago I es $100p$. La curva que relaciona la utilidad con los pagos se llama **función de utilidad**.

El primer paso es sencillo, simplemente proporciona una escala conveniente para medir la utilidad. La elección de los números 0 y 100 para representar las utilidades de los pagos menor y mayor es completamente arbitraria. Se podría haber elegido cualquier otro par de números, siempre que la utilidad del pago superior sea mayor que la utilidad del pago inferior.

Desde el punto de vista práctico, el segundo paso es el más complicado, en parte porque presupone que el decisor puede manipular probabilidades de una forma coherente. En la práctica, la probabilidad p debe determinarse mediante prueba y error, preguntando cosas como:

P. ¿Preferiría recibir I con certeza o arriesgar en un juego en que pudiera obtener H con probabilidad 0,9 y L con probabilidad 0,1?

P. ¿Preferiría recibir I con certeza o arriesgar en un juego en que pudiera obtener H con probabilidad 0,8 y L con probabilidad 0,2?

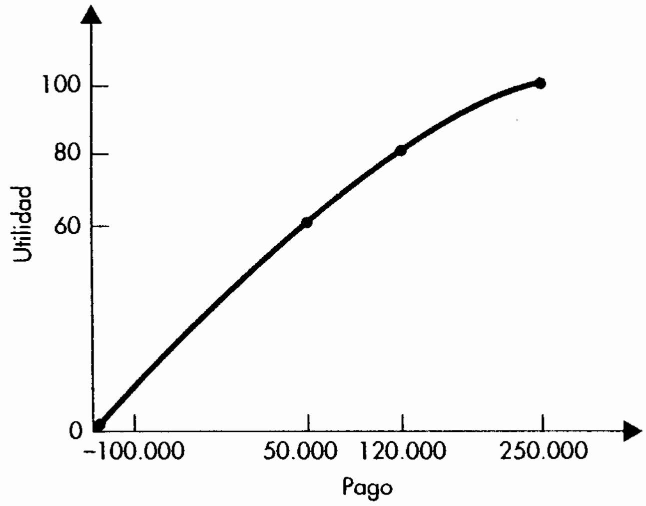
Se sigue adelante con este proceso hasta que se alcanza el punto de indiferencia.

La lógica del último paso es bastante sencilla. Teniendo en cuenta que H tiene utilidad 100 y L tiene utilidad 0, la utilidad esperada si se obtiene H con probabilidad p y L con probabilidad $(1-p)$, es

$$100p + 0(1-p) = 100p$$

Teniendo en cuenta que el decisor se muestra indiferente entre esta juego y recibir I con certeza, la utilidad asociada al pago I es $100p$.

FIGURA 19.6 Función de utilidad del inversor



Volvemos, ahora, al ejemplo del inversor. En el primer paso, asociamos utilidad 0 al mínimo pago, −100.000, y utilidad 100 al máximo pago, 250.000.

Quedan por determinar las utilidades de los pagos intermedios, 50.000 y 120.000. Esto se consigue preguntando al decisor preguntas como:

P. ¿Preferiría recibir 50.000 pesetas con certeza o arriesgar en un juego en que pudiera obtener 250.000 pesetas con probabilidad p y perder 100.000 pesetas con probabilidad $(1 - p)$?

Se prueba con diferentes valores de p hasta que se llega a un punto en el que el decisor se muestre indiferente entre las dos alternativas. Se repite este proceso para el pago de 120.000 pesetas.

Supongamos que el inversor se muestre indiferente entre un pago de 50.000 pesetas y un juego con probabilidad $p = 0{,}6$, y es indiferente entre un pago de 120.000 pesetas y un juego con $p = 0{,}8$. Las utilidades de los pagos intermedios son

Pago 50.000 pesetas	Utilidad = (100)(0,6) = 60
Pago 120.000 pesetas	Utilidad = (100)(0,8) = 80

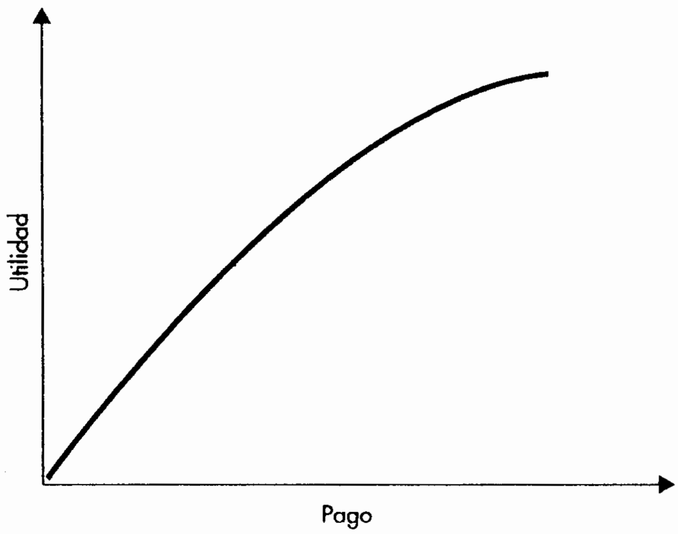
El gráfico de estas cuatro utilidades frente a sus respectivos pagos se muestra en la Figura 19.6. Para indicar la forma general de la función de utilidad de este inversor, se ha dibujado la curva que pasa por esos puntos. La forma de la curva es interesante ya que caracteriza la actitud del decisor frente al riesgo. Como debe ocurrir, la utilidad se incrementa cuando se incrementan los pagos. Sin embargo, se puede observar cómo la *tasa de crecimiento* de la utilidad es mayor cuando los pagos son menores y decrece cuando los pagos son mayores. Esto implica un disgusto por los pagos menores que no compensa sus pagos monetarios, esto indica que el decisor tiene *aversión* al riesgo. La aversión puede verse en la actitud del inversor frente a los juegos ofrecidos. Por ejemplo, el inversor se muestra indiferente entre un pago seguro de 50.000 pesetas y un juego en la que puede conseguir 250.000 pesetas con probabilidad 0,6 o una pérdida de 100.000 pesetas con probabilidad 0,4. El valor monetario esperado de este juego es

$$(0{,}6)(250.000) + (0{,}4)(-100.000) = 110.000 \text{ pesetas}$$

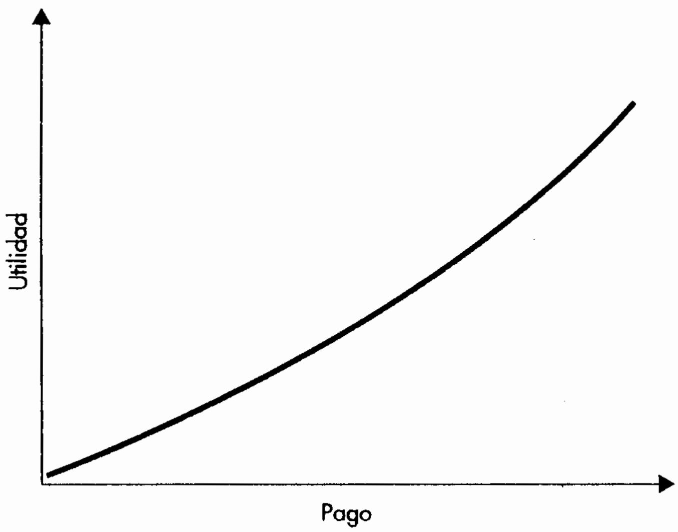
que es bastante mayor que el pago seguro de 50.000 pesetas. La diferencia proporciona una medida de la aversión al riesgo de este inversor.

La forma de la curva de la Figura 19.6 es típica de la aversión al riesgo. En la Figura 19.7, mostramos tres tipos de funciones de utilidad. La función de la parte (a) de la figura, donde la utilidad crece a una tasa *decreciente* cuando se aumentan los pagos, tiene la misma forma que la Figura 19.6, y refleja *aversión* al riesgo. En la parte (b) de la figura, la utilidad crece a una tasa *creciente* cuando se aumentan los pagos. Esto implica un gusto por los pagos altos que es mayor que los pagos monetarios implicados, por tanto, refleja una *preferencia* por el riesgo. Por último, la parte (c) de la Figura 19.7 muestra un caso intermedio, en el que la utilidad crece a una tasa constante para todos los pagos. En este caso, el valor monetario de los pagos proporciona una medida real de su utilidad para el decisor, que demuestra ser *indiferente* al riesgo.

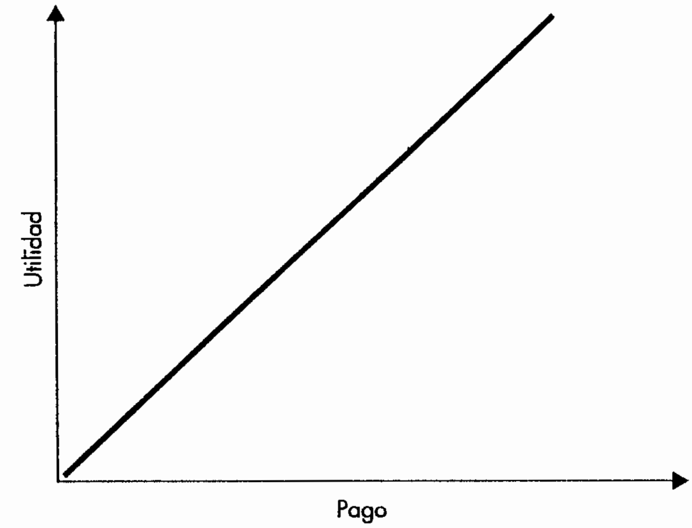
FIGURA 19.7 Funciones de utilidad



(a) Aversión al riesgo



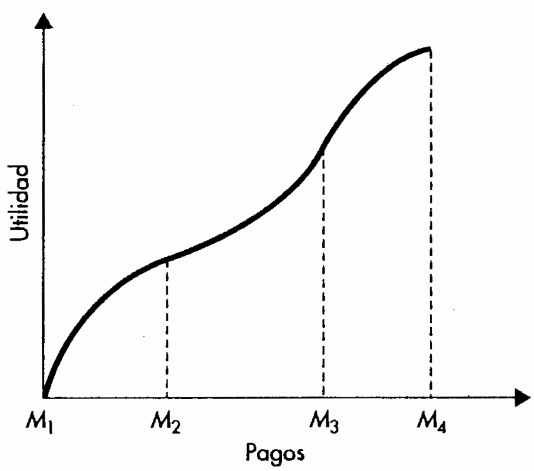
(b) Preferencia por el riesgo



(c) Indiferencia al riesgo

Las tres curvas de la Figura 19.7 caracterizan la aversión, preferencia e indiferencia al riesgo. Sin embargo, no es siempre cierto que un decisor exhiba una misma actitud frente al riesgo para todo el rango posible de pagos. La Figura 19.8 ilustra una situación un poco más compleja. En este caso, para los pagos entre M_1 y M_2, la función de utilidad tiene la forma de la Figura 19.7(a), indicando aversión al riesgo en este rango. Sin embargo, para pagos monetarios entre M_2 y M_3, esta función de utilidad tiene la forma de la Figura 19.7(b). Por tanto, para este rango de pagos, el decisor exhibe una preferencia por el riesgo. Finalmente, en el rango de los pagos mayores, entre M_3 y M_4, la posición se vuelve a revertir y, en esta región, el decisor es averso al riesgo. Una función de utilidad de este tipo puede surgir en problemas prácticos. Por ejemplo, un inversor puede ser averso a tener pérdidas sustanciosas, mientras que puede estar preparado para aceptar un poco de riesgo para obtener un beneficio alto mejor que uno modesto. Sin embargo, si puede alcanzarse un pago satisfactoriamente alto, el inversor puede ser reacio a arriesgar mucho para obtener un pago aún mayor.

FIGURA 19.8 Función de utilidad que muestra aversión al riesgo entre los pagos M_1 y M_2 y entre M_3 y M_4, y preferencia por el riesgo entre los pagos M_2 y M_3



74

CRITERIO DE LA UTILIDAD ESPERADA PARA TOMAR UNA DECISIÓN

Una vez determinadas las utilidades apropiadas, sólo falta, para resolver el problema de decisión, encontrar la acción que tenga mayor la utilidad esperada. Estas utilidades esperadas se obtienen de la manera habitual, utilizando las probabilidades de los estados de la naturaleza, como se describe en el recuadro.

El criterio de la utilidad esperada

Supongamos que un decisor tiene K posibles acciones $a_1, a_2, \ldots, a_K$, y se enfrenta a H estados de la naturaleza. Sea U_{ij} la utilidad correspondiente a la i-ésima acción y al j-ésimo estado de la naturaleza, y sea p_j la probabilidad de ocurrencia del j-ésimo estado de la naturaleza. Entonces, la utilidad esperada, $EU(a_i)$, de la acción a_i es

$$EU(a_i) = p_1U_{i1} + p_2U_{i2} + \cdots + p_HU_{iH} = \sum_{j=1}^{H} p_jU_{ij}$$

Dada una elección entre acciones alternativas, el **criterio de la utilidad esperada** elige aquella acción para la que la utilidad esperada es máxima. Bajo supuestos bastante generales, puede probarse que este criterio debe ser el adoptado por un decisor racional.

Si el decisor es indiferente al riesgo, el criterio de la utilidad esperada y el criterio del valor monetario esperado son equivalentes.

La Tabla 19.11 muestra las utilidades y las probabilidades de los estados de la naturaleza para nuestro inversor. Si se elige invertir a interés fijo, se asegura una utilidad de 80, sea cual sea el estado de la naturaleza. Para la cartera de valores, la utilidad esperada es

$$(0,6)(100) + (0,2)(60) + (0,2)(0) = 72$$

Al ser menor que 80, este inversor debe elegir invertir a interés fijo, según el criterio de la utilidad esperada.

En el Ejemplo 19.3, vimos que la elección según el criterio del valor monetario esperado era invertir en la cartera de valores. Sin embargo, la incorporación de un nuevo factor –el grado de aversión al riesgo del inversor– se llega a la conclusión de que el interés fijo es una elección mejor. Este ejemplo sirve para mostrar que, cuando el riesgo es un factor importante, el criterio del valor monetario esperado es inadecuado para resolver problemas de decisión.

El criterio de la utilidad esperada es el criterio que se puede aplicar de forma más general y el que tiene una defensa intelectual mayor de todos los introducidos en este capítulo.

TABLA 19.11 Utilidades y probabilidades de los estados de la naturaleza para el inversor

INVERSIÓN	ESTADO DEL MERCADO		
	BOYANTE (p = 0,6)	ESTABLE (p = 0,2)	DEPRIMIDO (p = 0,2)
Interés fijo	80	80	80
Cartera de valores	100	60	0

Su principal desventaja es la dificultad de determinar la información de qué juego resulta indiferente con un pago particular. Como hemos visto, esta información es esencial para determinar las utilidades. Para los problemas en los que se puede suponer indiferencia al riesgo, se puede aplicar el criterio del valor monetario esperado. Éste es el caso, por ejemplo, de las decisiones que debe tomar una empresa madura cuando los pagos involucrados sólo representan una parte pequeña de los beneficios de la empresa. Si, por el contrario (como podría ocurrir en el caso del establecimiento de una nueva línea aérea), las pérdidas que podría ocasionar un proyecto podrían llevar a la compañía a la quiebra, deberían incluirse utilidades que reflejaran la aversión al riesgo. La compañía debería repartir los riesgos, intentando conseguir socios en la competencia o dentro de sus clientes. Quizás, incluso el gobierno podría entrar a compartir el riesgo del proyecto.

EJERCICIOS

43. El inversor del Ejercicio 1 tiene seis pagos alternativos (en pesetas):

–150.000 –60.000 80.000

120.000 430.000 660.000

Asignamos utilidad 0 al pago –150.000 y utilidad 100 al de 660.000. Para cada uno de los siguientes pagos, el inversor respondió preguntas del tipo

P: ¿Preferiría recibir un pago de *I* con certeza, o arriesgar en un juego en que pudiera ganar 660.00 pesetas con probabilidad p o perder 150.000 con probabilidad $(1 - p)$? Se registró la probabilidad p ante la que el inversor se mostró indiferente entre las dos alternativas *I*. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla.

PAGO	–60.000	80.000	120.000	430.000
p	0,20	0,30	0,40	0,80

a) Hallar las utilidades de estos pagos intermedios.

b) Suponer que las probabilidades para los tres estados de la naturaleza son

$P(s_1) = 0{,}2 \qquad P(s_2) = 0{,}5 \qquad P(s_3) = 0{,}3$

¿Qué inversión debería elegirse para maximizar la utilidad esperada?

44. Un decisor se enfrenta a un problema con los siguientes pagos (en dólares):

1.000 3.000 6.000

9.000 10.000 12.000

Se asigna utilidad 0 al pago de 1.000 dólares y utilidad 100 al de 12.000 dólares. Este decisor es indiferente al riesgo en este rango de valores.

a) Hallar las utilidades de los cuatro pagos intermedios.

b) Para cada pago intermedio, *I*, hallar la probabilidad p tal que el decisor se muestre indiferente entre recibir *I* con certeza o arriesgar en un juego en que puede ganar 12.000 dólares con probabilidad p o 1.000 con probabilidad $(1 - p)$.

45. El dueño de la tienda de zapatos del Ejercicio 7 tiene seis posibles pagos (en miles de pesetas).

–1.000 3.000 6.000

7.000 9.000 13.000

Asignar utilidad 0 a la pérdida de 1.000 y utilidad 100 al beneficio de 13.000. Para cada pago intermedio, *I*, se han escrito en la tabla las probabilidades p que dejan indiferente al dueño de la tienda entre el pago *I* y arriesgar en un juego en que puede ganar 13.000 con probabilidad p o perder 1.000 con probabilidad $(1 - p)$.

PAGO	3.000	6.000	7.000	9.000
p	0,35	0,60	0,70	0,85

a) ¿Cuáles son las utilidades de los pagos intermedios?

b) Supongamos que las probabilidades de que el nuevo centro comercial tenga un gran éxito, un éxito moderado o que fracase son 0,4, 0,4, y 0,2, respectivamente. ¿Qué acción debería elegirse para maximizar la utilidad esperada?

46. El dueño de la tienda de zapatos del Ejercicio 45, no está seguro de la probabilidad p que le deja indiferente entre un pago de 3.000 con certeza o arriesgar en un juego en que puede ganarse 13.000 con probabilidad p o perder 1.000 con probabilidad $(1 - p)$. Suponiendo que el resto de las especificaciones del problema son correctas, ¿bajo qué rango de valores para esta probabilidad se elegirá la misma acción, según el criterio de la utilidad esperada?

47. Consideremos el contratista del Ejercicio 19. En realidad este contratista se muestra indiferente entre presentar la oferta o no. ¿Qué implicaciones tiene esto con respecto a su función de utilidad?

48. El editor del Ejercicio 22 se enfrenta con un problema de decisión en dos etapas, para el que los pagos son (en millones de pesetas):

–11 –8 5 8 22 25

Se asigna utilidad 0 a la pérdida de 11 millones de pesetas, y utilidad 100 al beneficio de 25 millones. Para cada pago intermedio, I, se han escrito en la tabla las probabilidades p que dejan indiferente al editor entre el pago I y arriesgarse en un juego en que puede ganar 25 millones con probabilidad p o perder 11 millones con probabilidad $(1 - p)$. Si el editor quiere maximizar la utilidad esperada, ¿qué estrategia debe seguir?

PAGO	-8	5	8	22
p	0,20	0,45	0,55	0,95

49. Considerar el problema del consultor del Ejercicio 24, ignorando la opción de la parte (d). Los pagos posibles son (en pesetas):

–225.000	–150.000	–75.000
–50.000	350.000	375.000

Para cada pago intermedio, I, se han escrito en la tabla las probabilidades p que dejan indiferente al consultor entre el pago I y arriesgarse en un juego en que puede ganar 375.000 pesetas con probabilidad p o perder 225.000 pesetas con probabilidad $(1 - p)$. Si el consultor quiere maximizar la utilidad esperada, ¿qué estrategia debe seguir?

PAGO	–150.000	–75.000	–50.000	350.000
p	0,15	0,20	0,25	0,98

EJERCICIOS DE REPASO

50. Hemos estudiado los siguientes criterios para resolver problemas de decisión:

(i) Criterio *maximin*

(ii) Criterio de la pérdida *minimax*

(iii) Criterio del valor monetario esperado

(iv) Criterio de la utilidad esperada

Comentar brevemente las características de cada uno de estos criterios y discutir sus ventajas y desventajas.

51. ¿Cuál es el valor potencial de la información muestral en el contexto de los problemas de decisión en los negocios? Proporcionar algunos ejemplos de problemas de decisión en los que sería realista suponer que la información podría ser útil.

52. Distinguir entre aversión al riesgo, preferencia por el riesgo e indiferencia al riesgo. ¿Cuál es la importancia de estos conceptos en el análisis de los problemas de decisión en los negocios?

53. Un consultor está pensando presentar ofertas detalladas para dos posibles contratos. El coste de preparar la primera oferta es de 10.000 pesetas, mientras que el coste de preparar la segunda es de 15.000 pesetas. Si se acepta la oferta del primer contrato y se lleva a cabo el proyecto, resultará un beneficio de 80.000 pesetas. Si se acepta la oferta del segundo contrato y se lleva a cabo el proyecto, el beneficio será de 120.000 pesetas. Los costes de preparación de las ofertas deben restarse de los beneficios finales. El consultor puede, si lo desea, presentar ofertas a los dos contratos. Sin embargo, no tiene los recursos para hacer frente a los dos proyectos simultáneamente. Si se presenta una oferta y es aceptada pero finalmente el consultor no puede llevar a cabo el proyecto, esto se cuenta como una pérdida de 20.000 pesetas en concepto de reputación. Para el problema de decisión hay cuatro diferentes estados de la naturaleza:

s_1: se rechazan ambas ofertas

s_2: se acepta la oferta del primer contrato y se rechaza la del segundo

s_3: se acepta la oferta del segundo contrato y se rechaza la del primero

s_4: se aceptan ambas ofertas

a) El consultor tiene cuatro posibles líneas de acción, ¿cuáles son?

b) Construir la tabla de pagos del problema de decisión del consultor.

c) ¿Qué acción se elegirá según el criterio *maximin*?

d) ¿Qué acción se elegirá según el criterio de la pérdida *minimax*?

54. Referirse al Ejercicio 53. El consultor cree que la probabilidad de que se acepte su oferta al primer contrato es 0,7, y la probabilidad de que acepte su oferta al segundo contrato es 0,4. Además, cree que la aceptación o no de un contrato es independiente de la aceptación del otro.

a) ¿Cuáles son las probabilidades de los cuatro estados de la naturaleza?

b) De acuerdo con el criterio del valor monetario esperado, ¿qué acción debería elegir el consultor? ¿Cuál es el valor monetario esperado de esta acción?

c) Dibujar el árbol de decisión del problema del consultor.

d) ¿Cuál es el valor de la información perfecta para este consultor?

e) Se le ofrece a este consultor "información privilegiada" acerca de las previsiones del primer contrato. Esta información es completamente fiable, en el sentido de que le permitirá saber con seguridad si se aceptará su oferta. Sin embargo, no tiene ninguna información sobre la oferta del segundo contrato. ¿Cuál es el valor esperado de esta "información privilegiada"?

55. Referirse a los Ejercicios 53 y 54. Hay nueve pagos posibles para este consultor; (en pesetas):

−25.000	−15.000	−10.000	0	55.000
70.000	75.000	95.000	105.000	

Se asigna una utilidad 0 a la pérdida de 25.000 pesetas y utilidad 100 al beneficio de 105.000 pesetas. Para cada pago intermedio, I, se han escrito en la tabla las probabilidades p que dejan indiferente al consultor entre el pago I y arriesgarse en un juego en que puede ganar 105.000 pesetas con probabilidad p o perder 25.000 pesetas con probabilidad $(1 - p)$. De acuerdo con el criterio de la utilidad esperada, ¿qué acción debe adoptar el consultor? ¿Cuál es la utilidad esperada de esta acción?

PAGO	p
−150	0,05
−100	0,10
0	0,20
550	0,65
700	0,70
750	0,75
950	0,85

78

VIII. BIBLIOGRAFÍA

- [DGL] M.C. DE LA CRUZ LOPEZ - C. GONZALEZ GARCIA - J. LLORENTE MEDRANO, "Actividades sobre el azar y la probabilidad", Narcea - MEC, Madrid (1993).

- [DaMc] K.R. DAVIS - P.G. McKEOWN, "Modelos cuantitativos para administración", Grupo Editorial Iberoamérica, México (1996).

- [DFS] A. DE PABLO - L. FERRUZ - R. SANTAMARÍA, "Análisis práctico de decisiones de inversión y financiación en la empresa", Editorial Ariel, Barcelona (1990).

- [EGSMW] G.D. EPPEN - F.J. GOULD - C.P. SCHMIDT - J.H. MOORE - L.R. WEATHERFORD, "Investigación de operaciones en la ciencia administrativa", Prentice Hall Hispanoamericana, México (2000).

- [Gi] R.F. GIOLIODORI, "Temas de investigación operativa", Ediciones Eudecor, Córdoba (1997).

- [Gr] S.I. GROSSMAN, "Aplicaciones de álgebra lineal", Grupo Editorial Iberoamérica, México (1998).

- [Kr] S.G. KRANTZ, "Techniques of problem solving", American Math. Soc., Providence (1997).

- [LMP] L.L. LAZZARI - E.A.M. MACHADO - R.H. PÉREZ, "Teoría de la decisión fuzzy", Ediciones Macchi, Buenos Aires (1998).

- [Li] S. LIPSCHUTZ, "Probabilidad", McGraw Hill, México (1991).

- [MaOl] K.T. MARSHALL - R.M. OLIVER, "Decision making and forecasting", McGraw-Hill, Singapore (1995).

- [MaSo] K. MATHUR - D. SOLOW, "Investigación de operaciones. El arte de la toma de decisiones", Prentice Hall Hispanoamericana, México (1996).

- [Me] P.L. MEYER, "Probabilidad y aplicaciones estadísticas", Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (1992).

- [Mi] R. MIATELLO, "Actividades investigativas en la enseñanza", Revista de Educación Matemática, 12 (1997), 19 – 33.

- [Ne] P. NEWBOLD, "Estadística para los negocios y la economía", Prentice Hall International, Hertforshire (1997).

- [Sp] M.R. SPIEGEL, "Probabilidad y estadística", McGraw Hill, México (1991).

- [Rh] J.P. RHEAULT, "Introducción a la teoría de las decisiones con aplicaciones a la administración", Limusa, México (1997).

- [SpBo] W.A. SPURR - C.H. BONINI, "Toma de decisiones en administración mediante métodos estadísticos", Editorial Limusa, Mexico (1980).

- [Ta] H.A. TAHA, "Investigación de operaciones", Ediciones Alfaomega, México (1991).

- [Ta1] D.A. TARZIA, "Un simple modelo de fidelidad de marca y sus consecuencias", Revista Siglo XXI, 3 No. 4 (1994), 23 – 25.

- [Ta2] D.A. TARZIA, "Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática", MAT - Serie B, Rosario, # 1 (2000).

- [Th] H. THIRIEZ, "Initiation au calcul économique", Dunod, Paris (1987).