UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

III SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

Rosario, 11 al 15 de octubre - 1988

17

Rosario - República Argentina
-1989-

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO EXPONENCIAL EN LA ECUACION DE MEDIOS POROSOS CON ABSORCION

Domingo Alberto TARZIA

ABSTRACT

We give an explicit estimate for the asymptotic behavior of the solutions of the problem $u_t - u_{xx} + u_+^p = 0$, $x > 0$, $t > 0$, with conditions $u(0,t)=1$, $t > 0$ and $u(x,0) = U_0(x) \geq 0$, $x > 0$, for a class of functions U_0 and parameter $0 < p < 1$. We use an approximate solution given by the heat balance integral method with the innovation property which fixes appropiately the asymptotic limit of the corresponding approximate free boundary.

We also give an explicit estimate for the asymptotic behavior of the solution of the problem: $u_t - (u^m)_{xx} + u^p = 0$, $x > 0$, $t > 0$, with conditions $u(0,t) = 1$, $t > 0$ and $u(x,0) = U_0(x) \geq 0$, $x > 0$.

KEY WORDS:

Heat balance integral method, asymptotic behavior, free boundary problems, heat conduction problems with absorption, porous medium equation with absorption, approximate solution, super and sub-solutions.

I. INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es dar una estimación explícita para el comportamiento asintótico de la solución del problema [RiTa1,Ta2] :

$$(1)\quad \begin{array}{ll} \text{i)} & L(u) = u_t - u_{xx} + \lambda^2 u_+^p = 0 \;,\; x > 0 \;,\; t > 0 \;, \\ \text{ii)} & u(0,t) = 1 \;,\; t > 0 \;, \\ \text{iii)} & u(x,0) = U_0(x) \geq 0 \;,\; x > 0 \;, \end{array}$$

para una cierta clase de funciones $U_0 = U_0(x)$ correspondientes a la condición inicial (1iii), y parámetros $p > 0$ y $\lambda > 0$. Se denota con x_+ la parte positiva de x, es decir $x_+ = \text{Max}\,(0,x)$.

Si $0 < p < 1$, es conocido [BSS,Di,St] que la ecuación (1i) tiene una solución estacionaria correspondiente al dato inicial (1ii) con soporte compacto en el intervalo $[0,+\infty)$, la cual está dada por la expresión

$$(2) \qquad u_\infty(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{l}\, x\right)_+^{\frac{2}{1-p}}, \qquad l = l(p) = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p} .$$

En el caso $0 < p < 1$ y $U_0 \leq u_\infty$, la solución $u = u(x,t)$ de (1) satisface

$$(3) \qquad 0 < u(x,t) < u_\infty(x)\ , \quad 0 < x < \frac{l}{\lambda}\,,\ t > 0\ ,$$

debido al principio de comparación para la ecuación (1i) [Be]. Esto significa que $u(t) = u(\,.;t)$ tiene soporte compacto en la variable x para todo $t > 0$, y que

$$(4) \qquad s(t) = \operatorname{Sup}\{\, x > 0 \ /\ u(x,t) > 0 \,\}\ , \quad t > 0\ ,$$

es la frontera libre que se mueve con velocidad finita para $t > 0$.

Se dará una estimación de como la frontera libre $s(t)$ tiende a su límite $\frac{l}{\lambda}$ cuando $t \to +\infty$. Esta estimación implicará que la convergencia es exponencial en el tiempo. Para probar este hecho se usará una solución aproximada dada por el método del balance integral calórico con una innovación que fija apropiadamente el límite asintótico de la correspondiente frontera libre aproximada. El método del balance integral calórico ha resultado ser muy útil en algunos problemas con cambio de fase [Ta1], por ejemplo en [Ga, GST, Vo]. Esta solución aproximada a (1) converge exponencialmente a la solución estacionaria $u_\infty = u_\infty(x)$ cuando $U_0 < u_\infty$ y $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ [Ta2].

Luego, se considerará una ecuación mas general, es decir, la ecuación de medios porosos con absorpción y se dará también una estimación explícita para el comportamiento asintótico de la solución del problema [RiTa1]

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} \text{i)} & \mathcal{L}(u) = u_t - (u^m)_{xx} + u^p = 0, \quad x > 0, \quad t > 0\ , \\ \text{ii)} & u(0,t) = 1, \quad t > 0\ , \\ \text{iii)} & u(x,0) = U_0(x) \geq 0, \quad x > 0\ . \end{array}$$

Si $0 < p < m$, es conocido [Di, BSS] que la ecuación (5i) tiene una solución estacionaria, correspondiente al dato (5ii), que tiene soporte compacto en el intervalo $[0, +\infty)$ y que viene dada por la siguiente expresión

$$
u^*(x) = \left[1 - \frac{x}{L}\right]_+^{\frac{2}{m-p}} , \quad L = L(m,p) = \frac{\sqrt{2m(m+p)}}{m-p} . \tag{6}
$$

El resultado que se probará aquí será la existencia de super y sub-soluciones para la ecuación (5i), que satisface la condición (5ii), la cual converge exponencialmente a la solución estacionaria $u^*(x)$.

Finalmente, se obtendrán algunos resultados de comparación entre las soluciones aproximadas obtenidas para la ecuación del calor con absorción (1i) por el método del balance integral calórico y por el método de las super y sub-soluciones.

II. EL METODO DEL BALANCE INTEGRAL CALORICO APLICADO A LA ECUACION DEL CALOR CON ABSORCION (I-1)

Se considera un problema relacionado a (1) el cual consiste en encontrar la función $C = C(x,t)$ y la frontera libre $x = s(t)$ de manera que se satisfagan las condiciones siguientes :

$$
(1) \qquad
\begin{array}{ll}
\text{i)} & C_t - C_{xx} + \lambda^2 C^p = 0 \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \ , \\
\text{ii)} & C(0,t) = 1 \ , \ t > 0 \ , \\
\text{iii)} & s(0) = 0 \ , \\
\text{iv)} & C(s(t),t) = 0 \ , \ t > 0 \ , \\
\text{v)} & C_x(s(t),t) = 0 \ , \ t > 0 \ .
\end{array}
$$

Teniendo en cuenta el método del balance integral calórico, se reemplaza la ecuación (1i) por su integral en la variable x de 0 a s(t), es decir

$$
\begin{aligned}
-\lambda^2 \int_0^{s(t)} C^p(x,t)\, dx &= \int_0^{s(t)} C_t(x,t)\, dx - \int_0^{s(t)} C_{xx}(x,t)\, dx = \\
&= \int_0^{s(t)} C_t(x,t)\, dx + C_x(0,t) \ , \quad t > 0 \ ,
\end{aligned} \tag{2}
$$

y luego se propone para el problema aproximado (2) (1ii-v) la siguiente expresión para C [Go1, Go2] :

(3) $$C(x,t) = (1 - \frac{x}{s(t)})^{\alpha}$$

donde $x = s(t)$ es una función a ser determinada y $\alpha > 1$ es un parámetro a ser elegido de manera de verificarse la propiedad

(4) $$\lim_{t \to \infty} s(t) = \frac{l(p)}{\lambda} .$$

Esta es la presente innovación al método del balance integral calórico aplicado a problemas con cambio de fase [Go1,Go2].

La función C satisface las condiciones (Iii,iv,v). Si se pone la expresión (3) en (2), se obtiene para $s=s(t)$ una ecuación diferencial ordinaria, es decir el siguiente problema de Cauchy :

(5) $$\begin{cases} \dot{y}(t) = \alpha(\alpha+1) \left[\frac{1}{y(t)} - \frac{\lambda^2}{\alpha(1+p\alpha)} y(t) \right] , & t > 0 , \\ y(0) = 0 , \end{cases}$$

cuya solución está dada por

(6) $$s(t) = \frac{1}{\beta} \left[1 - \exp(-2\alpha(\alpha+1)\beta^2 t) \right]^{1/2} , \quad t \geq 0 ,$$

con

(7) $$\beta^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha(1+p\alpha)} .$$

Si se elige $\alpha > 1$, imponiendo la condición límite (4), se obtiene que

(8) $$\beta = \frac{\lambda}{l(p)} ,$$

la cual resulta ser una ecuación para $\alpha > 1$, cuya solución está dada por

(9) $$\alpha = \alpha(p) = \frac{2}{1-p} > 2 ,$$

que es el mismo exponente de la solución estacionaria (I-2) y que es independiente del parámetro λ. A continuación se resumirá el reciente resultado [Ta2] :

TEOREMA 1. Sean $p \in (0,1)$ y $\lambda > 0$. Si se aplica el método del balance integral calórico al problema (1), es decir al problema definido por (2) y (1ii-v), con la propiedad de innovación (4), se obtiene la solución $C_B = C_B(x,t)$ y $s_B = s_B(t)$ que están dadas respectivamente por (3) con (9) y

$$(10) \qquad s_B(t) = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \exp\left(- \frac{2\lambda^2 (3-p) t}{1+p} \right) \right]^{1/2} , \quad t \geq 0 \ .$$

Se pueden definir las siguientes funciones :

$$(11) \qquad u_1(x,t) = \left[1 - \frac{x}{s_1(t)} \right]_+^{\frac{2}{1-p}} , \quad x \geq 0 \ , \quad t > 0 \ ,$$

$$(12) \qquad s_1(t) = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \exp\left(- \frac{2\lambda t}{1} \right) \right] , \quad t \geq 0 \ .$$

Si se considera el problema de conducción del calor con absorción (I-1), se obtiene :

<u>TEOREMA 2</u>. Sean $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ y $0 \leq U_0 < u_\infty$ en $\mathbb{R}^+$. Si $u=u(x,t)$ es la solución de (I-1) y $s=s(t)$ está definida por (I-4), entonces se tienen las siguientes propiedades de comparación :

$$(13) \qquad u_1(x,t) \leq u(x,t) \leq u_\infty(x) \ , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\lambda} \ , \quad t > 0 \ ,$$

$$(14) \qquad s_1(t) \leq s(t) \leq \frac{1}{\lambda} \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

y las siguientes estimaciones

$$(15) \qquad 0 < \frac{1}{\lambda} - s(t) \leq \frac{1}{\lambda} - s_1(t) \leq \frac{1}{\lambda} \exp\left(- \frac{2\lambda t}{1} \right) , \quad t \geq 0 \ ,$$

$$(16) \quad 0 \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x) - u^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x) - u_1^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq \frac{\exp\left(- \frac{2\lambda t}{1} \right)}{1 - \exp\left(- \frac{2\lambda t}{1} \right)} ,$$

$$x \in \left[0, \frac{1}{\lambda}\right] , \quad t > 0 \ .$$

<u>Demostración</u>. Para probar (13) es suficiente verificar que $L(u_1) < 0$ debido al principio de comparación del operador L [Be]. Tomando en cuenta las propiedades

(17) $$\left(1-\frac{x}{s}\right)\frac{x}{s} < \frac{1}{4} \quad , \quad \forall\, x \in [0,s] \ ,$$

(18) $$\frac{\dot{s}_1(t)}{s_1(t)} = 2\left(\frac{1}{s_1(t)} - \frac{\lambda}{l} \right) \ , \quad t > 0 \ ,$$

se obtiene que

(19) $$L(u_1) \leq \left[1 - \frac{x}{s_1(t)} \right]_+^{\frac{2p}{1-p}} \left(\frac{1}{s_1(t)} - \lambda \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2(1+p)}} - \lambda \right) < 0 \ , \text{ para } \ \lambda > \frac{1}{\sqrt{2(1+p)}} \ .$$

Debido al hecho que

(20) $$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2(1+p)}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad , \ 0 < p < 1 \ ,$$

y a la propiedad de dilatación siguiente

(21) $$v_\lambda(x,t) = v_1(\lambda x, \lambda^2 t) \ ,$$

donde v_λ y v_1 denotan las soluciones de (I-1) para $\lambda > 0$ y $\lambda = 1$ respectivamente, se deduce que $L(u_1) \leq 0$ para todo $\lambda > 0$. Entonces, u_1 es una sub-solución de (I-1) y se obtiene por lo tanto (13) y (14). Luego, las estimaciones (15) y (16) siguen de las expresiones de u_1 y s_1 .

<u>COROLARIO 3</u>. El Teorema 2 implica que la solución u del problema (I-1) converge uniformemente y exponencialmente a la solución u_∞ cuando el tiempo t tiende al infinito. Además, la razón de convergencia es mas rápido que $2\lambda/l$.

<u>OBSERVACION 1</u>. Se probará luego que la función $s_\beta = s_\beta(t)$ es mejor que $s_1 = s_1(t)$ para aproximar a la frontera libre $s = s(t)$.

III. <u>SUPER Y SUB-SOLUCIONES PARA LA ECUACION DE MEDIOS POROSOS CON ABSORCION (I-5)</u>

A continuación se considerará la ecuación de medios porosos con absorción (I-5) [RiTa1].

TEOREMA 4 . Si $m + p < 2$, entonces las funciones

$$(1) \qquad \bar{u}(x,t) = \left[1 - \frac{x}{\bar{s}(t)}\right]_+^{\frac{2}{m-p}}, \qquad (2) \qquad \underline{u}(x,t) = \left[1 - \frac{x}{\underline{s}(t)}\right]_+^{\frac{2}{m-p}},$$

son respectivamente una super-solución y una sub-solución de (1-5) cuando las funciones $\bar{s}(t)$ y $\underline{s}(t)$ están definidas por $\bar{s}(t) = r(t)$ si $L_0 > L$ y $\underline{s}(t) = r(t)$ si $0 \leq L_0 < L$, donde

$$(3) \qquad r(t) = \sqrt{L^2 + (L_0^2 - L^2)\exp[-\beta(m-p)t]} ,$$

estando la constante β dada por

$$(4) \quad \beta = \frac{(1+\gamma)^{(1+\gamma)}}{\gamma^{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{2-(m+p)}{m-p}, \quad \text{si } \gamma > 0 ; \qquad \beta = 1 \quad \text{si } \gamma = 0 .$$

Demostración. Se define la siguiente función

$$(5) \qquad h(x,t) = \left[1 - \frac{x}{\rho(t)}\right]_+^{\frac{2}{m-p}},$$

y se calcula $\mathcal{L}(h)$, obteniéndose

$$(6) \quad \mathcal{L}(h) = \left[1 - \frac{x}{\rho(t)}\right]_+^{\frac{2p}{m-p}} \frac{1}{\rho^2(t)} \left\{ \frac{2}{m-p}\, x \left[1 - \frac{x}{\rho(t)}\right]_+^{\frac{2-(m+p)}{m-p}} \rho'(t) + \rho^2(t) - L^2 \right\} .$$

Por otro lado, se tiene que

$$(7) \qquad x \left[1 - \frac{x}{\rho(t)}\right]_+^{\frac{2-(m+p)}{m-p}} \leq \frac{\rho(t)}{\beta} , \quad x \in [0,\rho(t)].$$

Entonces, se obtiene para $\mathcal{L}(h)$ una cota inferior si ρ' es negativa y una cota superior si ρ' es positiva. Si se supone que $\rho' < 0$, entonces se tiene

$$(8) \qquad \mathcal{L}(h) \geq \left[1 - \frac{x}{\rho(t)}\right]_+^{\frac{2m}{m-p}} \frac{1}{\rho^2(t)} \left\{ \frac{2}{m-p} \frac{\rho(t)}{\beta} \rho'(t) + \rho^2(t) - L^2 \right\} = 0,$$

donde $\rho = \rho(t)$ es la solución del siguiente problema de Cauchy

$$(9) \qquad \frac{2}{m-p} \frac{\rho(t)}{\beta} \rho'(t) + \rho^2(t) - L^2 = 0 , \quad \rho(0) = L_0 > L .$$

La solución de (9) está dada por (3), y además satisface que $r' < 0$. Entonces, se puede concluir que la función $h(x,t)$, definida por (5), es una super-solución del operador $\mathcal{L}$. Con una metodología similar, se obtiene una sub-solución si se toma la condición inicial para (9) de manera que se tenga que $L_0 < L$.

Si se aplica el principio de comparación para el operador $\mathcal{L}$ [Be] entonces se obtiene el siguiente resultado :

COROLARIO 5 . Si se supone que $m + p \leq 2$ y que existe una constante Λ de manera que el dato inicial verifique la condición

$$(10) \qquad 0 \leq U_0(x) \leq \left[1 - \frac{x}{\Lambda}\right]_+^{\frac{2}{m-p}},$$

entonces la solución del problema (I-5) converge exponencialmente a la solución estacionaria $u^*(x)$.

OBSERVACION 2. La razón de convergencia es mas rápida que $\beta(m-p)$ debido a que la diferencia entre la super y la sub-solución, que acotan la solución, es del tipo Const. $\exp[-\beta(m-p)t]$.

OBSERVACION 3. Estos resultados pueden se utilizados para el problema del corazón muerto [St], para probar que la solución del problema $u_t - u_{xx} + u^p = 0$, $0 < x < \Lambda$, $t > 0$, $(\Lambda > 2L)$, con la condición de borde $u(0,t) = u(\Lambda,t) = 1$, $t > 0$, y con la condición inicial $u(x,0) = 1$ en $0 < x < \Lambda$, converge exponencialmente a la solución estacionaria [RiTa2].

OBSERVACION 4. Estos resultados se generalizan para la ecuación $u_t - (\phi(u))_{xx} + f(u) = 0$, con apropiadas condiciones sobre las funciones ϕ y f en [RiTa2].

IV. RELACIONES ENTRE LAS DIVERSAS SOLUCIONES .

De ahora en adelante se considerará, sin pérdida de generalidad, el caso $\lambda = 1$, $0 < p < 1$ y $0 < U_0 < u_\infty$ en $\mathbb{R}^+$ en el problema (I-1). Los resultados obtenidos anteriormente están dados por las desigualdades siguientes

(1) $s_0(t) \leq s(t) < l \quad , \quad t > 0 \; , \quad \left(l = l(p) = \dfrac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p} \right)$

(2) $u_0(x,t) \leq u(x,t) \leq u_\infty(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq l \quad , \quad t > 0 \quad ,$

donde las funciones s_0 y u_0 vienen dadas por (se toma $L_0 = 0$ y $m = 1$):

(3) $s_0(t) = l \, [\, 1 - \exp(-c_0 t) \,]^{1/2} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad c_0 = c_0(p) = 4(1-p) \; ,$

(4) $u_0(x,t) = [\, 1 - \dfrac{x}{s_0(t)} \,]_+^{\frac{2}{1-p}} \quad , \quad 0 \leq x \leq l \quad , \quad t > 0 \quad ,$

Si se consideran las funciones C_B y s_B , dadas por el Teorema 1 :

(5) $C_B(x,t) = [\, 1 - \dfrac{x}{s_B(t)} \,]_+^{\frac{2}{1-p}} \; , 0 \leq x \leq l \; , t \geq 0 \; , \; c_B = c_B(p) = \dfrac{2(3-p)}{1+p} \; ,$

(6) $s_B(t) = l \, [\, 1 - \exp(-c_B \, t) \,]^{1/2} \quad , \quad t > 0 \quad ,$

y las funciones u_1 y s_1 , dadas respectivamente por (II-9) y

(7) $s_1(t) = l \, [\, 1 - \exp(-c_1 \, t) \,], \; t \geq 0 \; , \; c_1 = c_1(p) = \dfrac{2}{l} = (1-p) \sqrt{\dfrac{2}{1+p}} \quad ,$

entonces se obtienen propiedades de comparación entre ellas [Ta2].

TEOREMA 6. Bajo las hipótesis y definiciones anteriores, se tienen las siguientes relaciones:

A) Relación entre u_0 , s_0 y C_B , s_B :

(8) $s_0(t) < s_B(t) < l \quad , \quad t > 0 \quad ,$

(9) $u_0(x,t) \leq C_B(x,t) \leq u_\infty(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq l \quad , \quad t > 0 \; .$

B) Relación entre u_1 , s_1 y C_B , s_B :

(10) $s_1(t) < s_B(t) \quad , \quad t > 0 \quad ,$

(11) $u_1(x,t) \leq C_B(x,t) \quad , \quad 0 \leq x \leq l \quad , \quad t > 0 \quad .$

C) Relación entre u_0 , s_0 y u_1 , s_1 :

(12) $\quad s_1(t) < s_0(t) \quad , \; t > 0 \; ,$

(13) $\quad u_1(x,t) \leq u_0(x,t) \quad , \; 0 \leq x < l \; , \; t > 0 \; .$

Demostración. A) Se deduce que

(14) $$\frac{s_0^2(t) - s_B^2(t)}{l^2(p)} = -\exp(-c_0 t)\,[\,1 - \exp(-(c_B - c_0)t)\,] < 0 \quad , \; t>0 \; ,$$

debido a que la función

(15) $$g(x) = \frac{c_0(x)}{c_B(x)} = 2\,\frac{(1-x)^2}{3-x} \quad , \; 0 < x < 1 \; ,$$

verifica las siguientes propiedades :

$$g(0) = \frac{2}{3} \quad , \quad g(1) = 0 \quad ,$$

(16) $$g\,'(x) = \frac{2(x^2 - 6x + 1)}{(3-x)^2} \quad , \; g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3 - 2\sqrt{2} \in (0,1) \quad ,$$

$$g(x) \leq g(3 - 2\sqrt{2}) = 12 - 8\sqrt{2} \approx 0{,}686 < 1 \quad , \; 0 \leq x < 1 \; .$$

Por lo tanto, se tienen (8) y (9).

B) Se define la función $G = G(p,t)$, dada por (p es un parámetro en s_B y s_1) :

(17) $$G(p,t) = \frac{s_B(t)}{s_1(t)} = \sqrt{\frac{1 - \exp(-c_B(p)\,t)}{1 - \exp(-c_1(p)\,t)}} \quad , \; 0 < p < 1 \; , \quad t > 0 \; .$$

Se tiene que $c_1 < c_B$, debido al hecho siguiente

(18) $$c_1^2(x) - c_B^2(x) = \frac{2}{(1+x)^2}\,Q(x) < 0 \quad , \; 0 < x < 1 \; ,$$

donde

(19) $$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 11x - 17 < 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \; .$$

La función G verifica las siguientes propiedades :

$$G(p,0^+) = +\infty \quad , \quad G(p,+\infty) = 1 \quad , \quad 0 < p < 1 \quad ,$$

(20) $$G_t(p,t) = \frac{1}{2} c_B c_1 \frac{\exp\left(-(c_B + c_1)\, t\right)}{[1 - \exp(-c_1\, t)]^2 \sqrt{1 - \exp(-c_B\, t)}} \left[h(c_1,t) - h(c_2,t) \right] < 0 \; ,$$

$$0 < p < 1 \; , \; t > 0$$

donde la función $h = h(c,t)$ está definida por :

(21) $$h(c,t) = \frac{\exp(c\, t) - 1}{c} \quad , \; c > 0 \; , \; t > 0 \; ,$$

que satisface las condiciones

(22) $$h(0^+,t) = t \; , \; h(+\infty,t) = +\infty \; , \quad t > 0 \; ,$$
$$h_c(c,t) = \frac{1 + W(c,t)}{c^2} > 0 \quad , \; c > 0 \; , \; t > 0 \; ,$$

con

(23) $$W(c,t) = (c\, t - 1) \exp(c\, t) > -1 \; , \; c > 0 \; , \; t > 0 \; .$$

Por lo tanto se obtiene que $G(p,t) > 1$, $0 < p < 1$, $t > 0$ y por ende (10) y (11).

(C) Siguiendo un método similar al desarrollado anteriormente, se obtiene que

(24) $$\frac{s_0(t)}{s_1(t)} = \frac{\sqrt{1 - \exp(-c_0(p)\, t)}}{1 - \exp(-c_1(p)\, t)} > 1 \quad , 0 < p < 1 \; , \quad t > 0 \; ,$$

debido a que se tiene

(25) $$c_0^2(x) - c_1^2(x) = 2\,(1 - x)^2 \, \frac{7 + 8x}{1 + x} > 0 \quad , 0 < x < 1 \quad ,$$

es decir (12) y (13).

COROLLARY 7. Para todo $0 < p < 1$, se obtienen las siguientes estimaciones :

(26) $s_1(t) < s_0(t) \le s(t) \le 1 \; , \; t > 0 \; ,$

(27) $s_1(t) < s_0(t) < s_B(t) < 1 \; , \; t > 0 \; ,$

y por ende

$$(28) \qquad | s(t) - s_B(t) | \leq l - s_0(t) \leq l - s_1(t) \leq l \exp\left(-\frac{2}{l}\, t \right) , \quad t > 0 .$$

OBSERVACION 6. La expresión s_0 fue obtenida construyendo una sub-solución para el problema (I-1) ($\lambda = 1$), y en cambio s_B fue obtenida calculando la solución de un problema aproximado (II-2) y (I-1ii-v) al problema (I-1) a través del método del balance integral calórico. Ambas expresiones, s_0 y s_B, dan un comportamiento asintótico exponencial para la solución del problema de conducción del calor con absorción (I-1), pero hasta el presente no se puede decir quien es la mejor estimación. Para valores del tiempo grandes, ambas expresiones son equivalentes pues se tiene que

$$(29) \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{s_B(t)}{s_1(t)} = 1 , \quad 0 < p < 1 .$$

COROLARIO 8. Se tienen también las estimaciones

$$(30) \qquad u_1(x,t) \leq u_0(x,t) \leq u(x,t) \leq u_\infty(x) , \quad 0 < x < l , \quad t > 0 ,$$

$$(31) \qquad u_1(x,t) \leq u_0(x,t) < C_B(x,t) < u_\infty(x) , \quad 0 \leq x \leq l , \quad t > 0 ,$$

y por ende :

$$| u^{\frac{1-p}{2}}(x,t) - C_B^{\frac{1-p}{2}}(x,t) | \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x,t) - u_1^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq u_\infty^{\frac{1-p}{2}}(x,t) - u_1^{\frac{1-p}{2}}(x,t) \leq$$

$$(32) \qquad \leq \exp\left(-\frac{2}{l}\, t \right) , \quad 0 < x < s_1(t) , \quad t > 0 .$$

[BSS] C. BANDLE R.P. SPERB I. STAKGOLD, "Diffusion and reaction with monotone kinetics", Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl., 8(1984), 321 --333.

[Be] M. BERTSCH, "A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term", Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl., 7(1983), 117 --127.

[Di] J.I. DIAZ, "Nonlinear partial differential equation and free boundaries, I: Elliptic problems", Research Notes in Math. N^{0} 106, Pitman, London (1985).

[Ga] G.G. GARGUICHEVICH, "A note on the heat balance integral method applied to the resolution of a one-phase Stefan problem with an increasing prescribed flux on the fixed face", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 10(1983), 349 —355.

[GST] G.G. GARGUICHEVICH — M.C. SANZIEL — D.A. TARZIA, "Comparison of approximate methods for the determination of thermal coefficients through a phase-change problem", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 12(1985), 451 —464.

[Go1] T.R. GOODMAN, "The heat balance integral and its application to problems involving a change of phase", Trans. of the ASME, 80(1958), 335 - 342.

[Go2] T.R. GOODMAN, "Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer", Advances in Heat Transfer, Academic Press, New York (1964), Vol. 1, 51 —122.

[RiTa1] R. RICCI -- D.A. TARZIA, "Asymptotic behavior of the solutions of a class of diffusion-reaction equations", in Free Boundary Problems: Theory and Applications, 11-20 June 1987, Irsee/Bavaria, Germany, To appear on Research Notes in Math., Pitman, London.

[RiTa2] R. RICCI — D.A. TARZIA, "Asymptotic behavior of the solution of the dead-core problems", Nonlinear Analysis Th. Meth. Appl., 13 (1989), 405 - 411.

[St] I. STAKGOLD, "Reaction-diffusion problems in chemical engineering", in

Nonlinear diffusion problems, A. Fasano--M. Primicerio (Eds.), Lecture Notes in Math. N^{0} 1224, Springer Verlag, Berlin (1986), 119--152.

[Ta1] D.A. TARZIA, "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem", Progetto Nazionale M.P.I. "Equazioni di evoluzione e applicazioni fisico-matematiche", Firenze (1988) (with 2528 titles),(103 pages).

[Ta2] D.A. TARZIA, "A variant of the heat balance integral method and a new proof of the exponentially fast asymptotic behavior of the solutions in heat conduction problems with absorption", Int. J. Engineering Science.

[Vo] V.R. VOLLER, "A heat balance integral method based on an enthalpy formulation", Int. J. Heat Mass Transfer, 30 (1987), 604--607.

PROMAR (CONICET--UNR),
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agr.,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.