UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

V SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 19 al 21 de Diciembre de 1994

26

Rosario - República Argentina
1995

SOBRE EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN-SIGNORINI CON CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS

Domingo Alberto TARZIA

ABSTRACT: We consider a steady-state heat conduction problem in a multidimensional bounded and convex domain Ω which has a regular boundary Γ composed by the union of three parts $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ with $\text{meas}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$, $|\Gamma_2| > 0$ and $|\Gamma_3| \geq 0$. We assume, without loss of generality, that the melting temperature is zero degree centigrade. The boundary Γ_1 is composed by the union of two parts $\Gamma_1 = \Gamma_{1_t} \cup \Gamma_{1_s}$ with $|\Gamma_{1_t}| > 0$ and $|\Gamma_{1_s}| \geq 0$. We consider a temperature $b = \text{Const.} > 0$ on Γ_{1_t} and on Γ_{1_s} we have a Signorini type condition with a bull (exterior) temperature b . On the boundary Γ_2 we have a positive heat flux q and the boundary Γ_3 is impermeable to the heat (heat flux null). We consider a source term g in the domain Ω .

We obtain sufficient conditions on data q , g , b to obtain a change of phase (steady-state, two-phase, Stefan-Signorini problem) in Ω , that is a temperature of non-constant sign in Ω . We use the elliptic variational inequalities theory. We also find that the solution of the corresponding elliptic variational inequality is differentiable with respect to the Neumann datum q on Γ_2 . Several properties already obtained for variational equalities can also be generalized for variational inequalities.

RESUMEN: Se considera un material $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ que ocupa un dominio acotado, convexo, con frontera regular compuesta por la unión disjunta $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ con

$\text{med}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$, $|\Gamma_2| > 0$ y $|\Gamma_3| \geq 0$. Se asume, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase es 0°C . La frontera Γ_1 está compuesta de dos partes $\Gamma_1 = \Gamma_{1_t} \cup \Gamma_{1_s}$ con $|\Gamma_{1_t}| > 0$ y $|\Gamma_{1_s}| \geq 0$. Se considera una temperatura $b = \text{Const.} > 0$ sobre Γ_{1_t} y una temperatura exterior b sobre Γ_{1_s} que se presenta como una pared semi-permeable al calor (que deja entrar calor e impide su salida) con condiciones de contorno tipo Signorini. Se considera además un flujo de calor $q = \text{Const.} > 0$ sobre Γ_2 y que la porción de frontera Γ_3 es una pared impermeable al calor. Se estudia el problema estacionario de conducción del calor en Ω , en cuyo interior se presenta una fuente de energía g .

Se estudian condiciones suficientes para el flujo de calor q sobre Γ_2 , la temperatura b sobre Γ_{1_t} y la fuente de energía g en Ω , para obtener una temperatura de signo no constante en Ω (i.e. un problema estacionario de Stefan-Signorini a dos fases). Se obtienen también relaciones entre este problema y el correspondiente problema de conducción del calor estacionario en Ω sin las condiciones tipo Signorini sobre la porción de frontera Γ_{1_s} .

Para este estudio, se utiliza la teoría de las inecuaciones variacionales y su relación con principios de mínimos. Se encuentra también que la solución de la correspondiente inecuación variacional es derivable respecto respecto del dato de Neumann sobre Γ_2 . Algunas propiedades ya válidas para ecuaciones variacionales se generalizan también para inecuaciones variacionales.

KEY WORDS : Stefan problem, Signorini conditions, free boundary problems, phase-change problems, variational inequalities, Mixed elliptic problem.

AMS Subject Classification : 35R35, 80A22, 35J85, 49J40, 35R45.

I. INTRODUCCION

Se considera un material conductor del calor que ocupa un conjunto Ω ,

dominio y acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n=1, 2, 3$ para las aplicaciones), con una frontera suficientemente regular Γ compuesta por la unión disjunta $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ con $\text{med}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$, $|\Gamma_2| > 0$ y $|\Gamma_3| \geq 0$. Sin pérdida de generalidad, se supone que la temperatura de cambio de fase es 0°C . Sobre la porción de frontera Γ_2 se impone un flujo de calor constante (saliente) $q > 0$; se supone también que la porción de frontera Γ_3 (cuando existe) es una pared impermeable al calor, es decir que el flujo de calor sobre Γ_3 es nulo. La frontera Γ_1 está compuesta de dos partes Γ_{1t} y Γ_{1s} con

$$\Gamma_1 = \Gamma_{1t} \cup \Gamma_{1s} \text{ (con } \overset{\circ}{\Gamma}_{1t} \cap \overset{\circ}{\Gamma}_{1s} = \emptyset \text{)}, \quad |\Gamma_{1t}| > 0 \text{ y } |\Gamma_{1s}| \geq 0$$

de manera que sobre Γ_{1t} se impone una temperatura $b > 0$ y que Γ_{1s} se comporta como una pared semi-permeable al calor, es decir que deja entrar calor pero impide su salida [DuLi], siendo su temperatura exterior b . Las condiciones que caracterizan a la porción de frontera Γ_{1s} se denominan condiciones de Signorini. Se considera en Ω un problema estacionario de conducción del calor, con una fuente de calor g en su interior. Por otra parte, el caso $\Gamma_{1s} = \emptyset$ (es decir $\Gamma_1 = \Gamma_{1t}$) sin condiciones de Signorini fue analizado en [GaTa] con lo cual el presente estudio se restringirá al problema con $|\Gamma_{1s}| > 0$.

El objetivo de la presente charla es el de obtener condiciones suficientes para el flujo de calor q sobre Γ_2 , la temperatura b sobre Γ_{1t} y la fuente de energía g en Ω , para obtener una temperatura de signo no constante en Ω , es decir un problema estacionario de Stefan-Signorini a dos fases. Se generalizan, además, resultados ya obtenidos para ecuaciones variacionales a inecuaciones variacionales.

Estos tipos de problemas fueron originalmente planteados en [Ta3] a través de ecuaciones variacionales. Sin embargo, problemas más elementales fueron resueltos en [Ta1]. Otros problemas relacionados se dan en [BoShTa, GoTa, Ta4].

Siguiendo [Du, Ta1] se estudia la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida para $x \in \Omega$. El conjunto Ω puede expresarse en la forma

$$(1) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$$

donde

$$(2) \quad \Omega_1 = \left\{ x \in \Omega / \theta(x) < 0 \right\}, \quad \Omega_2 = \left\{ x \in \Omega / \theta(x) > 0 \right\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \Omega / \theta(x) = 0 \right\},$$

representan respectivamente la fase sólida, la fase líquida y la frontera libre que las separa. La temperatura θ puede representarse en Ω de la siguiente manera :

$$(3) \quad \theta(x) = \begin{array}{ll} \theta_1(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{L}, \\ \theta_2(x) > 0 & \text{si } x \in \Omega_2, \end{array}$$

y satisface las siguientes condiciones :

$$(4) \quad \begin{array}{l} \text{(i)} \quad -k_i \Delta \theta_i = g \text{ en } \Omega_i \quad (i = 1, 2), \\ \text{(ii)} \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \text{ sobre } \mathcal{L} \\ \text{(iii)} \quad \theta_2 / \Gamma_{1_t} = b, \quad \text{(iv)} \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \\ \text{(v)} \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{1_s}} \geq 0, \quad \theta_2 \Big|_{\Gamma_{1_s}} \geq b, \quad (\theta_2 - b) \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{1_s}} = 0 \\ \text{(vi)} \quad \left| \begin{array}{l} -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q \text{ si } \theta \Big|_{\Gamma_2} > 0, \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q \text{ si } \theta \Big|_{\Gamma_2} < 0, \end{array} \right. \end{array}$$

donde $k_i > 0$ ($i = 1, 2$) es la conductividad térmica de la fase i ($i = 2$: líquida, $i=1$: sólida), $b > 0$ es la temperatura dada sobre Γ_{1_t} , $q > 0$ es el flujo de calor dado sobre Γ_2 y $g = g(x)$ es un aporte de energía dado en Ω .

El problema en estudio puede presentar dos fronteras libres, a saber :

(i) la superficie $\mathcal{L}$ que separa las fases líquida y sólida del material,

(ii) la porción de frontera Γ_{1s} puede estar compuesta de dos partes, no conocidas a priori, en las cuales la temperatura es igual o es superior a la temperatura exterior b .

II. FORMULACION VARIACIONAL Y PROPIEDADES

A continuación se transformará el problema (4) a través de un cambio de función incógnita, con el objeto de eliminar la frontera libre $\mathcal{L}$, escribir las ecuaciones en el sentido de las distribuciones en Ω y hallar la correspondiente formulación variacional. Sea

$$(5) \quad u = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- \text{ en } \Omega$$

donde θ^+ y θ^- representan la parte positiva y negativa de la función θ . Entonces la nueva función incógnita u satisface las siguientes relaciones :

$$(6) \quad \begin{aligned} & -\Delta u = g \text{ en } D'(\Omega), \\ & u|_{\Gamma_{1t}} = B, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{1s}} \geq 0, \quad u|_{\Gamma_{1s}} \geq B, \quad (u_2 - B) \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{1s}} = 0 \end{aligned}$$

donde

$$(7) \quad B = k_2 b > 0.$$

TEOREMA 1. – (i) La formulación variacional del problema (6) está dada por la inecuación variacional elíptica siguiente:

$$(8) \quad a(u, v - u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in K_B, \quad u \in K_B,$$

donde

$$V = H^1(\Omega) , \quad V_0 = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = 0 \right\} , \quad H = L^2(\Omega) ,$$

$$K_B = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = B , v|_{\Gamma_{1s}} \geq B \right\} = B + K_0 ,$$

$$(9) \quad K_0 = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = 0 , v|_{\Gamma_{1s}} \geq 0 \right\} , \quad (u,v) = \int_{\Omega} uv \, dx ,$$

$$W_0 = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_{1t}} = v|_{\Gamma_{1s}} = 0 \right\} \subseteq V_0 \cap K_0$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx , \quad L(v) = L_{qg}(v) = (g,v) - \int_{\Gamma_2} q v \, d\gamma .$$

(ii) Si $g \in H$ entonces existe una única solución de la inecuación variacional (8).

(iii) La solución de la inecuación variacional (8) está caracterizada por el problema de mínimo siguiente:

$$(10) \quad J(u) \leq J(v) , \quad \forall v \in K_B , \quad u \in K_B ,$$

donde

$$(11) \quad J(v) = J_{qg}(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L_{qg}(v) , \quad v \in V .$$

Demostración. – Se utilizan resultados clásicos [BaCa, DuLi, Gl, KiSt, Ro, Ta2].

LEMA 2. – (i) Si $u_i = u_{q_i}$ es la solución de (8) para q_i ($i = 1, 2$), entonces se tiene las siguientes desigualdades :

$$(12) \quad \alpha_0 \|u_2 - u_1\|_V^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) \, d\gamma ,$$

donde $\alpha_0 > 0$ es la constante de coercividad de la forma bilineal a sobre V_0 , es decir

$$(13) \quad a(v,v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2 , \quad \forall v \in V_0 .$$

(ii) Se tienen las siguientes propiedades : Si $q_2 \leq q_1$ entonces

$$(14) \quad (a) \ u_1 \leq u_2 \text{ en } \bar{\Omega} \ , \quad (b) \ \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma \leq \int_{\Gamma_2} u_2 \, d\gamma \ .$$

Además, las funciones $q \rightarrow u_q$ y $q \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma$ son monótonas estrictamente decrecientes.

Demostración. – La desigualdad (12) se obtiene de (13) y de sumar las inecuaciones (8) correspondiente a la solución u_1 tomando $v = u_2$ y la correspondiente a u_2 tomando $v = u_1$. La desigualdad (14b) se deduce directamente de (12). La desigualdad (14a) se obtiene eligiendo adecuadas funciones test v en la inecuación variacional (8) para obtener que $(u_1 - u_2)^+ = 0$ en Ω .

III. CONDICION SUFICIENTE PARA EL FLUJO DE CALOR q

Sea la función real $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ definida de la siguiente manera :

$$(15) \quad f(q) = J_{qg}(u_q) = \frac{1}{2} a(u_q, u_q) + q \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma - (g, u_q)$$

donde u_q es la única solución de la inecuación variacional (8).

LEMA 3. – Para todo $q > 0$ y δ , de manera que $q + \delta > 0$, se tienen las siguientes estimaciones :

$$(16) \quad \left\| \frac{1}{\delta} (u_{q+\delta} - u_q) \right\|_V \leq C_1 = \frac{\|\gamma_0\|}{\alpha_0} |\Gamma_2|^{1/2} \ ,$$

$$(17) \quad \left\| \frac{1}{\delta} (u_q - u_{q+\delta}) \right\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_2 = C_1 \|\gamma_0\| \ ,$$

donde γ_0 es el operador traza (lineal y continuo, definido sobre V). Mas aún, para todo $q > 0$ y $\delta > 0$ se tiene :

$$(18) \quad 0 < \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma - \int_{\Gamma_2} u_{q+\delta} d\gamma \leq C_3 \delta \quad (C_3 = C_2 |\Gamma_2|^{1/2} > 0),$$

con lo cual la función $q > 0 \rightarrow \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma$ es continua.

Demostración. — Teniendo en cuenta (13) y (12) con $q_1 = q + \delta$, y $q_2 = q$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la continuidad de γ_0 se obtiene (16) y (17). Por otra parte, de (17) surge (18).

TEOREMA 4. — Para todo $g \in L^2(\Omega)$, existe un elemento $u'_q \in V_0$ de manera que

$$(19) \quad \frac{1}{\delta} (u_q - u_{q+\delta}) \rightarrow u'_q \text{ en } V \text{ débil cuando } \delta \rightarrow 0,$$

$$(20) \quad \frac{1}{\delta} (u_q - u_{q+\delta}) \rightarrow u'_q \text{ en } L^2(\Gamma_2) \text{ débil cuando } \delta \rightarrow 0,$$

y que satisface la igualdad

$$(21) \quad a(u_q, u'_q) = L(u'_q) = (g, u'_q) - \int_{\Gamma_2} q u'_q d\gamma.$$

Demostración. — Las condiciones (19) y (20) se deducen de (16) y (17). Para obtener la igualdad (21) se procede de la siguiente manera:

(i) si en la inecuación variacional (8) para u_q se toma $v = u_q + \delta$, se divide por δ y se pasa al límite $\delta \rightarrow 0$, se obtiene

$$(22) \quad a(u_q, u'_q) \geq L(u'_q).$$

(ii) si en la inecuación variacional (8) para $u_{q+\delta}$ se toma $v = u_q$, se divide por δ y se pasa al límite $\delta \rightarrow 0$, se obtiene

$$(23) \quad a(u_q, u'_q) \leq L(u'_q) .$$

con lo cual resulta (21).

Observación. — La igualdad (21) será muy importante para obtener la derivabilidad de la función real f , definida por (15). Este resultado es el que permite obtener para inecuaciones variacionales elípticas conclusiones análogas obtenidas para ecuaciones variacionales elípticas [GaTa, Ta3].

TEOREMA 5. — (i) La función f es derivable. Mas aún, f' es continua y estrictamente decreciente, dada por la siguiente expresión :

$$(24) \quad f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma .$$

(ii) Se obtienen las siguientes propiedades :

$$(25) \quad \frac{d}{dq} (g, u_q) = (g, u'_q) ,$$

$$(26) \quad \frac{d}{dq} a(u_q, u_q) = 2 a(u_q, u'_q) ,$$

$$(27) \quad f''(q) = \int_{\Gamma_2} u'_q \, d\gamma .$$

Demostración. — (i) De (24) se obtiene

$$(28) \quad \frac{f(q+\delta) - f(q)}{\delta} = \frac{1}{2} a(u_{q+\delta} + u_q, \frac{u_{q+\delta} - u_q}{\delta}) - (g, \frac{u_{q+\delta} - u_q}{\delta}) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_{q+\delta} \, d\gamma + q \int_{\Gamma_2} \frac{u_{q+\delta} - u_q}{\delta} \, d\gamma .$$

Pasando al límite $\delta \rightarrow 0$, utilizando la igualdad (21), se deduce que

$$(29) \quad f'(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(q + \delta) - f(q)}{\delta} = \frac{1}{2} a(2u_q, u'_q) - (g, u'_q) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma + \int_{\Gamma_2} q u'_q d\gamma = \int_{\Gamma_2} u_q d\gamma ,$$

es decir (24).

(ii) Las propiedades (25) a (27) se obtienen derivando las expresiones (15) y (24).

TEOREMA 6. – Se tienen las siguientes propiedades :

(i) El elemento u_q puede ser escrito como

$$(30) \quad u_q = u_{qg} B = B + U_g + q \eta$$

donde U_g es la única solución de la ecuación variacional elíptica siguiente

$$(31) \quad a(U_g, v) = (g, v), \quad \forall v \in W_0, \quad U_g \in W_0,$$

y η es la única solución de la inecuación variacional elíptica siguiente

$$(32) \quad a(\eta, v - \eta) \geq - \int_{\Gamma_2} (v - \eta) d\gamma, \quad \forall v \in K_0, \quad \eta \in K_0,$$

que satisface $\eta/\Gamma_2 \leq 0$ con

$$(33) \quad - \int_{\Gamma_2} \eta d\gamma \geq a(\eta, \eta) \geq \alpha \|\eta\|_V^2 > 0.$$

(ii) El elemento u'_q no depende de q y viene dado por $u'_q = \eta$.

(iii) Se tiene

$$(34) \quad f'(q) = (B |\Gamma_2| + C_g) - Dq, \quad f''(q) = -D,$$

donde

$$(35) \quad C_g = \int_{\Gamma_2} U_g \, d\gamma, \quad D = - \int_{\Gamma_2} \eta \, d\gamma > 0.$$

Se define la función real $R = R(B, g)$ de la siguiente manera :

$$(36) \quad R(B, g) = \frac{B |\Gamma_2| + C_g}{D}.$$

TEOREMA 7. – Si $B > 0$ y $g \in L^2(\Omega)$, entonces se tiene que

$$(37) \quad q > R(B, g) \Rightarrow u_{qgB} \text{ es de signo no-constante en } \Omega,$$

es decir que existe un problema estacionario de Stefan-Signorini a dos fases.

Demostración. – El resultado (37) se obtiene considerando la siguiente equivalencia :

$$(38) \quad q > R(B, g) \Leftrightarrow f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma < 0.$$

IV. RELACION CON EL PROBLEMA SIN PARED SEMI-PERMEABLE

Se considerará el mismo problema desarrollado anteriormente excepto que se impone la temperatura b sobre la frontera Γ_1 (es decir que sobre la porción de frontera Γ_{1s} se tiene la temperatura b en lugar de imponer las condiciones de Signorini) que fue estudiado en [GaTa]. Sea z la solución del siguiente problema diferencial

$$(39) \quad -\Delta z = g \text{ en } D'(\Omega),$$

$$z|_{\Gamma_1} = B, \quad -\frac{\partial z}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q, \quad \frac{\partial z}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0,$$

cuya formulación variacional está dada por la ecuación variacional elíptica siguiente:

$$(40) \quad a(z, v) = L(v), \quad \forall v \in W_0, \quad u \in K,$$

donde

$$(41) \quad K = \left\{ v \in V / v|_{\Gamma_1} = B \right\} \subseteq K_B.$$

LEMA 8. – (i) La solución z de (40) viene dada por

$$(42) \quad z = B + U_g - q u_3$$

donde $u_3 > 0$ es la solución ecuación variacional

$$(43) \quad a(u_3, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma, \quad \forall v \in W_0, \quad u_3 \in W_0.$$

(ii) Si

$$(44) \quad q > q_0(B) + \frac{C_g}{C},$$

entonces el problema (39) (o su correspondiente ecuación variacional (40)) es a dos fases en Ω (i.e. z es una función de signo no-constant en Ω), donde

$$(45) \quad q_0(B) = \frac{B |\Gamma_2|}{C},$$

y las constantes $C = C(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) > 0$ y C_g vienen dadas por las siguientes expresiones

$$(46) \quad C = a(u_3, u_3) = \int_{\Gamma_2} u_3 \, d\gamma ,$$

$$(47) \quad C_g = a(u_3, u_g) = \int_{\Gamma_2} u_g \, d\gamma = \int_{\Omega} g u_3 \, dx .$$

Demostración. — Se utiliza adecuadamente la ecuación variacional (40), siguiendo las ideas desarrolladas en [Ta3]. Ver [GaTa].

TEOREMA 9. — (i) Las funciones u y z están relacionadas de la siguiente manera:

$$(48) \quad \eta \geq -u_3 \quad , \quad u \geq z \quad \text{en } \bar{\Omega} .$$

(ii) Si $B |\Gamma_2| + C_g > 0$ se tiene que si el problema (6) es a dos fases entonces el problema (39) es también a dos fases.

Demostración. — (i) Las desigualdades (48) surgen relacionando las formulaciones variacionales para η , u_3 , u y z dadas respectivamente por (32), (43), (8) y (40).

(ii) Se obtiene utilizando (37) y (44) .

AGRADECIMIENTO. — Este trabajo se ha realizado a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Aplicaciones de Problemas de Frontera Libre", PID – BID # 221 del CONICET, Rosario.

REFERENCIAS

[BaCa] C. BAIOCCHI – A. CAPELO, "Diseguazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariazionali, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, N 4, 7, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[BoShTa] J.E. BOUILLET – M. SHILLOR – D.A. TARZIA, "Critical

outflow for a steady-state Stefan problem", *Applicable Analysis*, 32 (1989), 31 – 51.

[Du] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", *Rapport de Recherche N° 185, LABORIA - IRIA, Rocquencourt* (1976).

[DuLi] G. DUVAUT – J.L. LIONS, "Les inéquations en mécanique et en physique", *Dunod, Paris* (1972).

[GaTa] G.G. GARGUICHEVICH – D.A. TARZIA, "The steady-state two-phase Stefan problem with an internal energy and some related problems", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 39 (1991), 615 – 634.

[Gl] R. GLOWINSKI, "Numerical methods for nonlinear variational problems", *Springer Verlag, New York* (1984).

[GoTa] R.L.V. GONZALEZ – D.A. TARZIA, "Optimization of the heat flux in domain with with temperature constrains", *J. Optimization Th. Appl.*, 65 (1990), 245 – 256.

[KiSt] D. KINDERLEHRER – G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", *Academic Press, New York* (1980).

[Ro] J.F. RODRIGUES, "Obstacle problems in mathematical physics", *North-Holland Mathematics Studies Vol. 134, North-Holland, Amsterdam* (1987).

[Ta1] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", *C.R. Acad. Sc. Paris*, 288A (1979), 941 – 944. See also *Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Mars 1979)*; *Math. Notae*, 27(1979/80), 145 – 156.

[Ta2] D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", *Reuniões em Matemática Aplicada e Computação Científica, Vol. 5, SBMAC, Gramado* (1987). See also "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", *Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI - CONICET, No. 5, Buenos Aires* (1981).

[Ta3] D.A. TARZIA, "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", *Engineering Analysis*, 5 (1988), 177 – 181.

[Ta4] D.A. TARZIA, "Mixed elliptic problems with solutions of non-constant sign", *Revista Unión Matemática Argentina*, 34 (1988), 31 – 55.

Depto Matemática, FCE, Univ. Austral,
Paraguay 1950, (2000) Rosario, Argentina.

E – mail : TARZIA@UAUFCE.EDU.AR

Y

PROMAR (CONICET-UNR),

Instituto de Matemática "Beppo Levi",

Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.